

Question 2

L'équation 6.33 est: $h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}$

L'équation 6.32 $\square h_{\mu\nu} = 0$ où \square est le d'Alembertien défini comme: $\frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x_\lambda}$. J'ai utilisé souvent la propriété suivante:

$$\boxed{g^\alpha_\lambda \frac{d}{dx^\alpha} = \frac{d}{dx_\lambda}}$$

on applique donc

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x_\lambda} h_{\mu\nu} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x_\lambda} A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} = 0$$

Afin d'appliquer la première dérivée, x doit être contravariant *

(on doit réexprimer en terme de x)

$$(g^\alpha_\lambda g^\lambda_\alpha) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha g^{\gamma\alpha} x_\alpha}) = 0 \quad (g^{\gamma\alpha} x_\alpha = x^\gamma)$$

$$(g^\alpha_\lambda g^\lambda_\alpha) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \cdot (A_{\mu\nu} i k_\alpha g^{\gamma\alpha} e^{ik_\alpha x^\alpha}) = 0 \quad (\text{on remet } x^\alpha \text{ dans la bonne forme})$$

$$(g^\alpha_\lambda g^\lambda_\alpha) A_{\mu\nu} i k_\alpha g^{\gamma\alpha} \cdot i k_\alpha e^{ik_\alpha x^\alpha} = 0$$

$$(g^\alpha_\lambda g^\lambda_\alpha) - 1 A_{\mu\nu} k_\alpha g^{\gamma\alpha} k_\alpha e^{ik_\alpha x^\alpha} = 0$$

$$(g^\alpha_\lambda g^\lambda_\alpha) - 1 A_{\mu\nu} k_\alpha k^\alpha e^{ik_\alpha x^\alpha} = 0 \quad \textcircled{1}$$

on peut renommer $\gamma = \alpha$

$$(g_{\lambda}^{\alpha} \cdot g_{\alpha}^{\lambda}) - A_{\mu\nu} e^{ik_{\alpha} x^{\alpha}} k_{\alpha} k^{\alpha} = 0$$

Le seul terme qui peut être nul est $k_{\alpha} k^{\alpha}$ et donc

$$k_{\alpha} k^{\alpha} = 0 \text{ afin de respecter l'égalité}$$

b) G.12: $\frac{\partial h_{\mu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} = 0$ avec $h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_{\alpha} x^{\alpha}}$

On doit obtenir une expression pour

$$h_{\mu}^{\lambda} = g^{\lambda\nu} h_{\mu\nu} = g^{\lambda\nu} A_{\mu\nu} e^{ik_{\alpha} x^{\alpha}}$$

$$\frac{\partial h_{\mu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} g^{\lambda\nu} A_{\mu\nu} e^{ik_{\alpha} x^{\alpha}}$$

$$= g_{\lambda}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} g^{\lambda\nu} A_{\mu\nu} e^{ik_{\alpha} x^{\alpha}}$$

$$= g_{\lambda}^{\alpha} g^{\lambda\nu} A_{\mu\nu} i k_{\alpha} e^{ik_{\alpha} x^{\alpha}}$$

$$= g_{\lambda}^{\alpha} A_{\mu}^{\lambda} \cdot i k_{\alpha} e^{ik_{\alpha} x^{\alpha}}$$

$$\textcircled{A} = A_{\mu}^{\alpha} i k_{\alpha} e^{ik_{\alpha} x^{\alpha}}$$

$$\textcircled{B} \quad h^\lambda_\lambda = g^{\lambda\rho} g^\nu_\lambda h_{\rho\nu}$$

On réécrit
la dérivée
pour quelle
soit possible)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^\nu} h^\lambda_\lambda &= g^\alpha_\nu \frac{d}{dx^\alpha} g^{\lambda\rho} g^\nu_\lambda A_{\rho\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} \\ &= g^\alpha_\nu g^{\lambda\rho} g^\nu_\lambda A_{\rho\nu} i k_\alpha e^{ik_\alpha x^\alpha} \\ &= A^\lambda_\lambda g^\alpha_\nu i k_\alpha e^{ik_\alpha x^\alpha} \\ &= A^\lambda_\lambda i k_\nu e^{ik_\alpha x^\alpha} \end{aligned}$$

$$6.12 \Rightarrow \textcircled{A} - \frac{1}{2} \textcircled{B}$$

$$A^\alpha_\nu i k_\alpha e^{ik_\alpha x^\alpha} - \frac{1}{2} A^\lambda_\lambda i k_\nu e^{ik_\alpha x^\alpha} = 0$$

On peut éliminer les exponentielles et les i :

$$A^\alpha_\nu k_\alpha - \frac{1}{2} A^\lambda_\lambda k_\nu = 0$$

on peut renommer λ comme étant égale à α

$$A^\alpha_\nu k_\alpha - \frac{1}{2} A^\alpha_\alpha k_\nu = 0$$

CQFD, l'équation 6.37