

PHY-6756

FLUIDES ASTROPHYSIQUES

Notes de cours
par

Paul Charbonneau
Département de Physique
Université de Montréal

Août 2022

MINI-PRÉFACE

Ces notes contiennent toute la matière couverte dans le cadre du cours gradué PHY-6756, **Fluides Astrophysiques**, offert par le Département de Physique de l'Université de Montréal. Par rapport à la version 2018, à l'exception d'une nouvelle section sur la nonlinéarité et l'intermittence au chapitre 5, il n'y a pas de changements majeurs au niveau du contenu global. Cependant plusieurs petites erreurs ont été corrigées, et tous les chapitres ont été mis à jour, parfois substantiellement, et en particulier au niveau du contenu de nature observationnelle.

Table des Matières

1	L'essentiel de l'hydrodynamique	7
1.1	Qu'est-ce qu'un fluide ?	7
1.1.1	L'approximation du milieu continu	7
1.1.2	Solide Versus Fluide	8
1.2	Les équations de l'hydrodynamique	9
1.2.1	Masse: L'équation de continuité	9
1.2.2	L'opérateur D/Dt	11
1.2.3	Quantité de mouvement: les équations de Navier–Stokes	12
1.2.4	Moment cinétique: l'équation de la vorticité	15
1.2.5	L'équation d'Euler et le Principe de Bernoulli	16
1.2.6	Énergie: L'équation de l'entropie	17
1.3	Écoulements compressibles	17
1.3.1	Les ondes acoustiques	18
1.3.2	Les ondes de choc	20
1.3.3	Ondes de détonation	22
1.4	Fluides en rotation	24
1.4.1	Les forces de Coriolis et centrifuge	24
1.4.2	L'équilibre géostrophique et le théorème de Taylor-Proudman	25
1.5	La turbulence	26
1.5.1	Les instabilités hydrodynamiques	26
1.5.2	Analyse de stabilité: un survol	27
1.5.3	La cascade turbulente	27
1.5.4	L'approche de Reynolds	31
1.5.5	Convection et cascade inverse	32
1.5.6	Les diffusivités turbulentes	35
2	La Magnétohydrodynamique	39
2.1	L'équation d'induction magnétohydrodynamique	39
2.2	Analyse dimensionnelle	40
2.3	La force de Lorentz	43
2.4	Exemple: cisaillement d'un champ poloidal	45
2.5	L'énergie magnétique	47
2.6	Le chauffage de Joule	49
2.7	Le théorème d'Alfvén	50
2.8	Ondes magnétohydrodynamiques	53
2.8.1	Cas 1: $\mathbf{U}_1 \parallel \mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$	54
2.8.2	Cas 2: $\mathbf{U}_1 \parallel \mathbf{k}, \mathbf{U}_1 \perp \mathbf{B}_0$	55
2.8.3	Cas 3: $\mathbf{U}_1 \perp \mathbf{k}, \mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$	55
2.8.4	Cas 4: orientations arbitraires	55
2.9	Le potentiel vecteur et l'hélicité magnétique	56
2.10	La reconnexion magnétique	57
2.10.1	Les éruptions solaires et stellaires	57

2.10.2	Dissipation passive d'une nappe de courant	59
2.10.3	Le modèle de Sweet-Parker	61
2.10.4	Au delà du modèle de Sweet-Parker	64
2.11	L'origine des champs magnétiques astrophysiques	64
2.11.1	Batteries stellaires	66
2.11.2	Batteries galactiques	67
2.11.3	Batteries cosmologiques	67
3	Les vents coronaux	69
3.1	Les couronnes solaire et stellaires	69
3.2	Couronnes polytropiques en équilibre hydrostatique	70
3.3	Vents polytropiques	74
3.3.1	Le vent solaire	74
3.3.2	La solution de Parker	76
3.3.3	Calcul d'une solution	78
3.3.4	Perte de masse	79
3.3.5	Comportement asymptotique et existence des vents transsoniques	80
3.3.6	Énergétique polytropique	81
3.3.7	Comparaison avec le vent solaire	83
3.4	Vents coronaux magnétisés	84
3.4.1	Le plasma- β	84
3.4.2	Le cas $\beta = 0$: solutions magnétostatiques	85
3.4.3	La limite $\beta \ll 1$: tubes de flux	89
3.4.4	La limite $\beta \rightarrow \infty$: La spirale de Parker	90
3.5	Les vents magnétohydrodynamiques	93
3.5.1	La solution MHD de Weber-Davis	93
3.5.2	Dynamique et comportement asymptotique	98
3.5.3	Modèles numériques de vent coronaux MHD et rotation	101
3.6	Le freinage rotationnel des étoiles	106
3.6.1	La rotation stellaire	106
3.6.2	La loi de Skumanich	106
3.6.3	Temps caractéristiques	108
3.7	Au delà des vents coronaux	109
4	Les disques d'accrétion	113
4.1	L'accrétion et la formation des étoiles	113
4.2	Le disque Keplérien	115
4.3	Le modèle du disque mince	118
4.3.1	Définition du modèle	118
4.3.2	Un disque mince doit être froid	119
4.3.3	Le taux d'accrétion	120
4.3.4	Énergétique et Rayonnement	121
4.4	Instabilités hydrodynamiques	125
4.4.1	L'hypothèse de Shakura-Sunyaev	127
4.4.2	Le critère de Rayleigh	128
4.4.3	La convection	129
4.4.4	Instabilité de Kelvin-Helmholtz	129
4.5	Les disques magnétisés	132
4.5.1	L'instabilité magnétorotationnelle, dite "de Balbus-Hawley"	133
4.5.2	Couplage magnétique étoile-disque	137
4.5.3	Impact sur l'accrétion	139
4.6	Vents et jets	141
4.6.1	L'accélération magnétique des jets	142
4.6.2	La collimation magnétique des jets	144

5	Dynamos astrophysiques	147
5.1	L'aspect observationnel	147
5.1.1	Le cycle des taches solaires	147
5.1.2	Le cycle magnétique	148
5.1.3	Cycles magnétique stellaires	152
5.1.4	Magnétisme galactique et au-delà	156
5.2	Une dynamo mécanique simple	158
5.3	Le théorème de Cowling	162
5.4	Dynamos en champs moyens	164
5.4.1	L'électrodynamique en champs moyens	164
5.4.2	Parentèse terminologique sur la statistique de la turbulence	166
5.4.3	L'effet- α	166
5.4.4	Le pompage turbulent	169
5.4.5	La diffusivité turbulente	170
5.5	Les équations dynamos en champ moyen	170
5.5.1	Le nombre dynamo critique	171
5.5.2	Les ondes dynamos	171
5.6	Les dynamos en champs moyens axisymétriques	173
5.6.1	Solutions dynamo $\alpha\Omega$ linéaires	175
5.6.2	Nonlinéarités et suppression de l'effet- α	181
5.6.3	Solutions dynamos $\alpha\Omega$ avec α -Quenching	182
5.6.4	Trois variations sur un thème	185
5.7	La dynamo en tant qu'instabilité	186
5.7.1	Nonlinéarité et bifurcation	186
5.7.2	Intermittence	187
5.8	Simulations magnétohydrodynamiques globales	187
5.8.1	Écoulements et champs magnétiques aux grandes échelles	189
5.8.2	Inversions cycliques de la polarité magnétique	189
5.8.3	Fluctuations du cycle magnétique	191
5.8.4	Rétroaction magnétique sur la rotation différentielle	192
5.8.5	Analyse via l'électrodynamique des champs moyens	193
5.8.6	Du soleil aux étoiles	195
5.9	Dynamos galactiques	198
5.9.1	Le disque galactique	198
5.9.2	Modèles dynamos pour le disque galactique	199
5.9.3	Analyse locale	202
A	Identités et théorèmes du calcul vectoriel	207
A.1	Identités vectorielles	207
A.2	Le théorème du gradient	207
A.3	Le théorème de la divergence	208
A.4	Le théorème de Stokes	208
A.5	Les identités de Green	208
B	Systèmes de coordonnées et équations fluides	209
B.1	Coordonnées cylindriques (s, ϕ, z)	209
B.1.1	Conversion aux coordonnées Cartésiennes	209
B.1.2	Éléments infinitésimaux	209
B.1.3	Opérateurs	209
B.1.4	La divergence d'un tenseur symétrique d'ordre deux	211
B.1.5	Composantes du tenseur des stress visqueux	211
B.1.6	Équations du mouvement	211
B.1.7	Conservation de l'énergie	211
B.1.8	L'équation d'induction MHD	212

B.2	Coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)	212
B.2.1	Conversion aux coordonnées Cartésiennes	212
B.2.2	Éléments infinitésimaux	212
B.2.3	Opérateurs	213
B.2.4	La divergence d'un tenseur symétrique d'ordre deux	214
B.2.5	Composantes du tenseur des stress visqueux	214
B.2.6	Équations du mouvement	214
B.2.7	Conservation de l'énergie	215
B.2.8	L'équation d'induction MHD	215
C	Le théorème de Zeldovich	217

Chapitre 1

L'essentiel de l'hydrodynamique

1.1 Qu'est-ce qu'un fluide ?

1.1.1 L'approximation du milieu continu

Il aura fallu deux millénaires pour clarifier tout ça, mais nous savons maintenant que Démocrite avait raison: la matière est composée de constituants microscopiques “atomiques”. Mais à l'échelle macroscopique de la vie de tous les jours (sur Terre), ainsi qu'aux échelles astrophysiques, la matière s'approxime très bien comme un milieu continu... même si parfois très ténu ! Sous quelles conditions peut-on considérer qu'un très grand nombre d'atomes ou molécules se comportent comme un milieu continu? La réponse peut se formuler de bien des façons, mais la contrainte-clef est qu'il existe une bonne *séparation d'échelles* entre le “microscopique” and “macroscopique”.

Considérons la situation illustrée à la Figure 1.1: une substance amorphe décrivable à l'échelle microscopique par une distribution aléatoire de particules. Dénotons par λ la distance inter-particules moyenne (ou libre parcours moyen), et par L l'échelle macroscopique du système. Il s'agit maintenant de construire des variables caractérisant adéquatement les propriétés physiques de cette substance à l'échelle macroscopique. Par exemple, si toutes les particules ont une masse m , alors la *densité* (ϱ) associée à un élément de volume Cartésien de dimensions linéaire l (ϱ) et centré à la position \mathbf{x} pourrait être définie de la manière suivante:

$$\varrho(\mathbf{x}) = \frac{1}{l^3} \sum_k m_k \quad [\text{kg m}^{-3}], \quad (1.1)$$

où la somme inclut toutes les particules contenues dans l'élément de volume. On entend souvent dire que pour qu'une description en terme d'un continu soit valide, la densité doit être “grande”. Mais grande par rapport à quoi ? Pour que l'expression ci-dessus soit bien définie, dans le sens que la valeur numérique de ϱ ne dépende pas de la taille et position exacte de l'élément de volume, ou du temps si les particules sont en mouvement et entrent et sortent du volume (comme ce serait généralement le cas), il est essentiel que l'élément de volume en question contienne un très grand nombre de particules, De plus, si mathématiquement nous désirons exprimer les lois d'évolution de nos quantités macroscopiques sous la forme d'équations différentielles, l'élément de volume devra également être infinitésimal, soit beaucoup plus petit que les échelles de variations des variables macroscopiques comme ϱ . Ces deux contraintes conduisent à la double inégalité:

$$\lambda \ll l \ll L. \quad (1.2)$$

Comme les systèmes et écoulements astrophysiques considérés dans tout ce qui suit sont tous de très grande taille, la représentation continue des fluides tient bien la route même dans des situations où la densité est minuscule en termes absolus, comme on peut le constater sur

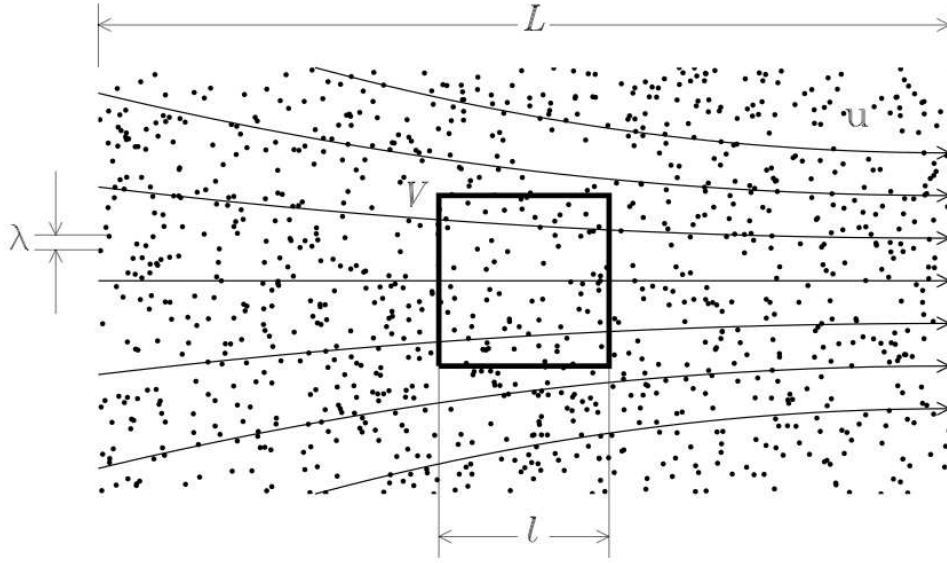


Figure 1.1: Vision microscopique d'un fluide. De manière générale la vitesse des constituants microscopiques se décompose en deux contributions: une composante thermique orientée de manière aléatoire, et une vitesse de dérive systématique qui, à l'échelle macroscopique, correspond à la vitesse de l'écoulement \mathbf{u} . Une représentation en terme d'un milieu continu fluide n'est possible que si la distance inter-particule moyenne λ est beaucoup plus petite que l'échelle de longueur L caractérisant les variations spatiales au niveau macroscopique.

examen de la liste présentée au tableau 1.1 ci-dessous¹. Dans tous les cas considérés, une bonne séparation d'échelle existe entre le microscopique (λ) et le macroscopique (L).

1.1.2 Solide Versus Fluide

La grande majorité des milieux continus peuvent être divisés sans ambiguïté en deux grandes catégories, soit les *solides* et les *fluides*. Ces derniers incluent les “liquides” du vernaculaire, mais également les gaz et les plasmas. Du point de vue physique, la distinction est établie sur la

¹Tous les estimés impliquant la densité sont calculés pour un gaz d'Hydrogène complètement ionisé ($\mu = 0.5$), sauf pour le milieu interstellaire (Hydrogène neutre, $\mu = 1$) et les nuages moléculaires (Hydrogène moléculaire, $\mu = 2$). Les valeurs de densité pour les étoiles correspondent à la base de la zone convective solaire (intérieurs stellaires), profondeur optique unitaire (atmosphère), et boucle coronale typique (couronne). N est la densité de particules. Les échelles de longueurs correspondent à la granulation solaire (atmosphère), longueur d'une boucle coronale (couronne), taille de la magnétosphère terrestre (vent solaire), et épaisseur du disque galactique (milieu interstellaire); dans tous les cas arrondis au facteur 10 le plus près.

Table 1.1: Propriétés de quelques systèmes et écoulements astrophysiques

Système	ρ [kg/m ³]	N [m ⁻³]	λ [m]	L [km]
Intérieur stellaire	100	10^{29}	10^{-10}	10^5
Atmosphère solaire	10^{-4}	10^{23}	10^{-8}	10^3
Couronne solaire	10^{-11}	10^{17}	10^{-6}	10^5
Vent solaire (1 AU)	10^{-21}	10^7	0.006	10^5
Nuage moléculaire	10^{-20}	10^7	0.001	10^{14}
Milieu interstellaire	10^{-21}	10^6	0.01	10^{16}

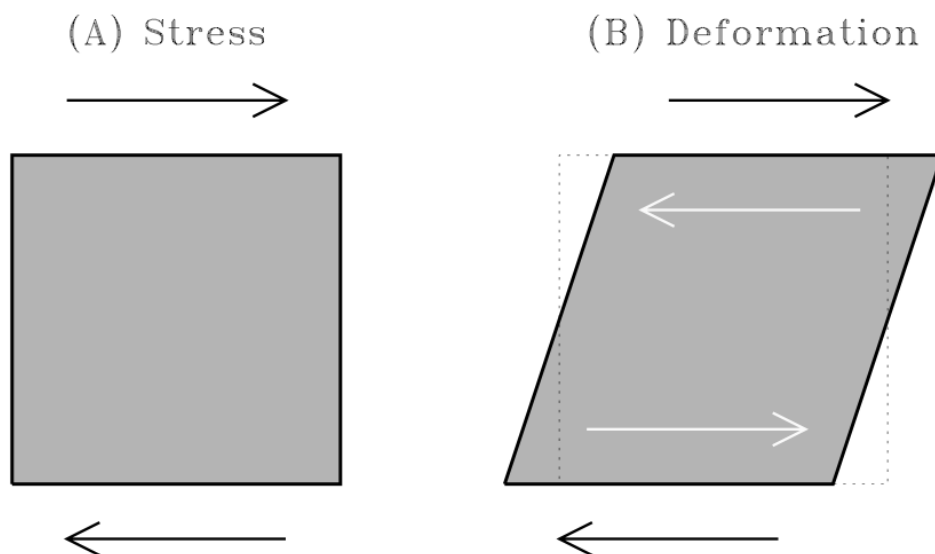


Figure 1.2: Déformation d'un élément de masse en réponse à l'application d'un stress produisant un cisaillement horizontal (flèches noires). Un solide trouve rapidement un nouvel état d'équilibre où les stress internes (flèches blanches) équilibrent le stress imposé de l'extérieur. Un fluide, au contraire, ne peut offrir aucune résistance à un stress extérieur, conduisant à une déformation qui ira en s'amplifiant tant et aussi longtemps que le stress extérieur est présent.

base de la réponse du milieu à l'application d'un *stress* (force par unité de surface), tel qu'illustré à la Figure 1.2. Un élément de masse y est sujet à l'application d'un cisaillement, i.e., deux vecteurs-force agissant tangentiellement et en directions opposées sur deux des surface parallèles définissant la surface du volume (flèches noires). Un *solide* produira immédiatement une force de rappel substantielle (flèches blanches), ultimement due aux interactions électrostatiques entre ses constituants microscopiques, s'opposant solidement (!) à la déformation (essayez le truc avec une brique, pour voir). Un nouvel état d'équilibre est rapidement atteint, caractérisé par une déformation finie du volume, avec une relaxation vers l'état initial tout aussi rapide lorsque le stress extérieur disparaît. Un *fluide*, par contre, n'offre aucune résistance au stress, du moins dans la phase initiale de la déformation.

1.2 Les équations de l'hydrodynamique

Les principes fondamentaux de l'hydrodynamique sont les mêmes qu'en mécanique classique, mais transposés aux milieux continus: conservation de la masse, de la quantité de mouvement, du moment cinétique, et de l'énergie. Techniquement, les complications viennent du fait que ces lois de conservation doivent être appliquées non pas à des masses ponctuelles, mais à des éléments de volume de fluide qui sont spatialement étendus et déformables, et qui bien qu'étant infinitésimaux, n'en demeure pas moins d'une taille finie! Il sera utile de commencer avec la plus simple de nos lois de conservation, pour la masse, puisqu'elle illustre bien la façon dont sont formulées mathématiquement les lois de conservation pour un milieu continu.

1.2.1 Masse: L'équation de continuité

Considérons la situation illustrée à la Figure 1.3, soit un élément de volume délimité par une surface fermée et de forme arbitraire S , fixe dans l'espace et contenant un volume V d'un fluide de densité $\rho(\mathbf{x})$ s'écoulant à vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Le *flux de masse* à travers la surface S associé à cet

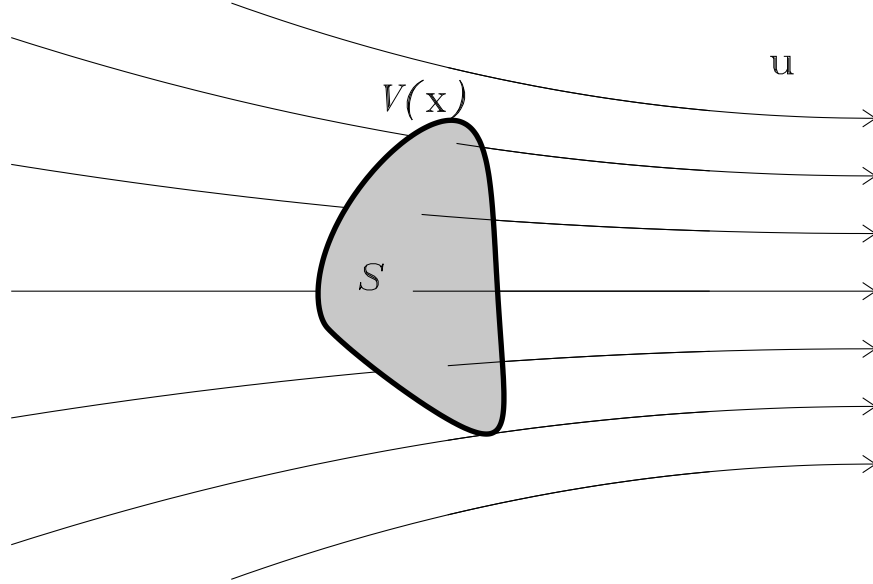


Figure 1.3: Un élément de volume V de forme arbitraire, délimité par une surface fermée S . Tous deux sont fixes dans l'espace, et traversés par un écoulement \mathbf{u} .

écoulement est défini comme:

$$\Phi = \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad [\text{kg s}^{-1}], \quad (1.3)$$

où $\hat{\mathbf{n}}$ est un vecteur unitaire partout perpendiculaire à la surface, et orienté extérieurement par convention. La masse contenue dans V est simplement

$$M = \int_V \rho dV \quad [\text{kg}]. \quad (1.4)$$

Cette quantité variera évidemment si le flux de masse, tel que défini par l'éq. (1.3), est non-nul; on peut donc écrire:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\Phi. \quad (1.5)$$

Notez le signe moins, qui est une conséquence directe de l'orientation extérieure de $\hat{\mathbf{n}}$. Insérant les éqs. (1.3) et (1.4) dans (1.5), et appliquant le théorème de la divergence au membre de droite de l'expression en résultant, conduit à:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV. \quad (1.6)$$

C'est la forme intégrale de la conservation de la masse. Mais comme V est fixe dans l'espace, les opérateurs $\partial/\partial t$ et \int_V commutent, et donc

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0. \quad (1.7)$$

Le volume V étant d'une forme arbitraire, en général cette expression ne peut être satisfaite que si

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0}. \quad (1.8)$$

Ceci exprime maintenant la conservation de la masse sous forme différentielle; c'est l'équation de continuité. La structure mathématique de cette expression mérite qu'on s'y attarde. Au membre de gauche, on a la dérivée temporelle d'une quantité physique, ici la densité ρ ; au membre de droite, on a la divergence du flux de cette quantité. Une telle structure est appelée la *forme conservative* de l'équation d'évolution pour la quantité physique en question.

Les *fluides incompressibles* ont une densité constante par définition. Dans un tel cas l'équation de continuité se réduit à:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad [\text{incompressible}] . \quad (1.9)$$

L'eau est le prototype d'un fluide effectivement incompressible. La nature gazeuse de la plupart des fluides astrophysiques pourrait porter à croire que cette approximation ne nous sera d'aucune utilité, mais on verra plus loin que ce n'est pas du tout le cas.

La densité d'un fluide peut varier en raison d'un forçage mécanique (compression), mais dans bien des situations astrophysiques la dilatation thermique est également un processus important. La plupart des fluides se dilatent lorsque chauffés, une propriété que mesure le *coefficient de dilatation thermique*:

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \quad [\text{K}^{-1}] . \quad (1.10)$$

L'eau, par exemple, a un coefficient de dilatation thermique substantiel, $\simeq 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ at $T = 10^\circ \text{ C}$. C'est la dilatation thermique de l'eau de mer, beaucoup plus que la fonte des glaces polaires, qui est responsable du gros de l'élévation du niveau de la mer qu'on nous prédit pour la seconde moitié de ce siècle, en raison du réchauffement climatique terrestre.

Dans un environnement stratifié par la gravité, comme les atmosphères et intérieurs des étoiles, ou encore les disques d'accrétion, un apport localisé de chaleur peut conduire, via la dilatation thermique, à l'apparition d'une force de flottaison via une baisse de la densité dans l'élément de fluide sujet à chauffage. A moins que la diffusion thermique ne puisse rapidement redistribuer la chaleur, ceci produira un écoulement appelé *convection thermique*, qui joue un rôle prépondérant dans un grand nombre de phénomènes astrophysique de grand intérêt. On y reviendra.

1.2.2 L'opérateur D/Dt

Supposons que l'on veuille calculer la variation temporelle d'une quantité physique quelconque (Z , disons) à une position fixe \mathbf{x}_0 dans un écoulement $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Nous devons prendre en considération le fait que Z est en général une fonction à la fois explicite en implicite du temps, en raison du fait que l'élément de volume "contenant" Z se déplace avec le fluide, i.e., $Z \rightarrow Z(t, \mathbf{x}(t))$. L'utilisation de la dérivée en chaîne nous permet cependant d'écrire:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} . \quad (1.11)$$

Comme $\mathbf{u} = d\mathbf{x}/dt$ par définition, ceci devient

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial x} u_x + \frac{\partial Z}{\partial y} u_y + \frac{\partial Z}{\partial z} u_z = \frac{\partial Z}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) Z . \quad (1.12)$$

Ceci correspond à la variation temporelle de Z *en suivant l'élément de fluide durant son déplacement dans l'écoulement*. C'est un opérateur très spécial en hydrodynamique, connu sous le nom de *dérivée Lagrangienne*, auquel on assignera une notation particulière:

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)} . \quad (1.13)$$

Notons déjà que la dérivée Lagrangienne de \mathbf{u} correspond à l'accélération de l'élément de fluide:

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt}, \quad (1.14)$$

une idée qui nous sera très utile très bientôt quand viendra le temps d'écrire $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ pour un fluide.

Une *surface matérielle* est définie par un ensemble de “points” se déplaçant avec le fluide. Dans un repère S' se déplaçant avec un élément infinitésimal d'une surface matérielle, on aura donc $\mathbf{u}' = 0$. La distinction entre surfaces matérielle et fixe dans l'espace (comme dans l'éq. (1.3)) devient importante dans le contexte des propriétés commutatives des dérivées et intégrales spatiales et temporelles. En représentation dite *Eulérienne*, c'est-à-dire pour des surfaces ou volumes fixes dans l'espace, \int_V commute avec $\partial/\partial t$, tandis que pour des surfaces matérielles c'est D/Dt qui commute avec \int_V (et \oint_S , etc.).

1.2.3 Quantité de mouvement: les équations de Navier–Stokes

Un vecteur-force \mathbf{F} agissant sur une masse ponctuelle m produit une accélération $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ dans la direction de la force appliquée (on le prend pour acquis mais ça a tout de même pris un génie comme Newton pour l'établir). Cependant, dans le cas d'un élément de fluide d'étendue spatiale finie, l'effet d'une force agissant sur la surface de l'élément dépendra à la fois de l'orientation de la force et de celle de la surface sur laquelle elle agit. On commence donc par généraliser le concept de force à celui d'un *tenseur des stress*. Pour un élément de fluide cubique avec ses faces alignées aux axes de coordonnées (Cartésiennes), on commence par écrire:

$$\mathbf{t}_x = \hat{\mathbf{e}}_x s_{xx} + \hat{\mathbf{e}}_y s_{xy} + \hat{\mathbf{e}}_z s_{xz}, \quad (1.15)$$

$$\mathbf{t}_y = \hat{\mathbf{e}}_x s_{yx} + \hat{\mathbf{e}}_y s_{yy} + \hat{\mathbf{e}}_z s_{yz}, \quad (1.16)$$

$$\mathbf{t}_z = \hat{\mathbf{e}}_x s_{zx} + \hat{\mathbf{e}}_y s_{zy} + \hat{\mathbf{e}}_z s_{zz}, \quad (1.17)$$

où la composante “ s_{xy} ” dénote la force par unité de surface agissant dans la direction y sur une surface perpendiculaire à la direction x . On a ici décomposé la force nette \mathbf{t} agissant sur l'élément de volume en terme des contributions agissant sur chaque famille de surfaces délimitant ce volume. Considérons maintenant un vecteur unitaire normal à une surface orientée arbitrairement dans l'espace:

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_x n_x + \hat{\mathbf{e}}_y n_y + \hat{\mathbf{e}}_z n_z, \quad n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1. \quad (1.18)$$

La force nette agissant dans cette direction s'écrira comme:

$$\mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}} = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x) \mathbf{t}_x + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y) \mathbf{t}_y + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z) \mathbf{t}_z = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s}. \quad (1.19)$$

Il est maintenant temps d'utiliser la dérivée Lagrangienne afin d'écrire “ $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ ” pour un fluide occupant un volume infinitesimal V délimité par une surface S :

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \oint_S \mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (1.20)$$

où le membre de droite représente l'accélération (Lagrangienne) de l'élément de fluide, et ρ sa densité. Bien que travaillant maintenant en représentation Lagrangienne, on suit ensuite essentiellement la même logique (et procédure mathématique) qu'à la §1.2.1: utilisation du théorème de la divergence pour transformer l'intégrale volumique en intégrale de surface, commutation des dérivées spatiale et temporelle au membre de gauche, regroupement de tous les termes sous la même intégrale et utilisation du fait que le volume même est de forme arbitraire pour extraire du tout une équation différentielle. Une utilisation judicieuse de l'équation de continuité (1.8) permet finalement d'en arriver à l'équation différentielle suivante pour l'évolution de \mathbf{u} :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{s} \quad [\text{m s}^{-2}]. \quad (1.21)$$

On définit maintenant la *pression* (unités: pascal; $1 \text{ Pa} \equiv 1 \text{ N m}^{-2}$) comme la partie isotropique de la force agissant perpendiculairement à la surface du volume, et on la sépare explicitement du tenseur des stress:

$$\mathbf{s} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}, \quad (1.22)$$

où \mathbf{I} est le tenseur identité, et le signe moins résulte d'une autre convention, celle-ci voulant que la pression agisse vers l'intérieur de l'élément de volume. Le tenseur $\boldsymbol{\tau}$ deviendra sous peu le tenseur des *stress visqueux*. Puisque $\nabla \cdot (p\mathbf{I}) = \nabla p$, l'éq. (1.21) devient

$$\boxed{\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}}. \quad (1.23)$$

Ceci est l'équation de Navier–Stokes. Toute force volumique (i.e., agissant directement à l'intérieur du volume, plutôt que sur sa surface), comme la gravité, la force de Coriolis, la force de Lorentz, etc., est simplement ajoutée directement au membre de droite. Notez bien que l'équation (1.23) représente ici trois équation différentielles (couplées), soit une pour chacune des composantes de \mathbf{u} .

On aurait pu arriver au même résultat en travaillant en représentation Eulérienne, comme pour notre dérivation de l'équation de continuité à la §1.2.1. Il aurait alors fallu établir nos équations de bilan en terme de la quantité de mouvement $\rho\mathbf{u}$ et de son flux \mathbf{T} , maintenant une quantité tensorielle²; en notation indicielle:

$$T_{ij} = -s_{ij} + \rho u_i u_j = -\tau_{ij} + p\delta_{ij} + \rho u_i u_j. \quad (1.24)$$

L'étape suivante consiste à exprimer les composantes du tenseur des stress visqueux en fonction de la vitesse de l'écoulement et des propriétés physiques du fluide. La force visqueuse peut être considérée comme une forme de friction agissant entre deux lamelles contigues de fluide se déplaçant à des vitesses différentes; on s'attendrait donc à ce que la force visqueuse soit proportionnelle à cette différence de vitesse. Considérons la décomposition suivante d'un gradient de vitesse:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)}_{D_{kl}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)}_{\Omega_{kl}}. \quad (1.25)$$

Le premier terme au membre de droite est un *cisaillement pur*, et est décrit par un tenseur symétrique appelé *tenseur des déformations* et qu'on dénotera D_{kl} ; tandis que le second décrit une *rotation pure*, représentée mathématiquement par un tenseur antisymétrique appelé *tenseur de vorticité*, dénoté Ω_{kl} . Puisque ce dernier ne cause aucune déformation de l'élément de fluide, la force visqueuse ne peut qu'impliquer D_{kl} . Dans un fluide dit *Newtonien* la relation (tensorielle) entre $\boldsymbol{\tau}$ et D_{kl} est supposée linéaire:

$$\tau_{ij} = f_{ij}(D_{kl}), \quad i, j, k, l = (1, 2, 3) \equiv (x, y, z). \quad (1.26)$$

Comme $\boldsymbol{\tau}$ et \mathbf{D} sont tous les deux des tenseurs symétriques, cette relation linéaire ne peut impliquer plus de 36 coefficients numériques indépendants. Cependant, l'invariance de l'éq. (1.26) par rapport au choix de systèmes de coordonnées permet de poser à zéro plusieurs de ces coefficients. La procédure, qui consiste à exiger invariance sous diverses rotations par rapport aux axes de coordonnées, est plutôt laborieuse mais le jeu en vaut la chandelle puisqu'en bout de ligne on se retrouve avec:

$$\tau_{xx} = 2\mu D_{xx} + (\mu_\vartheta - \frac{2}{3}\mu)(D_{xx} + D_{yy} + D_{zz}), \quad (1.27)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu D_{yy} + (\mu_\vartheta - \frac{2}{3}\mu)(D_{xx} + D_{yy} + D_{zz}), \quad (1.28)$$

²Vous aurez à explorer cette approche à la dérivation des équations de Navier–Stokes dans le cadre d'un des exercices de la première série. Elle sera également couverte de manière plus formelle et détaillée dans le bloc de cours sur l'hydrodynamique radiative qui vous sera servi par mon comparse et ex-collègue Tom Bogdan.

$$\tau_{zz} = 2\mu D_{zz} + (\mu_\vartheta - \frac{2}{3}\mu)(D_{xx} + D_{yy} + D_{zz}), \quad (1.29)$$

$$\tau_{xy} = 2\mu D_{xy}, \quad (1.30)$$

$$\tau_{yz} = 2\mu D_{yz}, \quad (1.31)$$

$$\tau_{zx} = 2\mu D_{zx}, \quad (1.32)$$

ce qui n'implique plus que deux coefficients numériques, μ et μ_ϑ , appelés respectivement *viscosité dynamique* et *viscosité volumique*. On définit souvent une *viscosité cinématique* comme

$$\nu = \frac{\mu}{\varrho} \quad [\text{m}^2 \text{s}^{-1}]. \quad (1.33)$$

Pour un fluide statique ($\mathbf{u} = 0$), on aura donc tous les $\tau_{ij} = 0$, indiquant que la force visqueuse ne joue pas. Si de plus le système est stationnaire ($\partial/\partial t = 0$), alors l'équation de Navier–Stokes indique que la pression doit être constante dans le fluide. Si la gravité est ajoutée au membre de droite cependant, sous les mêmes conditions on obtient plutôt:

$$\boxed{\nabla p = \varrho \mathbf{g}}. \quad (1.34)$$

C'est la très célèbre équation de l'*équilibre hydrostatique*. On peut souvent exprimer la gravité comme le gradient d'un potentiel, $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$, dans lequel cas ce dernier doit satisfaire à l'équation de Poisson:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\varrho. \quad (1.35)$$

Dans bien des situations (e.g., atmosphères et vents stellaires, disques d'accrétion), la gravité est due à la concentration centrale de masse, et le potentiel est alors donné directement par GM/r .

Dans le cas d'un fluide incompressible, le terme multipliant μ_ϑ disparaît, et il devient possible de réécrire l'équation de Navier–Stokes sous la forme simplifiée suivante:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\varrho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} \quad [\text{incompressible}]. \quad (1.36)$$

Notez bien que l'opérateur Laplacien agit ici sur une quantité *vectorielle* (soit \mathbf{u}); ceci n'est mathématiquement équivalent à l'action du Laplacien sur les composantes scalaires de \mathbf{u} que dans le cas spécial des coordonnées Cartésiennes³.

Incompressible ou pas, le comportement des fluides dépendra souvent de manière critique de l'importance relative des termes inertiel et visqueux dans l'équation de Navier–Stokes:

$$\varrho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \quad \leftrightarrow \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (1.37)$$

Il s'agit maintenant de remplacer les dérivées spatiales par $1/L$, où L est une échelle spatiale qui caractérise adéquatement les variations de \mathbf{u} , et d'introduire les grandeurs caractéristiques u_0 , ν_0 et ϱ_0 pour remplacer \mathbf{u} , ν et ϱ . Une telle *analyse dimensionnelle* appliquée à (1.37) conduit alors à:

$$\varrho_0 \frac{u_0^2}{L} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{L} \varrho_0 \nu_0 \frac{u_0}{L}, \quad (1.38)$$

où il faut se rappeler ici que, dimensionnellement, le tenseur des stress visqueux $\propto \mu \times D_{ik}$ avec $\mu = \varrho\nu$, et que le tenseur des déformations D_{ik} a des unités de vitesse par unités de longueur (viz. eq. 1.25), i.e., u_0/L ici. Le rapport de ces deux termes définit une quantité adimensionnelle appelée *Nombre de Reynolds*:

$$\boxed{\text{Re} = \frac{u_0 L}{\nu_0}}. \quad (1.39)$$

³Voir l'Annexe B pour les expressions complètes des opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques et sphériques.

Ceci mesure l'importance relative de l'inertie du fluide par rapport à la force visqueuse. C'est une quantité clef en hydrodynamique, car elle contrôle effectivement la transition vers la turbulence, ainsi que plein d'autres trucs plus techniques comme l'épaisseur des couches limites. Dans le régime $Re \ll 1$, on peut négliger le terme inertiel et introduire un temps caractéristique τ permettant de remplacer la dérivée temporelle par u_0/τ ; l'analyse dimensionnelle donne alors

$$\varrho_0 \frac{u_0}{\tau} = \frac{1}{L} \varrho_0 \nu_0 \frac{u_0}{L}, \quad (1.40)$$

d'où:

$$\tau = \frac{L^2}{\nu_0}. \quad (1.41)$$

C'est le *temps de dissipation visqueuse*, mesurant le temps caractéristique d'amortissement d'un écoulement par la force visqueuse, en l'absence de forces propulsant cet écoulement.

Quelques remarques importantes concernant les conditions limites; en présence de viscosité, la vitesse de l'écoulement doit chuter à zéro là où le fluide est en contact avec une surface rigide S :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S. \quad (1.42)$$

Ceci demeure vrai même dans la limite où la viscosité devient très faible. Dans le cas d'une *surface libre* (e.g., la surface d'une sphère de fluide flottant dans le vide), les composantes normales de la vitesse *et* du stress visqueux doivent être nuls:

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = 0, \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in S. \quad (1.43)$$

Les surfaces rigides étant rares en astrophysique (les croûtes des étoiles à neutron étant une exception tout aussi intéressante que notable), cette dernière condition limite est la plus souvent invoquée.

1.2.4 Moment cinétique: l'équation de la vortacité

La "rotation" ou le "moment cinétique" d'un fluide ne peuvent se réduire, comme dans les cas d'un objet solide, à la simple spécification d'un moment d'inertie et d'une vitesse angulaire, puisque l'action d'un couple de torsion sur un élément de fluide peut changer non seulement sa vitesse angulaire, mais aussi sa forme et distribution de masse. Une mesure plus utile de la "rotation" est la *circulation* Γ le long d'un contour fermé se déplaçant avec le fluide:

$$\Gamma(t) = \oint_{\gamma} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (1.44)$$

où la seconde égalité provient de l'utilisation du théorème de Stokes, et la troisième de la définition de la *vortacité* :

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (1.45)$$

L'avantage d'exprimer un écoulement \mathbf{u} en terme de sa vortacité tient à l'existence du *théorème de Kelvin*, qui stipule que dans un écoulement inviscide $\nu \rightarrow 0$ (ou, de manière équivalente, $Re \rightarrow \infty$), la circulation Γ le long d'une boucle fermée γ advectée par le fluide est une quantité conservée:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0. \quad (1.46)$$

Sous utilisation de l'éq. (1.44), ceci peut s'exprimer de manière physiquement équivalente comme:

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0}. \quad (1.47)$$

Cette expression indique que le flux de vortacité traversant une surface matérielle S quelconque délimitée par un contour γ est aussi une quantité conservée. Dans les deux cas il s'agit ici d'expressions intégrales du principe de conservation du moment cinétique.

1.2.5 L'équation d'Euler et le Principe de Bernoulli

La limite inviscide $\nu \rightarrow 0$, ou de manière équivalente $\text{Re} \rightarrow \infty$, définit le *fluide parfait*. L'équation de Navier–Stokes se réduit alors à l'*équation d'Euler*:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi, \quad (1.48)$$

où on a ajouté explicitement la gravité au membre de droite, exprimée en terme du gradient d'un potentiel gravitationnel Φ tel que $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$. L'identité vectorielle

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (1.49)$$

permet d'écrire:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla\left(\frac{u^2}{2}\right) - \mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{u}, \quad (1.50)$$

où $u^2 \equiv \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$. Considérons maintenant le terme en gradient de pression, sous l'hypothèse que l'écoulement est adiabatique; on peut alors exprimer la pression en terme de la densité via la relation:

$$\left(\frac{p}{p_0}\right) = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma, \quad (1.51)$$

où γ est le rapport des chaleurs spécifiques. On peut déduire de cette expression que $\nabla p = (\gamma p/\rho)\nabla\rho$. Écrivons maintenant

$$\begin{aligned} \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) &= \frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{p}{\rho^2}\nabla\rho \\ &= \frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{p}{\rho^2}\left(\frac{\rho\nabla p}{\gamma p}\right) \\ &= \frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{1}{\gamma\rho}\nabla p \\ &= \frac{1}{\rho}\nabla p\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right); \end{aligned} \quad (1.52)$$

donc,

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{\gamma}{\gamma-1}\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right), \quad (1.53)$$

Insérant cette expression ainsi que l'éq. (1.50) dans l'équation d'Euler (1.48), on peut réécrire cette dernière sous la forme:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{u} = -\nabla\left(\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + \Phi\right), \quad (1.54)$$

Supposant maintenant un écoulement stationnaire (dans le sens que tous les $\partial/\partial t \equiv 0$), on projette cette équation sur \mathbf{u} , et on obtient:

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \nabla\left(\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + \Phi\right) = 0}. \quad (1.55)$$

Cette expression implique que le long de chaque ligne d'écoulement, la quantité entre parenthèse est une constante. C'est le *Principe de Bernoulli*, un résultat remarquable qui mérite qu'on s'y attarde un peu. Le premier terme au membre de droite est la quantité d'énergie cinétique par unité de masse dans l'écoulement; le second est, à un facteur γ près, la quantité d'énergie interne (i.e., thermique) par unité de masse du fluide; et le troisième est l'énergie potentielle gravitationnelle par unité de masse. Le Principe de Bernoulli est donc une expression de la conservation de l'énergie, qui, historiquement parlant, précède la formulation officielle du principe de la conservation de l'énergie par plus d'un siècle!

1.2.6 Énergie: L'équation de l'entropie

Voyons maintenant comment formuler la conservation de l'énergie pour des écoulements plus généraux que ceux auxquels s'applique le Principe de Bernoulli. Négligeant temporairement la chaleur produite par la dissipation visqueuse, l'établissement d'une équation de bilan pour l'énergie thermique entrant et sortant d'un élément de volume V fixe dans l'espace (comme à la §1.2.1 pour la masse) conduit à l'équation différentielle suivante exprimant la conservation de l'énergie interne par unité de masse (e , unités J/kg) du plasma:

$$\frac{De}{Dt} + (\gamma - 1)e\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot [(\chi + \chi_r)\nabla T], \quad (1.56)$$

où, dans le cas d'un gaz parfait, on a

$$e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{kT}{\mu m}, \quad (1.57)$$

avec $\gamma = c_p/c_v$ étant le rapport des chaleurs spécifiques, et $(\chi + \chi_r)\nabla T$ le flux diffusif de chaleur, avec χ et χ_r étant les coefficients de conductivité thermique et radiative, respectivement (unités: $\text{J K}^{-1}\text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$). L'équation (1.56) indique que toute variation de l'énergie interne spécifique dans un volume de plasma transporté par l'écoulement (membre de gauche) ne peut être due qu'à un flux de chaleur à ses frontières causé soit par conduction, soit par la radiation (ici dans l'approximation dite de diffusion). Le second terme $\propto \nabla \cdot \mathbf{u}$ au membre de gauche de l'éq (1.56) représente le travail par (ou contre) la pression pour compresser (ou dilater) l'élément de volume; c'est l'équivalent fluide de notre bon vieux $p dV$ de la thermodynamique.

Il est souvent pratique de réexprimer cette équation pour la conservation de l'énergie en terme de l'entropie du plasma, $S \propto \rho^{-\gamma} p$. On obtient ainsi une forme plus compacte:

$$\boxed{\rho T \frac{DS}{Dt} = \nabla \cdot [(\chi + \chi_r)\nabla T]}, \quad (1.58)$$

qui démontre maintenant de manière claire que toute variation de l'entropie S d'un élément de fluide transporté par un écoulement (membre de gauche) ne peut être causée que par un flux de chaleur à travers sa surface (membre de droite).

Bien que ce soit rarement un facteur important dans les écoulements astrophysiques (avec au moins une très importante exception, que l'on considérera au chapitre 4), le membre de droite de l'éq. (1.58) doit également inclure l'apport volumique de chaleur dû à l'action de la dissipation visqueuse à l'intérieur de l'élément de fluide (et aussi, comme on le verra au chapitre suivant, par la dissipation Ohmique). La quantité requise est la *fonction de dissipation visqueuse*, plus facilement exprimable en notation indicielle:

$$\phi_\nu = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \right)^2 + \mu_\vartheta \left(\frac{\partial u_s}{\partial x_s} \right)^2 \quad [\text{J m}^{-3}\text{s}^{-1}], \quad (1.59)$$

où la convention de somme sur les indices répétés doit être appliquée. Comme ϕ_ν est toujours une quantité positive, son inclusion au membre de droite de l'éq. (1.58) ne peut que faire augmenter l'entropie, ce qui est tout à fait normal puisque la viscosité est l'équivalent fluide de la friction, qui est un processus thermodynamique irréversible.

1.3 Écoulements compressibles

Les fluides astrophysiques se retrouvent pratiquement tous sous forme gazeuse et/ou dans l'état de plasma. Dans bien des cas la dynamique des écoulements conduit à des variations importantes de la densité, i.e., ces écoulements sont *compressibles*.

1.3.1 Les ondes acoustiques

Écrivons les équations décrivant le comportement d'un fluide inviscide, compressible, en une dimension spatiale, i.e., $\mathbf{u} = u(x, t)\hat{\mathbf{e}}_x$, $p = p(x, t)$, et $\varrho = \varrho(x, t)$:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}, \quad [\text{cons. masse}], \quad (1.60)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad [\text{N} - \text{S}], \quad (1.61)$$

On considère que l'écoulement peut être représenté par un **état de référence** (u_0, p_0, ϱ_0) sur lequel est superposé une **perturbation** (u_1, p_1, ϱ_1) de faible amplitude, i.e.,

$$u = u_0 + u_1, \quad u_1/u_0 \ll 1, \quad (1.62)$$

$$p = p_0 + p_1, \quad p_1/p_0 \ll 1, \quad (1.63)$$

$$\varrho = \varrho_0 + \varrho_1, \quad \varrho_1/\varrho_0 \ll 1. \quad (1.64)$$

Il s'agit maintenant de *linéariser* ces équations par rapport à un état de référence stationnaire ($\partial t/\partial = 0$), hydrostatique ($u_0 = 0$), et homogène (p_0 et ϱ_0 sont tous deux constants). On substitue les équations (1.62)–(1.64) dans les équations (1.60)–(1.61), et on néglige tous les termes *d'ordre deux*, c'est à dire tous les termes impliquant les produits de deux perturbations, e.g., $\varrho_1 u_1$; mais on conserve tous les termes impliquant un produit d'une quantité caractérisant l'état de référence et d'une perturbation, e.g., $\varrho_0 u_1$, etc. Pour l'équation de la conservation de la masse (1.60) on obtient

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial t} = -\varrho_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(u_1 \varrho_1)}_{\text{ordre } 2, \equiv 0}; \quad (1.65)$$

L'équation (1.61) est travaillée de la même manière:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + (u_1) \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{1}{\varrho_0 + \varrho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x}. \quad (1.66)$$

On doit maintenant développer en série le quotient de la densité au membre de gauche via le développement du binôme, prenant avantage du fait que $\varrho_1 \ll \varrho_0$:

$$\frac{1}{\varrho_0 + \varrho_1} = \left(\frac{1}{\varrho_0}\right) \left(\frac{1}{1 + (\varrho_1/\varrho_0)}\right) \simeq \frac{1 - (\varrho_1/\varrho_0)}{\varrho_0} = \frac{\varrho_0 - \varrho_1}{\varrho_0^2}, \quad (1.67)$$

d'où on arrive à

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \underbrace{u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}}_{\text{ordre } 2, \equiv 0} = -\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \underbrace{\frac{\varrho_1}{\varrho_0^2} \frac{\partial p_1}{\partial x}}_{\text{ordre } 2, \equiv 0}; \quad (1.68)$$

encore une fois on élimine tous les termes d'ordre deux, pour arriver à

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x}. \quad (1.69)$$

Nous voici pris avec 2 équations impliquant trois variables, u_1 , p_1 et ϱ_1 ; la troisième équation requise est reliée à l'énergétique de la perturbation. Pour une perturbation adiabatique, on doit avoir $p \propto \varrho^\gamma$, ou, de manière équivalente:

$$\left(\frac{p}{p_0}\right) = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^\gamma, \quad (1.70)$$

où γ est l'indice adiabatique ($= 5/3$ pour un gaz parfait monoatomique); en prenant la dérivée par rapport à x on arrive à (faites le!):

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (1.71)$$

On introduit maintenant notre procédure de linéarisation dans cette expression, toujours pour un état de référence à densité et pression constantes. À l'ordre un on trouve:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial x}, \quad [\text{adiabat., ordre 1}] \quad (1.72)$$

Il s'agit maintenant d'utiliser cette expressions pour éliminer p_1 des équations à l'ordre un. Vous pourrez vérifier facilement que le résultat de cette opération est

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\gamma p_0}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial x}. \quad (1.73)$$

Le reste n'est que de l'algèbre; on prend la la dérivée par rapport au temps de la seconde de ces expressions, et on inverse les dérivées spatiales et temporelles (permis puisque nous travaillons en représentation Eulérienne); puis on utilise l'éq. (1.73) pour se débarrasser de $\partial \rho_1 / \partial t$ et on arrive finalement à:

$$\boxed{\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}}. \quad (1.74)$$

Il s'agit ici d'une **équation d'onde** pour la perturbation en vitesse $u_1(x, t)$. Il est facile de vérifier que deux équations d'onde équivalentes pour p_1 et ρ_1 peuvent aussi être obtenues par des manipulations algébriques différentes des équations à l'ordre un. Cette expression accepte des solutions sous la forme d'ondes planes:

$$u_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t), \quad (1.75)$$

où la vitesse (de phase) de l'onde est donc déterminée par les propriétés de l'état de référence:

$$\boxed{c_s = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}}, \quad (1.76)$$

La première égalité dans cette expression représente la *relation de dispersion* pour notre onde sonore. La quantité au membre de droite est la **vitesse adiabatique du son**. Notons que les ondes sonores sont des ondes **longitudinales**, dans le sens que la force de rappel (ici ∇p) est parallèle à la direction de propagation de l'onde. Cette relation de dispersion est telle que $d\omega/dk = 0$, indiquant que l'onde sonore (linéarisée) est *non-dispersive*, autrement dit toutes les longueurs d'ondes se déplacent à la même vitesse c_s , celle-ci fixée par les propriétés physique de l'état ambiant (ordre zéro).

On définit le **Nombre de Mach** (M) comme le rapport entre la vitesse d'un fluide et la vitesse adiabatique du son dans le milieu:

$$\boxed{M = \frac{|\mathbf{u}|}{c_s}}. \quad (1.77)$$

Cette quantité nondimensionnelle peut être utilisée pour estimer sous quelles conditions un écoulement compressible peut être traité comme incompressible. Le critère en question est simplement que le nombre de Mach soit $M \ll 1$. Forcé à "choisir" entre se comprimer contre un "obstacle" ou contourner ledit obstacle, la quasi-totalité des fluides compressibles préfèrent la seconde option. Comme c'est le champ de pression qui "informe" le fluide de la présence de l'obstacle en aval, dans un écoulement supersonique le fluide frappe l'obstacle avant de l'avoir "détecté" dans ce champ de pression; il n'est alors plus possible de contourner, et on doit alors comprimer.

1.3.2 Les ondes de choc

Revenons à notre onde sonore. L'équation d'onde (1.74) a été obtenue en supposant l'amplitude de l'onde très petite par rapport à l'état de référence du fluide, mais on peut facilement imaginer que de telles ondes seront toujours supportées dans un fluide même si leur amplitude n'est pas infinitésimale; c'en est bien le cas, mais une complication importante se pointe le nez, conséquence inévitable de notre très fameux terme $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$.

Restons pour l'instant dans une situation en 1D, en considérons le membre de gauche de l'équation de Navier–Stokes ⁴:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}\right)u = \dots \quad (1.78)$$

De manière générale, l'opérateur au membre de droite décrit l'advection d'une fonction $f(x)$ à vitesse u dans la direction x , i.e., $f(x, t) = f_0(x - ut)$. Si u est constant alors la forme du profil $f(x)$ demeure fixe; mais ici, pour une onde de type sonore, non seulement u n'est pas fixe, mais en plus u est une des quantités transportée. Ceci conduit à la situation illustrée schématiquement à la Figure 1.4. Une perturbation initialement harmonique (sinusoidale) de la vitesse se déplace ici dans la direction- x (vers la droite); cependant, la vitesse de phase de l'onde varie spatialement, en fonction de son amplitude: les crêtes se déplacent plus rapidement que les creux, comme l'indiquent les flèches noires. Ceci conduit à un raidissement graduel de l'onde, se poursuivant jusqu'à ce que le profil devienne vertical, i.e., causant une discontinuité du profil $u(x)$. Une telle "vague" dans un fluide incompressible comme l'eau ne pourrait que déferler, mais dans un fluide compressible cette discontinuité peut se stabiliser sous la forme d'une *onde de choc*.

L'idée est illustrée, toujours schématiquement, au bas de la Figure 1.4, montrant une vue rapprochée d'une de ces discontinuités, indiquée par le rectangle gris sur le profil à $t + 2\Delta t$ plus haut. Si on se place dans un repère qui se déplace avec le choc, alors le fluide atteint le choc avec une vitesse u_1 , le traverse et en ressort avec une vitesse $u_2 < u_1$. Comment varieraient les autres propriétés du fluide, comme la pression ou la densité? La première étape consiste à établir les quantités physiques qui sont conservées dans le système. En l'absence de réactions thermonucléaires, de pertes radiatives, et de processus dissipatifs, il s'agit simplement des flux de masse, de quantité de mouvement, et de l'énergie totale du fluide. Le flux de ces quantités doit donc être le même de chaque côté du choc:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \quad (1.79)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2, \quad (1.80)$$

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma p_1}{(\gamma - 1)\rho_1} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{\gamma p_2}{(\gamma - 1)\rho_2}. \quad (1.81)$$

où la seconde de ces expressions provient de l'éq. (1.24) en régime inviscide (seul p contribue au stress), et la dernière de ces expressions résulte directement de l'application du principe de Bernoulli (1.55), valide ici puisque l'écoulement est stationnaire dans le repère où le choc est au repos. Quelques manipulations algébriques simples permettent de combiner ces expressions sous la forme:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)}{2/M^2 + (\gamma - 1)}, \quad (1.82)$$

où $M = u_1/c_{s,1}$ est le nombre de Mach dans le fluide en amont du choc, et $c_{s,1}$ est la vitesse adiabatique du son dans ce milieu (voir l'éq. (1.76)). Dans un choc le fluide en amont est typiquement supersonique ($M > 1$), sinon le fluide "ressentirait" la présence du choc et le gradient de pression le ralentirait; Donc si $M > 1$, l'éq. (1.82) indique que $\rho_2 > \rho_1$, i.e., le fluide

⁴Cette sous-section et la suivante sont fortement inspirées des sections 6.5 et 6.6 de l'ouvrage de Choudhuri cité en bibliographie en fin de chapitre.

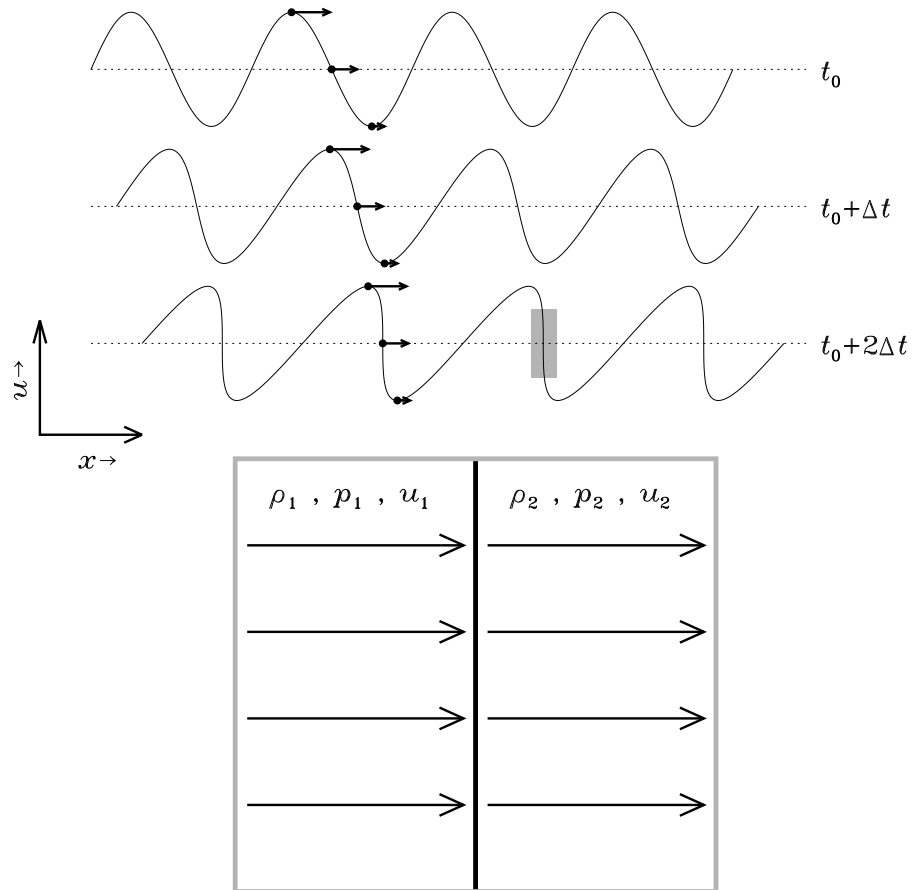


Figure 1.4: Représentation schématique du raidissement d’une onde compressive dans le régime nonlinéaire. Ici la vitesse de l’onde augmente avec son amplitude, tel qu’indiqué par les flèches horizontales, avec comme conséquence que les “crêtes” rattrappent les “creux”, produisant éventuellement un gradient divergent ($\rightarrow \infty$). Le diagramme du bas illustre la variation discontinue des variables physiques dans la région indiquée par le rectangle gris sur le profil d’onde le plus raidi.

est comprimé en traversant le choc. Pour un gaz parfait ($\gamma = 5/3$), il est facile de vérifier que le niveau maximal de compression possible est

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} = 4. \quad (1.83)$$

L'équation (1.79) indique immédiatement que le rapport des vitesses u_2/u_1 varie en proportion inverse à ϱ_2/ϱ_1 :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{2/M^2 + (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)}, \quad (1.84)$$

et l'éq. (1.80) conduit alors à:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)}. \quad (1.85)$$

Les équations (1.82)—(1.85) sont appelées *relations de Rankine-Hugoniot*. Pour calculer l'écoulement complet, il nous manque cependant une information clef: la vitesse de propagation du choc dans un repère inertiel.

1.3.3 Ondes de détonation

Plusieurs phénomènes énergétiques en astrophysique conduisent à la formation d'ondes de choc. L'explosion d'une supernova est certainement l'exemple le plus extrême. Une quantité E d'énergie est soudainement libérée dans un très petit volume au centre de l'étoile. Ceci produit un gigantesque gradient de pression qui propulse les couches externes de l'objet dans le milieu interstellaire, à une vitesse supersonique. Cette *onde de détonation* se propage sous la forme d'un choc, dont l'expansion se fait souvent de manière quasi-sphérique par rapport à la position de la supernova même (voir la Figure 1.5 pour un exemple particulièrement joli).

Il est possible de calculer la vitesse d'expansion du choc en supposant que son expansion radiale se fait de manière *autosimilaire*. Travaillant en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , on suppose que les quantités physiques comme ϱ , \mathbf{u} , etc, qui dépendent de r et t , peuvent voir ces dépendances combinées en un *facteur d'échelle* η incorporant implicitement ces dépendances en r et t ; par exemple:

$$\varrho(r, t) = \varrho(\eta), \quad \eta \rightarrow \eta(r, t). \quad (1.86)$$

Il s'agit maintenant de choisir une forme appropriée pour $\eta(r, t)$. L'idée est d'établir cette forme sur la base d'une analyse dimensionnelle. On s'attend à ce que l'expansion dépende de l'énergie E libérée par la détonation, ainsi que des propriétés du milieu traversé par l'onde de détonation. Supposant le milieu interstellaire au repos (u_1) et sa pression beaucoup plus faible que celle caractérisant l'éjecta ($p_1 \ll p_2$) ne laisse que E et ϱ_1 comme variables pertinentes. La combinaison la plus simple des quantités dimensionnelles E , ϱ_1 et t ayant une dimension de longueur est:

$$\eta = \left(\frac{E t^2}{\varrho_1} \right)^{1/5}. \quad (1.87)$$

On utilise ce facteur d'échelle pour adimensionaliser le rayon r :

$$\xi = \frac{r}{\eta} = r \left(\frac{\varrho_1}{E t^2} \right)^{1/5}. \quad (1.88)$$

Si l'expansion est autosimilaire, alors on peut assigner à chaque coquille sphérique une valeur de ξ , et cette valeur demeurera inchangée durant l'expansion. Assignons la valeur ξ_0 à la coquille sphérique ($r = r_c(t)$) coïncidant avec le choc en expansion; on aura alors

$$r_c(t) = \xi_0 \left(\frac{E t^2}{\varrho_1} \right)^{1/5}, \quad (1.89)$$

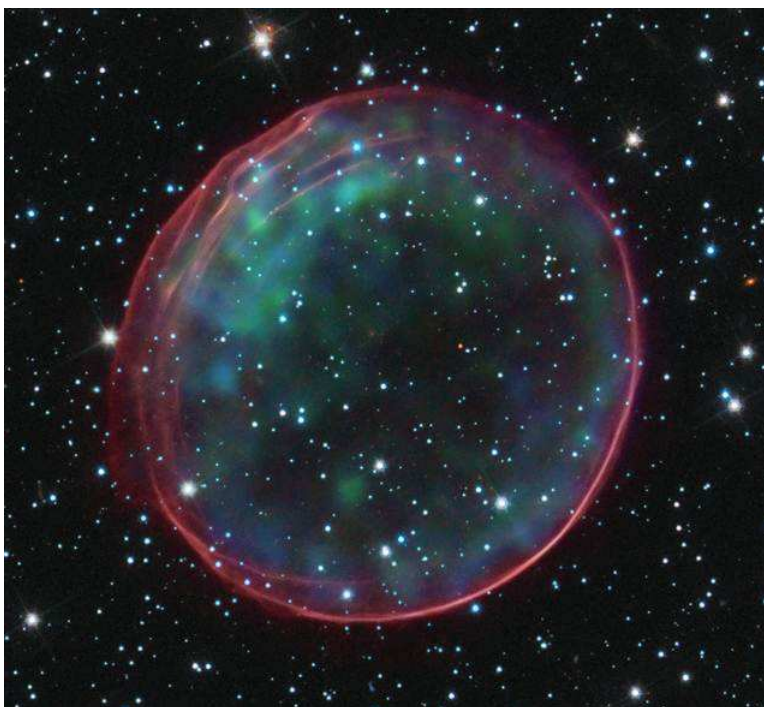


Figure 1.5: Onde de détonation produite par une supernova ayant pété il y a plus de 400 ans (SNR 0509-67.5). Cette image combine des données optiques (rouge) et en rayon-X (vert-bleu). L'émission optique est associée au chauffage du milieu interstellaire par le passage de l'onde de choc. Image de la NASA, en domaine public.

et sa vitesse d'expansion est donnée par

$$v_c(t) = \frac{dr_c}{dt} = \frac{2\xi_0}{5} \left(\frac{E}{\rho_1 t^3} \right)^{1/5}. \quad (1.90)$$

Ces expressions indiquent que le rayon de l'onde de détonation augmente en $t^{2/5}$, et sa vitesse de propagation chute en $t^{-3/5}$. Ces prédictions ont été vérifiées expérimentalement (mais *a posteriori*) à partir de photographies de la première explosion atomique produite par l'humanité⁵, dans le désert du Nouveau-Mexique en 1945.

Un éjecta de supernova “typique” peut contenir $\sim 1 M_\odot$ de plasma éjecté à une vitesse $\sim 10^4 \text{ km s}^{-1}$, correspondant à une énergie $\sim 10^{44} \text{ J}$. Une valeur typique pour la densité dans le milieu interstellaire est $10^{-21} \text{ kg m}^{-3}$ (viz. Tableau 1). Insérant ces valeurs dans les éqs. (1.89)–(1.90) et avec t exprimé en années, on obtient:

$$r_c(t) \simeq 0.3 t^{2/5} \quad [\text{parsec}], \quad (1.91)$$

$$v_c(t) \simeq 10^5 t^{-3/5}, \quad [\text{km s}^{-1}]. \quad (1.92)$$

Ces expressions peuvent être utilisées pour “dater” une supernova à partir du rayon observé de son onde de détonation. La méthode ne fonctionne que pour des supernovae relativement récentes, mais pas trop récentes non plus. La solution autosimilaire comporte en effet certaines limites intrinsèques; ayant supposé que la vitesse initiale de l'éjecta est $\sim 10^4 \text{ km s}^{-1}$, les éqs. (1.91) ne peuvent être valides que pour $t \gtrsim 100 \text{ yr}$. De plus, l'approche ci-dessus présuppose que toute l'énergie demeure contenue dans l'éjecta, ce qui ne sera pas le cas; les pertes d'énergie

⁵Comme c'était le prélude-test aux seconde et troisième explosions, sur Hiroshima et Nagasaki, l'utilisation du terme “humanité” n'est peut-être pas appropriée ici...

par radiation peuvent être importantes, particulièrement au niveau du choc même, où elles sont amplifiées par le chauffage associée à la compression ainsi qu'à la dissipation visqueuse. C'est d'ailleurs cet excès de pertes radiatives qui rend l'onde de détonation si joliment visible sur des images optiques comme à la Figure 1.5 ⁶

1.4 Fluides en rotation

Tout tourne en astrophysique; toutes les planètes, toutes les étoiles, toutes les galaxies, et c'est probablement le cas également des amas de galaxies. C'est là une conséquence de la conservation du moment cinétique couplée au fait que la grande majorité des objets astrophysiques primaires se forment par *effondrement gravitationnel* à partir d'un milieu de basse densité et spatialement diffu. La forte réduction du moment d'inertie associée à la toute aussi grande réduction de la taille physique de l'objet conduit inévitablement à une augmentation de la vitesse angulaire de la structure, via la conservation du moment cinétique. En fait, on verra plus loin qu'un des grands problèmes de la théorie de la formation des étoiles est d'identifier le (ou les) mécanisme(s) permettant d'évacuer le moment cinétique du système protoétoile-disque d'accrétion, afin que la barrière centrifuge ne bloque pas l'accrétion de masse.

Il sera donc important de pouvoir reformuler les équations de l'hydrodynamique dans un repère en rotation; conceptuellement il ne s'agit que d'inclure les forces de Coriolis et centrifuge dans l'équation de Navier-Stokes. Ici le contexte du milieu continu ne nous complique pas trop la chose mathématiquement puisque ce sont des forces volumiques, mais l'influence de la rotation sur les écoulements a quelques conséquences dynamiques non-intuitives qu'il est important de clarifier déjà à ce stade.

1.4.1 Les forces de Coriolis et centrifuge

Plaçons nous dans un repère en rotation ("R"), et examinons comment l'accélération $D\mathbf{u}/Dt$ d'un élément de fluide telle que mesurée dans ce repère s'exprimerait dans un repère inertiel ("I") fixe dans l'espace. De manière tout à fait générale, une vitesse \mathbf{u}_I dans un repère inertiel se transforme dans un repère en rotation selon

$$\mathbf{u}_I = \mathbf{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad (1.93)$$

où \mathbf{r} est un rayon vecteur mesurant la position de l'élément de fluide par rapport à un point de référence quelconque, $\boldsymbol{\Omega}$ le vecteur-vitesse angulaire définissant le repère en rotation, et \mathbf{u}_R est la vitesse de l'écoulement dans ce repère, et où on a supposé que toutes les vitesses impliquées demeurent confortablement non-relativistes. De même, toute variation Lagrangienne se transforme selon

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_I = \left(\frac{D}{Dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \quad (1.94)$$

L'accélération (Lagrangienne) d'un élément de fluide se transforme donc selon:

$$\left(\frac{D\mathbf{u}_I}{Dt}\right)_I = \left(\frac{D\mathbf{u}_I}{Dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_I \quad (1.95)$$

Substituant l'éq. (1.93) dans cette dernière expression, on développe comme suit:

$$\left(\frac{D\mathbf{u}_I}{Dt}\right)_I = \left(\frac{D\mathbf{u}_R}{Dt}\right)_R + \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \times \frac{D\mathbf{r}}{Dt}}_{=\mathbf{u}_R} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad (1.96)$$

$$= \left(\frac{D\mathbf{u}_R}{Dt}\right)_R + \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})}_{\text{Centrifuge}} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R}_{\text{Coriolis}} \quad (1.97)$$

⁶La radiation peut grandement affecter l'énergétique et la dynamique d'une onde de détonation de type supernova, ainsi que sa vitesse de propagation. Ce sera le sujet d'un bloc de cours livré plus tard cet automne par Tom Bogdan, ex-collègue du NCAR et expert chevronné en hydrodynamique radiative.

Tout ceci revient (évidemment) à introduire dans le repère R les accélérations centrifuge et Coriolis, tel qu'indiqué. Les équations de Navier-Stokes (gravité incluse) en régime incompressible deviennent donc, dans R :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \nu\nabla^2\mathbf{u}, \quad [\text{incompressible}] \quad (1.98)$$

Si $\boldsymbol{\Omega}$ est aligné avec l'axe de symétrie du système de coordonnées polaire (r, θ, ϕ) habituel, alors on a $|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}| = \Omega r \sin \theta$, et donc $|\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})| = \Omega^2 r \sin \theta = \Omega^2 s$, ce qui permet d'écrire

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = -\nabla \left(\frac{1}{2} \Omega^2 s^2 \right). \quad (1.99)$$

L'équation (1.98) devient

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \Phi - \frac{1}{2} \Omega^2 s^2 \right) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \nu\nabla^2\mathbf{u}, \quad [\text{incompressible}] \quad (1.100)$$

où l'on a abandonné à partir d'ici les indices R . La force centrifuge peut être ainsi "absorbée" dans le terme de pression sous la forme d'un potentiel centrifuge. Physiquement, ceci indique que le profil de pression peut toujours s'ajuster pour équilibrer la force centrifuge, tout comme elle le fait pour équilibrer la gravité dans l'atmosphère hydrostatique (c'est d'ailleurs pourquoi la surface d'un liquide dans un récipient en rotation assume une forme parabolique). La quantité entre parenthèses dans l'équation ci-dessus représente donc une forme de "pression effective". La force de Coriolis, par contre, dépend explicitement de \mathbf{u} et ne peut être exprimée sous la forme du gradient d'un potentiel.

L'analyse dimensionnelle permet encore une fois, d'estimer l'importance relative des termes inertiel $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ et visqueux $\nu\nabla^2\mathbf{u}$ par rapport au terme de Coriolis $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$:

$$\frac{[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}]}{[2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}]} = \frac{U^2/L}{\Omega U} = \boxed{\frac{U}{\Omega L} \equiv \text{Ro}}, \quad (1.101)$$

$$\frac{[\nu\nabla^2\mathbf{u}]}{[2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}]} = \frac{\nu U/L^2}{\Omega U} = \boxed{\frac{\nu}{\Omega L^2} \equiv \text{Ek}}. \quad (1.102)$$

Le premier de ces paramètres non-dimensionnels est appelé **Nombre de Rossby** (Ro), et mesure l'importance relative des effets inertiels versus Coriolis dans l'écoulement; le second est le **Nombre d'Ekman** (Ek), et mesure l'importance des forces visqueuses par rapport à la force de Coriolis.

1.4.2 L'équilibre géostrophique et le théorème de Taylor-Proudman

Dans un écoulement incompressible, stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) et perpendiculaire à la gravité, et où $\text{Ro} \ll 1$ et $\text{Ek} \ll 1$, l'équation (1.100) se réduit à

$$\boxed{\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \Phi - \frac{1}{2} \Omega^2 s^2 \right) = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}}, \quad (1.103)$$

Ceci exprime un équilibre entre le gradient de pression et la force de Coriolis; c'est l'**équilibre géostrophique**. Puisque $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ est perpendiculaire à \mathbf{u} , alors ∇p le sera aussi. C'est un état d'équilibre très différent qu'en l'absence de rotation, dans lequel cas \mathbf{u} est plus souvent *parallèle* à ∇p . C'est pourquoi, sur les cartes météo, les vents soufflent *le long* des isobares, plutôt que directement le long du gradient de pression, perpendiculairement aux isobares.

L'équilibre géostrophique peut avoir des conséquences plutôt surprenantes. Prenons le rotationnel de chaque coté de l'éq. (1.103):

$$\nabla \times (2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) = \underbrace{\nabla \times \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \Phi - \frac{1}{2}\Omega^2 s^2 \right)}_{\equiv 0}. \quad (1.104)$$

On développe le membre de gauche via l'identité vectorielle

$$\nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{u}(\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{\Omega}(\nabla \cdot \mathbf{u}); \quad (1.105)$$

mais $\nabla \boldsymbol{\Omega} = 0$ et $\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$ puisqu'ici $\boldsymbol{\Omega}$ est un vecteur définissant l'axe de rotation du repère R . On a également $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ en vertu de notre hypothèse d'incompressibilité. On en conclut que

$$\boxed{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} = 0}. \quad (1.106)$$

Cette expression indique que \mathbf{u} ne varie pas dans la direction de l'axe de rotation, tel que définie par $\boldsymbol{\Omega}$; c'est le **théorème de Taylor-Proudman**, qui stipule que tout écoulement dans le régime $Ro \ll 1$, $Ek \ll 1$ ne peut être que bi-dimensionnel.

1.5 La turbulence

Le développement nonlinéaire des instabilités hydrodynamiques (et magnétohydrodynamiques) conduit habituellement à la turbulence, et cette turbulence peut jouer un rôle majeur dans la structure et dynamique des systèmes astrophysiques. Les exemples abondent, e.g., le transport de l'énergie thermique dans les zones convectives stellaires, le transport du moment cinétique dans les disques d'accrétion, ou encore le mélange chimique dans les enveloppes de supernovae de type II. Il est donc essentiel d'identifier (1) les conditions sous lesquelles tel ou tel écoulement devient instable, et (2) l'impact de cette turbulence sur la dynamique globale de l'écoulement.

La turbulence est souvent considérée comme le dernier "grand problème" non-résolu de la physique classique, i.e., pré-relativiste et pré-quantique. Le sujet a par ailleurs été caractérisé comme étant un "grand cimetière de théories"; on doit donc approcher la turbulence posément, et avec prudence et circonspection...

1.5.1 Les instabilités hydrodynamiques

Le fait qu'un écoulement soit stationnaire, dans le sens habituel que $\partial/\partial t = 0$, implique un équilibre entre les forces agissant sur tout élément de fluide (coté droit des équations de Navier-Stokes), et le terme inertiel $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ au coté gauche. Supposons maintenant qu'un agent extérieur impose une perturbation prenant la forme d'un déplacement additionnel $\boldsymbol{\xi}$ à un élément de fluide localisé quelquepart dans l'écoulement. En général, l'élément de fluide ainsi déplacé ne sera plus en équilibre, dans le sens que, localement, l'équation de Navier-Stokes ne sera plus satisfaite. Ceci revient à dire qu'une force nette \mathbf{F} agira sur l'élément de fluide. Si cette force s'oppose au déplacement initial, alors l'écoulement est stable; dans le cas contraire il est évidemment instable. Dans un tel cas, l'énergie cinétique par unité de masse du fluide ($u^2/2$) augmente, et cette énergie doit venir de quelquepart. C'est donc qu'il existe un réservoir d'énergie dans le système, dans lequel l'instabilité est en mesure de puiser.

En hydrodynamique, il existe plusieurs sources possibles d'énergie, auxquelles sont associées toute une gamme d'instabilités. Les plus familières dans le contexte astrophysique sont les instabilités de Jeans et de Rayleigh-Taylor (puisant dans l'énergie potentielle gravitationnelle), l'instabilité de Kelvin-Helmholtz (puisant dans l'énergie cinétique de l'écoulement), et l'instabilité convective (propulsée par la force de flottaison mais ultimement puisant dans l'énergie thermique). Il existe également tout en zoo d'instabilités qui puisent dans l'énergie magnétique, mais on oublie celles-là... pour l'instant!

1.5.2 Analyse de stabilité: un survol

Une analyse formelle de stabilité débute par la définition d'une perturbation harmonique infinitésimale du genre:

$$\boxed{\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\Xi}(\mathbf{x}) \exp[(\sigma + i\omega)t] ,} \quad (1.107)$$

où l'amplitude spatiale $\boldsymbol{\Xi}(\mathbf{x})$ est en général une quantité complexe. Ici, $\boldsymbol{\xi}$ représente une perturbation pouvant, en principe, affecter toutes les variables hydrodynamiques importantes au problème considéré. En terme de la notation utilisée en linéarisation, on écrirait:

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) \equiv [\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \delta\rho(\mathbf{x}, t), \delta p(\mathbf{x}, t), \dots] . \quad (1.108)$$

La clef de l'analyse est de supposer que la perturbation est infinitésimale, donc

$$\frac{\delta\mathbf{u}}{\mathbf{u}} \ll 1 , \quad \frac{\delta\rho}{\rho} \ll 1 , \quad \frac{\delta p}{p} \ll 1 , \quad \text{etc.} \quad (1.109)$$

On peut donc *linéariser* les équations de continuité, Navier-Stokes, etc, comme nous l'avons fait dans notre étude des ondes sonores (§1.3.1), de façon à obtenir des équations linéaires incluant explicitement un terme en $\partial/\partial t$ pour les perturbations. Il s'agit ensuite de manipuler algébriquement les équations résultantes de manière à se retrouver avec une seule équation différentielle, possiblement d'ordre élevé, pour une seule des quantités perturbées (par exemple $\delta\rho$). On substitue alors la forme appropriée de l'éq. (1.107), ce qui conduit à un problème aux valeurs propres, où la quantité σ correspond au taux de croissance de l'instabilité. Dans plusieurs situations il est possible d'exprimer la la perturbation ($\boldsymbol{\Xi}$) sous la forme

$$\boldsymbol{\Xi}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\Xi}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \exp(st) , \quad s = \sigma + i\omega t \quad (1.110)$$

où $\boldsymbol{\Xi}_0$ est maintenant un simple coefficient numérique. La substitution d'une telle relation dans le problème aux valeurs propres susmentionné conduit à une relation, souvent de type polynomiale et habituellement nonlinéaire, reliant les composantes de \mathbf{k} et la valeur propre $\sigma + i\omega$, appelée **relation de dispersion**, et impliquant habituellement une ou plusieurs quantités adimensionnelles caractérisant la dynamique globale de l'écoulement de référence, par exemple le nombre de Reynolds. Si à un Re donné il existe une valeur de k pour laquelle $\sigma > 0$, alors une perturbation de la longueur d'onde correspondante croît exponentiellement, et le système est donc instable. Si, par contre, $\sigma < 0 \forall k$, alors le système est stable. Cette idée est illustrée schématiquement à la Figure 1.6, pour une instabilité fluide générique où le nombre de Reynolds Re agit comme paramètre de contrôle. À bas Re l'écoulement est stable pour tous les k . Le premier mode instable k_c apparaît au nombre de Reynolds critique Re_c , et si Re continue d'augmenter une plage de plus en plus large de nombre d'onde k seront linéairement instables, dans le sens que $\sigma > 0$.

1.5.3 La cascade turbulente

Si la turbulence se développe dans un écoulement suite à la croissance d'une instabilité, c'est qu'il existe dans l'écoulement initial une source d'énergie dans laquelle cette instabilité peut puiser. Pour revenir à un état statistiquement stationnaire du point de vue énergétique, cette énergie doit être dissipée, et la viscosité est souvent le seul agent disponible. Cependant, à haut nombre de Reynolds la viscosité ne peut agir que sur les petites échelles spatiales. La turbulence est le moyen utilisé par la Nature pour produire les petites échelles spatiales requises.

On considère un écoulement fluide marginalement instable dans le sens de la Fig. 1.6, i.e., seule une perturbation ayant un nombre d'onde $k \gtrsim k_c$ correspondant au nombre de Reynolds critique est excitée. Pour simplifier, imaginons encore une fois qu'il s'agit ici d'un écoulement plan cisailé verticalement $\mathbf{u}_0 = u_x(z)\hat{\mathbf{e}}_x$, avec le mode instable prenant une forme du genre $\exp(ikx - \omega t)$. Dénotons cette composante fluctuante de l'écoulement par \mathbf{u}' . Dans l'espace de

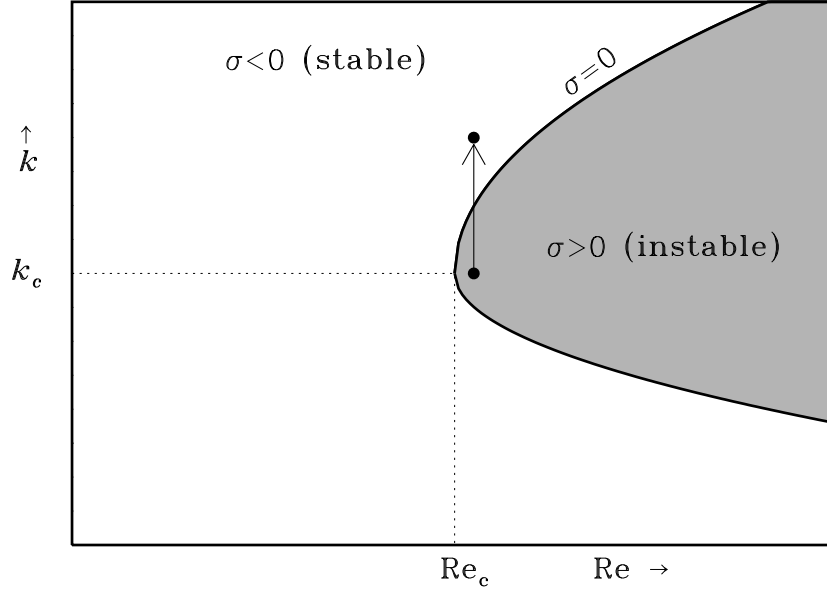


Figure 1.6: Diagramme de stabilité générique pour une instabilité hydrodynamique. Le diagramme est tracé dans le plan $[k - Re]$. La région en gris correspond à la portion du plan où le taux de croissance σ est positif, conduisant à une croissance exponentielle de la perturbation du nombre d'onde k correspondant. Le sens des deux points noirs reliés par une flèche sera expliqué au moment opportun.

Fourier, on observe donc un pic de puissance au nombre d'onde k , associé à cette perturbation harmonique. Revenons maintenant à nos équations de Navier-Stokes, et plus particulièrement au fameux terme en $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$; sa composante- x inclura un terme de la forme

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad (1.111)$$

sous substitution d'une dépendance spatiale du genre $u_x \propto \exp(ikx)$, on aura de toute évidence

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \propto \exp(2ikx). \quad (1.112)$$

Ceci est crucial: le terme nonlinéaire $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, opérant sur une fluctuation harmonique de nombre d'onde k , produira une contribution \mathbf{u}'' à l'écoulement, ayant un nombre d'onde $2k$; cependant, pour un système qui n'est que marginalement instable, seul le mode k a un taux de croissance $\sigma > 0$; le mode $2k$ est caractérisé par une échelle spatiale deux fois plus petite, donc sera plus sensible à la dissipation visqueuse, et se retrouvera amorti, i.e., $\sigma < 0$. C'est ce qu'illustrent les deux points noirs sur la Figure 1.6: le mode instable ayant $k \simeq k_c$ produit par interaction nonlinéaire un mode de k deux fois plus élevé, comme l'indique la flèche verticale, qui se retrouve à l'extérieur de la région d'instabilité dans le plan $[Re, k]$.

La Figure 1.7 illustre schématiquement l'énergétique de cette situation. En régime stationnaire, l'énergie est injectée dans le système par l'agent extérieur qui propulse l'écoulement à grande échelle (\mathbf{u}_0, L) . L'instabilité transfère cette énergie à la partie \mathbf{u}' de l'écoulement. Cette énergie est retransférée à un écoulement \mathbf{u}'' par l'interaction nonlinéaire de \mathbf{u}' avec soi-même, via le terme $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$. Puisque \mathbf{u}'' n'est pas instable (taux de croissance $\sigma < 0$), ceci implique un

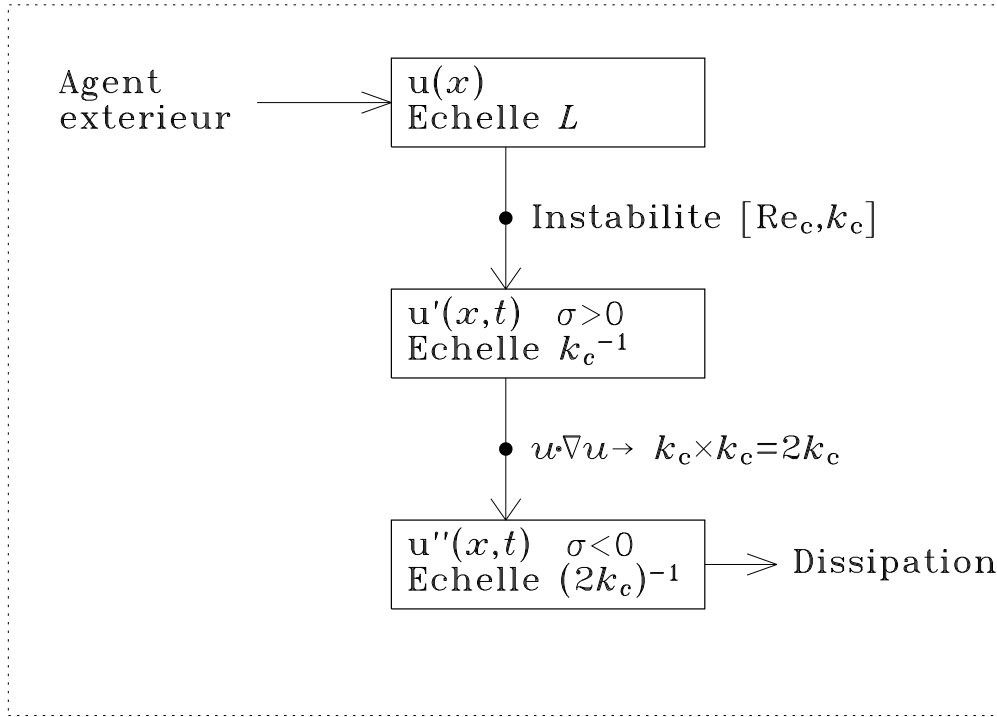


Figure 1.7: Transfert de l'énergie dans un système marginalement instable pour un mode de nombre d'onde k , qui dissipe son énergie via la production d'un mode amorti de nombre d'onde $2k$, par interaction nonlinéaire. La flèche pointant de la boîte centrale vers la boîte du bas est, conceptuellement, la même que la flèche verticale sur la Figure 1.6.

travail contre une force de rappel, ou un mécanisme dissipatif comme la viscosité. D'une façon ou d'une autre, l'énergie sort du système à l'échelle $2k$.

Que se passera-t-il maintenant si l'écoulement n'est pas marginalement instable (dans le sens $Re \gtrsim Re_c$), mais plutôt fortement instable ($Re \gg Re_c$)? Dans une telle situation, il est tout à fait possible que le mode $2k$ produit par l'auto-interaction du mode k le plus instable soit lui-même instable ($\sigma > 0$). Ce mode pourra alors non-seulement croître, mais interagir nonlinéairement avec lui-même ainsi qu'avec le mode original k ; dans l'espace spectral, on produira donc deux nouveaux modes, soit:

$$2k \otimes k \rightarrow 3k, \quad 2k \otimes 2k \rightarrow 4k, \quad (1.113)$$

où le symbole " \otimes " est utilisé ici et dans ce qui suit pour dénoter l'action dans l'espace de Fourier du terme d'interaction nonlinéaire $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$. Si ces modes sont eux-même instables, l'interaction nonlinéaire produira maintenant les nouveaux modes suivants:

$$3k \otimes 2k \rightarrow 5k, \quad 3k \otimes 3k \rightarrow 6k, \quad 3k \otimes 4k \rightarrow 7k, \quad 4k \otimes 4k \rightarrow 8k, \quad (1.114)$$

et ainsi de suite, conduisant à une croissance géométrique du nombre de modes présents dans le système. Ce processus de cascade dans l'espace de Fourier se poursuivra jusqu'aux nombres d'onde où la perturbation correspondante est stable, habituellement du aux effets de la viscosité. Énergétiquement, le transfert d'énergie se fait d'une manière semblable à celle illustrée sur la Figure 1.7, sauf que l'énergie doit traverser une grande "distance" en nombre d'onde dans le spectre de Fourier avant d'être dissipée.

Si les écoulements turbulents sont si complexes spatiotemporellement, c'est que dans bien des situations il existe une énorme disparité entre l'échelle globale L à laquelle est injectée l'énergie, et l'échelle η (disons) où la viscosité peut dissiper l'énergie au même taux que celui de l'injection, "forçant" ainsi la formation d'un spectre d'échelles spatiales intermédiaires servant à transporter l'énergie des échelles L jusqu'aux échelles où l'énergie peut être dissipée à un taux suffisamment rapide.

Cette vision de l'énergétique de la cascade turbulente atteint sa maturité avec la théorie de Kolmogorov. Son hypothèse fondamentale est que les tourbillons à une certaine échelle ($\ell \equiv k^{-1}$ disons) ne reçoivent de l'énergie que de l'échelle spatiale supérieure (2ℓ), et ne la transmettent qu'à l'échelle inférieure ($\ell/2$). On décrirait donc schématiquement une cascade d'énergie à la Kolmogorov comme:

$$\text{Injection} \rightarrow k \rightarrow 2k \rightarrow 4k \rightarrow 8k \rightarrow 16k \rightarrow \dots \rightarrow \text{Dissipation} \quad (1.115)$$

Le fait qu'un nombre d'onde quelconque (k^*) n'interagisse qu'avec ses "voisins logarithmiques" à $k^*/2$ et $2k^*$ revient à une hypothèse de **similarité** dans la dynamique de l'interaction entre les différentes tailles de tourbillons. Dénotant par ε l'énergie par unité de masse introduite par unité de temps par l'écoulement moyen à une échelle L , les hypothèses de similarité et stationarité impliquent qu'à toute échelle $\ell < L$, on doit avoir

$$\varepsilon \sim \frac{u_\ell^3}{\ell} . \quad (1.116)$$

Cette expression est obtenue en supposant que les tourbillons dissipent leur énergie cinétique ($\propto u_\ell^2$) en un temps caractéristique correspondant à leur temps de retournement ℓ/u_ℓ . Dans un état stationnaire, le taux de transfert d'énergie d'une échelle à l'autre doit être le même à toutes les échelles, et égal au taux d'injection d'énergie par l'écoulement moyen dans les plus grands tourbillons. Cette contrainte sur l'éq. (1.116) impose une relation entre la vitesse caractéristique d'un tourbillon et son échelle spatiale:

$$u_\ell \propto \ell^{1/3} , \quad (1.117)$$

d'où

$$\frac{\partial u_\ell}{\partial \ell} \sim \ell^{-2/3} . \quad (1.118)$$

On voit déjà que les plus grands tourbillons ont les plus grandes vitesses, mais les plus petits sont caractérisés par les plus grands cisaillements locaux. À mesure que ℓ diminue, on ne peut qu'en arriver à une échelle spatiale (η) où la viscosité peut enfin agir sur ces forts cisaillements et dissiper l'énergie. À cette échelle on peut écrire

$$\varepsilon \sim \frac{\Phi_\nu}{\rho} \sim \nu \left(\frac{u_\eta}{\eta} \right)^2 , \quad (1.119)$$

où la seconde égalité est obtenue par analyse dimensionnelle de la fonction de dissipation visqueuse (voir §1.2.6). Mais ceci doit également être égal au taux d'injection d'énergie depuis l'échelle spatiale précédente, i.e., $\varepsilon \sim u_\eta^3/\eta$; de concert avec l'éq. (1.119) ceci conduit à:

$$\eta = \nu^{3/4} \varepsilon^{-1/4} , \quad u_\eta = (\nu \varepsilon)^{1/4} . \quad (1.120)$$

Ceci est un résultat tout à fait remarquable. Connaissant la viscosité du fluide et le taux d'injection d'énergie aux grandes échelles, on peut prédire à quelle échelle spatiale sera dissipée l'énergie, et quelle sera la vitesse du fluide à cette échelle. Il est facile de vérifier qu'à l'échelle η , le nombre de Reynolds *local* est $\text{Re}_\eta = 1$, en accord avec l'idée que la viscosité joue un rôle prédominant dans la dynamique de l'écoulement à cette échelle dite dissipative.

La Théorie de Kolmogorov prédit que la densité spectrale d'énergie prend la forme d'une loi de puissance en fonction du nombre d'onde k ($\propto 1/\ell$), appelée *Loi de Kolmogorov*:

$$E(k) = K_0 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (1.121)$$

où K_0 est la **constante de Kolmogorov**, dont la détermination expérimentale donne toujours $\simeq 1.45$, et ce indépendamment de la valeur de la viscosité du fluide. Il est tout à fait remarquable que la dépendance en $k^{-5/3}$ de la Loi de Kolmogorov ait été vérifiée expérimentalement et numériquement dans une vaste gamme de systèmes naturels où les taux d'injection d'énergie ε varient énormément. Malgré son statut phénoménologique, dans le sens qu'elle n'a jamais été démontré rigoureusement à partir de principes premiers, la Loi de Kolmogorov est très littéralement une Loi Universelle de la turbulence hydrodynamique.

1.5.4 L'approche de Reynolds

Dans bien des situations, il n'est pas nécessairement utile de décrire un écoulement turbulent dans tous ses détails. Prenons par exemple le transport convectif de l'énergie dans une étoile; d'un côté, l'écoulement y est d'une indubitable complexité; par contre, il est tout aussi clair que globalement l'énergie thermique est transportée vers la surface. Si l'objectif est le calcul de la luminosité, une description détaillée de chaque tourbillon n'est pas nécessaire.

L'idée est donc d'obtenir des équations hydrodynamiques nous permettant de calculer le comportement moyen d'un écoulement turbulent $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Supposons que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ soit incompressible et puisse être décomposé en deux contributions, l'une correspondant à la partie "moyenne" de l'écoulement, et l'autre à la partie "turbulente", soit les fluctuations se produisant sur de petites échelles spatiales et temporelles, et qui *en moyenne* ne contribuent pas à \mathbf{u} :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)}_{\text{écoulement moyen}} + \underbrace{\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)}_{\text{fluctuations}}. \quad (1.122)$$

Attention, il ne s'agit pas ici d'une linéarisation: aucune hypothèse n'est introduite quant aux grandeurs relatives de \mathbf{U} et \mathbf{u}' . Par contre, nous allons supposer —et c'est ici l'hypothèse-clef— que la partie moyenne de l'écoulement, \mathbf{U} , ne varie que très lentement en fonction de la position, soit sur une échelle spatiale L très grande par rapport à l'échelle spatiale λ caractérisant la partie fluctuante de l'écoulement. Autrement dit, il existe une *séparation d'échelle* entre \mathbf{U} et \mathbf{u}' . Définissons maintenant une moyenne spatiale sur une échelle intermédiaire ℓ telle que $\lambda \ll \ell \ll L$, via la relation

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\ell^3} \int_x^{x+\ell} A \, d\mathbf{x}^*, \quad (1.123)$$

Puisque \mathbf{u}' présente une moyenne nulle lorsqu'intégré sur un intervalle $\ell \gg \lambda$, et \mathbf{U} ne varie que très peu sur un intervalle $\ell \ll L$, on aura:

$$\langle \mathbf{U} \rangle = \mathbf{U}, \quad \langle \mathbf{u}' \rangle = 0. \quad (1.124)$$

Considérons maintenant l'équation d'Euler en version incompressible, écrite en termes de l'écoulement "total" \mathbf{u} :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1.125)$$

où l'on se rappellera que la gravité, si présente, peut être absorbée dans la pression via le potentiel gravitationnel. Prenons maintenant la moyenne spatiale de ces équations. Dans la mesure où les dérivées spatiales présentes dans les équations ci-dessus réfèrent aux variations spatiales sur l'échelle L , ces dérivées commutent avec notre opérateur de moyenne $\langle \rangle$, ce dernier opérant

à l'échelle intermédiaire ℓ . Écrites en notation indicielle et après substitution de l'éq. (1.122) et de son équivalent pour la pression, l'éq. (1.125) devient:

$$\frac{\partial(U_i + u'_i)}{\partial t} + \underbrace{(U_j + u'_j) \frac{\partial(U_i + u'_i)}{\partial x_j}}_{\equiv \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(P + p')}{\partial x_i}. \quad (1.126)$$

Considérons tout d'abord le comportement du terme $\propto \nabla p$ sous l'action de notre opérateur de moyenne spatiale; puisque cet opérateur est lui-même linéaire, on aura,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\rho} \frac{\partial(P + p')}{\partial x_i} \right\rangle &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\overbrace{\langle P \rangle}^{\equiv P} + \overbrace{\langle p' \rangle}^{=0})}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (1.127)$$

d'où les fluctuations ainsi que l'opérateur de moyenne ont tous les deux disparu. Un résultat semblable est obtenu pour le terme impliquant la dérivée temporelle au membre de gauche de l'éq. (1.125), puisque cette dérivée commute avec l'opérateur de moyenne spatiale. Il ne nous reste plus à traiter que le terme nonlinéaire $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$; commençons par le développer algébriquement:

$$(U_j + u'_j) \frac{\partial(U_i + u'_i)}{\partial x_j} = U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + U_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}. \quad (1.128)$$

La moyenne spatiale de cette expression fait disparaître les second et troisième termes, mais en général pas le dernier; l'équation de Navier-Stokes pour l'écoulement moyen prend donc la forme:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i u'_j \rangle. \quad (1.129)$$

où on a utilisé le fait que:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i u'_j \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_j) \right\rangle = \left\langle u'_i \underbrace{\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}}_{\equiv \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle. \quad (1.130)$$

L'équation (1.129) est identique aux équations de Navier-Stokes pour l'écoulement complet (éq. (1.125)), sauf pour l'apparition du dernier terme à son membre de droite. Celui-ci a la forme d'une divergence d'un tenseur d'ordre deux. Ce tenseur, appelé *stress de Reynolds*, "contient" toute l'influence de la partie fluctuante \mathbf{u}' de l'écoulement sur sa partie moyenne \mathbf{U} . Il s'agit ici clairement d'un tenseur symétrique, contenant donc un maximum de six composantes indépendantes. Notons que sa moyenne spatiale peut, en principe, produire des termes positifs, négatifs, ou nuls, dépendant de la présence ou l'absence de corrélations entre les fluctuations de vitesse. Conséquemment, *sa divergence n'est pas nécessairement nulle*. Le terme $\partial \langle u'_i u'_j \rangle / \partial x_j$ au membre de droite de l'éq. (1.129) peut donc, en principe, agir comme une force par unité de masse qui *produit* un écoulement moyen \mathbf{U} ; c'est la **cascade inverse**, puisque dans un tel cas l'énergie passe des petites aux grandes échelles, soit dans la direction opposée (dans l'espace de Fourier) de celle considérée à la section précédente. On en examine un exemple spécifique à la section qui suit.

1.5.5 Convection et cascade inverse

Dans les systèmes en rotation, la force de Coriolis agissant sur l'écoulement aux petites échelles peut introduire une corrélation entre les composantes turbulentes. Le stress de Reynolds y étant

associé, plus spécifiquement ses composantes $\langle u'_r u'_\phi \rangle$ et $\langle u'_\theta u'_\phi \rangle$, est le principal moteur direct de la *rotation différentielle* dans les étoiles qui, comme le soleil, ont une zone convective de profondeur substantielle sous leur photosphère. Bien qu'ils ne soient pas directement accessible à l'observation astronomique, les coeurs convectifs des étoiles massives sont également en état de rotation différentielle, du moins si l'on en croit les simulation numériques !

Le paramètre-clef s'avère être le nombre de Rossby défini précédemment à la §1.4; dans un système convectif on définit ce dernier en terme de la vorticité moyenne associée à la composante turbulente de l'écoulement:

$$\text{Ro}_c = \frac{\langle |\nabla \times \mathbf{u}'| \rangle}{\Omega} \quad (1.131)$$

Notons que l'utilisation de la vorticité moyenne sert ici d'estimé pour le rapport U/L dans notre définition originale du nombre de Rossby (voir l'éq. (1.101)).

La Figure 1.8A—C montre des exemples de la rotation différentielle produite dans trois simulations hydrodynamiques globales (i.e., 3D sur la sphère) de la convection dans une étoile de type solaire. Le première (à gauche) est caractérisée par un nombre de Rossby convectif $\text{Ro}_c \simeq 0.3$, la seconde (au centre) par $\text{Ro}_c \simeq 1.1$, et la troisième est calculée sans rotation ($\text{Ro}_c \rightarrow \infty$). Dans les trois cas il s'agit d'instantanés extraits des simulations à un pas de temps spécifique. La base de la zone convective est indiquée par l'arc de cercle en tirets, et l'échelle de couleur code la fréquence de rotation $\omega(r, \theta)/2\pi \equiv \langle u_\phi \rangle / (2\pi r \sin \theta)$. Dans les simulations en (A) et (B), une *rotation différentielle* substantielle est présente dans toute la zone convective, mais disparaît rapidement dès qu'on pénètre dans le coeur radiatif. À bas Nombre de Rossby (haute influence rotationnelle, en A) la rotation différentielle est caractérisée par une rotation rapide des régions équatoriales, tandis qu'à haut Nombre de Rossby (faible influence rotationnelle, en B) la rotation y est minimale. Le soleil opère dans le premier de ces régimes; du point de vue de l'influence rotationnelle sur la convection, le soleil est un rotateur rapide! On remarque aussi, dans les deux cas, la tendance marquée qu'ont les isocontours de fréquence de rotation à s'aligner verticalement, particulièrement aux basses latitudes; c'est ici une conséquence directe du théorème de Taylor-Proudman (voir §1.4.2).

Dans la limite $\text{Ro}_c \rightarrow \infty$, la rotation différentielle disparaît; le signal de faible amplitude visible sur la Fig. 1.8C est une forme de fluctuation turbulente qui disparaît complètement si l'on effectue une moyenne temporelle sur quelques temps de retournement convectifs. Ce n'est pas le cas des profils en A et B, qui sont stationnaires ($\partial/\partial t = 0$) en première approximation.

Dans de telles simulations, travaillant en coordonnées sphériques polaires (r, θ, ϕ) , il est naturel de définir l'opérateur de moyenne en terme d'une moyenne zonale, i.e.:

$$\langle \mathbf{u} \rangle \equiv \mathbf{U}(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{u}(r, \theta, \phi, t) d\phi, \quad (1.132)$$

où \mathbf{u} est le champ de vitesse total produit par la simulation. Les instantanés de la rotation différentielles portés en graphique sur la Fig. 1.8 correspondent ainsi à $\omega(r, \theta, t^*) = \mathbf{U}(r, \theta, t^*) / (r \sin \theta)$. Une fois la partie moyenne de l'écoulement calculée via l'éq. (1.132), la composante aux petites échelles est simplement définie selon:

$$\mathbf{u}'(r, \theta, \phi, t) = \mathbf{u}(r, \theta, \phi, t) - \mathbf{U}(r, \theta, t). \quad (1.133)$$

Négligeant les termes dissipatifs (visqueux), la composante- ϕ de l'équation du mouvement (1.129) peut s'exprimer en forme conservative selon:

$$gr \sin \theta \frac{\partial U_\phi}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\underbrace{gr \sin \theta (U_\phi + \Omega r \sin \theta) \mathbf{U}}_{\text{CM}} + \underbrace{\langle u'_\phi \mathbf{u}' \rangle}_{\text{SR}} \right] = 0. \quad (1.134)$$

On note deux contributions au membre de droite: le flux de moment cinétique transporté par l'écoulement moyen dans les plans méridiens ("CM"), et la partie zonale des stress de

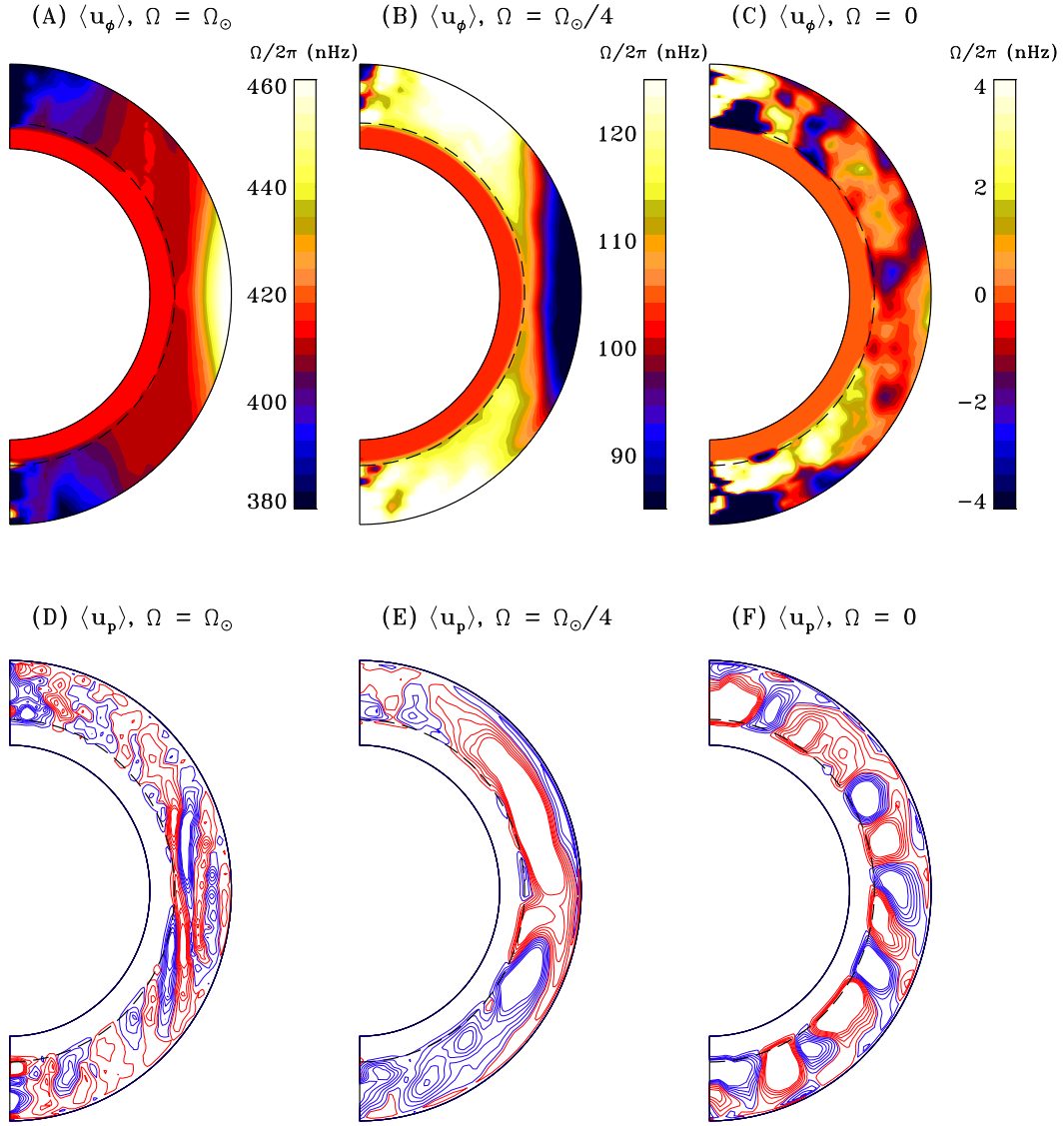


Figure 1.8: Rangée du haut: instantanés de la fréquence locale de rotation ($\equiv \omega(r, \theta)/2\pi$) moyennée longitudinalement dans trois simulations hydrodynamiques de la convection stellaire. Le diagramme est tracé dans le plan $[r, \theta]$, avec l'axe de rotation/symétrie orienté verticalement et coïncidant avec la gauche du diagramme. La fréquence de rotation est mesurée en nanoHertz, tel que codée via l'échelle de couleur à droite. Les tirets à $r/R = 0.7$ délimitent la zone radiative, hydrodynamiquement stable, de la zone convective ($r/R > 0.7$), où les stress de Reynolds propulsent une rotation différentielle et un écoulement global dans les plans méridiens. Noter les étendues très différentes des échelles de couleur. Rangée du bas: lignes d'écoulement pour la circulation méridienne, orientées dans le sens horaire (antihoraire) pour les traits rouges (bleus). Simulations EULAG et graphisme par Patrice Beaudoin.

Reynolds (“SR”). Dans une configuration stationnaire ($\partial/\partial t \equiv 0$), ces deux contributions doivent s’équilibrer. L’écoulement méridien joue donc un rôle important dans la dynamique zonale. Les trois diagrammes au bas de la Fig. 1.8 montrent les lignes d’écoulement pour cette circulation méridienne, dans nos trois mêmes simulations. La transition d’un écoulement méridien de type quadrupolaire, à bas Ro , vers un écoulement multicellulaire en latitude et rayon, à Ro plus élevé, se produit au même Ro que la transition déjà mentionnée dans la rotation différentielle équatoriale. Ces deux transitions reflètent un changement profond dans la dynamique rotationnelle de ces trois simulations, que vous aurez l’occasion d’examiner plus en détail dans le cadre d’un des exercices. Encore une fois, l’écoulement méridien en apparence très multicellulaire en (F) pour la simulation sans rotation est de très faible amplitude et disparaît si l’on moyenne sur un temps plus grand que celui du retournement convectif, contrairement à ceux en (D) et (E).

1.5.6 Les diffusivités turbulentes

Dans le cas d’une simulation, comme sur la Figure 1.8, on peut calculer explicitement les composantes du tenseur de Reynolds —tant que la turbulence montre une bonne séparation d’échelle. Cependant, toute l’idée de la formulation statistique de la turbulence est d’éviter d’avoir à considérer explicitement les petites échelles de l’écoulement, i.e., on veut simplement solutionner l’équation (1.129); il faudra donc, minimalement, trouver une manière d’exprimer le tenseur $\langle u'_i u'_j \rangle$ en fonction de l’écoulement moyen \mathbf{U} . Ceci peut paraître suspect comme procédure, néanmoins c’est souvent une instabilité de l’écoulement aux grandes échelles qui produit les fluctuations aux petites échelles, donc un lien physique doit exister.

Imaginons un écoulement turbulent comme étant composé d’une superposition de petits tourbillons de taille typique s , de vitesse typique v , et ayant un temps de vie de l’ordre du temps de retournement s/v . Ces tourbillons se forment et se dissipent, et entre les deux se déplacent de manière effectivement aléatoire. La Figure 1.9 illustre schématiquement une situation où un cisaillement $\partial U_y/\partial x$ est présent dans l’écoulement aux grandes échelles. Si une bonne séparation d’échelle existe entre \mathbf{U} et la composante turbulente de l’écoulement, alors on peut se définir deux éléments de volume contigus de dimension linéaire beaucoup plus grandes que la taille des tourbillons, mais pour lesquels la vitesse U_y ne varie que très peu. Un tourbillon “A” traversant de l’élément de gauche vers celui de droite s’y dissipera, et ce faisant y déposera son excès de quantité de mouvement verticale, tandis qu’un élément “B” traversant dans le sens opposé déposera dans l’élément de gauche un déficit de quantité de mouvement par rapport aux autres tourbillons dans l’élément de droite. L’effet net est donc de freiner le mouvement vertical de l’élément de gauche, et accélérer celui de l’élément de droite. C’est tout comme si une force de “friction” agissait à la surface de contact des deux éléments de fluide.

Remplaçons les tourbillons sur la Figure 1.9 par les constituants microscopiques du fluide, et on se retrouve avec l’origine microscopique de la force visqueuse. On a vu précédemment qu’à l’échelle macroscopique cette force pouvait être supposée proportionnelle au tenseur des déformation. Appliquons la même logique ici et écrivons:

$$-\langle u'_i u'_j \rangle = \nu_T \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.135)$$

où ν_T est une constante de proportionnalité dont le sens sera clarifié sous peu. Supposons de plus que la turbulence est isotrope; on s’attend alors à ce qu’il n’existe pas de corrélation entre les composante de \mathbf{u}' , impliquant que le tenseur des stress est diagonal; Pour un écoulement incompressible, l’expression ci-dessus n’a que trois composantes non-nulles, soit $2\nu_T D_{ii}$, $2\nu_T D_{jj}$, et $2\nu_T D_{kk}$ (viz. les éqs. (1.32)), d’où

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu_T \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (1.136)$$

Modulo la notation indicielle, cette dernière expression est identique au terme visqueux dans la forme incompressible de l’équation de Navier–Stokes (cf. éq. (1.36)). Le facteur de propor-

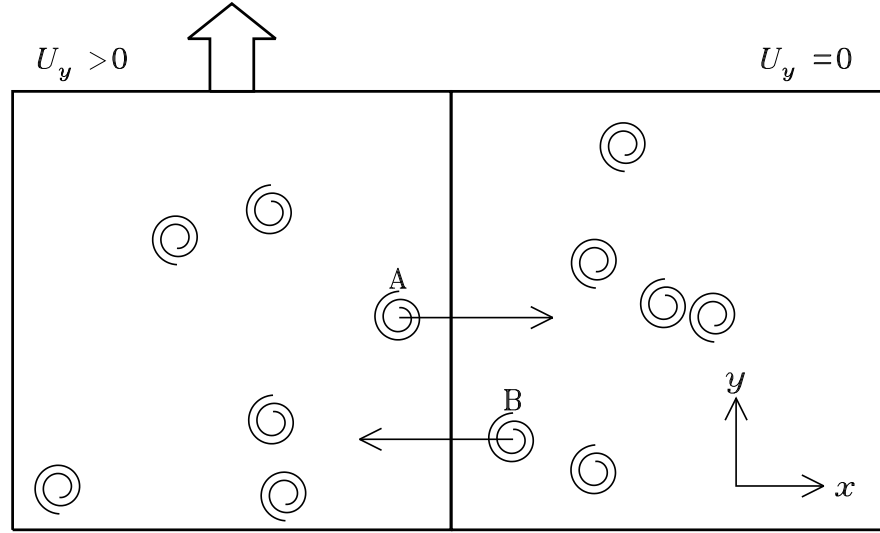


Figure 1.9: Redistribution de la quantité de mouvement en y entre deux éléments contigus de fluide turbulent sujet à un cisaillement aux grandes échelles. Le tourbillon “A” traversant dans l’élément de droite y déposera, au moment de sa dissolution, son excès de quantité de mouvement en y , mais pas le tourbillon “B” traversant de droite vers la gauche, puisque l’élément de fluide à droite est au repos à l’échelle de l’écoulement moyen. L’effet net est de ralentir le mouvement vertical de l’élément de fluide de gauche, et d’accélérer vers le haut l’élément de droite (voir texte).

tionalité ν_T peut donc être interprété physiquement comme une *viscosité turbulente* (unités $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$). Ici cette viscosité turbulente ne peut que freiner l’écoulement aux grandes échelles, une conséquence de la forme diagonale adoptée pour le tenseur des stress de Reynolds. Ceci dit, en général, pour un écoulement turbulent bien développé, on aura

$$\nu_T \gg \nu . \quad (1.137)$$

Nous avons donc réduit (drastiquement) le problème à la spécification d’un seul coefficient numérique, soit le coefficient de diffusion turbulente. La clef est maintenant d’en calculer et/ou spécifier la valeur numérique.

On se rappellera du modèle de Kolmogorov que les plus grands tourbillons contribuent le plus au transport; on choisit donc les valeurs des vitesse (u_l) et échelle spatiale (l) associées à ces plus grands tourbillons pour construire une quantité ayant les unités requises ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$) via la combinaison

$$\nu_T \sim u_l l . \quad (1.138)$$

Évidemment, il est difficile de prédire, *a priori*, quelles seront les valeurs de ces quantités dans tel ou tel écoulement. Cependant, dans les écoulements naturels on peut parfois *mesurer* directement u_l et l , et “calculer” une valeur de ν_T qui puisse être utilisée pour caractériser la dynamique de l’écoulement aux grandes échelles. Cet écoulement simulé est ensuite comparé aux mesures observationnelles de l’écoulement aux grandes échelles afin de valider *post facto* la procédure de calcul de ν_T .

Considérons un exemple astrophysique très bien contraint observationnellement, soit la photosphère solaire. La convection y montre une échelle spatiale caractéristique bien définie, appelée *granulation*, avec $l \sim 1000 \text{ km}$, et une vitesse typique $u_l \sim 1 \text{ km s}^{-1}$ (voir Fig. 1.10). On trouve ainsi $\nu_T \simeq 10^9 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, ce qui est astronomiquement plus grand que la viscosité micro-

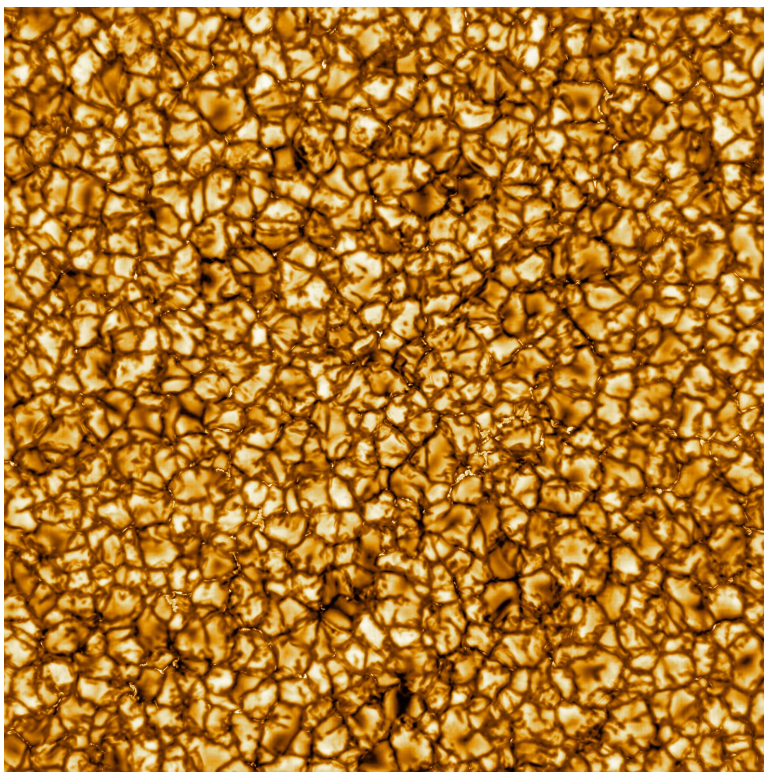


Figure 1.10: La granulation solaire, manifestation photosphérique des écoulements convectifs présents dans le 30% extérieur de cette étoile. Cette image en intensité montre clairement le patron de cellules de fluide chaud ascendant (clair) délimité par un réseau d’allées de fluide froid (foncé) descendant. L’image couvre une surface de 36.5×36.5 Mm ($1\text{Mm} = 10^3$ km), soit un minuscule 1.2% de la surface du soleil. Ceci est une des toutes premières images prises par le DKIST (Daniel K. Inouye Solar Telescope), en janvier 2020. Source: NSF/AURA/NSO [Voir aussi animation sur Youtube: youtube.com/watch?v=tZpTJzVtKHw]

scopique, $\nu \simeq 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Cette situation est typique des écoulements turbulents non seulement en astrophysique, mais aussi en océanographie et sciences atmosphériques.

Cette approche est couramment utilisée dans des situations où, la vérification expérimentale *post facto*, est impossible, ou possible seulement de manière très indirecte via des mesures de quelque chose qui est affecté par la turbulence. L’astrophysique regorge de tels “calculs” de viscosité et diffusivité turbulentes, utilisant par exemple les abondances chimiques mesurées dans les atmosphères des étoiles comme contraintes sur l’efficacité de la diffusion turbulente. Les résultats qui en découlent sont loin d’être sans intérêt, mais doivent toujours être pris avec un solide grain de sel.

Bibliographie:

Bien que j’y aie fait plusieurs ajouts substantiels, ce chapitre a été écrit en bonne partie à partir d’extraits remaniés des notes du cours PHY-3140 *Hydrodynamique*, dont bibi est l’auteur. Une version pdf de ces notes est disponible sur

www.astro.umontreal.ca/~paulchar/phy3140/phy3140.html

Ces notes peuvent certainement servir de référence additionnelle pour la partie hydrodynamique de ce cours; je recommanderais également le bouquin suivant:

Choudhuri, A.R., *The Physics of Fluids and Plasma*, Cambridge University Press, 1998.

qui, malgré son titre sonnait assez général, est fortement orienté vers l'astrophysique. Au niveau de l'hydrodynamique classique, les trois ouvrages suivants sont mes préférés:

Tritton, D.J., *Physical Fluid Dynamics*, 2nd ed., Oxford University Press (1988),

Acheson, D.J., *Elementary Fluid Dynamics*, Clarendon Press (1990)

Landau, L., et Lifschitz, E., *Fluid Mechanics*, Oxford: Pergamon Press (1959).

Ceux/celles voulant *vraiment* approfondir les notions couvertes dans ce chapitre peuvent consulter les ouvrages suivants. Pour les ondes dans les fluides:

Lighthill, J. *Waves in fluids*, Cambridge University Press (1978),

pour les fluide en rotation:

Greenspan, H.P., *Theory of Rotating Fluids*, Cambridge University Press (1968),

Tassoul, J.-L., *Theory of Rotating Stars*, Princeton University Press (1978),

et pour la turbulence:

McComb, W.D., *The Physics of Fluid Turbulence*, Oxford University Press (1990),

Frisch, U., *Turbulence*, Cambridge University Press (1995).

Davidson, P.A., *Turbulence*, Cambridge University Press (2004)

Sur la dynamique de la rotation différentielle dans les étoiles de type solaire, voir

Miesch, M.S., & Toomre, J., *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **41**, 317-45 (2009).

Chapitre 2

La Magnétohydrodynamique

Pour tout résumer en une seule phrase, la *magnétohydrodynamique* (ci-après MHD) est la branche de l'hydrodynamique qui s'intéresse au comportement des fluides (1) électriquement conducteurs mais globalement neutres, (2) s'écoulant de manière non-relativiste, (3) tout en demeurant assujettis à la Loi d'Ohm. Il est en fait remarquable que la majorité des écoulements astrophysiques satisfassent à ces trois conditions à prime abord plutôt contraignantes. Les exceptions les plus notables sont évidemment les écoulements très relativistes associés aux objets compacts comme les étoiles à neutrons et les trous noirs.

Notre tâche est maintenant de généraliser les équations de l'hydrodynamique de manière à y incorporer les effets des champs électrique et magnétique, et d'obtenir des équations gouvernant l'évolution de ces champs. Il ne faut pas perdre de vue que la neutralité électrique de la quasi-totalité des fluides astrophysiques n'exige pas que les constituants microscopiques desdits fluides soient eux-même électriquement neutres, mais plutôt que les densités de charges positive et négative soient identiques (ou vraiment pas loin). C'est là l'une des conditions définissant l'approximation dite magnétohydrodynamique.

2.1 L'équation d'induction magnétohydrodynamique

Notre point de départ sera, vous l'avez pressenti j'espère, les très justement fameuses équations de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \quad [\text{Loi de Gauss}] , \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad [\text{Loi Anonyme}] , \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad [\text{Loi de Faraday}] , \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad [\text{Loi d'Ampère/Maxwell}] , \quad (2.4)$$

où, dans le Système International d'unités, le champ électrique est mesuré en N C^{-1} ($\equiv \text{V m}^{-1}$), et le champ magnétique¹ \mathbf{B} en tesla (T). La quantité ρ_e est la densité de charge électrique (C m^{-3}), et \mathbf{J} est la densité de courant électrique (A m^{-2}). La permittivité ε_0 ($= 8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}$ dans le vide) et la perméabilité magnétique μ_0 ($= 4\pi \times 10^{-7} \text{N A}^{-2}$ dans le vide) peuvent être considérées constantes dans tout ce qui suit, les fluides électriquement polarisables ou ferromagnétiques étant plutôt rares dans les contextes qui nous occuperons dans les chapitres à venir.

¹A strictement parler, \mathbf{B} devrait être appelé densité de flux magnétique ou quelque chose du genre, mais j'ai choisi de nous en tenir ici à la terminologie communément utilisée en astrophysique.

Notre première étape sera, avec tout le respect qu'on doit au bonhomme, de faire sauter le courant de déplacement de Maxwell dans l'éq. (2.4). Ceci est justifiable si l'écoulement est non-relativiste et aucune batterie n'est branchée ou débranchée dans les environs; deux énoncés à prime abord aussi gratuits qu'étranges, mais qui se verront justifiés un peu plus loin (§2.3). Nous retombons donc à la forme originale de l'équation d'Ampère:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (2.5)$$

L'interprétation physique de la Loi d'Ampère est sans équivoque: les courants électriques sont la seule source des champs magnétiques.

De manière générale, l'imposition d'un champ électrique \mathbf{E} à travers un milieu électriquement conducteur produira une densité de courant électrique \mathbf{J} . La Loi d'Ohm postule que la relation entre \mathbf{J} et \mathbf{E} est linéaire:

$$\mathbf{J}' = \sigma \mathbf{E}', \quad (2.6)$$

où σ est la conductivité électrique (unités: $\text{C}^2 \text{s}^{-1} \text{m}^{-3} \text{kg}^{-1} \equiv \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$, $\Omega \equiv \text{Ohm}$). Dans un plasma, la Loi d'Ohm ne tient la route que si le plasma est *collisionnel*, dans le sens que la fréquence de collision entre les constituants microscopiques du plasma est beaucoup plus élevée que toutes les fréquences plasma caractérisant le milieu. Les primes ("'") dans l'éq. (2.6) sont ajoutés pour rendre explicite le fait que la Loi d'Ohm ne s'applique qu'à une substance conductrice *au repos*. Dans le cas d'un fluide s'écoulant à une vitesse \mathbf{u} (relativiste ou non), l'éq. (2.6) ne s'applique qu'à un repère se déplaçant avec le fluide. Nous devons donc effectuer une transformation de Lorentz vers le repère inertiel du "laboratoire". Dans la limite non-relativiste ($u/c \ll 1$, donc $\gamma \rightarrow 1$), la transformation habituelle pour la densité de courant se réduit à $\mathbf{J}' = \mathbf{J}$, et celle pour le champ électrique devient $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$. Ceci conduit à la version dite généralisée de la Loi d'Ohm:

$$\boxed{\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})}, \quad (2.7)$$

ou encore, en utilisant la Loi d'Ampère et quelques manipulations algébriques:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} (\nabla \times \mathbf{B}). \quad (2.8)$$

Il s'agit maintenant d'introduire cette expression pour le champ électrique dans la Loi de Faraday (2.3), ce qui conduit directement à la très célèbre *équation d'induction magnétohydrodynamique*:

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B})}, \quad (2.9)$$

où

$$\eta = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \quad [\text{m}^2 \text{s}^{-1}] \quad (2.10)$$

est la *diffusivité magnétique*. Le premier terme au membre de droite de l'éq. (2.9) représente l'action inductive d'un fluide s'écoulant dans un champ magnétique, tandis que le second terme capture la dissipation des courants électriques supportant ce même champ magnétique.

Il ne faut pas perdre de vue que toute solution de l'éq. (2.9) doit aussi satisfaire l'éq. (2.2) en tout temps. Il est en fait facile de démontrer (faites le!) que si $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ à $t = 0$, alors la forme même de l'éq. (2.9) assure que la divergence de \mathbf{B} demeurera nulle à tout temps subséquent ².

2.2 Analyse dimensionnelle

L'évolution d'un champ magnétique sous l'action d'un écoulement \mathbf{u} dépendra beaucoup de l'importance relative du terme d'induction au membre de droite de l'éq. (2.9) par rapport

²Cette conclusion ne tient que sous une arithmétique exacte; si l'éq. (2.9) est solutionnée numériquement, on doit souvent prendre des mesures supplémentaires pour assurer $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ durant toute l'évolution temporelle.

au terme dissipatif. Sous quelles conditions le premier dominera-t-il le second ? C'est là une question fort complexe, mais une première réponse peut s'obtenir par analyse dimensionnelle de l'éq. (2.9); il s'agit de remplacer la dérivée temporelle par $1/\tau$ et les dérivées spatiales par $1/\ell$, où τ et ℓ sont des échelles temporelle et spatiale qui caractérisent adéquatement les variations de \mathbf{u} et de \mathbf{B} :

$$\frac{B}{\tau} = \frac{u_0 B}{\ell} + \frac{\eta B}{\ell^2}, \quad (2.11)$$

où u_0 et B représentent des valeurs “typiques” de la vitesse de l'écoulement et du champ magnétique dans le domaine d'intérêt. Le rapport du premier terme au membre de droite de l'éq. (2.11) sur le second est une quantité adimensionnelle appelée *Nombre de Reynolds magnétique*³:

$$\boxed{R_m = \frac{u_0 \ell}{\eta}}, \quad (2.12)$$

Ceci mesure l'importance relative de l'induction par rapport à la dissipation *sur des échelles spatiales de l'ordre de ℓ* . Notez bien que R_m ne dépend pas de l'intensité du champ magnétique, une conséquence directe de la linéarité (en \mathbf{B}) de l'équation d'induction MHD. Notre analyse dimensionnelle indique simplement que dans la limite $R_m \gg 1$, l'induction par l'écoulement \mathbf{u} domine l'évolution de \mathbf{B} , tandis que dans la limite opposée $R_m \ll 1$, l'induction ne contribue que de manière négligeable et \mathbf{B} se dissipe tout simplement sous l'effet de la résistance Ohmique.

Travailler dans l'une ou l'autre de ces limites devrait nous simplifier grandement la vie. Si $R_m \ll 1$, alors on peut ne conserver que le second terme au membre de droite de l'éq. (2.11), dans lequel cas on a

$$\boxed{\tau = \frac{\ell^2}{\eta}}. \quad (2.13)$$

C'est le *temps de diffusion magnétique*. Il mesure le temp requis par un champ magnétique contenu dans un volume de dimensions linéaires de l'ordre de ℓ pour se dissiper. Il s'avère que pour la plupart des objets astrophysiques, ce temps caractéristique est immensément long, (voir Tableau 2.1), et même souvent plus grand que l'âge de l'Univers. Ce n'est pas que les plasmas astrophysiques soient de si bons conducteurs électriques —le cuivre à la température de la pièce conduit déjà beaucoup mieux,— mais plutôt que la taille des objets astrophysiques est vraiment... astronomique! L'omniprésence des champs magnétiques en astrophysique n'est donc pas surprenante; par exemple, tout champ magnétique à grande échelle présent à l'intérieur d'une étoile à son arrivée sur la ZAMS y serait encore aujourd'hui avec pratiquement la même intensité. Dans le cas des étoiles, le défi est souvent de reproduire leurs variations temporelles, et en particulier les cycles magnétiques se développant sur des échelles beaucoup, beaucoup plus courtes que le temps de diffusion.

La limite opposée, $R_m \gg 1$ est la limite dite de la *MHD idéale*. C'est maintenant le premier terme au membre de droite de l'éq. (2.11), qui demeure, ce qui conduit à:

$$\tau = \frac{\ell}{u_0}, \quad (2.14)$$

C'est le *temps de retournement* associé à l'écoulement \mathbf{u} . On peut déjà remarquer qu'en régime MHD idéal, la seule solution non-triviale (i.e., $\mathbf{u} \neq 0$ et $\mathbf{B} \neq 0$) qui soit stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) et pour laquelle \mathbf{B} chute à zéro à l'infini est une solution où l'écoulement est aligné avec le champ magnétique.

Le tableau 2.1 liste une série d'estimés du nombre de Reynolds magnétique (et quantités associées) pour les mêmes systèmes astrophysiques déjà considérés au tableau 1.1⁴ Le nombre

³Noter la similarité structurelle avec le nombre de Reynolds visqueux défini précédemment à la §1.2.3, la diffusivité magnétique η remplaçant la viscosité cinématique ν au dénominateur.

⁴Choix d'échelles de longueur ℓ ($\equiv L$) comme au Tableau 1.1. Vitesses caractéristiques correspondant aux cellules convectives profondes (intérieur solaire), granulation (photosphère), vent solaire (couronne et vent solaire), et turbulence (nuages moléculaires et milieu interstellaire). Tous ces chiffres, et en particulier les vitesses

Table 2.1: Propriétés de quelques systèmes et écoulements astrophysiques, bis

Système	L [km]	σ [$\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$]	η [m^2s^{-1}]	τ [yr]	u [km/s]	R_m
Intérieur stellaire	10^5	10^6	1	10^9	0.1	10^{11}
Atmosphère solaire	10^3	10^2	100	10^3	1	10^7
Couronne solaire	10^5	10^6	1	10^8	10	10^{12}
Vent solaire (1 AU)	10^5	10^4	100	10^8	300	10^{11}
Nuage moléculaire	10^{14}	10^2	10^4	10^{17}	100	10^{18}
Milieu interstellaire	10^{16}	10^3	1000	10^{22}	100	10^{21}
Sphère de cuivre	10^{-3}	10^8	10^{-1}	10^{-7}	—	—

de Reynolds magnétique est gigantesque dans tous les cas, ce qui suggérerait que la limite de la MHD idéale est la seule qui soit d'intérêt. Mais ce n'est pas du tout si simple. D'un point de vue purement mathématique, la limite $R_m \rightarrow \infty$ de l'équation d'induction est *singulière* car l'ordre de la plus haute dérivée chute de un. C'est en fait une situation semblable à celle caractérisant l'équation de Navier–Stokes dans la limite inviscide $\nu \rightarrow 0$: dans la limite $\eta \rightarrow 0$, en général les solutions de l'éq. (2.9) ne tendent *pas* vers les solutions obtenues en posant *a priori* $\eta = 0$. De plus, il ne faut pas perdre de vue que la distinction entre les deux régimes physiques $R_m \ll 1$ et $R_m \gg 1$ n'est bien définie que si une valeur de R_m peut être définie de manière non-ambigue pour l'écoulement dans son ensemble, ce qui requiert qu'on puisse estimer a priori une échelle spatiale ℓ qui caractérise adéquatement les variations spatiales de l'écoulement ainsi que du champ magnétique, en tous points du domaine de solution et en tout temps. Au fil des chapitres à venir, il deviendra clair que ceci n'est pas toujours simple, ou même possible. Finalement, une analyse dimensionnelle du genre de celle effectuée ici perd tous les aspects géométriques du problème, e.g. en substituant $u_0 B$ pour $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$; on peut facilement imaginer des situations, par exemple un écoulement aligné au champ magnétique, où même un \mathbf{u} gigantesque n'a absolument aucun effet inductif sur \mathbf{B} .

Une autre quantité adimensionnelle qui s'avèrera importante plus loin est le *nombre de Prandtl magnétique*, défini comme le rapport des nombres de Reynolds magnétique sur visqueux, ou, de manière équivalente, de la viscosité cinématique sur la diffusivité magnétique:

$$P_m = \frac{\nu}{\eta} . \quad (2.15)$$

Pour bien des systèmes astrophysiques, cette quantité se retrouve nettement sous la valeur unitaire, typiquement 0.01–0.1, si les valeurs microscopiques de ces coefficients de transport sont utilisées; par contre, dans un système fortement turbulent, on s'attendrait plutôt à ce que $P_m \sim 1$.

En magnétohydrodynamique, le champ magnétique est ultimement produit par une densité de courant électrique, tel que stipulé par la Loi d'Ampère (éq. 2.5). Puisqu'on a supposé que le fluide/plasma est électriquement neutre aux échelles macroscopiques, cette densité de courant ne peut provenir que d'une vitesse de dérive \mathbf{v} entre les constituants microscopiques portant des charge électriques opposées. La densité de courant associée à une telle dérive est donnée par:

$$\mathbf{J} = n q \mathbf{v} , \quad (2.16)$$

où n et q sont les densités numériques et charge des particules en dérive. Une analyse dimensionnelle de la Loi d'Ampère permet d'obtenir l'estimé suivant pour la densité de courant associée à un champ magnétique de grandeur B variant sur une échelle spatiale d'ordre L : $|\mathbf{J}| \sim B/\mu_0 L \simeq 10^{-5} \text{ A m}^{-2}$, pour un champ magnétique de 10^{-3} T dans une sphère de rayon

turbulentes, sont des estimés grossiers arrondis au facteur 10 le plus près. Les estimés de la diffusivité magnétique pour les nuages moléculaires et le milieu interstellaire dépendent de manière sensible du taux d'ionisation, et s'en retrouvent d'autant plus approximatifs.

7×10^8 m, ces valeurs étant inspirées du soleil. Substituant cette valeur dans l'éq. (2.16) et en supposant un plasma proton+électron de densité moyenne 10^2 kg m^{-3} (encore le soleil... à la base de sa zone convective, à $r/R \simeq 0.7$), la vitesse de dérive s'en retrouve absolument minuscule, soit $|\mathbf{v}| \sim 10^{-15} \text{ m s}^{-1}$. Ceci est une conséquence directe du nombre tout à fait astronomique (aha) de porteurs de charge disponibles pour soutenir ce courant de dérive, i.e., $n \sim 10^{29} \text{ m}^{-3}$ (toujours à une profondeur $r/R \simeq 0.7$ dans l'intérieur solaire). C'est également pourquoi l'approximation MHD est tout à fait valide dans un tel contexte. L'induction, telle que décrite par le terme $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ au membre de droite de l'équation d'induction (2.9), résulte d'une variation de cette vitesse de dérive causée par l'action de la force de Lorentz sur les constituants microscopiques électriquement chargés, et forcés mécaniquement à traverser le champ magnétique pré-existant.

2.3 La force de Lorentz

La dérivation de l'éq. (2.9) a été rondement menée, en partie parce que nous avons fait disparaître le courant de Maxwell, et ce de manière plutôt cavalière. De plus, nous n'avons réglé que la première partie du programme, et en fait la partie facile. Nous devons maintenant quantifier l'action de la force magnétique sur l'écoulement \mathbf{u} ; et ceci s'avère être la partie la plus subtile de l'approximation magnétohydrodynamique.

Vous vous rappelez j'espère que la *force de Lorentz* ressentie par une particule portant une charge électrique q et se promenant à vitesse \mathbf{u} dans une région de l'espace traversée par des champs électrique et magnétique s'exprime comme:

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad [\text{N}]. \quad (2.17)$$

Considérons maintenant un élément de volume ΔV contenant un très grand nombre de particules portant cette même charge. Dans la limite du continu et pour un plasma collisionnel, la force totale par unité de volume (\mathbf{F}) agissant sur le volume sera la somme des forces agissant sur chacun de ses constituants microscopiques, divisé par le volume de l'élément en question:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{1}{\Delta V} \sum_k \mathbf{f}_k = \frac{1}{\Delta V} \sum_k q_k (\mathbf{E} + \mathbf{u}_k \times \mathbf{B}) \\ &= \left(\frac{1}{\Delta V} \sum_k q_k \right) \mathbf{E} + \left(\frac{1}{\Delta V} \sum_k q_k \mathbf{u}_k \right) \times \mathbf{B} \\ &= \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad [\text{N m}^{-3}], \end{aligned} \quad (2.18)$$

où la dernière égalité provient de la définition conventionnelle de la densité de charge et de la densité de courant. À ce stade, il est très tentant de simplement éliminer le terme proportionnel à \mathbf{E} , puisqu'en MHD on traite de plasmas qui globalement sont électriquement neutres, ce qui implique $\rho_e = 0$ et donc $\rho_e \mathbf{E} \equiv 0$ et voilà c'est terminé. Non seulement ce serait trop facile, mais de surcroît cela ferait violence à la relativité restreinte; voyons en quoi.

Commençons par prendre la divergence des deux cotés de la forme généralisée de la Loi d'Ohm (éq. 2.7). On utilise ensuite la Loi de Gauss (éq. 2.1) pour se débarrasser du terme en $\nabla \cdot \mathbf{E}$, et de la Loi de conservation de la charge électrique

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.19)$$

pour se débarrasser du terme en $\nabla \cdot \mathbf{J}$. Le résultat final de toute cette jonglerie physico-algébrique est l'expression suivante:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\rho_e}{(\varepsilon_0/\sigma)} + \sigma \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = 0. \quad (2.20)$$

La combinaison ε_0/σ a une unité de temps, et est nommé *temps de relaxation électrostatique*, ci-après dénoté τ_e . C'est le même temps caractéristique associé à la séparation des charges

électriques dans un conducteur soudainement exposé à un champ électrique. Dans la grande majorité des conducteurs, ce temps est excessivement petit, soit de l'ordre de 10^{-18} s !! Ceci s'explique par le fait que le champ électrique s'ajuste au déplacement des charges à la vitesse de la lumière (dans le milieu en question, ce qui est plus lentement que dans le vide mais tout de même très rapidement en termes absolus). Dans un milieu conducteur au repos ($\mathbf{u} = 0$), l'expression ci-dessus s'intègre facilement pour donner:

$$\varrho_e(t) = \varrho_e(0) \exp(-t/\tau_e), \quad (2.21)$$

d'où le nom "temps de relaxation" attribué à τ_e .

Supposons maintenant que le fluide se déplace lentement, dans le sens que son temps caractéristique est beaucoup plus long que τ_e ; ceci implique que le champ électrique induit évoluera sur un temps caractéristique semblable à celui de \mathbf{u} (au mieux), et donc que la dérivée temporelle de ϱ_e peut être négligée par rapport au terme ϱ_e/τ_e dans l'éq. (2.20). On en déduit alors que

$$\varrho_e = \varepsilon_0 \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (2.22)$$

Ceci indique qu'une densité de charge électrique nette peut être maintenue dans un fluide conducteur *en mouvement*. La force électrostatique par unité de volume y étant associée, $\varrho_e \mathbf{E}$, est clairement non-nulle; cependant elle se retrouve beaucoup plus petite que la force magnétique. Ceci se vérifie facilement par analyse dimensionnelle de l'éq. (2.18), en utilisant l'éq. (2.22) pour estimer ϱ_e :

$$\varrho_e \mathbf{E} \sim \left(\frac{\varepsilon_0 u B}{\ell} \right) \left(\frac{J}{\sigma} \right) \sim \left(\frac{u \tau_e}{\ell} \right) J B, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} \sim J B, \quad (2.24)$$

où encore une fois la Loi d'Ohm a été utilisée pour exprimer \mathbf{E} en terme de \mathbf{J} , et ℓ est une échelle spatiale caractérisant les variations de l'écoulement ainsi que du champ magnétique. On en conclut que le rapport des forces électrostatique sur magnétique est de l'ordre de $u \tau_e / \ell$. Mais, on a déjà que $\tau_e \ll 1$, et de surcroît pour un écoulement non-relativiste on peut légitimement s'attendre à ce que le temps de retournement de l'écoulement, ℓ/u_0 , soit beaucoup plus grand que le temps de transit d'une perturbation électromagnétique, $\sim \ell/c \sim \tau_e$; ces deux effets se combinent pour rendre la force électrostatique absolument minuscule en comparaison à la force magnétique. Sous ces conditions, l'éq. (2.18) devient:

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad [\text{approximation MHD}]}. \quad (2.25)$$

Il ne reste qu'à introduire cette expression au membre de droite de l'équation de Navier–Stokes (1.23)... avec un préfacteur $1/\varrho$ de manière à se retrouver avec une force par unité de masse plutôt que volume.

Il sera parfois utile d'exprimer différemment cette force de Lorentz. Utilisant les eqs. (2.2) et (2.5), ainsi que quelques identités du calcul vectoriel, on peut montrer que l'éq. (2.25) peut s'écrire alternativement comme

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\mu_0} \left[(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{B}^2) \right], \quad (2.26)$$

où $\mathbf{B}^2 \equiv \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$. Le premier terme au membre de droite représente une *tension magnétique*, tandis que le second prend la forme du gradient d'une *pression magnétique*.

Il ne nous reste plus qu'à régler cette fameuse question relative à la légitimité d'avoir fait sauter le courant de déplacement de la forme Maxwellienne de la Loi d'Ampère (eq. 2.4); ceci peut maintenant se justifier en notant, comme on l'a vu, que la dérivée temporelle de la densité de charge peut être négligée en régime non-relativiste. L'équation de conservation de la charge électrique (2.19) se réduit alors à

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0; \quad (2.27)$$

prenant la divergence des deux cotés de l'éq. (2.4) conduit alors à

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\varepsilon_0 \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{\partial \rho_e}{\partial t} . \quad (2.28)$$

Ceci démontre que négliger la dérivée temporelle de la densité de charge est équivalent à omettre le courant de déplacement de Maxwell dans l'éq. (2.4).

En résumé, tant que des événements électromagnétiques rapides comme la connexion ou déconnexion d'une batterie ne se produisent pas, ou n'importe quel autre phénomène transitoire produisant un fort $\partial \rho_e / \partial t$, sous l'approximation magnétohydrodynamique les énoncés suivants sont tous équivalents:

- Les écoulements sont non-relativistes;
- La force électrostatique est négligeable en comparaison à la force magnétique;
- Le courant de déplacement de Maxwell peut être omis.

Tout ceci, évidemment, résultant de l'utilisation de la Loi d'Ohm, et ne s'appliquant donc qu'à des plasma collisionnels.

Dans bien des systèmes astrophysiques, le champ magnétique domine la dynamique et l'énergétique; en l'absence de forçage externe, un tel système devrait donc évoluer vers un état d'équilibre caractérisé par une force de Lorentz nulle:

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0 . \quad (2.29)$$

De manière générale, cette contrainte peut être satisfaite de deux manières physiquement distinctes (et excluant évidemment la solution triviale $\mathbf{B} = 0$): La première est d'avoir $\mathbf{J} = 0$ dans tout le système; la Loi d'Ampère devient alors $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, ce qui implique que \mathbf{B} peut être exprimé comme le gradient d'un potentiel. Un tel champ magnétique est par conséquent appelé *champ potentiel*. La contrainte solénoïdale $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ conduit alors à une équation de Laplace:

$$\mathbf{B} = \nabla \varphi , \quad \nabla^2 \varphi = 0 \quad [\text{Champ potentiel}] . \quad (2.30)$$

La seconde possibilité permet la présence de courants électriques, mais tant que ceux-ci sont dirigés parallèlement au champ magnétique:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B} , \quad (2.31)$$

où le facteur numérique α peut varier d'une ligne de champ à l'autre, avec la position, ou même en fonction de la valeur locale de \mathbf{B} .

Imaginons maintenant une situation, par exemple le volume défini par l'extérieur d'une étoile magnétisée, à la surface de laquelle \mathbf{B} est donné, et où la tâche consiste à construire un champ magnétique à force-nulle. Supposer que ce champ est potentiel conduit à des reconstructions qui sont très différentes de champs construits en adoptant plutôt l'Ansatz correspondant à l'éq. (2.31). On notera en particulier (sans le démontrer car les maths requises sont ardues) que pour une condition frontière donnée, le champ potentiel est unique et représente l'état d'énergie magnétique minimal compatible avec la condition limite, par rapport aux multiples solutions possibles sous (2.31), et ce sous quelque spécification de $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{B})$ que ce soit dans le domaine. Ceci représente une contrainte importante à la quantité d'énergie qui peut être extraite d'un champ magnétique par n'importe quel processus magnétohydrodynamique.

2.4 Exemple: cisaillement d'un champ poloidal

Des dynamos stellaires aux disques d'accrétion, une situation de grand intérêt en astrophysique est l'induction d'un champ magnétique longitudinal via le cisaillement d'un champ magnétique

poloidal traversant une sphère ou un disque de fluide électriquement conducteur en état de rotation différentielle. On a vu qu'une telle rotation différentielle est produite naturellement dans fluide turbulent en rotation (voir §1.5.5 et Fig. 1.8 au besoin !). Nous considérerons ici la première de ces géométries. Travaillant conséquemment en coordonnées sphériques polaires (r, θ, ϕ) et supposant axisymétrie ($\partial/\partial\phi \equiv 0$) pour le champ magnétique et la rotation différentielle, on peut exprimer l'écoulement comme:

$$\mathbf{u}(r, \theta) = r \sin \theta \Omega(r, \theta) \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (2.32)$$

où la vitesse angulaire de rotation est supposé indépendante du temps ($\partial/\partial t = 0$); dans ce régime dit *cinématique*, seule l'équation d'induction est solutionnée, avec \mathbf{u} donné, sans se préoccuper de la dynamique de l'écoulement. Dans une telle situation on aura:

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \quad (2.33)$$

puisque $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ en vertu de l'éq. (2.32). Pour un champ magnétique axisymétrique, et avec \mathbf{u} orienté dans la direction longitudinale, seule les composantes r et θ de cette expression sont identiquement nulles. Il peut paraître surprenant qu'un terme comme $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ ait une composante ϕ non-nulle si \mathbf{u} n'a qu'une composante ϕ qui ne dépend pas de ϕ ; il faut se rappeler ici que $\mathbf{B} \cdot \nabla$ est un *opérateur différentiel* agissant sur une quantité vectorielle (voir l'Annexe A pour la forme explicite de cet opérateur en coordonnées sphériques).

Si on suppose maintenant que l'on travaille dans le régime de la MHD idéale ($\eta = 0$ dans l'éq. (2.9), alors celle-ci se réduit à:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = 0, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial t} = 0, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial t} = r \sin \theta [B_r \hat{\mathbf{e}}_r + B_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta] \cdot \nabla \Omega. \quad (2.36)$$

Les éqs. (2.34)—(2.35) indiquent que le champ poloidal demeure constant, ce qui implique que le membre de droite de l'éq. (2.36) est également constant et s'intègre donc directement:

$$B_\phi(r, \theta, t) = B_\phi(r, \theta, 0) + \left(r \sin \theta [B_r \hat{\mathbf{e}}_r + B_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta] \cdot \nabla \Omega \right) t. \quad (2.37)$$

La composante toroidale du champ magnétique croît donc linéairement en fonction du temps, à un taux qui dépend du gradient rotationnel local et de l'intensité de la composante poloidale. La composante toroidale est donc induite par le cisaillement de la composante poloidale, cette dernière conservant son intensité initiale malgré ce cisaillement, comme l'expriment les éqs. (2.34)—(2.35).

On notera que dans une telle configuration axisymétrique, les seules solutions stationnaires ($\partial/\partial t = 0$) possibles sont celles où

$$[B_r \hat{\mathbf{e}}_r + B_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta] \cdot \nabla \Omega = 0, \quad (2.38)$$

i.e., la vitesse angulaire doit avoir une valeur constante sur chaque surface de révolution tracée par une ligne de champ poloidale. C'est le *théorème de Ferraro*.

Un ingrédient essentiel au calcul de l'évolution de B_ϕ via l'éq. (2.37) est le profil de rotation $\Omega(r, \theta)$. La Figure 2.1A montre sur le diagramme de gauche une inversion héliosismique du profil de rotation interne du soleil. Ce profil de rotation différentielle est très complexe ! On notera en particulier: (1) une enveloppe convective ($r/R > 0.7$) où le cisaillement est principalement latitudinal, (2) un coeur radiatif tournant essentiellement comme un corps solide, (3) une transition continue entre ces deux régions via une mince couche de cisaillement centrée sur l'interface coeur-enveloppe (trait en tirets), et appelée *tachocline*, et (4) une mince couche sous la surface où la rotation chute sensiblement. Un tel profil de rotation différentielle est complexe

dans le sens qu'il est caractérisé par quatre régions de cisaillements se recoupant partiellement: Un cisaillement radial négatif ($\partial\Omega/\partial r < 0$) à toutes les latitudes sous la surface, un fort cisaillement radial positif (i.e., $\partial\Omega/\partial r > 0$) dans la partie équatoriale de la tachocline, un cisaillement radial négatif ($\partial\Omega/\partial r < 0$) encore plus intense dans la tachocline à hautes latitudes, et un cisaillement latitudinal positif ($\partial\Omega/\partial\theta > 0$) significatif dans toute la zone convective, chutant à zéro dans la tachocline. À mi-latitudes, ce cisaillement latitudinal est comparable en magnitude au cisaillement radial à l'équateur, dans le cas d'une tachocline d'épaisseur $w/R = 0.05$, soit la limite supérieure établie par l'héliosismologie.

La Figure 2.1A montre également une série de lignes de champ magnétique pour un champ poloidal axisymétrique de type dipolaire, du genre de ce à quoi on pourrait s'attendre dans un intérieur stellaire, et cohérent avec celui observé à la surface du soleil. La Figure 2.1B montre le champ toroidal produit par le cisaillement de ce champ poloidal, supposé d'amplitude 10^{-4} T, par la rotation différentielle pendant une durée de 10 ans, tel que produit par l'éq. (2.37) à partir d'un champ purement poloidal ($B_0 = 0$). Le champ toroidal se retrouve concentré dans les régions où le cisaillement est le plus intense, mais la géométrie du champ poloidal joue évidemment aussi. On remarquera que le cisaillement d'un champ dipolaire, donc antisymétrique par rapport au plan équatorial, par une rotation différentielle symétrique par rapport à ce même plan, produit un champ toroidal lui aussi antisymétrique par rapport à l'équateur, en accord avec les observations de polarités magnétique des taches solaires. L'intensité du champ toroidal atteint ici ± 0.2 T, également en accord avec les mesures de champ magnétique dans les taches solaires. On reviendra sur le lien physique entre les taches solaires et le champ toroidal interne dans un chapitre ultérieur.

Bien que notre solution ait été obtenue dans le régime cinématique, connaissant la forme de la composante toroidale induite, il est possible de calculer la force de Lorentz associée au champ complet. Dans le cas d'un champ magnétique axisymétrique, la composante- ϕ de la force de Lorentz est également axisymétrique et se réduit à:

$$[\mathbf{F}]_\phi = \frac{1}{\mu_0 r \sin \theta} [B_r \hat{\mathbf{e}}_r + B_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta] \cdot \nabla(r \sin \theta B_\phi). \quad (2.39)$$

La distribution spatiale de cette quantité est illustrée à la Figure 2.1C. Comparant ceci à la rotation différentielle en A, on remarquera que la force de Lorentz tend à s'opposer au cisaillement: dans la tachocline polaire, le bas de la zone convective est accéléré ($[\mathbf{F}]_\phi > 0$), tandis que le haut de la zone stable est déccéléré ($[\mathbf{F}]_\phi < 0$). C'est là une propriété générale des interactions entre fluides et champ magnétiques dans le régime MHD: la force de Lorentz tend à s'opposer aux écoulements inductifs. Pour comprendre pourquoi, on doit considérer l'énergétique de ces interactions.

2.5 L'énergie magnétique

Dans le cas du cisaillement d'un champ poloidal que nous venons d'examiner, l'énergie magnétique augmente quadratiquement dans le temps, car B_ϕ croît selon l'éq. (2.36), tandis que la composante poloidal demeure constante (éqs. (2.34)–(2.36)). D'où vient cette énergie ? La seule source énergétique ici est l'énergie cinétique de la rotation, donc il y doit y avoir transfert énergétique de l'écoulement vers le champ magnétique. Il existe d'autres situations astrophysiques où le processus inverse a lieu, i.e., le champ magnétique peut agir comme un réservoir d'énergie dans lequel peuvent puiser les écoulements. Plusieurs des phénomènes les plus énergétiques observés en astronomie sont associés à un tel transfert énergétique entre un champ magnétique et le plasma environnant. Voyons comment quantifier ce processus.

On considère un volume V contenant un plasma magnétisé, comme par exemple à la section précédente: une sphère de fluide magnétisée flottant dans le vide. Commençons par prendre le produit scalaire du champ magnétique \mathbf{B} avec les membres de gauche et droite de l'équation d'induction (2.9); on intègre ensuite sur V , et après un peu de jonglerie avec les identités du calcul vectoriel et une utilisation judicieuse du théorème de la divergence on arrive éventuellement

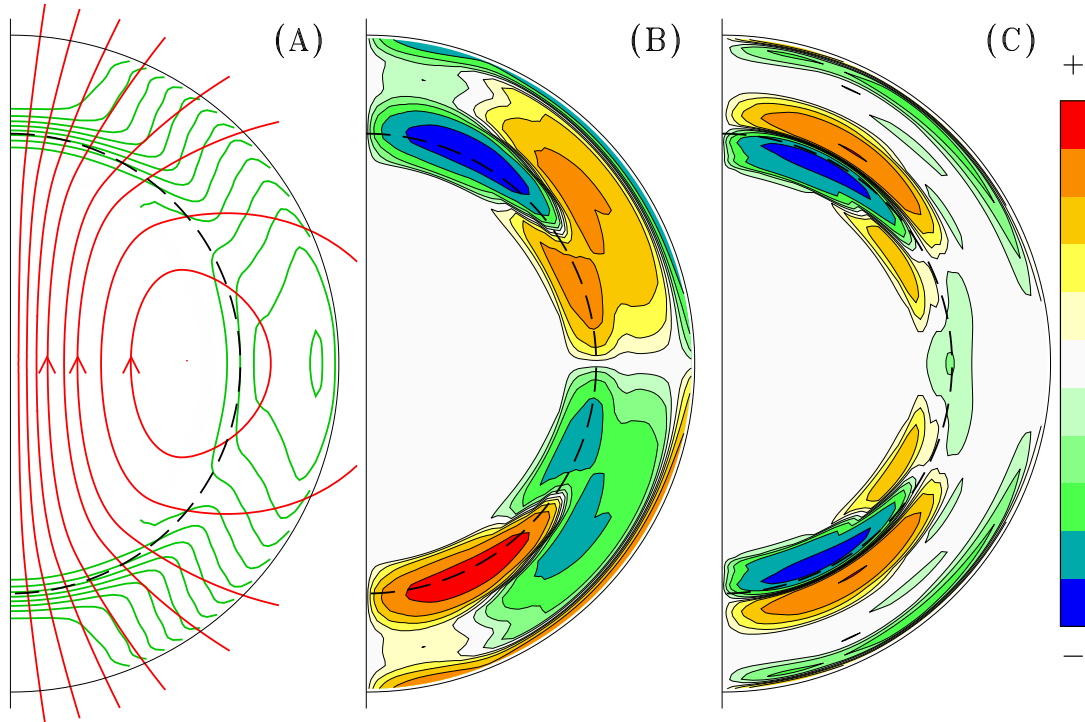


Figure 2.1: Induction d'un champ magnétique toroidal via le cisaillement d'un champ poloidal dipolaire par une rotation différentielle de type solaire. La partie A montre des isocontours (verts) de la fréquence de rotation $\Omega(r, \theta)/2\pi$ (contours rouges, avec espacement de 10 nHz; en surface l'équateur tourne ici à 460.7 nHz, et les pôles à 329.2 nHz). Les lignes de champ magnétique d'un champ poloidal dipolaire sont tracés en rouge, et l'arc de cercle en tirets indique l'interface coeur-enveloppe. La partie B montre les isocontours du champ toroidal B_ϕ , avec la gradation de vert→bleu et jaune→rouge indiquant les valeurs négatives/positives respectivement, tel que calculé via l'éq. (2.37) pour $t = 10$ yr. Ce champ toroidal atteint ± 0.2 T ici, et l'espacement des contours est de 0.02 T. La partie C montre des isocontours de la composante- ϕ de la force de Lorentz associée au champ magnétique total, poloidal+toroidal.

à

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} dV = - \oint_S (\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS - \int_V (\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}) dV - \int_V \sigma^{-1} \mathbf{J}^2 dV, \quad (2.40)$$

où $\hat{\mathbf{n}}$ est un vecteur unitaire pointant extérieurement à la surface S délimitant le volume V , et \mathbf{S} est le *flux de Poynting*:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (2.41)$$

Examinons un à un les différents termes apparaissant dans cette expression. Le terme au membre de gauche n'est que le taux de variation de l'énergie magnétique dans sa définition habituelle:

$$\mathcal{E}_B = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathbf{B}^2 dV, \quad (2.42)$$

la quantité $\mathbf{B}^2/2\mu_0$ décrivant la densité d'énergie magnétique. Au membre de droite maintenant; le premier terme est le flux de Poynting intégré sur les frontières du domaine, et décrit donc la quantité nette d'énergie électromagnétique entrant (intégrand < 0) ou sortant (intégrand > 0) du volume V . Ce terme sera évidemment nul en l'absence de champs électrique ou magnétique aux frontières. De même, et en l'absence de *sources* électromagnétiques à l'infini, si on laisse le volume d'intégration tendre vers l'infini, ce terme surfacique tombera toujours à zéro: dS croît en r^2 , mais \mathbf{E} décroît en r^{-2} au mieux (si le système porte une charge électrique nette), et \mathbf{B} décroît en r^{-3} au mieux (pour un dipole magnétique), et donc $\mathbf{S} \propto r^{-5}$ au mieux; conséquemment, l'intégrand dans l'intégrale surfacique chute au moins en r^{-3} , et très possiblement plus rapidement, dans la limite $r \rightarrow \infty$.

Le second terme au membre de droite de l'éq. (2.40) représente le travail exercé par la force de Lorentz sur l'écoulement dans l'ensemble du volume. Ce terme peut être soit négatif, soit positif. Dans le contexte de l'accélération ou du confinement magnétique des vents stellaires ou galactiques, ou de la reconnexion magnétique (§2.10 plus loin) on aura $\mathbf{u} \cdot \mathbf{F} > 0$, tandis que dans le cadre des processus dynamos on sera plutôt dans une situation où $\mathbf{u} \cdot \mathbf{F} < 0$. Dans l'exemple considéré à la section précédente, c'est donc le travail effectué par l'écoulement zonal (éq. (2.32)) contre la composante zonale de la force de Lorentz (éq. (2.39)), plus spécifiquement sa composante en tension, qui permet (énergétiquement parlant) l'amplification de la composante magnétique toroidale. Ceci représente un processus d'amplification potentiellement très intéressant, car que ce soit dans le cas d'une étoile, d'un disque d'accrétion, ou d'une galaxie, l'énergie cinétique associée à la rotation est absolument gigantesque.

Le troisième terme au membre de droite de l'éq. (2.40) est toujours négatif; il décrit la destruction du champ magnétique sous l'influence de la dissipation Ohmique de la densité de courant agissant comme la seule source du champ en MHD. Ceci nous mène naturellement à...

2.6 Le chauffage de Joule

En présence d'une conductivité électrique finie, le chauffage volumique associé à la dissipation de la densité de courant électrique doit être inclus au membre de droite de l'équation de conservation de l'énergie, au même titre que le chauffage volumique dû à la dissipation visqueuse. La *fonction de chauffage de Joule* est la quantité requise:

$$\phi_B = \frac{\eta}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B})^2 \quad [\text{J m}^{-3} \text{s}^{-1}]. \quad (2.43)$$

Notons que, comme avec la dissipation visqueuse, dans la grande majorité des situations d'intérêt en astrophysique, le chauffage de Joule ne contribue pas de manière significative au bilan énergétique⁵ La dissipation de l'énergie magnétique aux échelles globales, quand elle se

⁵Il existe évidemment quelques exceptions intéressantes à cet état de fait, notamment les enveloppes des exoplanètes de type "Jupiters-chaudes", où le chauffage de Joule peut changer la conductivité électrique au point d'affecter la magnétohydrodynamique rotationnelle. Voir références en fin de chapitre.

produit, est souvent causée par des effets dynamiques qui sont beaucoup plus efficaces, comme la reconnexion magnétique (§2.10 plus bas), et ce sont les temps caractéristiques associés à ces processus dynamiques qui contrôlent le taux de dissipation de l'énergie. Il n'en demeure pas moins qu'aux échelles dissipatives du système, ultimement ce sont bel et bien la viscosité et la résistivité qui font le travail.

2.7 Le théorème d'Alfvén

Revenons à la forme différentielle de la Loi de Faraday:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} . \quad (2.44)$$

Considérons une surface S fixe dans l'espace et délimitée par un contour γ . On projette l'expression ci-dessus sur un vecteur unitaire normal à S , et on applique le théorème de Stokes au membre de gauche de l'expression en résultant:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \oint_\gamma \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS . \quad (2.45)$$

La surface S est tout à fait arbitraire à ce stade; si elle est fixe dans l'espace, alors \int_S et $\partial/\partial t$ commutent et on retombe sur la forme intégrale familière de la Loi de Faraday:

$$\oint_\gamma \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS , \quad (2.46)$$

avec le membre de gauche correspondant à la force électromotrice, et le membre de droite au taux de variation du flux magnétique (Φ_B) à travers S :

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS . \quad (2.47)$$

Supposons maintenant que S est une surface matérielle se déplaçant avec le fluide. Le résultat ci-dessus tient toujours, si (1) la dérivée partielle $\partial/\partial t$ est remplacée par la dérivée Lagrangienne au membre de droite de l'éq. (2.46); et (2) on utilise la Loi d'Ohm pour remplacer \mathbf{E} par \mathbf{J}/σ , ce qui est légal puisque chaque point du contour matériel γ se déplace à la même vitesse que le fluide, par définition. Donc,

$$\frac{1}{\sigma} \oint_\gamma \mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{D}{Dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS . \quad (2.48)$$

De toute évidence, dans la limite MHD idéale d'un conducteur parfait ($\sigma \rightarrow \infty$), on aura

$$\frac{D}{Dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0 . \quad (2.49)$$

Ce résultat indique que dans le régime de la MHD idéale ($\sigma \rightarrow \infty$, ou encore $R_m \rightarrow \infty$), le flux magnétique traversant une surface quelconque est une quantité conservée durant le transport (et/ou déformation) de cette surface par l'écoulement. C'est le *théorème d'Alfvén*. Ce théorème peut être exprimé sous une forme physiquement équivalente via le théorème de Stokes, en terme de la circulation Γ du potentiel vecteur associé au champ magnétique:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} , \quad \Gamma = \oint_\gamma \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0 . \quad (2.50)$$

On notera en particulier que dans la limite d'une surface infinitésimale percée par une seule ligne de champ magnétique, une conséquence incontournable du théorème d'Alfvén est que la ligne

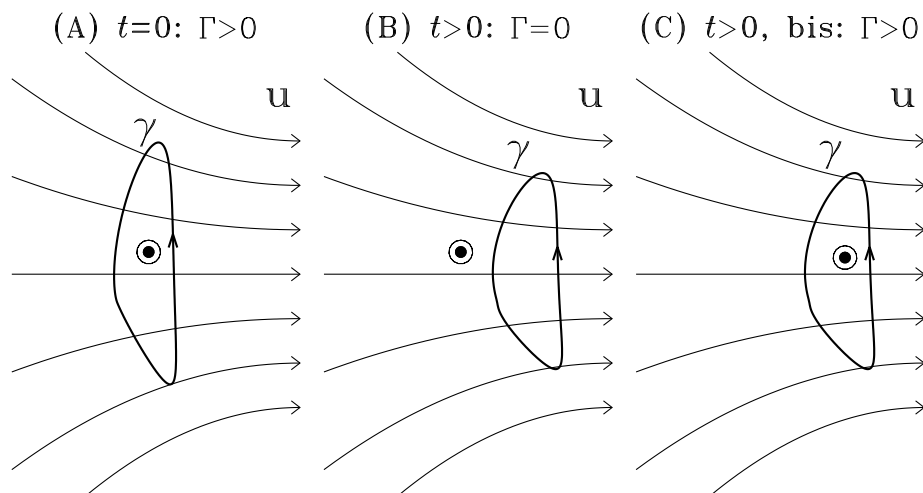


Figure 2.2: En (A) Un contour matériel γ délimite une surface matérielle percée par une seule ligne de champ magnétique sortant de la page (indiquée ici par un “ \odot ”). La circulation Γ du potentiel vecteur —et donc le flux magnétique via le théorème de Stokes— est ici > 0 . En (B) le contour s’est déplacé vers la droite, de manière telle que la ligne de champ magnétique ne le traverse plus, donc la circulation et le flux magnétique sont maintenant tous les deux nuls. Ceci est exclu par l’éq. (2.50); on doit en conclure que la ligne de champ magnétique a dû se déplacer avec le fluide, comme illustré en (C).

de champ magnétique doit se déplacer avec le fluide. L’idée est illustrée schématiquement à la Figure 2.2. Ce résultat tient pour toute ligne de champ magnétique encerclée par un contour matériel. On dit que le champ magnétique est “gelé” dans le fluide. Les lignes de vorticité se comportent de la même façon dans la limite inviscide $\nu \rightarrow 0$.

Le théorème d’Alfvén s’applique au champ magnétique, qui est un champ vectoriel sol enoidal, dans le sens que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$; on peut en fait montrer, purement mathématiquement, que tout champ sol enoidal transport e par un écoulement \mathbf{u} est sujet au soi-disant théorème cinématique, stipulant que:

$$\frac{D}{Dt} \int_{S_m} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_m} \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (2.51)$$

La quantité entre parenthèses carrées au membre de droite sera nulle en vertu de notre équation d’induction magnétique en régime idéal (i.e., avec $\eta = 0$); et le membre de gauche est la dérivée Lagrangienne du flux magnétique. Et c’est tout.

Pensant plus physiquement que mathématiquement, on peut aussi comprendre le théorème d’Alfvén en se rappelant de ce qui est vraiment transport e par l’écoulement \mathbf{u} : c’est la densité de courant \mathbf{J} étant la source du champ magnétique tel que dict e par l’éq. (2.5). Cette densité de courant, on l’a vu, est causée par un très faible courant de dérive entre les constituants microscopiques de charge électrique opposée. En l’absence de résistance Ohmique, ces courants se déplacent avec le plasma sans atténuation, et donc le champ magnétique devra en faire de même. Et voilà, CQFD, comme le disait ce bon vieux Jules.

Comme les écoulements astrophysiques ont typiquement $R_m \gg 1$ (viz. le Tableau 2), on peut s’attendre à ce que le théorème d’Alfvén soit d’une applicabilité très générale. C’est le cas, et on peut déjà en apprendre beaucoup sur les champs magnétiques stellaires via une simple application de ce théorème.

Considérons une étoile contenant un champ magnétique dipolaire aux grandes échelles spatiales. C’est le cas du soleil, dont le dipole magnétique est de l’ordre de 10^{-3} T, et des étoiles dites Ap et Bp, où les champs magnétiques peuvent approcher la dizaine de Tesla. La Figure 2.3 illustre schématiquement ce qui se passe lorsque qu’une étoile comme le soleil finit par se

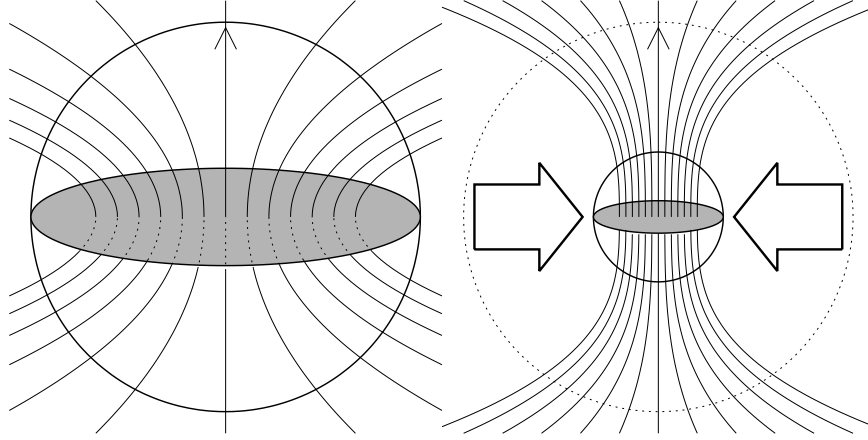


Figure 2.3: Amplification du champ magnétique via conservation du flux, lors de l’effondrement d’une étoile de type solaire vers le stade de naine blanche. On suppose un champ initial de géométrie dipolaire, conduisant à un flux net à travers le plan équatorial de l’étoile (en gris). Les deux diagrammes ne sont pas à la même échelle: en réalité une naine blanche a un rayon ~ 100 fois plus petit que le soleil.

contracter pour devenir une naine blanche, une fois son carburant nucléaire épuisé. En supposant que le champ magnétique soit gelé dans le fluide, dans le sens du théorème d’Alfvén, la conservation du flux magnétique traversant le plan équatorial de l’étoile implique que

$$B_{\odot}\pi R_{\odot}^2 = B_{\text{NB}}\pi R_{\text{NB}}^2 \quad \rightarrow \quad \frac{B_{\text{NB}}}{B_{\odot}} = \left(\frac{R_{\odot}}{R_{\text{NB}}}\right)^2. \quad (2.52)$$

Pour le soleil on a $R_{\odot} = 7 \times 10^8$ m et $B_{\odot} \sim 0.001$ T, et pour une naine blanche typique $R_{\text{NB}} \simeq 0.01 R_{\odot}$, ce qui conduit à $B_{\text{NB}} \sim 10$ T. Cette valeur, en apparence gigantesque, tombe confortablement dans la fourchette des champs magnétiques détectés dans les naines blanches, soit 1–100 T. Notons cependant qu’une faible fraction ($\lesssim 10\%$) de naines blanches présentent des champs magnétiques pouvant aller jusqu’à 100 kT; ces naines blanches magnétiquement extrêmes pourraient fort bien être les descendantes des étoiles Ap et Bp⁶.

L’énergétique de ce processus d’amplification du champ magnétique mérite qu’on s’y attarde un peu. Comme $V \propto R^3$, alors $V_{\text{NB}}/V_{\odot} = (R_{\text{NB}}/R_{\odot})^3$; Pour simplifier le calcul on considère que le champ magnétique est constant dans le volume de l’étoile; en vertu des éqs. (2.42) et (2.52) on trouve $E_{\text{NB}}/E_{\odot} = R_{\odot}/R_{\text{NB}} \simeq 100 \gg 1$; d’où vient toute cette énergie ? Ultimement du potentiel gravitationnel, évidemment, mais la manière dont ce transfert opère passe par l’écoulement radial associé à l’effondrement. Cet écoulement devra effectuer un travail contre la force de Lorentz, cette fois principalement sa composante de pression magnétique.

Ce phénomène d’amplification magnétique se produit également lors de la formation des étoiles, les nuages protostellaires étant toujours magnétisés à un certain degré. Dans ce genre de situation, où la gravité est beaucoup plus faible que dans le cas de l’effondrement d’une étoile en fin de vie, on peut calculer que la pression magnétique atteint un point tel qu’elle peut stopper le processus d’effondrement du nuage; comment se débarrasser du champ magnétique demeure un problème majeur dans la théorie de la formation des étoiles.

⁶Si vous voulez en savoir plus là-dessus aller voir Patrick Dufour qui se fera un plaisir de vous jaser de tout ça.

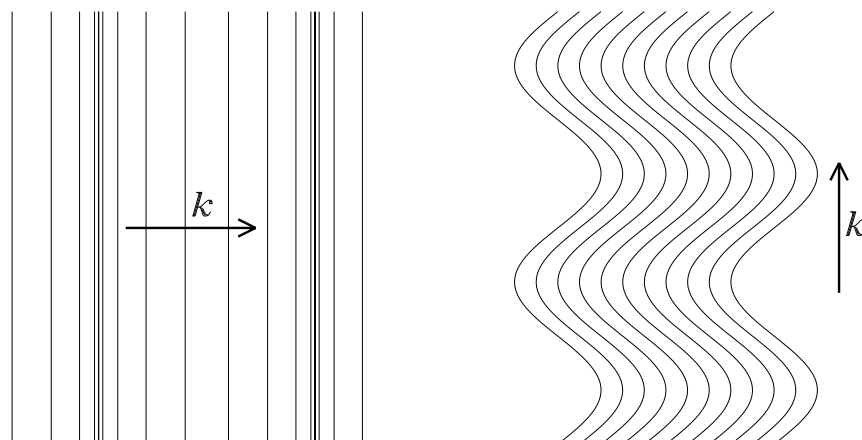


Figure 2.4: Les modes fondamentaux de propagation ondulatoire dans un fluide compressible magnétisé, illustrés ici dans le cas d’un champ magnétique uniforme. En (A), une onde magnétosonique, et en (B) une onde d’Alfvén. L’orientation du vecteur d’onde \mathbf{k} indique que le mode magnétosonique est une onde longitudinale, tandis que le mode d’Alfvén est une onde transversale. En présence d’un plasma “chaud”, i.e. où la densité d’énergie interne du plasma est comparable à sa densité d’énergie magnétique, le mode magnétosonique se développe en deux modes dits “rapide” et “lent”, selon la phase relative des perturbations en pression gazeuse et magnétique (voir texte).

2.8 Ondes magnétohydrodynamiques

La présence d’une force de Lorentz dans un fluide magnétisé a également de profondes conséquences au niveau des types d’ondes qui peuvent se propager —et propager de “l’information”— dans le fluide. Dans un fluide astrophysique non-magnétisé (si un tel fluide pouvait exister), on devrait considérer (1) les ondes sonores, où la pression agit comme force de rappel (voir §1.3); (2) les ondes de gravité, où la gravité agit comme force de rappel (un peu comme les vagues à la surface de l’eau); et (3) les ondes de Rossby, où la force de Coriolis agit comme force de rappel (voir §1.4). Il s’avère que la force de Lorentz introduit effectivement non pas une, mais deux forces de rappel. De plus, ces forces modifient, et parfois de manière complexe, le comportement des autres types d’ondes susmentionnées, conséquence incontournable de la nonlinéarité des équations de la magnétohydrodynamique.

Une perturbation de la pression magnétique peut se propager sous la forme d’une onde longitudinale, un peu comme une onde sonore. La Figure 2.4A illustre schématiquement ce type d’*onde magnétosonique*. Ces ondes se séparent en deux sous-classes, en fonction de la phase relative existant entre les perturbations en pression gazeuse et magnétique; si ces deux perturbations sont en phase, alors la force de rappel est maximale, produisant le mode magnétosonique dit *rapide*, tandis que si ces deux perturbations sont complètement déphasées on parle du mode magnétosonique *lent*. De plus, la tension magnétique introduit une force de rappel qui permet la propagation d’une perturbation transverse, un peu comme sur une corde de guitare, tel qu’illustré sur la Fig. 2.4B. Ces ondes sont appelées *ondes d’Alfvén*.

Il s’agit maintenant de quantifier un peu tout ça. L’idée sera de linéariser les équations MHD, comme nous l’avons fait à la section §1.3.1, mais en conservant cette fois la tridimensionalité des quantités perturbées. L’état de référence sera de nouveau un fluide au repos ($\mathbf{u}_0 = 0$) à pression p_0 et densité ρ_0 toutes deux constantes, et traversé par un champ magnétique uniforme \mathbf{B}_0 . Travaillant en régime MHD idéal et inviscide ($\eta = 0$ et $\nu = 0$), les équations à l’ordre 1

prennent alors la forme:

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial t} = -\varrho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1, \quad (2.53)$$

$$\varrho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -c_s^2 \nabla \varrho_1 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0, \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0). \quad (2.55)$$

On a de plus supposé ici que la perturbation est adiabatique, ce qui a déjà permis d'éliminer p_1 via la relation $p_1 = c_s^2 \varrho_1$, avec $c_s^2 = \gamma p_0 / \varrho_0$ (voir §1.3.1 au besoin...). La forme relativement simple de ces équations linéarisées tient du fait qu'ici l'état de référence est supposé statique ($\mathbf{u}_0 = 0$) et uniforme en \mathbf{B}_0 ; sinon les membres de droite des expressions ci-dessus seraient passablement plus riches en termes supplémentaires. Il est encore possible de combiner tout ça en une équation d'onde, mais l'algèbre (vectorielle) est un peu fastidieuse. Le prélude consiste à définir la *vitesse d'Alfvén*:

$$\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{\mu_0 \varrho_0}}. \quad (2.56)$$

Je vous laisse vérifier que le membre de droite a vraiment les dimensions d'une vitesse. Il s'agit ensuite de prendre la dérivée temporelle de (2.54); ceci fera apparaître des dérivées temporelles de \mathbf{B}_1 et ϱ_1 au membre de droite; ces dérivées peuvent être remplacées par les membres de droite des éqs. (2.53) et (2.54). On en arrive ainsi à une forme d'équation d'onde pour \mathbf{u}_1 , équivalent MHD de l'éq. (1.74) et s'y réduisant dans la limite $\mathbf{B}_0 \equiv \mathbf{u}_A \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_1) + [\nabla \times (\nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_A))] \times \mathbf{u}_A. \quad (2.57)$$

L'état de référence étant uniforme, on peut rechercher des solutions ayant la forme d'ondes planes, i.e.,

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_1 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]. \quad (2.58)$$

où \mathbf{U}_1 est l'amplitude (vectorielle et complexe) de la perturbation en vitesse. Substituant cette expression dans l'éq. (2.57), on trouve:

$$\omega^2 \mathbf{U}_1 = c_s^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1) \mathbf{k} - \mathbf{u}_A \times \{ \mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times (\mathbf{U}_1 \times \mathbf{u}_A)] \}. \quad (2.59)$$

On utilise maintenant l'identité vectorielle $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$ pour développer le second terme au membre de droite de (2.59), on en arrive (éventuellement...) à la relation de dispersion suivante:

$$\omega^2 \mathbf{U}_1 = (c_s^2 + u_A^2) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1) \mathbf{k} + \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{k} [(\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{k}) \mathbf{U}_1 - (\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{U}_1) \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1) \mathbf{u}_A]. \quad (2.60)$$

où $u_A^2 \equiv \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{u}_A$. L'idée générale à ce stade serait de solutionner cette relation de dispersion dans l'hyperplan $[\omega, \mathbf{k}]$ pour un c_s et \mathbf{u}_A considérés connus. C'est possible mais c'est du sport! Le résultat dépend évidemment de manière assez complexe des angles entre le vecteur de propagation \mathbf{k} , l'orientation du champ magnétique dans l'état de référence \mathbf{B}_0 , et l'orientation de la perturbation \mathbf{U}_1 . Il sera instructif de considérer en premier lieu quelques cas limites qui sont plus faciles à traiter et interpréter.

2.8.1 Cas 1: $\mathbf{U}_1 \parallel \mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$

On voit déjà qu'il s'agira ici d'une onde longitudinale, puisque $\mathbf{U}_1 \parallel \mathbf{k}$. Sous ces conditions on a $\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{k} = u_A k$, $\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{U}_1 = u_A U_1$, et $\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1 = U_1 k$. L'équation (2.60) se réduit alors à:

$$\omega^2 = c_s^2 k^2, \quad (2.61)$$

soit la relation de dispersion pour une onde acoustique pure. Une telle onde peut donc se propager le long d'une ligne de champ magnétique sans ressentir la présence de ce dernier. On obtient d'ailleurs le même résultat en posant directement $\mathbf{U}_1 \times \mathbf{u}_A = 0$ dans l'éq. (2.60).

2.8.2 Cas 2: $\mathbf{U}_1 \parallel \mathbf{k}$, $\mathbf{U}_1 \perp \mathbf{B}_0$

Il s'agit ici d'une situation correspondant à la Figure 2.4B, où cette fois l'onde est longitudinale et se propage dans une direction perpendiculaire au champ magnétique de l'état de référence. On a alors $\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{k} = 0$, $\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{U}_1 = 0$, et $\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1 = U_1 k$; Ce n'est que le premier terme au membre de droite de l'éq. (2.60) qui se retrouve non-nul, et on a alors:

$$\omega^2 = (c_s^2 + u_A^2)k^2 . \quad (2.62)$$

La vitesse de phase de cette onde est $\sqrt{c_s^2 + u_A^2} > u_A$ et $> c_s$; c'est le mode magnétosonique rapide, dont la vitesse de phase est clairement plus grande que la vitesse d'Alfvén, d'où son qualificatif "rapide".

2.8.3 Cas 3: $\mathbf{U}_1 \perp \mathbf{k}$, $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$

On se tourne maintenant vers la situation illustrée à la Figure 2.4A, soit une onde transverse se propageant dans la direction du champ magnétique de l'état de référence. On a donc $\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{k} = u_A k$, $\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{U}_1 = 0$, et $\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1 = 0$; seul le second terme au membre de droite de l'éq. (2.60) demeure non-nul, ce qui conduit à:

$$\omega^2 = u_A^2 k^2 . \quad (2.63)$$

Cette onde transverse se déplace à une vitesse de phase égale à la vitesse d'Alfvén; sa vitesse de propagation est donc directement déterminée par l'amplitude du champ magnétique et la densité du fluide.

2.8.4 Cas 4: orientations arbitraires

Examinons maintenant un cas plus général. On supposera le champ magnétique \mathbf{B}_0 de l'état de référence aligné à l'axe- z ; le vecteur de propagation \mathbf{k} à un angle θ de \mathbf{B}_0 ; et une perturbation \mathbf{U}_1 orientée arbitrairement par rapport à ces deux vecteurs. Spécifiquement:

$$\mathbf{u}_A = u_A \hat{\mathbf{e}}_z , \quad (2.64)$$

$$\mathbf{k} = k(\sin \theta \hat{\mathbf{e}}_x + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_z) , \quad (2.65)$$

$$\mathbf{U}_1 = U_{1x} \hat{\mathbf{e}}_x + U_{1y} \hat{\mathbf{e}}_y + U_{1z} \hat{\mathbf{e}}_z . \quad (2.66)$$

Contrairement aux trois cas traités précédemment, l'équation de dispersion a maintenant trois composantes non-triviales:

$$U_{1x}(-\omega^2 + k^2 u_A^2 + k^2 c_s^2 \sin^2 \theta) + U_{1z}(k^2 c_s^2 \sin \theta \cos \theta) = 0 , \quad (2.67)$$

$$U_{1y}(-\omega^2 + k^2 u_A^2 \cos^2 \theta) = 0 , \quad (2.68)$$

$$U_{1x}(k^2 c_s^2 \sin \theta \cos \theta) + U_{1z}(-\omega^2 + k^2 c_s^2 \cos^2 \theta) = 0 . \quad (2.69)$$

L'équation (2.68) donne immédiatement:

$$\frac{\omega}{k} = u_A \cos \theta , \quad (2.70)$$

ce qui retombe bien à l'éq. (2.63) pour $\theta = 0$, comme il se doit. Il s'agit donc ici d'une onde de type Alfvénique.

Les deux autres équation de dispersion sont couplées; on les réécrit sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + k^2 u_A^2 + k^2 c_s^2 \sin^2 \theta & k^2 c_s^2 \sin \theta \cos \theta \\ k^2 c_s^2 \sin \theta \cos \theta & -\omega^2 + k^2 c_s^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1x} \\ U_{1z} \end{pmatrix} = 0 . \quad (2.71)$$

Pour garantir l'existence d'une solution, on doit poser le déterminant de cette matrice égal à zéro, ce qui conduit à la relation de dispersion:

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}(c_s^2 + u_A^2) \pm \frac{1}{2}[(c_s^2 + u_A^2)^2 - 4c_s^2 u_A^2 \cos^2 \theta]^{1/2} . \quad (2.72)$$

Poser $\theta = \pi/2$ nous ramène bien à l'éq. (2.62) si on conserve la racine positive, indiquant qu'on a affaire ici à une onde magnétosonique rapide. L'onde magnétosonique lente émerge finalement de l'analyse: elle correspond à la racine négative, et ne peut se propager que si θ diffère d'un multiple de $\pi/2$. OUUUF !!

Les trois modes ondulatoires MHD —magnétosonique lent, magnétosonique rapide, et Alfvén— forment une base orthogonale, qui peut être utilisée pour représenter toute perturbation temporelle d'un fluide magnétisé. Notons finalement que les ondes magnétosoniques rapide et lente disparaissent dans un fluide incompressible, comme on peut le constater en posant $c_s \rightarrow \infty$ dans l'éq. (2.72). Ce n'est pas le cas de l'onde d'Alfvén cependant, et c'est donc celle-ci qui dominera souvent dans des situations où le nombre de Mach $\ll 1$.

2.9 Le potentiel vecteur et l'hélicité magnétique

Il sera souvent pratique d'exprimer l'équation d'induction magnétique en termes d'un *potentiel vecteur* \mathbf{A} (unités T m), tel que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. L'équation (2.9) devient alors:

$$\nabla \times \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \eta \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] = 0. \quad (2.73)$$

On peut intégrer cette expression pour arriver à la forme:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \eta \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = C \nabla \varphi. \quad (2.74)$$

où C est une constante arbitraire, et la fonction scalaire résultant de la “déroutonnalisation” de l'équation d'induction n'a aucun impact sur \mathbf{B} puisque $\nabla \times \nabla \varphi \equiv 0$ identiquement. Cependant, φ peut contribuer au champ électrique, et agit donc comme un potentiel électrostatique. L'utilisation des identités du calcul vectoriel (voir Annexe A au besoin) permet de développer le troisième terme au membre de droite sous la forme:

$$\eta \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\eta \nabla^2 \mathbf{A} + \eta \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (2.75)$$

Comme la constante C et le potentiel électrostatique φ n'ont aucun impact sur \mathbf{B} , autant les choisir de manière à nous simplifier la vie. On posera donc $C = \eta$, et on adopte la jauge de Coulomb $\varphi = \nabla \cdot \mathbf{A}$; ceci réduit le terme de dissipation Ohmique à $\eta \nabla^2 \mathbf{A}$, et l'équation d'induction pour le potentiel vecteur devient alors:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \eta \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (2.76)$$

Notons encore une fois qu'ici le Laplacien agit sur une quantité vectorielle, ce qui diffère de l'action du Laplacien sur les composantes scalaires par des termes métriques, sauf en coordonnées Cartésiennes (voir Annexe B).

Le potentiel vecteur permet une représentation élégante des champs axisymétriques ($\partial/\partial\phi \equiv 0$) en terme de deux fonctions scalaires, soit les composantes- ϕ du potentiel vecteur et du champ magnétique même. En coordonnées sphériques polaires:

$$\mathbf{B}(r, \theta, t) = \nabla \times [A(r, \theta, t)\hat{\mathbf{e}}_\phi] + B(r, \theta, t)\hat{\mathbf{e}}_\phi. \quad (2.77)$$

Il est facile de vérifier qu'une telle expression satisfait identiquement la contrainte $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. La fonction scalaire A définit ici la composante poloidale du champ magnétique.

L'*hélicité magnétique* est définie comme

$$h_B = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \quad (2.78)$$

et mesure la connectivité topologique du champ magnétique. Considérons la variation de l'hélicité totale ($\mathcal{H}_B \equiv \int_V h_B$) d'un élément de fluide de volume V lors de son déplacement

dans un écoulement (représentation Lagrangienne). L'utilisation des éqs. (2.9), (2.74), et (2.5), suivi d'une bonne dose d'algèbre vectorielle, produit l'expression suivante:

$$\frac{D}{Dt} \underbrace{\int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV}_{\mathcal{H}_B} = -2\mu_0\eta \underbrace{\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} dV}_{\mathcal{H}_J}, \quad (2.79)$$

où l'intégrale au membre de droite définit l'*hélicité totale de courant* \mathcal{H}_J , qui mesure la connectivité topologique du champ \mathbf{B} avec la densité de courant le supportant.

L'Équation (2.79) indique qu'en MHD idéale ($\eta = 0$), l'hélicité magnétique est une quantité conservée. Ceci s'avèrera une contrainte de taille pour l'amplification des champs magnétiques par effet dynamo; on y reviendra vers la fin de ce cours. La conservation de l'hélicité implique également que la topologie d'un système de ligne de champs magnétique ne peut changer dans la limite de la MHD idéale. Exprimé plus simplement, deux lignes de champ magnétique transportée par un écoulement ne peuvent pas se croiser !

2.10 La reconnexion magnétique

2.10.1 Les éruptions solaires et stellaires

Les *éruptions solaires* sont produites par un surchauffage très intense et spatialement localisé dans la haute atmosphère et la basse couronne —on reviendra sur la couronne au prochain chapitre. Elles sont facilement observables de l'espace (voir Figure 2.5), via leur copieuse émission radiative aux courtes longueurs d'onde, soit en rayon- X et dans l'ultraviolet lointain ($\lambda < 1000 \text{ \AA}$), qui sont complètement absorbées par la haute atmosphère terrestre. Souvent accompagnées par l'émission de faisceaux de particules relativistes, on observe parfois à peu près simultanément l'éjection d'une quantité substantielle de plasma coronal (jusqu'à quelques 10^9 tonnes) à des vitesses pouvant dépasser les 1000 km s^{-1} ; ce sont les *éjections de masse coronales*⁷.

Les observations en rayons- X des étoiles de type spectraux allant de F à M sur la séquence principale, soit des étoiles de type solaire jusqu'aux étoiles complètement convectives, révèlent une émission- X semblable, démontrant que le phénomène est répandu, le soleil n'étant pas particulièrement pathologique à cet égard. La Figure 2.6 montre un particulièrement bel exemple, qui se doit d'être comparé aux séquences temporelles GOES de la Figure 2.5.

La coïncidence spatiale de cette émission radiative avec les régions fortement magnétisées de la photosphère solaire ne laisse nul doute que le champ magnétique solaire est le réservoir d'énergie qui est à la source de ces phénomènes éruptifs. La reconstruction des champs magnétiques au dessus des régions actives solaires confirme que leur contenu énergétique est amplement suffisant pour fournir les $\sim 10^{26} \text{ J}$ libérés même dans une très forte éruption. Le défi, cependant, consiste à identifier le mécanisme physique qui permet la libération de cette énergie dans les très courts temps caractéristiques ($\sim 10\text{--}100 \text{ s}$) déduit des observations comme celles des Figures 2.5 et 2.6. En date de l'écriture de ces notes, la *reconnexion magnétique* demeure le mécanisme le plus prometteur à cet égard.

La Figure 2.7 illustre, très schématiquement, l'idée de la reconnexion magnétique; supposons deux lignes de champs initialement parallèles, mais pointant dans des directions opposées. Imaginons maintenant qu'un agent extérieur déforme ces lignes de champs, en les rapprochant l'une de l'autre (comme en A). On a vu que dans la limite de haute conductivité électrique, les lignes de champs ne peuvent se croiser; mais si on réussit à les rapprocher à une distance telle que localement les échelles spatiales deviennent suffisamment petites pour permettre à la diffusivité magnétique d'opérer, les lignes peuvent se reconfigurer selon une forme de processus "couper-coller" (comme en B). Suite à ce processus, la moitié gauche de la ligne du haut se retrouve recollée à la moitié gauche de celle du bas, et de même du côté droit du point de reconnexion. La topologie magnétique a changé. Comme on le verra sous peu, cette reconfiguration

⁷Voir également les animations et liens webs disponibles sur la page web du cours.

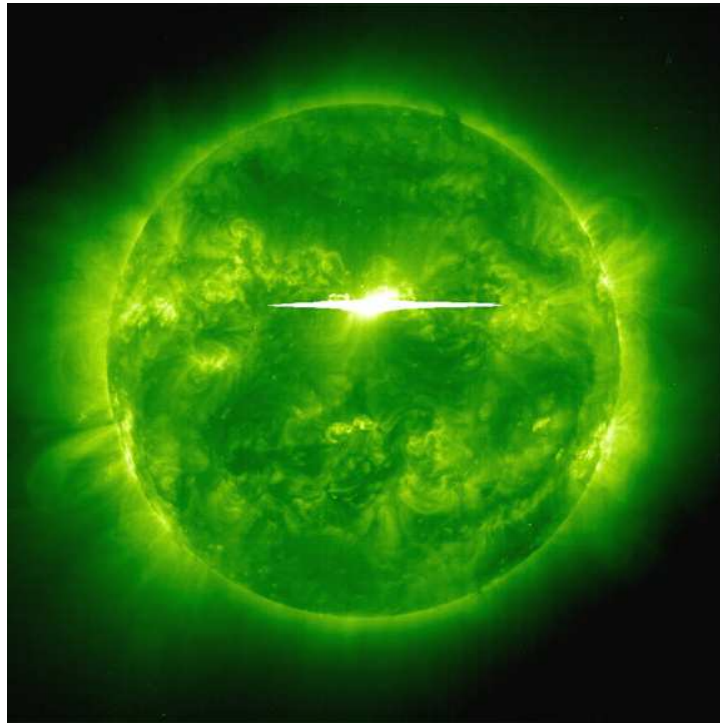
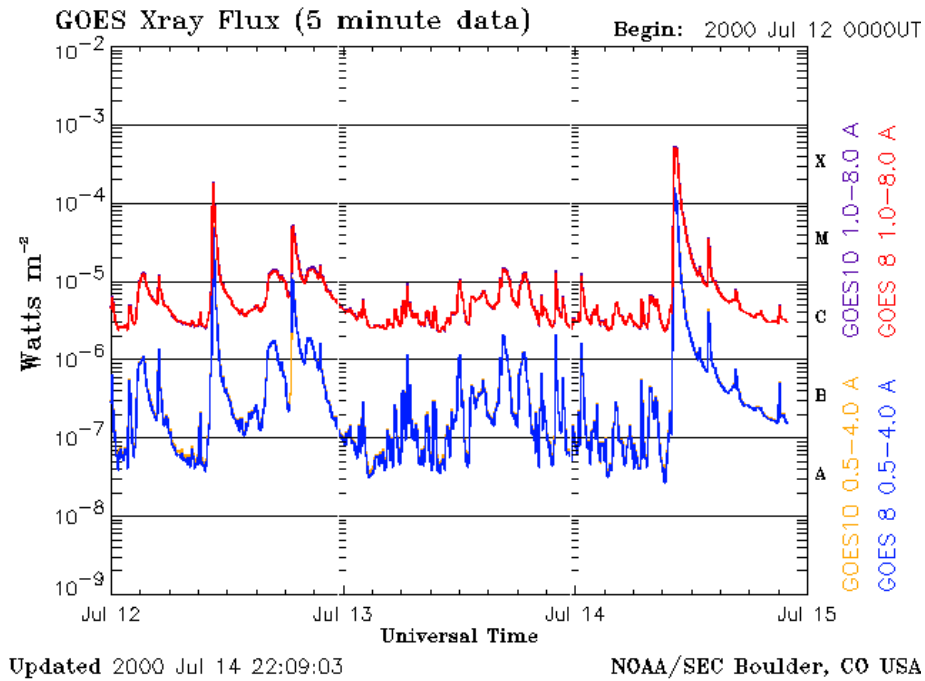


Figure 2.5: En haut: Séquences temporelles d'émission radiative mesurée sur trois jours et dans deux bandes de longueurs d'onde dans le domaine des rayons-X par le réseau de satellites GOES (NOAA). Notez l'échelle verticale logarithmique ! Image en domaine public. En bas: Image dans l'extrême ultraviolet (195 \AA) du soleil le 14 juillet 2000, au moment du pic de l'éruption maintenant dite "de la Bastille". Celle-ci correspond au pic le plus élevé sur la séquence temporelle GOES du haut. Image en domaine public, téléchargée de: sohowww.cascom.nasa.gov/gallery/top30

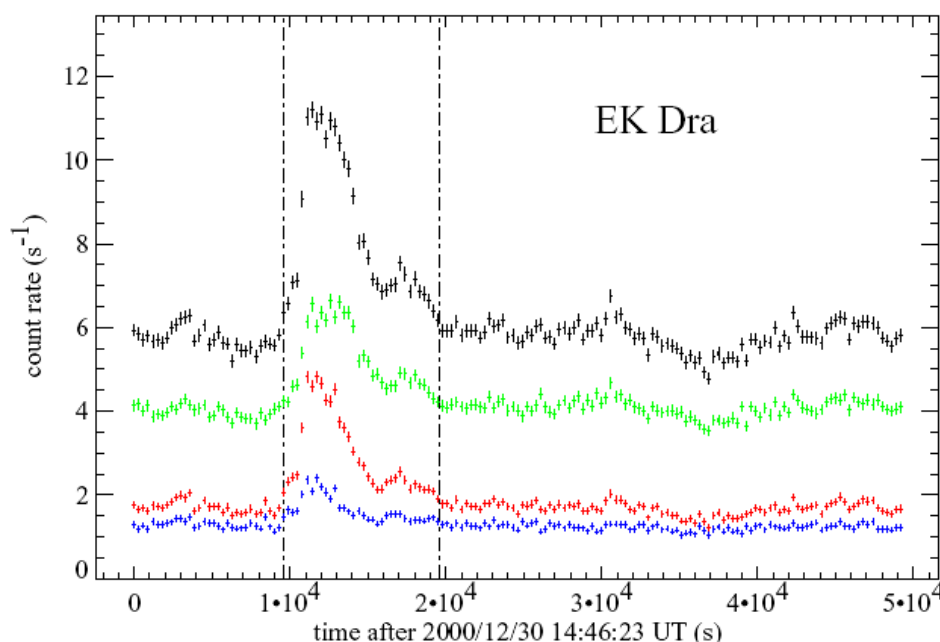


Figure 2.6: Séquences temporelles d'émission en rayon- X provenant de l'étoile EK Dra, dans deux bandes de longueurs d'onde: vert et rouge pour 0.2–1 keV, et > 1 keV respectivement. La courbe en noir donne le total des deux bandes (effectivement 0.2–10 keV), et celle en bleu leur ratio. Tiré de l'article de revue de M. Güdel en domaine public dans LRSP, link.springer.com/article/10.12942/lrsp-2007-3 (Figure 25).

topologique peut libérer une fraction substantielle de l'énergie magnétique de la configuration de départ.

2.10.2 Dissipation passive d'une nappe de courant

En guise de prélude, considérons un problème typique remontant à votre cours d'électro-1: le champ magnétique produit par une densité de courant prenant la forme d'une nappe plane. La Figure 2.8 illustre la géométrie du problème, en coordonnées cartésiennes. La nappe de courant, dans le plan xz , est située à $y = 0$, a une dimension caractéristique dénotée par L , et le courant s'y écoule dans la direction positive de l'axe- z , indiqué ici par le symbole conventionnel “ \odot ”. Si la nappe est infinitésimalement mince, un tel système de courant électrique produit un champ magnétique uniforme pointant dans la direction- x , dans des directions opposées de chaque côté de la nappe. Dans le cas plus réaliste d'une nappe d'épaisseur δ beaucoup plus petite que son étendue $\sim L$ dans les directions x et z , comme illustré schématiquement sur la Figure 2.8, le champ demeure uniforme jusqu'à une distance $\sim \delta$ de la nappe, et chute de manière continue à zéro au centre de la nappe, à $y = 0$.

En magnétostatique on a l'habitude de considérer que la densité de courant \mathbf{J} produit le champ magnétique \mathbf{B} , comme le décrit la Loi d'Ampère en version pré-Maxwell (l'éq. (2.5)). Mais le processus inverse est possible en MHD. Tout processus (comme un écoulement) forçant mécaniquement le rapprochement de deux lignes de champ magnétique orientées de manière non-colinéaire (comme sur la Fig. 2.7A) induira une nappe de courant. L'énergie provient (typiquement) du travail exercé contre la force magnétique par l'agent extérieur produisant le rapprochement des lignes de champs. C'est bien là un processus d'induction: une source d'énergie mécanique est convertie en courant électrique.

La diffusivité magnétique dans la couronne solaire est de l'ordre de $1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$; donc, selon

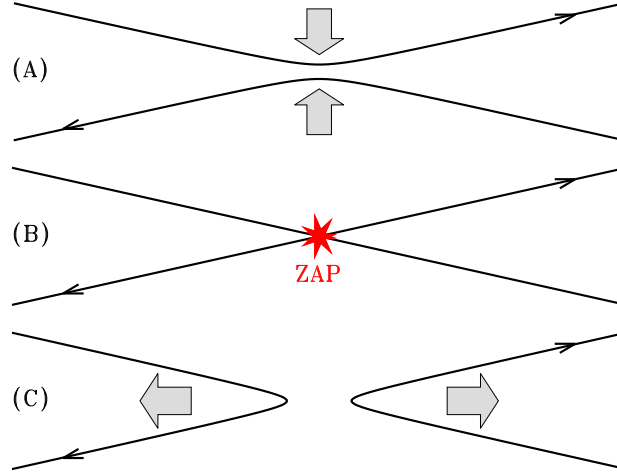


Figure 2.7: Représentation schématique de la reconnexion magnétique. Un agent extérieur (flèches grises en A) force le rapprochement de deux lignes de champ magnétique pointant dans des directions opposées, jusqu'à ce que la dissipation magnétique puisse agir, conduisant à la reconnexion des deux lignes de champs et libération locale d'énergie (en B). La forte tension magnétique associée à la configuration magnétique résultante tendra à produire un écoulement divergeant (flèches grises en C) dans une direction perpendiculaire à celle du forçage initial ayant conduit à la reconnexion.

notre estimé donné par l'éq. (2.13), un temps diffusif de l'ordre de $\sim 10^2$ s exige $\delta \sim 10$ m. Une nappe de courant de cette épaisseur se dissipe donc sur un temps caractéristique du même ordre que celui de la libération d'énergie dans les éruptions. Cependant, le "réservoir" d'énergie magnétique se limite au contenu magnétique de la nappe de courant, soit $\mathcal{E} \sim \delta L^2 B_0^2 / (2\mu) \simeq 10^{19}$ J pour une boucle coronale typique ($B_0 \sim 0.01$ T, $L \sim 10^8$ m); on est encore bien loin des 10^{24} J d'une éruption solaire même de "modeste" amplitude; et cet estimé est optimiste car il suppose que, "replié" dans la boucle coronale, la nappe a une surface totale de $L \times L$!

Il reste à voir comment produire une structure aussi mince. En fait il ne faut pas seulement la produire, il faut également la maintenir à cette épaisseur le temps que le champ soit dissipé, ce qui est encore moins simple; on a vu qu'en l'absence d'un écoulement l'équation d'induction magnétohydrodynamique se réduit à une équation de type diffusion pour chaque composante du champ magnétique. Inspiré par la Figure 2.8, posons une "condition initiale" de la forme:

$$\mathbf{B} = B_x(y, t = 0)\hat{\mathbf{e}}_x = \begin{cases} -B_0 & y > 0 \\ +B_0 & y < 0 \end{cases} \quad (2.80)$$

Il est (relativement) facile de démontrer que la solution à l'équation de diffusion pour la composante B_x prend la forme⁸:

$$B_x(y, t) = B_0 \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{t}}\right), \quad (2.81)$$

où $\operatorname{erf}(x)$ est la fonction d'erreur:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-s^2) ds. \quad (2.82)$$

⁸Solution analytique obtainable par transformée de Laplace, ou via l'approche de la variable autosimilaire; voir, e.g., le chapitre 5 des notes de cours de PHY-3140.

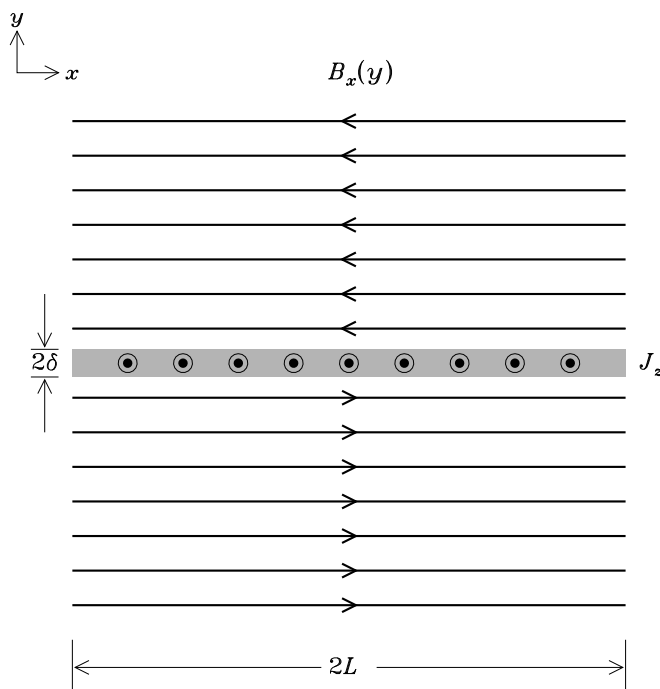


Figure 2.8: Une nappe de courant, associée à une variation rapide d'un champ asymptotiquement uniforme. Ici la nappe plane est située dans le plan xz à $y = 0$, le courant électrique s'écoule dans la direction positive de l'axe- z (sortant de la page), et le champ magnétique induit est orienté dans la direction $\pm x$. Dans la limite $\delta \rightarrow 0$, le champ varie de manière discontinue à $y = 0$.

L'équation (2.81) indique que l'épaisseur de la région de transition entre la région du domaine où asymptotiquement $B_x = +B_0$ et celle où $B_x = -B_0$ augmente dans le temps, de manière proportionnelle à \sqrt{t} . La nappe de courant s'élargit inexorablement tout en se dissipant, ce qui augmente le temps de dissipation magnétique linéairement avec t . La dissipation passive d'une nappe de courant ne peut donc libérer suffisamment d'énergie magnétique, ou la libérer suffisamment rapidement, pour expliquer les éruptions solaires et stellaires; plus la nappe est mince, plus le taux de dissipation est élevé, mais plus le réservoir d'énergie est petit; et inversement, plus la nappe est épaisse, plus grand est le réservoir d'énergie, mais plus le taux de dissipation est lent. En jargon technique, on dirait: No free Lunch !

2.10.3 Le modèle de Sweet-Parker

Considérant la (relativement) faible diffusivité magnétique du plasma coronal, on peut s'attendre à ce qu'aux grandes échelles (soit L sur la Figure 2.8), le flux magnétique soit bien gelé dans le fluide. Partant d'une configuration géométrique du genre de celle de la Figure 2.8, une option évidente est donc de supposer la présence d'un écoulement convergeant vers la nappe, y advectant le champ magnétique en opposition à l'élargissement causé par la diffusion. L'idée est illustrée schématiquement sur la Figure 2.9. C'est le modèle dit de Sweet-Parker⁹. À l'extérieur de la nappe, on suppose $R_m \gg 1$, et donc le champ magnétique est entraîné vers la nappe par

⁹Le reste de cette section est inspiré, parfois fortement, du travail de session de Benoit Tremblay à la session A15; s'étant lui-même beaucoup inspiré de l'ouvrage de Priest & Forbes cité en bibliographie en fin de chapitre.

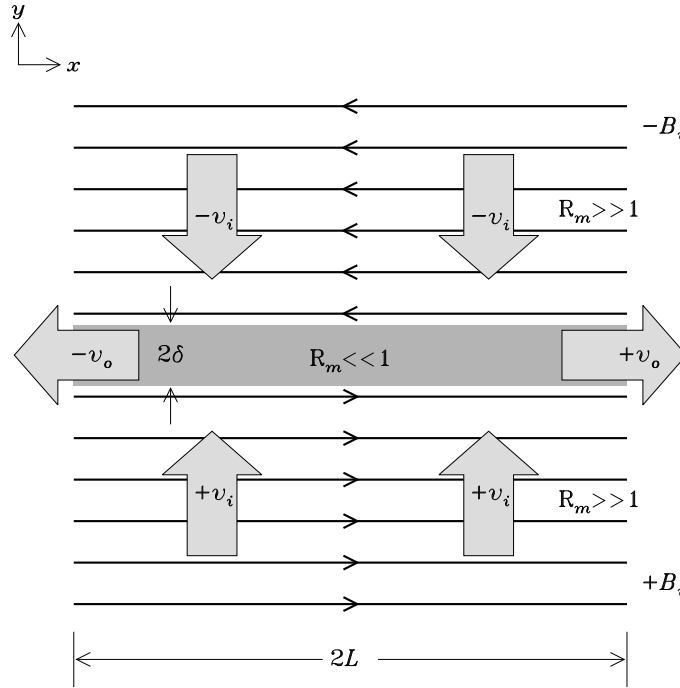


Figure 2.9: Géométrie et notation pour le modèle de reconnexion magnétique de Sweet-Parker. La configuration du champ magnétique et de la densité de courant sont les mêmes que sur la Fig. 2.8, mais cette fois il existe un écoulement vertical convergeant (vitesse constante v_i) dirigé vers la nappe, ainsi qu'un écoulement horizontal divergeant à l'intérieur de celle-ci, afin d'assurer la conservation de la masse (voir texte). Le nombre de Reynolds magnétique R_m est supposé $\gg 1$ à l'extérieur de la nappe, et $\ll 1$ à l'intérieur de celle-ci.

l'écoulement (supposé constant à vitesse v_i) convergeant vers celle-ci, tel qu'indiqué ici par les flèches verticales. Il doit exister un écoulement divergent à l'intérieur de la nappe (flèches horizontales, vitesse constante v_o), afin de satisfaire à la conservation de la masse; pour un écoulement supposé incompressible, cette contrainte permet de relier la vitesse v_o de sortie à celle d'entrée v_i selon:

$$4\rho v_i L = 4\rho v_o \delta \quad \rightarrow \quad \frac{v_o}{v_i} = \frac{L}{\delta}. \quad (2.83)$$

Maintenant, la forme stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) de l'équation de Faraday implique $\nabla \times \mathbf{E} = 0$; \mathbf{B} et \mathbf{u} étant restreints au plan xy , on a $\mathbf{E} = E_z \hat{\mathbf{e}}_z$, et donc $E_z = \text{constant}$. Revenons à la Loi d'Ohm généralisée (2.8):

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (2.84)$$

Dans le cas limite où $R_m \ll 1$ dans la nappe et $R_m \gg 1$ dans les régions extérieures, on peut approximer

$$E_z = \begin{cases} \eta \mu_0 J_z & |y| < \delta, \\ -B_i v_i & |y| > \delta, \end{cases} \quad (2.85)$$

où on a fait bon usage de la Loi d'Ampère dans l'approximation MHD (éq. (2.5)). Si on suppose que B_x varie linéairement en y à l'intérieur de la nappe, alors

$$\mu_0 J_z = [\nabla \times \mathbf{B}]_z = \frac{B_i}{\delta}. \quad (2.86)$$

Comme en régime stationnaire E_z doit être constant en tout y , on déduit de (2.85)–(2.86) la relation suivante reliant v_i à δ :

$$B_i v_i = \eta \frac{B_i}{\delta} \quad \rightarrow \quad v_i = \frac{\eta}{\delta}. \quad (2.87)$$

Cette expression indique que pour demeurer en régime stationnaire, le champ magnétique doit être dissipé dans la nappe au même taux auquel il est advecté à ses frontières verticales. Notre contrainte de conservation de la masse (2.83) nous permet maintenant d'éliminer δ de cette expression, d'où:

$$v_i^2 = \frac{\eta v_0}{L} \quad (2.88)$$

Reste à évaluer v_0 ; on part de l'équation d'Euler en régime stationnaire, négligeant la gravité mais incluant la force de Lorentz:

$$\varrho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) - \nabla p. \quad (2.89)$$

Évaluons maintenant la composante- x de cette expression à $y = 0$; en raison de la configuration géométrique adoptée, l'expression résultante est relativement simple:

$$\varrho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{B_y}{\mu_0} \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2.90)$$

Notons bien qu'on a supposé ici qu'à l'intérieur de la nappe, v_x varie avec x , soit d'une valeur de zéro à $x = 0$ jusqu'à $\pm v_0$ à $x = \pm L$. De plus on a supposé que le processus de reconnexion y produit une composante magnétique verticale (voir Figure 2.7). L'analyse dimensionnelle de l'expression ci-dessus conduit alors à

$$\varrho \frac{v_0}{2} \frac{v_0}{L} = \frac{1}{\mu_0} \frac{B_o}{2} \frac{B_i}{\delta} - \frac{p_0 - p_N}{L}, \quad (2.91)$$

où p_N est la pression à $(x, y) = (0, 0)$, et B_o est la grandeur de la composante verticale (y) du champ magnétique à la sortie de la nappe. La conservation du flux magnétique impose que $B_i v_i = B_o v_o$, ce qui, utilisant la contrainte de conservation de la masse (2.83), impose que:

$$\frac{B_i}{L} = \frac{B_o}{\delta}. \quad (2.92)$$

Utilisant cette relation pour se débarrasser de B_o dans (2.91), et supposant pour l'instant une pression constante dans la nappe (soit $p_N = p_o$), on arrive à la relation:

$$v_o = \frac{B_i}{\sqrt{\mu_0 \varrho}} \equiv v_{A,i}. \quad (2.93)$$

On reconnaît ici la vitesse d'Alfvén, définie en terme du champ magnétique "entrant". On substitue finalement cette expression dans (2.88) pour obtenir enfin:

$$v_i = \sqrt{\frac{v_{A,i} \eta}{L}} = \frac{v_{A,i}}{\sqrt{R_m}} \quad (2.94)$$

où le nombre de Reynolds magnétique de l'écoulement incident est exprimé en terme de sa vitesse d'Alfvén. La littérature technique réfère souvent à cette expression comme définissant la *taux de reconnexion*, même si v_i a des unités de m s^{-1} et donc devrait être appelé *vitesse de reconnexion*. C'est bête mais c'est comme ça.

Pour les boucles coronales on a $R_m \sim 10^{12}$, $L \sim 10^8$ m, et $v_{A,i} \sim 10^5$ m s^{-1} . Le temps caractéristique associé à la reconnexion magnétique est donc:

$$\tau_P = \frac{L}{v_i} \sim 10^9 \text{ s}. \quad (2.95)$$

C'est beaucoup plus petit que le temps de dissipation passive d'une boucle coronale sans nappe de courant ($\sim 10^8$ yr !), mais encore passablement plus grand que les $10\text{--}10^2$ s observés. Le modèle Sweet-Parler décrit la *reconnexion lente*.

On peut montrer (vous le ferez dans le cadre d'un exercice de la première série!) que dans le modèle de Sweet-Parker, (1) l'énergie magnétique du champ entrant (B_i ci-dessus) domine l'apport énergétique à la nappe, (2) la moitié de l'énergie magnétique initiale est convertie en énergie thermique dans la nappe, et (3) l'autre moitié est convertie en énergie cinétique dans l'écoulement sortant.

La discussion ci-dessus peut laisser croire que la reconnexion est "forcée" par l'écoulement vers la plaque, et que ce dernier représente la source d'énergie ultime du processus. La causalité physique du processus est tout autre; la reconnexion, lorsqu'elle se produit, engendre une forte tension magnétique propulsant un écoulement horizontal hors de la nappe (voir Fig. 2.7 B to C). La conservation de la masse exige alors un v_i , qui contribue alors à entrainer du champ magnétique "frais" dans la nappe, assurant ainsi de maintenir son épaisseur et capacité à dissiper l'énergie magnétique. C'est ainsi que la vitesse v_i se retrouve *déterminée* par la diffusion magnétique effective η dans la nappe via l'éq. (2.94). Le *déclenchement* de la reconnexion est dû à une ou plusieurs instabilités plasma se développant spontanément dans la nappe de courant lorsque J_z devient trop élevé. Ceci demeure un sujet de recherche très actif, autant du côté solaire que magnétosphérique.

2.10.4 Au delà du modèle de Sweet-Parker

Notre traitement du modèle de Sweet-Parker implique plusieurs simplifications et analyses dimensionnelles; on pourrait penser qu'un traitement moins approximatif conduise à un taux de reconnexion plus rapide, mais ce n'est pas le cas¹⁰. Fondamentalement, le problème vient de la dépendance du taux de reconnection en $1/\sqrt{R_m}$, qui fait vraiment mal dans le contexte coronal ($R_m \sim 10^{12}$!).

Le modèle de reconnexion rapide dit *de Petschek* atteint des taux de reconnexion suffisamment petit en réduisant la dimension horizontale de la nappe de courant du modèle de Sweet-Parker, tout en assurant l'accélération du plasma via des ondes de choc MHD stationnaires, connectées aux extrémités de la nappe de courant. Ce modèle, développé originellement pour expliquer les taux de reconnexion observés dans la queue de la magnétosphère terrestre, produit un taux de reconnexion proportionnel à $1/\log(R_m)$, plutôt que $1/\sqrt{R_m}$ pour Sweet-Parker; on y gagne cinq ordres de grandeur pour des conditions physiques de type boucle coronale, aboutissant ainsi à un temps caractéristique de quelques minutes, ce qui cadre maintenant bien avec les taux de libération d'énergie observés. Les références fournies dans la bibliographie en fin de chapitre permettront aux intéressé(e)s d'approfondir ce fascinant sujet.

2.11 L'origine des champs magnétiques astrophysiques

Ce chapitre pourrait avoir donné l'impression d'une fixation obsessionnelle sur le champ magnétique \mathbf{B} . Qu'est-ce qui est arrivé au champ électrique \mathbf{E} ? Le fait demeure que partout dans l'univers, on observe des champs magnétiques de toute forme et intensité. Les champs électriques, par contre, n'y sont que rarement présents. Ceci est à prime abord étrange, considérant que \mathbf{E} et \mathbf{B} apparaissent à pied d'égalité dans les équations de Maxwell (2.1)–(2.4). De surcroît, un simple changement de repère peut transformer un \mathbf{B} en un \mathbf{E} . Où sont donc les champs électriques astrophysiques ?

La question du repère se règle via les observations; dans n'importe quel repère inertiel raisonnable (i.e., la Terre au repos; le système solaire au repos; la Voie Lactée au repos; le groupe local au repos, etc., ad infinitum), il y a du \mathbf{B} partout, et excessivement peu de \mathbf{E} . Cette

¹⁰Vous aurez à solutionner ce problème avec un écoulement réaliste spécifique dans le cadre d'un des exercices de la première série; vous y vérifierez également que conserver le gradient de pression dans (2.90) peut aider, mais requiert $p_N \gg p_o$ pour avoir un effet significatif.

asymétrie n'est pas une question de repère, mais plutôt de sources. Aussi vide soit-il, l'Univers contient une quantité astronomique de charges libres: électrons libres, molécules ou atomes ionisés, grains chargés photoélectriquement, etc. Si un champ électrique apparaît soudainement quelquepart, les charges dans le milieu ambiant se sépareront sur une échelle de temps correspondant au temps de relaxation électrostatique introduit précédemment (éq. (2.21)), jusqu'à ce que le champ électrique secondaire ainsi produit annule le champ appliqué, principe de superposition oblige. Les faibles densités de la plupart des plasmas astrophysiques impliquent aussi un grand libre parcours moyen pour leurs constituants microscopiques, ce qui conduit typiquement à des conductivités électriques raisonnables et des temps de relaxation électrostatique très courts, même quand le degré d'ionisation est très bas, comme dans les nuages moléculaires par exemple. Conséquemment, les champs électriques astrophysiques tendent à se court-circuiter très rapidement une fois créés.

Ce n'est pas le cas avec les champs magnétiques, car en autant qu'on puisse en juger en ce moment, il n'y a vraiment pas beaucoup de monopoles magnétiques dans l'Univers, donc court-circuiter les champs magnétiques par séparation de monopoles de charges (magnétiques) opposées n'est pas une option. Un champ magnétique ne peut que se dissiper, via l'action de la résistance Ohmique sur les courants électriques le supportant (viz. la Loi d'Ampère). On sait déjà que ce temps de dissipation (donné par l'éq. (2.13)) est immensément long (viz. le Tableau 2.1). Une fois créés, de quelque manière que ce soit, les champs magnétiques astrophysiques sont là pour rester, à moins qu'un processus dynamique (i.e. une instabilité) n'accélère leur dissipation.

Ce qui nous emmène à un problème crucial. La linéarité en \mathbf{B} de l'équation d'induction MHD (2.9) implique que si $\mathbf{B} = 0$ à un temps quelconque t_0 , alors $\mathbf{B} = 0$ à tous les temps subséquents $t > t_0$, une situation qui persiste même si t_0 est repoussé jusqu'au Big Bang. D'où originent alors les champs magnétiques observés aujourd'hui? On a déjà considéré (à la §2.4) une situation où un écoulement peut amplifier un champ magnétique, et on en verra bon nombre d'autres dans la suite de ce cours. Il serait donc suffisant d'identifier un mécanisme convaincant qui puisse produire un champ magnétique de très faible amplitude, et l'induction MHD peut en principe prendre le relais.

Une option est de supposer que le Big Bang "contenait" déjà un champ magnétique primordial; c'est possible, mais ce genre d'explication cosmologico-religieuse ne tombe pas dans la catégorie des mécanismes convaincants, à mon humble avis du moins. L'option des monopoles magnétiques, elle, peut au moins se quantifier à un certain niveau. La mécanique quantique permet l'existence de tels monopoles, tant que la charge magnétique est un multiple entier de $g \equiv hc/(4\pi e) \approx 69e$, où h est la constante de Planck et e la charge électrique fondamentale. Comme nous n'avons vraiment besoin que d'un seul de ces monopoles, l'option est attrayante. Certaines théories de grande unification, en vogue à diverses périodes, allaient même jusqu'à "prédire" que tôt après le Big Bang, une telle quantité de monopoles de masse $m_g \approx 10^{16}$ GeV/c² devraient être produits qu'une cosmologie inflationniste devient essentielle pour s'assurer qu'un seul monopole se retrouve dans chaque sous-domaine inflationnaire.

Ceci dit, comme personne n'a jamais encore détecté ou vu passer un monopole magnétique, il serait plus rassurant de se trouver un mécanisme qui fonctionne sur la base de théories physiques bien validées dans notre coin du cosmos. Il s'avère que ce n'est pas si compliqué que ça; après tout, la dérivation de l'équation MHD (voir §2.1) repose sur un certain nombre d'approximations, qui peuvent être relaxées. Conserver le courant de déplacement de Maxwell ne nous apporte pas grand chose. C'est au niveau de la Loi d'Ohm que se trouve notre meilleure candidat¹¹.

Ramenons nous en physique des plasmas et écrivons l'équation du mouvement d'un fluide d'électrons (densité électronique n_e , en m⁻³) dans un plasma d'Hydrogène complètement ionisé:

$$m_e n_e \frac{D\mathbf{u}_e}{Dt} = -\nabla p_e - n_e e (\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) - \nu m_e n_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_p), \quad (2.96)$$

¹¹Le reste de cette section est basé en majeure partie sur le travail de session de Simon Blouin à l'automne 2015.

où $\nu = n_e e^2 / m_e \sigma$ mesure le taux de collisions, et donc de transfert de quantité de mouvement, entre les électrons et les protons, que l'on suppose ici proportionnel à la vitesse de dérive entre ces deux composants du fluide. Si on élimine le membre de gauche au vu de la très faible masse de l'électron, ainsi que le gradient de pression électronique, on retrouve bien l'éq. (2.7), puisque $n_e e (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_e) \equiv \mathbf{J}$. Si on conserve le gradient de pression électronique, on trouve au lieu de l'éq. (2.8) l'expression suivante:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{\nabla p_e}{n_e e}, \quad (2.97)$$

et l'éq. (2.9) devient ainsi:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\nabla p_e}{n_e e}); \quad (2.98)$$

ou encore, sous utilisation judicieuse de quelques identités vectorielles classiques:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B}) - \frac{\nabla n_e \times \nabla p_e}{n_e^2 e}. \quad (2.99)$$

Le dernier terme au membre de gauche est appelé *batterie de Biermann*, et, fondamentalement, capture la possibilité de produire une séparation de charges autrement que par l'application d'un champ électrique \mathbf{E} ; en fait, toute force électromotrice d'origine mécanique (ou chimique, d'où le qualificatif original de "batterie") peut faire l'affaire. Ce terme batterie n'est pas proportionnel à \mathbf{B} , et donc agit comme un véritable terme source dans l'équation d'induction MHD: il est maintenant possible de produire un champ magnétique même si $\mathbf{B} = 0$ à $t = 0$!

Dans un contexte astrophysique, la clef est de produire une configuration plasma où les gradients de densité et pression électroniques ne sont pas parallèles. Pas évident, mais possible dans quelques situations astrophysiques crédibles, toutes impliquant, à un niveau ou l'autre, la rotation. Considérons en brièvement quelques unes, en remontant de la période actuelle... presque jusqu'au Big Bang !

2.11.1 Batteries stellaires

On a vu à la §1.5.5 que dans une zone convective de type stellaire, la rotation, via la force de Coriolis, brise l'isotropie de la turbulence et conduit à des contributions non-diffusives (hors-diagonales) dans le tenseur des stress de Reynolds, qui propulsent une rotation différentielle et une circulation dans les plans méridiens. Écrivons l'équation d'Euler en régime stationnaire ($\partial/\partial t \equiv 0$) et intégrons le long d'une ligne d'écoulement (fermée) de cette circulation méridienne:

$$\oint \left(-\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}' \right) \cdot d\ell = \oint (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot d\ell. \quad (2.100)$$

où $\mathbf{g}' \equiv \mathbf{g} + \omega^2 r \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_s$, $\omega(r, \theta)$ étant la fréquence angulaire de rotation à la position (r, θ) dans l'étoile et $\hat{\mathbf{e}}_s$ un vecteur unitaire pointant perpendiculairement à l'axe de rotation. Cette ajout à la gravité correspond évidemment à la force centrifuge. Le membre de droite de cette expression est nul, puisque $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla(u^2/2) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$, et l'intégrale sur le parcours fermé d'un gradient l'est identiquement, tandis que $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \perp d\ell$, car on a (judicieusement!) choisi un parcours d'intégration coïncidant avec une ligne d'écoulement. Appliquant maintenant le théorème de Stokes au membre de gauche de (2.100):

$$\int_S \left[\nabla \times \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) \right] \cdot dS = \int_S (\nabla \times \mathbf{g}') \cdot dS; \quad (2.101)$$

mais

$$\nabla \times \mathbf{g}' = \underbrace{\nabla \times \mathbf{g}}_{\equiv 0} + \underbrace{\nabla \times (\omega^2 r \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_s)}_{\neq 0}. \quad (2.102)$$

On a donc

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) \equiv - \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} \neq 0 ; \quad (2.103)$$

Comme la densité $\rho \equiv n_e m_e + n_p m_p$ pour un fluide d'Hydrogène ionisé, on voit que ce terme a la forme du terme de batterie de Biermann dans l'éq. (2.99). Une étoile en rotation *différentielle*¹² produira donc un effet batterie propulsant une densité de courant dans la direction azimutale, avec laquelle sera associé un champ magnétique poloidal, selon la Loi d'Ampère (2.5). Voilà !

2.11.2 Batteries galactiques

Dans les phases finales de la formation d'une galaxie imbuée d'un moment cinétique significatif (comme dans les galaxies spirales), un effet batterie peut se développer via l'interaction avec le rayonnement micro-onde primordial. Après le découplage photon-matière, considérons une proto-galaxie dont les régions externes tournent à vitesse $U = R\Omega$ par rapport à un repère où le rayonnement primordial micro-onde est isotrope. Le scattering de Thompson des photons micro-ondes sur les électrons conduit à l'effet de *drag de Compton*, qui induit une dérive relative des électrons dans une direction contraire à la rotation des ions. Ceci est équivalent à une densité de courant orientée azimutalement dans le plan galactique, à laquelle est associée un champ magnétique dipolaire, cette fois à l'échelle de la galaxie. Un effet analogue peut se développer dans une galaxie en formation, durant son effondrement gravitationnel. On estime que ces processus peuvent produire un champ magnétique d'une intensité de l'ordre de 10^{-20} aux échelles galactiques, et jusqu'à 10^{-18} G aux plus petites échelles. Ce n'est pas beaucoup de champ magnétique, mais il ne faut pas oublier que tout ce dont on a besoin c'est de se sortir de $\mathbf{B} = 0$.

2.11.3 Batteries cosmologiques

Si on remonte encore plus près du Big Bang, d'autres possibilités font leur apparition. Le processus dit de Harrison se base sur l'hypothèse d'un moment cinétique (ou vortacité) primordial originant du Big Bang. Dans la phase de l'expansion précédant le découplage radiation-matière, en raison de leur plus faible masse les électrons se retrouveront plus fortement couplés à la radiation que les protons. Dans cette phase cosmologique dominée par la radiation et où le couplage électron-proton est négligeable, le moment cinétique du "fluide" d'électrons évoluera différemment du "fluide" protonique, et donc développera une dérive par rapport à ce dernier en raison de l'expansion de l'univers. Ceci correspond à une densité de courant dans un plan perpendiculaire à l'orientation du vecteur-vortacité primordial, à laquelle est associée un champ magnétique "dipolaire" à l'échelle de l'univers (en expansion). On estime que ce processus pourrait produire un champ magnétique d'une intensité de l'ordre de 10^{-19} G aux échelles proto-galactiques; cependant, il dépend de manière critique de l'existence d'une vortacité "primordiale" au moment du Big Bang. Même si la vortacité primordiale requise s'avère être de faible amplitude, l'hypothèse demeure *ad hoc*, et l'efficacité de ce mécanisme demeure contestée.

Le mécanisme de Harrison sent un peu le mysticisme cosmologique; mais le message de cette section demeure: pas vraiment besoin de tomber dans les monopoles ou dans les cordes pour expliquer l'origine ultime des champs magnétiques !

Bibliographie:

Sauf pour quelques ajouts substantiels, en particulier au niveau des ondes MHD (§2.8) et de la reconnexion magnétique (§2.10), ce chapitre a été assemblé (et traduit) à partir de Notes de

¹²Si la rotation est solide, i.e., $\omega(r, \theta) = \text{constante}$, alors la force centrifuge peut s'exprimer comme le gradient d'un potentiel et le second terme au membre de droite de (2.102) sera donc aussi aussi identiquement nul.

cours que j'ai écrites il y a quelques années pour la trente-neuvième mouture de l'École Avancée de Saas Fee de la Société Suisse d'Astronomie. Ces notes sont maintenant publiées:

Charbonneau, P., *Solar and Stellar Dynamos*, éd. O. Steiner, Springer, 2013.

Si vous avez besoin de vous rafraîchir la mémoire sur l'électromagnétisme, je vous recommande:

Griffith, D.J., *Introduction to Electrodynamics*, 3rd ed., Prentice Hall (1999).

En terme d'introduction à la magnétohydrodynamique, mon ouvrage préféré demeure:

Davidson, P.A., *An Introduction to Magnetohydrodynamics*, Cambridge University Press (2001).

Les sections 2.3 et 2.7 de ce chapitre sont d'ailleurs fortement inspirées de cet ouvrage, qui présente également une démonstration particulièrement claire du théorème cinématique (soit l'éq. (2.51)). Au niveau des ondes magnétohydrodynamiques, une présentation rigoureuse et complète se retrouve dans l'ouvrage suivant:

Goedbloed, H., & Poedts, S., *Principles of Magnetohydrodynamics*, Cambridge University Press (2004).

À ne pas rater, le petit vidéo suivant sur youtube; hilarant stylistiquement, mais physiquement parfait et vraiment très bien expliqué:

<http://www.youtube.com/watch?vQArcTy1NooQ>

Sur l'impact du chauffage de Joule sur la dynamique interne des Jupiter chaudes, voir (le second étant une plogue assumée !):

Menou, K., *Astrophys. J. Lett.*, **754**, L9 (2012).

Hardy, R., Cumming, A., & Charbonneau, P., *Astrophys. J.*, soumis (2022).

Sur la reconnexion magnétique l'ouvrage de référence demeure:

Priest, E., & Forbes, T., *Magnetic Reconnection*, Cambridge University Press (2000).

L'article de revue suivant est également à noter:

Yamada, M., & Kulsrud, R., & Ji, H., *Rev. Mod. Phys.*, **82**, 603–664 (2010).

Ceux et celles désirant approfondir les nombreuses subtilités de l'intersection entre la magnétohydrodynamique et la physique des plasmas trouveront se quoi se tenir amplement occupé(e)s dans l'ouvrage suivant:

Kulsrud, R.M., *Plasma Physics for Astrophysics*, Princeton University Press (2005).

dont le chapitre 13 traite en détail des effets de batterie et des divers mécanismes pouvant conduire à la production de champs magnétiques primaires. Son chapitre 14 traite également de reconnexion magnétique, incluant le modèle de Petschek et une discussion des instabilités plasma pouvant déclencher la reconnexion. Un scénario "complet" de l'inexorable croissance du champ magnétique dans l'Univers est présenté dans

Kulsrud, R.M., & Zweibel, E.G., *Rep. Prog. Phys.*, **7**, 046901 (2008).

Chapitre 3

Les vents coronaux

3.1 Les couronnes solaire et stellaires

La *couronne solaire* est spectaculairement visible et vraiment difficile à rater lors des éclipses totales du soleil (voir Fig. 3.1). Il est donc fort probable qu'elle ait été remarquée pour la première fois par un quelconque Néanderthal poilu et à l'hygiène corporelle douteuse aux standards contemporains. Sa première description non-ambigüe (de la couronne, pas du Néanderthal) remonte en fait aux chroniques byzantines du dixième siècle. Il faudra cependant attendre au début du dix-huitième siècle avant que les astronomes s'entendent sur le fait que la couronne est une structure qui fait partie du soleil et non pas de la lune.

La structure aux grandes échelles de la couronne, telle qu'on peut l'observer durant une éclipse, est due principalement au confinement du plasma par le champ magnétique du soleil. Les surdensités de plasma augmentent la dispersion de la lumière solaire vers la ligne de visée, causant ainsi une émission visible même à l'oeil nu... tant que la lune cache le disque du soleil.

Malgré les importantes avancées en spectroscopie durant tout le dix-neuvième siècle ce n'est que vers le milieu du vingtième siècle qu'on a finalement compris que la couronne est composée d'un gaz très chaud ($1-2 \times 10^6$ K) et donc très fortement ionisé, expliquant ainsi les nombreuses et mystérieuses raies spectrales qui y avaient été détectées. Le(s) mécanisme(s) physique(s) responsable(s) de cette énorme température demeure(nt) mystérieux, et le soi-disant problème du chauffage coronal est encore aujourd'hui l'un des grands problèmes non-résolus de la physique solaire (et stellaire). Il semble passablement clair que le chauffage coronal puise son énergie dans le réservoir d'énergie mécanique que représente la convection dans la photosphère, et que le champ magnétique joue un rôle primordial dans le transfert de cette énergie vers la couronne, mais les détails restent flous et plusieurs mécanismes physiques sont à l'étude: les deux plus prometteur semblent la génération et dissipation d'ondes acoustiques et/ou magnétoacoustiques, et la formation et dissipation *in situ* via reconnexion magnétique (2.10) de nappes de courant électrique formées par forçage mécanique du champ magnétique.

Et comme si quelques 10^6 K n'était pas déjà assez élevé, lors des éruptions solaires la couronne est surchauffée localement à des températures pouvant dépasser le 10^7 K. Il apparaît possible, voire probable, que ces phénomènes éruptifs représentent la queue à haute énergie du même processus qui chauffe la couronne. L'observation du soleil dans les domaines de l'ultraviolet extrême (EUV) et dans le domaine des rayons-X révèle en effet un continu d'évènements de chauffage localisé, se traduisant en émission à ces courtes longueurs d'onde dépassant par plusieurs ordres de grandeur l'émission thermique ETL que l'on associerait normalement à un corps noir à une température de 5700K (voir Figure 3.2). Ces observations à haute résolution spatiale et cadence temporelle, couplées aux observations magnétographiques, démontrent sans ambiguïté que cette émission radiative non-thermale se produit préférentiellement dans et au dessus des régions de la photosphère solaire qui sont fortement magnétisées. C'est pourquoi on décrit cette émission —et les phénomènes éruptifs leur étant souvent associés— comme étant due à *l'activité magnétique* du soleil.

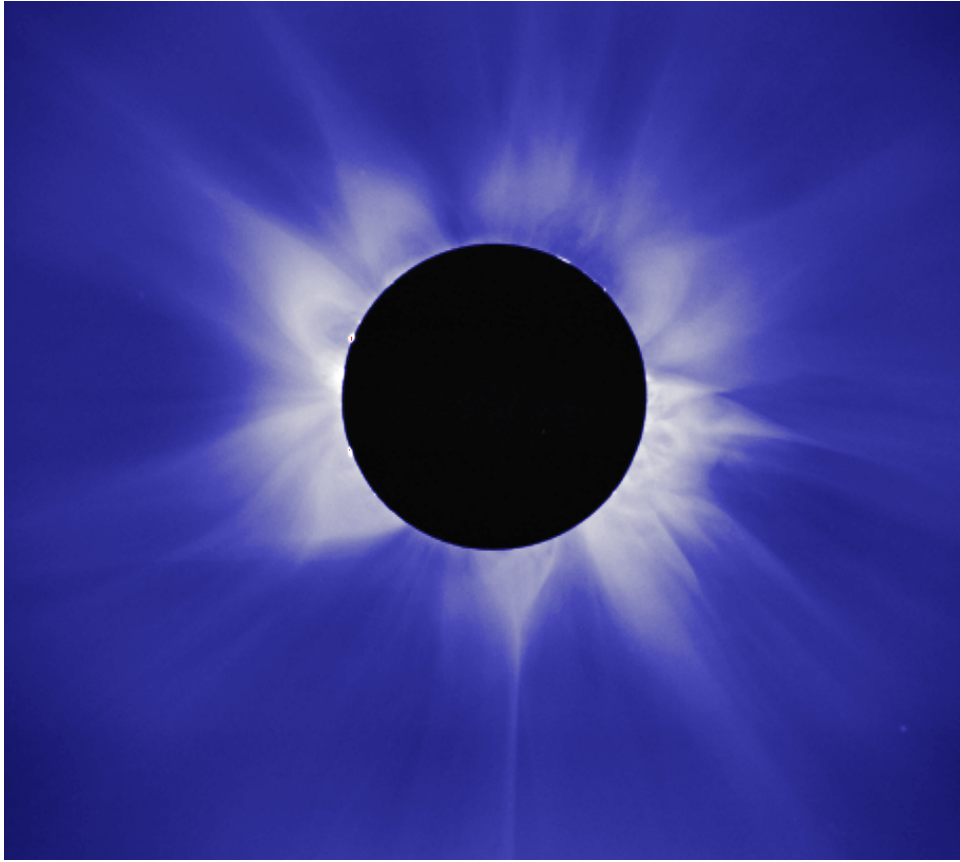


Figure 3.1: Éclipse totale du soleil le 16 février 1980. La luminosité de la couronne est due au scattering de Thompson de la luminosité solaire sur les électrons libres du plasma coronal, ce qui implique que la brillance est ici proportionnelle à la densité. Les régions plus brillantes en forme de flammes contiennent un excès de densité de plasma, confiné par le champ magnétique solaire. Source: High Altitude Observatory.

La couronne solaire n'est pas une exception ou une pathologie exclusive au soleil. L'émission radiative en EUV et rayons-X, bien que faible en termes absolus, dépasse de loin l'émission photosphérique thermique à ces longueurs d'onde, et est donc (relativement) facilement détectable de l'espace. Il est donc possible de l'observer dans des étoiles autres que le soleil, et depuis une trentaine d'années toute une gamme de satellites astronomiques a ainsi pu tracer un portrait zoologique détaillé de l'émission coronale à travers le diagramme Hertzsprung-Russell. Pour résumer en bref, chaque étoile de type solaire (c'est à dire, possédant une enveloppe convective) observée montre des signes d'émission radiative non-thermique semblable à ce qu'on verrait si le soleil était observé comme une étoile, i.e., sans résolution spatiale comme sur la Figure 3.2. Plusieurs étoiles évoluées ayant des enveloppes convectives montrent également des signes d'activité magnétique similaire. Il est donc raisonnable de supposer que toutes ces étoiles ont également une couronne chauffée au delà de $\sim 10^6$ K, physiquement analogue à celle du soleil.

3.2 Couronnes polytropiques en équilibre hydrostatique

Prenant pour acquis la température très élevée de la couronne solaire, tentons maintenant d'en construire un modèle physique. Dans l'esprit de commencer avec quelque chose de simple (ce qui est rarement une mauvaise idée), on considère une couronne statique ($\mathbf{u} = 0$), stationnaire

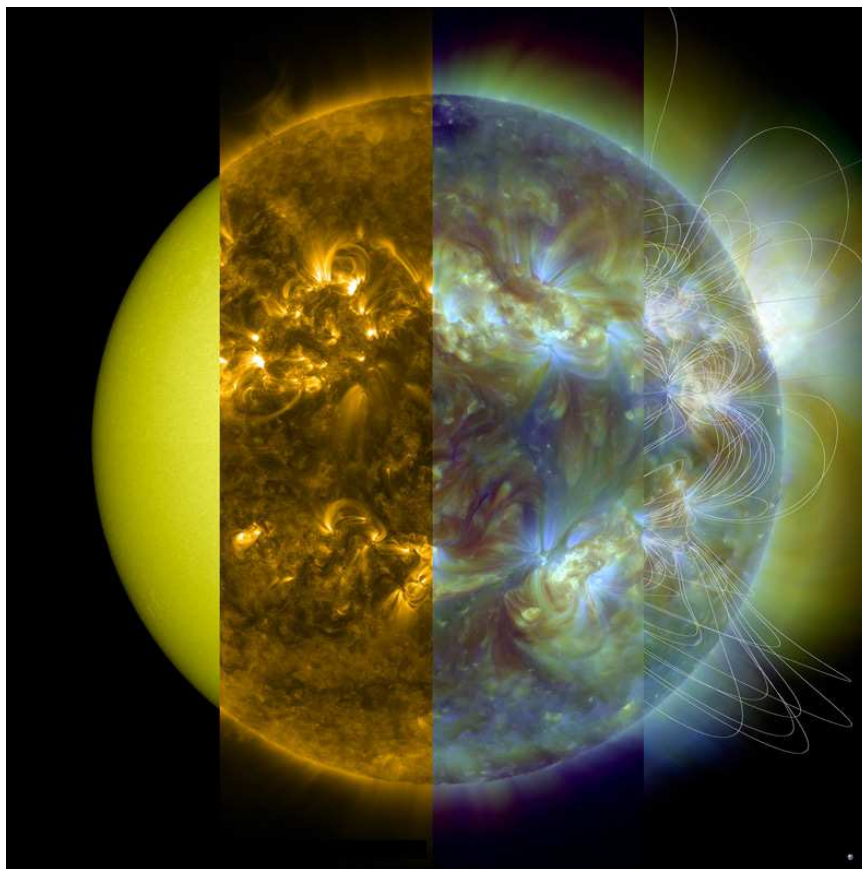


Figure 3.2: La couronne solaire dans l'extrême ultraviolet. Les deux sections centrales montrent l'émission radiative associée à des températures allant de 10^6 à 2×10^6 K environ. La section d'image l'extrême gauche est dans le visible. Une reconstruction des lignes de champ magnétique a été ajoutée à la section d'image à l'extrême droite. Image composite produite à l'aide de données de la mission NASA/SDO, dans le domaine public (<http://sdo.gsfc.nasa.gov/gallery/main/item/117>). Un lien vers une version animée est disponible via la page web du cours.

($\partial/\partial t = 0$), non-magnétisée ($\mathbf{B} = 0$), et caractérisée par une symétrie sphérique ($\partial/\partial\theta = 0$, $\partial/\partial\phi = 0$, $\partial/\partial r \rightarrow d/dr$). On cherche à construire un modèle couvrant un domaine $r \geq r_0$, r_0 étant une hauteur de référence où la température T_0 et densité ϱ_0 sont considérées connues. On supposera enfin que notre couronne est composée d'Hydrogène complètement ionisé ($m = m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg, $\mu = 0.5$) dont l'équation d'état est celle d'un gaz parfait. Voilà.

Si on néglige la contribution gravitationnelle du plasma coronal — une excellente approximation, — la composante r de l'équation de Navier-Stokes se réduit à un équilibre hydrostatique dans un champ gravitationnel décroissant en $1/r^2$:

$$\frac{dp}{dr} = -\varrho \frac{GM}{r^2}. \quad (3.1)$$

Ceci exprime le fait que le gradient de pression gazeuse équilibre la force gravitationnelle. Le mécanisme (mystérieux) causant le chauffage coronal devrait normalement entrer dans le portrait via un terme source au membre de droite de l'équation de l'énergie (1.56). Cependant, nous n'avons aucune idée de la forme de ce terme source. On supposera donc plutôt que la pression

et la densité peuvent être reliées via une *relation polytropique* du genre:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\alpha . \quad 1 \leq \alpha \leq 5/3 \quad (3.2)$$

Attardons-nous sur ce qu'exprime une telle relation; pour $\alpha = 5/3$, nous retombons en régime adiabatique, c'est à dire que la température ne peut que baisser lors de d'expansion du plasma, monter en compression, tout en conservant l'entropie, ce qui implique un chauffage externe nul. À l'autre extrême, $\alpha = 1$, la pression est directement proportionnelle à la densité, ce qui implique une couronne isotherme (pensez à l'équation d'état pour un gaz parfait); autrement dit, quoiqu'on fasse la température demeure constante même si p et ρ décroissent avec le rayon, ce qui implique (implicitement) un processus de chauffage. L'éq. (3.2) représente donc une solution particulière de l'équation de l'énergie, à laquelle est associé un terme de chauffage tout aussi particulier.

On pourrait reprendre le calcul des ondes sonores de la §1.3 en utilisant l'éq. (3.2) plutôt que sa limite adiabatique donnée par (1.70), ce qui conduirait encore une fois à une équation d'onde, mais cette fois en terme de la *vitesse polytropique* du son, i.e., $c_s^2 = \alpha p/\rho$, plutôt que la vitesse adiabatique $c_s^2 = \gamma p/\rho$. Utilisant cette vitesse évaluée au rayon de référence, soit $c_{s0}^2 = \alpha p_0/\rho_0 = \alpha kT_0/\mu m$ pour un gaz parfait, permet de réécrire l'éq. (3.1) sous la forme:

$$c_{s0}^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\alpha-1} d\rho = -\rho \frac{GM}{r^2} dr . \quad (3.3)$$

Ceci s'intègre facilement pour produire le profil de densité:

$$\frac{\rho(r)}{\rho_0} = \left[1 - \frac{(\alpha-1)GM}{r_0 c_{s0}^2} \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) \right]^{1/(\alpha-1)} , \quad (3.4)$$

duquel on obtient directement le profil de pression via l'éq. (3.2):

$$\frac{p(r)}{p_0} = \left[1 - \frac{(\alpha-1)GM}{r_0 c_{s0}^2} \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) \right]^{\alpha/(\alpha-1)} , \quad (3.5)$$

et le profil de température via l'équation d'état:

$$\frac{T(r)}{T_0} = \left[1 - \frac{(\alpha-1)GM}{r_0 c_{s0}^2} \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) \right]^\alpha . \quad (3.6)$$

En examinant la forme de ces expressions on réalise rapidement qu'il existe des combinaisons de valeurs pour T_0 et α qui conduisent à une pression nulle à une distance finie. Ceci se produira si

$$c_{s0}^2 < (\alpha-1)GM/r_0 , \quad (3.7)$$

d'où on peut calculer l'étendue radiale maximale de la couronne comme étant:

$$\frac{r_{\text{top}}}{r_0} = \left(1 - \frac{r_0 c_{s0}^2}{(\alpha-1)GM} \right)^{-1} . \quad (3.8)$$

Les éqs. (3.4)–(3.6) décrivent par conséquent une “atmosphère” polytropique occupant un volume $r_0 \leq r \leq r_{\text{top}}$. Plus haut, soit $r > r_{\text{top}}$, il n'y a que le vide, n'en déplaise à Aristote qui abhorrait fanatiquement le concept. Mais que se passe-t-il si T_0 , la température à la base de la couronne, est trop grande pour satisfaire à l'éq. (3.7) ?

La Figure 3.3 présente les profils radiaux de densité pour une famille de couronnes polytropiques, toutes calculées utilisant les valeurs $T_0 = 1.5 \times 10^6$ K et $r_0 = 1.15 R$, mais des valeurs croissantes pour l'indice polytropique α . Pour cette valeur de T_0 , l'éq. (3.7) ne peut être satisfaite que pour $\alpha > 1.1765$. Les solutions pour α plus élevé s'étendent jusqu'à l'infini

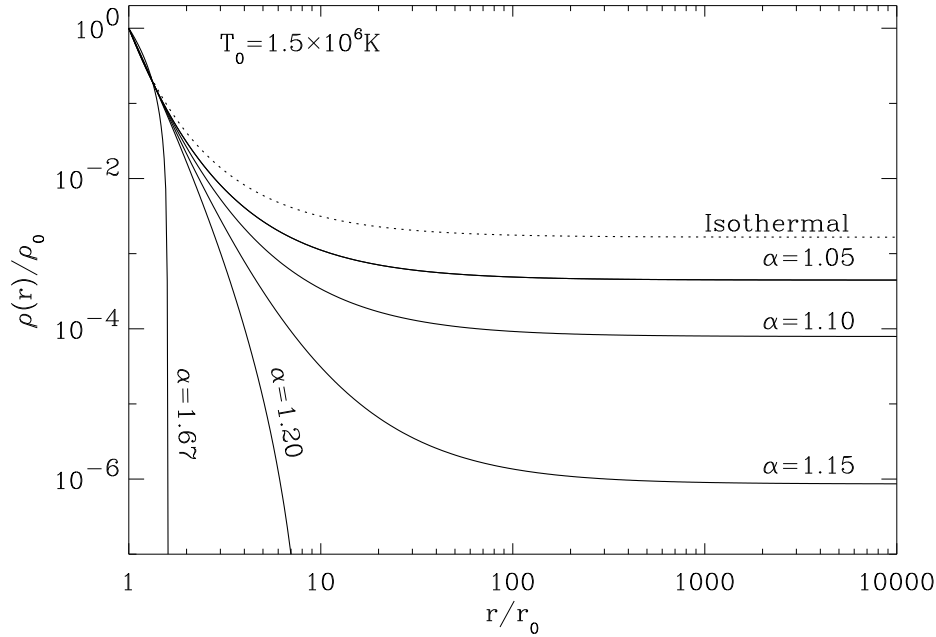


Figure 3.3: Profils de densité pour une famille de couronnes polytropiques ayant toutes $T_0 = 1.5 \times 10^6$ K et $r_0 = 1.15 R$, et diverses valeurs de l'indice polytropique α . On remarquera que pour $\alpha < 1.1765$, la densité tend vers une valeur asymptotique finie dans la limite $r \rightarrow \infty$.

en conservant des pressions et densités finies. L'équation (3.5) permet de calculer ces valeurs asymptotiques:

$$p_\infty \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{p}{p_0} = \left[1 - \frac{(\alpha - 1)GM}{r_0 c_{s0}^2} \right]^{\alpha/(\alpha-1)}, \quad (3.9)$$

et des expressions semblables (mais des exposants différents) pour les valeurs asymptotiques des densité et température. Dans le cas des valeurs de paramètres utilisées pour produire les solutions de la Fig. 3.3, et $N_0 = \varrho_0/(\mu m_p) = 10^{14} \text{ m}^{-3}$, on obtient $N_\infty = 10^{10} \text{ m}^{-3}$, $p_\infty \simeq 10^{-7} \text{ Pa}$, et $T_\infty = 6 \times 10^5 \text{ K}$ dans le cas $\alpha = 1.1$. Ces valeurs sont plus élevées par plusieurs ordres de grandeur, en comparaison à ce que peut offrir le milieu interstellaire. Dans le voisinage (galactique) du système solaire, les valeurs typiques de la densité et de la température sont du genre $N_{\text{ism}} = 10^6 \text{ m}^{-3}$ et $T_{\text{ism}} = 100 \text{ K}$, ce qui conduit à $p \sim 10^{-15} \text{ Pa}$. C'est nettement insuffisant pour équilibrer la pression exercée par notre couronne¹. Il y a quelque chose qui cloche, et le problème n'est pas qu'académique: le profil de température de la basse couronne solaire, déterminée spectroscopiquement, se rapproche fort de celui obtenu pour $\alpha = 1.1$ sur la Fig. 3.3, plaçant la couronne solaire dans ce régime problématique.

Considérant les nombreuses hypothèses et simplifications introduites dans la construction de nos modèles de couronne polytropique, trois options sont disponibles pour sauver la mise:

1. Ajuster l'énergétique de manière à obtenir des valeurs asymptotiques de densité et pression en accord avec celles du milieu interstellaire;
2. Abandonner l'hypothèse d'une couronne statique ($\mathbf{u} = 0$);

¹En réalité, un meilleur estimé de la pression totale dans le milieu interstellaire devrait inclure la contribution du champ magnétique $B_{\text{ism}} \sim 1 \text{ nT}$, ce qui conduit à une pression magnétique de $\sim 10^{-13} \text{ Pa}$. Loin d'être négligeable, la pression magnétique dépasse par un facteur 100 la pression gazeuse. Néanmoins, cela demeure insuffisant pour équilibrer la couronne.

3. Ramener le champ magnétique dans le portrait.

Historiquement, les efforts pour se dépêtrer de cette situation se sont d'abord concentrés sur l'option 1; cependant, c'est la 2 qui s'est avérée la bonne, avec la 3 améliorant la situation générale. Commençons par étudier l'option 2.

3.3 Vents polytropiques

3.3.1 Le vent solaire

L'idée d'un *vent solaire*, soit un flux de plasma provenant du soleil, avait été avancée déjà à la fin du dix-neuvième siècle par Kristian Birkeland (1867-1917), soit longtemps avant la découverte de notre paradoxe coronal, pour expliquer certains phénomènes géomagnétiques comme les aurores boréales, ainsi que le rayonnement zodiacal. L'establishment scientifique du temps a cependant jugé farfelue l'idée d'une telle interaction soleil-Terre, et ce n'est qu'un demi-siècle plus tard que l'idée a refait son apparition, cette fois étant la bonne.

Bien que les observations de l'orientation des queues de comètes aient ramené de l'avant l'idée d'un écoulement provenant du soleil dans le milieu interplanétaire, le premier modèle physique de ce que nous appelons aujourd'hui le *vent solaire* a été proposé en 1958 par Eugene Parker (1927-2022), et prédisait qu'un tel vent devrait être supersonique à l'orbite de la Terre. Cette surprenante (et controversée) prédiction a été spectaculairement confirmée par les premières mesures *in situ* effectuées par des satellites en orbite terrestre: Lunik 2 (1960), Explorer 10 (1961), and Mariner 2 (1962). Les propriétés physiques du vent solaire sont depuis mesurées de l'espace de manière plus ou moins continue, et ce jusqu'aux confins du système solaire par les sondes *Pioneer* et *Voyager*, et hors du plan de l'écliptique par la sonde *Ulysses* (et plus récemment par *Solar Orbiter*).

Les propriétés physiques du vent solaire varient sur une vaste gamme d'échelles temporelles. Dans le plan de l'écliptique à 1 UA, les fluctuations par rapport aux valeurs moyennes sont très grandes, comme on peut le constater sur examen du Tableau 3.1 ci-dessous. Il ne s'agit pas ici d'erreurs de mesure, ce sont de véritables fluctuations d'origine physique. Il a été rapidement réalisé que les mesures de ces diverses quantités ne se distribuent pas comme une Gaussienne, mais plutôt sous une forme bimodale pouvant être approximée par la superposition de deux Gaussiennes. Ceci a conduit à la définition de deux composantes dites *lente* et *rapide* du vent solaire. Subdivisant les mesures en fonction de ces deux modes réduit grandement les déviations par rapport à la moyenne, comme on peut le constater sur examen des deux colonnes de droite du Tableau 3.1).

Tableau 3.1
Caractéristiques du vent solaire à 1 UA dans le plan de l'écliptique

Quantité	Moyenne globale	Mode lent	Mode rapide
N [10^6 m^{-3}]	8.7 ± 6.6 (76%)	11.9 ± 4.5 (38%)	3.9 ± 0.6 (15%)
u [km s^{-1}]	468 ± 116 (25%)	327 ± 15 (5%)	702 ± 32 (5%)
Nu [$10^{12} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$]	3.8 ± 2.4 (63%)	3.9 ± 1.5 (38%)	2.7 ± 0.4 (15%)
ϕ_v (degrees)	-0.6 ± 2.6 (430%)	$+1.6 \pm 1.5$ (94%)	-1.3 ± 0.4 (31%)
T_p (10^5 K)	1.2 ± 0.9 (75%)	0.34 ± 0.15 (44%)	2.3 ± 0.3 (13%)
T_e (10^5 K)	1.4 ± 0.4 (29%)	1.3 ± 0.3 (20%)	1.0 ± 0.1 (8%)
T_α (10^5 K)	5.8 ± 5.0 (86%)	1.1 ± 0.8 (68%)	14.2 ± 3.0 (21%)

On a depuis compris que la composante lente origine des régions magnétiquement fermées du champ magnétique coronal. Le fait que cette composante provienne d'une région où le plasma est magnétiquement confiné, et donc plus dense, et doit effectuer un travail mécanique additionnel contre la force magnétique pour s'échapper, explique à la fois les densité plus élevée et vitesse plus lente de cette composante. La composante rapide, elle, origine des régions

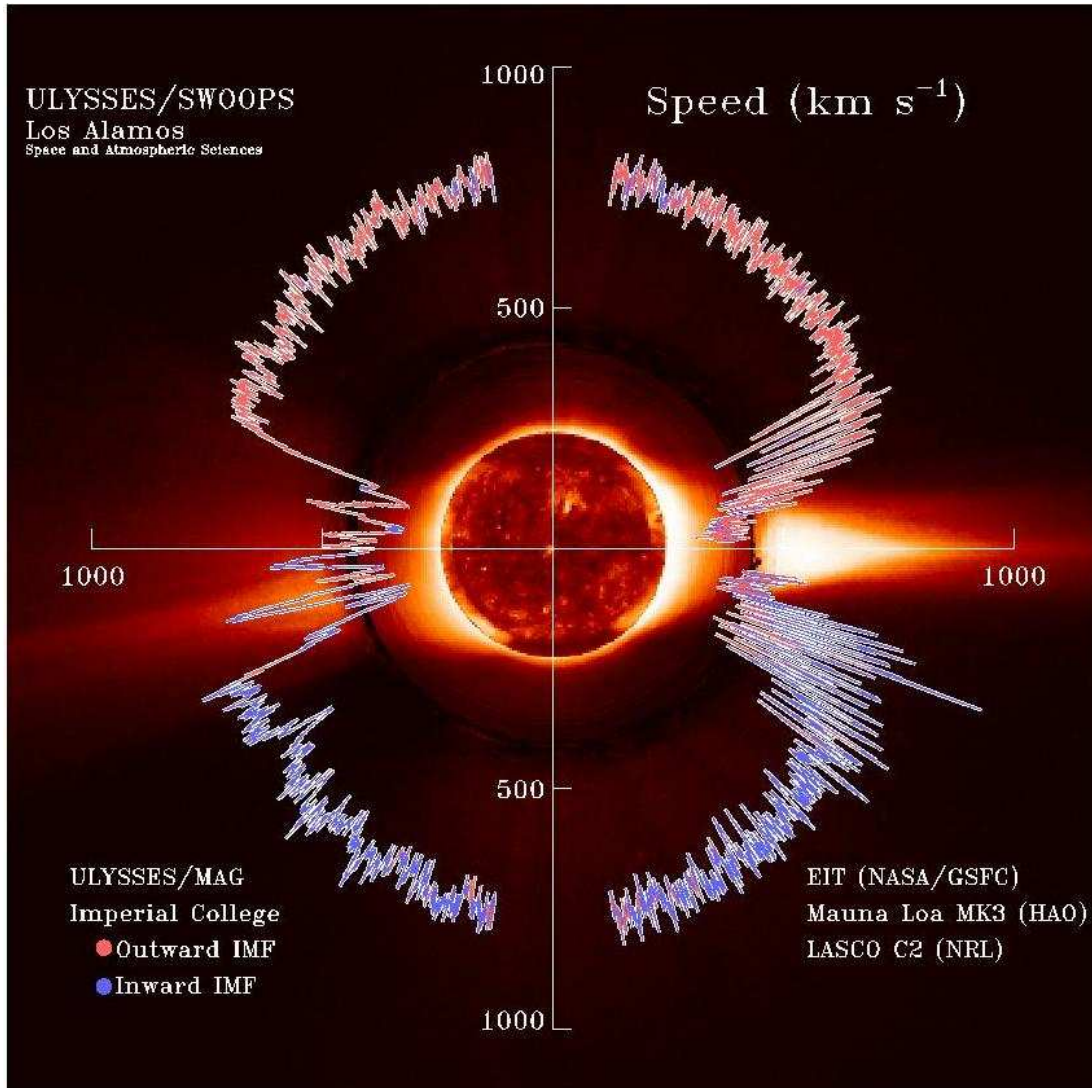


Figure 3.4: Image de la couronne solaire, sur laquelle est superposée un graphique polaire indiquant la vitesse du vent solaire mesurée à 1.5 UA par la sonde *Ulysses*. Les couleurs bleu/rouge indiquent l'orientation de la composante radiale du champ magnétique mesuré dans le vent. Ces données ont été prises en 1996, durant un minimum du cycle d'activité solaire, période durant laquelle le champ magnétique coronal est approximativement dipolaire et aligné à l'axe de rotation du soleil. Source: sci.esa.int/ulysses (domaine public).

magnétiquement ouvertes et donc moins denses, et s'écoule le long du champ magnétique sans avoir à travailler contre la force magnétique; elle se retrouve par conséquent à s'écouler plus rapidement tout en étant moins dense. Cette caractérisation de ces deux composantes du vent solaire est quelque peu simpliste, mais a néanmoins été confirmée dans ses grandes lignes par les mesures effectuées par la sonde *Ulysses*, qui a mesuré *in situ* les propriétés du vent solaire à diverses latitudes et distances héliocentriques. La Figure 3.4 récapitule une série de telles mesures, prises en 1996 lors d'une phase d'activité solaire minimale, quand la couronne prend une forme axisymétrique dipolaire, où une série d'arcades magnétiques chevauchent l'équateur, et les régions polaires sont caractérisées par un champ magnétique ouvert, i.e., les lignes de champ ont un seul point d'ancrage à la photosphère, et s'étirent aux confins du système solaire.

Les trois dernières lignes du Tableau 3.1 listent les température (cinétiques) des trois principaux constituants plasma du vent solaire, soit les protons, les électrons et les noyaux d'Hélium. Ces températures cinétiques sont définies à partir des mesures de la partie isotropique des composantes de vitesses mesurées, via la relation:

$$kT = \frac{1}{2}mv^2 . \quad (3.10)$$

Le fait que les températures cinétiques ainsi déterminées diffèrent considérablement entre les protons et noyaux d'Hélium indique que le plasma n'est plus en régime collisionnel, et donc que les limites de notre approximation fluide sont atteintes.

Le Tableau 3.1 montre bien que les fluctuations résiduelles attachées aux propriétés physiques des composantes lente et rapide sont beaucoup plus petites que si cette distinction n'est pas faite, mais ces fluctuations demeurent néanmoins substantielles. Elles sont attribuables en partie au passage d'ondes de choc associées à divers phénomènes éruptifs solaires, ainsi qu'à un très large spectre de fluctuations se développant sur des échelles temporelles courtes, allant de la seconde aux minutes. Ces fluctuations ont été interprétées en terme d'une superposition de divers types d'ondes magnétohydrodynamiques, ou encore de turbulence MHD. Comme il est toujours possible, mathématiquement, de représenter un tourbillon turbulent comme une superpositions d'ondes formant une base orthogonale complète —on se rappellera que c'est le cas des ondes MHD considérées à la section 2.8,— la distinction physique entre ces deux classes d'explications demeure sujette à controverse.

3.3.2 La solution de Parker

Il s'agit maintenant d'introduire la possibilité d'une expansion radiale dans le modèle polytropique de la couronne développé précédemment. Encore une fois on cherche des solutions stationnaires ($\partial/\partial t = 0$) et caractérisées par une symétrie sphérique ($\partial/\partial\theta = 0$, $\partial/\partial\phi = 0$). Cette symétrie impose que $u_\theta = 0$, et $u_\phi = 0$ (pensez-y bien...). On suppose de nouveau que les densité ρ_0 et température T_0 de la couronne sont connues à sa base ($r = r_0$). La solution recherchée s'applique à un plasma inviscide ($\nu = 0$) et non-magnétisé ($\mathbf{B} = 0$) obéissant à l'équation d'état d'un gaz parfait constitué d'Hydrogène complètement ionisé. On introduit encore une fois une relation polytropique entre la pression et la densité:

$$\left(\frac{p}{p_0}\right) = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\alpha , \quad 1 \leq \alpha \leq \gamma = 5/3 , \quad (3.11)$$

ou, de manière équivalente,

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{p}{\rho^\alpha}\right) = 0 , \quad (3.12)$$

avec α constant and spécifié *a priori*, comme auparavant. Ceci implique que la vitesse du son varie avec le rayon héliocentrique selon:

$$c_s^2(r) = \frac{\alpha p}{\rho} = c_{s0}^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\alpha-1} , \quad (3.13)$$

où $c_{s0}^2 \equiv \alpha p_0 / \rho_0$ est la vitesse polytropique du son au rayon de référence. Vu la symétrie sphérique, l'équation de continuité se réduit à

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u_r) = 0, \quad (3.14)$$

ce qui s'intègre immédiatement:

$$\rho r^2 u_r = \text{const}. \quad (3.15)$$

La symétrie sphérique implique également que seule la composante r de l'équation de Navier-Stokes doit être considérée:

$$\rho u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\rho \frac{GM}{r^2} - \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (3.16)$$

où on a encore supposé un potentiel gravitationnel fixé uniquement par la masse du soleil, i.e., on néglige la contribution gravitationnelle de la masse du plasma coronal. Les équations (3.11) et (3.13) permettent de transformer l'éq. (3.16) sous la forme:

$$\boxed{\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{u_r}{r} \left[\frac{2c_s^2 - GM/r}{u_r^2 - c_s^2} \right]}. \quad (3.17)$$

Le dénominateur de cette expression devient nul là où la vitesse radiale de l'écoulement devient égale à la vitesse locale du son. Pour éviter divergence de la solution on doit donc exiger que le numérateur soit simultanément nul, sinon on se retrouve avec des accélérations infinies. Le rayon r_s at où ceci se produit est appelé *point sonique*, et est donné par:

$$r_s = \left(\frac{1}{c_{s0}^2} \right)^{2/(5-3\alpha)} \left(\frac{GM}{2} \right)^{(\alpha+1)/(5-3\alpha)} \left(\frac{1}{u_{r0} r_0^2} \right)^{2(\alpha-1)/(5-3\alpha)}, \quad (3.18)$$

où u_{r0} est la vitesse de l'écoulement à la base de la couronne, $r = r_0$. Au point sonique nous avons de surcroit:

$$u_{rs} = c_s(r_s) = \left(\frac{GM}{2r_s} \right)^{1/2}. \quad (3.19)$$

L'étape suivante consiste à réexprimer l'éq. (3.16) sous la forme:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{u_r^2}{2} + \frac{c_s^2}{\alpha-1} - \frac{GM}{r} \right] = 0, \quad (3.20)$$

ce qui s'intègre immédiatement pour produire:

$$\boxed{\frac{u_r^2}{2} + \frac{c_s^2}{\alpha-1} - \frac{GM}{r} = E}. \quad (3.21)$$

On reconnaît ici une forme du Principe de Bernoulli (voir §1.2.5), où la constante d'intégration E correspond à l'énergie par unité de masse dans l'écoulement. Cette expression récapitule bien l'essence du processus d'accélération du vent coronal: l'énergie thermique du plasma (le terme $c_s^2/(\alpha-1)$) est convertie en énergie potentielle gravitationnelle (GM/r) et en énergie cinétique de l'écoulement (le terme $u_r^2/2$), l'énergie totale étant conservée, comme il se doit. La contrainte de conservation de la masse (l'éq. (3.15)) couplée à l'éq. (3.13) permet d'exprimer la vitesse du son en fonction de r and u_r uniquement. La solution recherchée peut donc être n'importe quelle fonction $u_r(r)$ qui, lorsque substituée dans l'éq. (3.21), produit une valeur de E constante. Mais comment choisit-on cette valeur?

3.3.3 Calcul d'une solution

La clef dans la construction d'une solution pour un vent coronal transsonique est la réalisation qu'une solution non-singulière *doit* passer par le point sonique. Commençons par évaluer E à la base de l'écoulement et au point sonique:

$$E(r_0, u_{r_0}) = \frac{u_{r_0}^2}{2} - \frac{GM}{r_0} + \frac{c_{s0}^2}{\alpha - 1}, \quad (3.22)$$

$$E(r_s, u_{r_s}) = -\frac{3GM}{4r_s} + \frac{c_{s0}^2}{\alpha - 1} \left(\frac{u_{r_0} r_0^2}{\sqrt{GM/2r_s r_s^2}} \right)^{\alpha-1}, \quad (3.23)$$

où on a fait bon usage de l'éq. (3.19). Comme E doit demeurer constant pour une solution acceptable, les deux membres de droite de ces expressions doivent être égaux, d'où:

$$E(r_s, u_{r_s}) - E(r_0, u_{r_0}) = 0. \quad (3.24)$$

Puisque r_0 , r_s et $u_{r_s} = c_s$ sont connus, ceci définit un problème de recherche de racine pour u_{r_0} . Ce problème s'avère en être un coriace, en vertu du fait que le point sonique r_s est lui-même une fonction nonlinéaire de u_{r_0} (viz. l'éq. (3.18)). Cependant, comme le problème est bien borné, i.e., $0 < u_{r_0} < c_s$, une méthode simple, comme la bisection, fonctionne bien ici. Une telle solution numérique de l'éq. (3.24) nous donne la vitesse u_{r_0} de l'écoulement transsonique à la base de la couronne, après quoi la valeur de la vitesse du vent $u_r(r)$ à tout autre rayon r s'obtient en posant cette fois $E(r, u_r) - E(r_0, u_{r_0}) = 0$, pour un r ($> r_0$) donné. Il s'agit ici encore une fois d'un problème de recherche de racine, pour lequel la méthode de la bisection demeure appropriée.

Il faut remarquer à ce stade que le rayon r_s du point sonique est entièrement déterminé par la vitesse basale de l'écoulement u_{r_0} et la vitesse du son (ou, de manière équivalente, par la température T_0) à la base de la couronne, ainsi que par la valeur choisie pour l'indice polytropique α . Cependant, notez bien que u_{r_0} n'est *pas* un paramètre d'entrée du modèle.

Qu'en est-il maintenant des solutions qui satisfont à l'éq. (3.21), mais pour une valeur de E différente de E_s ? De telles solutions correspondent à des paires de valeurs différentes pour u_{r_0} and c_{s0} , sujettes à la contrainte $E(r_0, u_{r_0}) = \text{const}$. La Figure 3.5 montre les diverses familles de solutions ainsi obtenues. Il existe en fait *deux* solutions transsoniques (traits épais), qui se croisent au point sonique $r = r_s$. La solution accélérante est celle que l'on associe au vent. La solution décélérante est caractérisée par une température basale plus faible ($T_0 = 8.7 \times 10^5$ K), qui compense pour sa vitesse basale beaucoup plus élevée ($u_{r_0} = 477.7 \text{ km s}^{-1}$). Ces deux solutions transsoniques divisent le plan $[r, u_r]$ en quatre régions. Les solutions de la région I sont supersoniques déjà à la base de la couronne, et le demeurent durant toute l'expansion. Ces solutions, ainsi que la solution transsonique décélérante qui est également supersonique à la base, peuvent être éliminées basé sur le fait que de telles vitesses supersoniques causeraient des décalages Doppler observables dans les raies spectrales provenant de la base de la couronne, et de tels décalages ne sont pas observés. Les régions II et IV ne "relient" pas la base de la couronne à l'infini, et ne représentent donc pas des solutions physiquement valides. Ceci ne laisse comme possibilités que les solutions de classe III et la solution transsonique accélérante.

Une fois qu'on a reconstruit $u_r(r)$, il est facile d'obtenir des expressions pour les profils (radiaux) de densité, pression et température:

$$\frac{\rho(r)}{\rho_0} = \left[1 - \frac{(\alpha - 1)GM}{r_0 c_{s0}^2} \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) - \frac{(\alpha - 1)}{2c_{s0}^2} (u_r^2 - u_{r_0}^2) \right]^{1/(\alpha-1)}, \quad (3.25)$$

$$\frac{p(r)}{p_0} = \left[1 - \frac{(\alpha - 1)GM}{r_0 c_{s0}^2} \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) - \frac{(\alpha - 1)}{2c_{s0}^2} (u_r^2 - u_{r_0}^2) \right]^{\alpha/(\alpha-1)}, \quad (3.26)$$

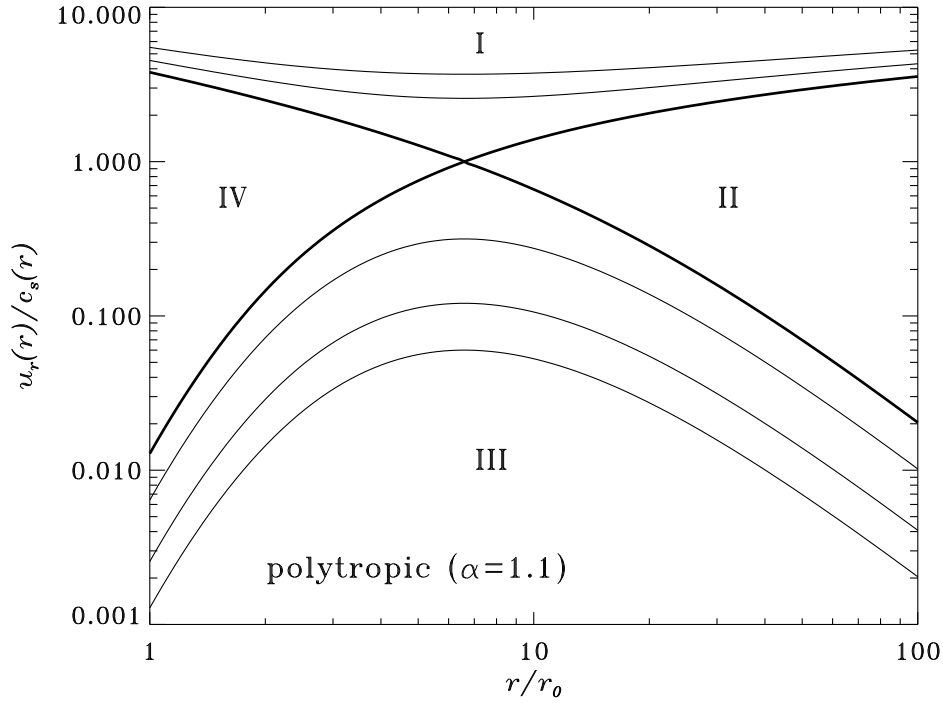


Figure 3.5: Solutions de l'équation (3.21). Les traits épais correspondent aux deux solutions transsoniques qui satisfont à l'éq. (3.24). La solution accélérante, qu'on identifie au vent solaire, à une vitesse radiale de $u_{r0} = 2.12 \text{ km s}^{-1}$ et une vitesse du son $c_{s0} = 165.1 \text{ km s}^{-1}$ à la base de la couronne, le point sonique étant situé à $r_s/r_0 = 6.59$. Les traits minces correspondent à des solutions ayant des paires de valeurs de u_{r0} et c_{s0} différentes des deux solutions transsoniques.

$$\frac{T(r)}{T_0} = \left[1 - \frac{(\alpha - 1)GM}{r_0 c_{s0}^2} \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) - \frac{(\alpha - 1)}{2c_{s0}^2} (u_r^2 - u_{r0}^2) \right]^\alpha. \quad (3.27)$$

Ces expressions tiennent autant pour la solution transsonique que pour les solutions de classe III. Ces dernières ont clairement $\lim_{r \rightarrow \infty} u_r \rightarrow 0$ (see Fig. 3.5), ce qui implique qu'asymptotiquement l'éq. (3.26) devient identique à l'éq. (3.9), obtenue dans le cas d'une couronne polytropique en équilibre hydrostatique. Les solutions de classe III souffrent donc du même problème: des pressions asymptotiques beaucoup trop élevées pour être équilibrées par le milieu interstellaire, et donc doivent être déclarées inappropriées.

Tout ça ne nous laisse donc que la solution transsonique comme seule option. Ses profils de densité, pression et température sont portés en graphique sur la Figure 3.6, avec en traits pointillés, aux fins de comparaison, les profils correspondants pour une couronne polytropique en équilibre hydrostatique ayant les mêmes valeurs de α et T_0 . Sous le point sonique ($r < r_s$) on peine à différencier les deux groupes de profils, mais leur divergence s'établit très nettement au delà du point sonique, reflétant l'influence dynamique de l'écoulement radial.

3.3.4 Perte de masse

Une conséquence importante d'un vent comme celui qu'on vient de calculer est qu'il extrait de la masse de son étoile. Toujours sous l'hypothèse de symétrie sphérique, le taux de perte de masse est donné par:

$$\dot{M} = 4\pi r_0^2 \rho u_{r0}, \quad [\text{kg s}^{-1}]. \quad (3.28)$$

Pour la solution de type vent solaire construite plus haut, on trouve $\dot{M} = 10^{-14} M_\odot \text{ yr}^{-1}$, ce qui implique une perte totale de masse durant toute la phase séquence principale du soleil

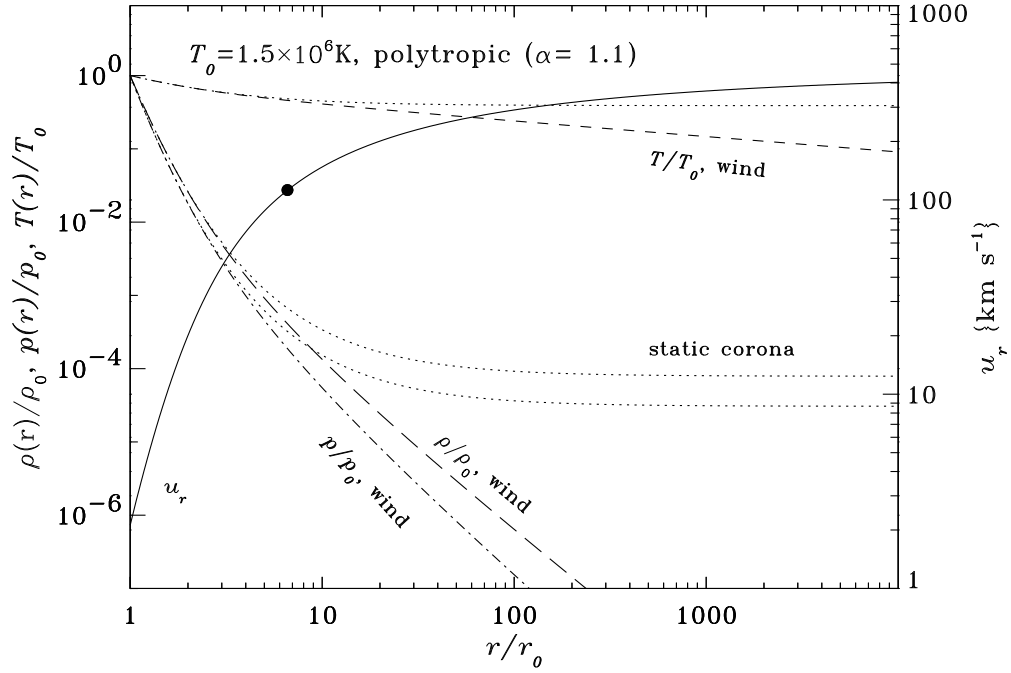


Figure 3.6: Profils complets de la solution de vent transsonique accélérante de la Fig. 3.5. Les traits pointillés indiquent les profils correspondants pour une couronne polytropic hydrostatique ayant les mêmes valeurs de α et T_0 . Le point noir indique le point sonique.

totalisant environ $10^{-4} M_{\odot}$, si l'on suppose que ce taux ne varie pas durant son évolution; on verra cependant un peu plus loin que durant la turbulente jeunesse des étoiles de type solaire, les taux de perte de masse sont probablement plus élevés.

3.3.5 Comportement asymptotique et existence des vents transsoniques

Dans le but d'établir le comportement asymptotique du vent coronal, on revient à notre méthode désormais familière, soit poser l'égalité du membre de gauche de l'éq. (3.21) évalué à r_0 et dans la limite $r \rightarrow \infty$:

$$\frac{u_{r0}^2}{2} - \frac{GM}{r_0} + \frac{c_{s0}^2}{\alpha - 1} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{u_r^2}{2} - \frac{GM}{r} + \frac{c_{s0}^2}{\alpha - 1} \left(\frac{u_{r0} r_0^2}{u_r r^2} \right)^{\alpha-1} \right]. \quad (3.29)$$

On se rappellera que l'énergétique du vent consiste à convertir en énergie cinétique de l'écoulement tout l'excès d'énergie thermique n'étant pas utilisé pour sortir du puit de potentiel gravitationnel du soleil. Au mieux, en bout de ligne toute l'énergie thermique sera ainsi utilisée, ce qui implique $u_r \gg c_s$ à grandes distances. De plus, on a $\lim_{r \rightarrow \infty} u_r \gg u_{r0}$ et $u_{r0} \ll c_{s0}$, donc à un bon niveau d'approximation l'éq. (3.29) donne:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_r \equiv u_{r\infty} = \left(\frac{2c_{s0}^2}{\alpha - 1} - \frac{2GM}{r_0} \right)^{1/2}. \quad (3.30)$$

Ceci démontre que la vitesse du vent tend vers une valeur constante dans la limite $r \rightarrow \infty$. D'autre part, les pression et densité chutent également rapidement avec la distance (voir Fig. 3.6). On arrivera inévitablement à un point où le flux total de quantité de mouvement dans le vent, $\propto p + \rho u^2/2$, chutera sous la pression du milieu interstellaire; le vent doit alors stopper.

Comme il est supersonique, ce freinage se produit initialement sous la forme d’une onde de choc qui, effectivement, “connecte” la branche supersonique du vent à sa branche subsonique, les conditions physiques du plasma de chaque coté de ce choc devant satisfaire aux relations de Rankine-Hugoniot établies à la §1.3.3. C’est le *choc terminal*. La sonde *Voyager I*, lancée en 1977, l’a traversé en 2004 à 94 UA du soleil, tandis que *Voyageur 2*, lancé aussi en 1977, l’a traversé en 2007 à 76 UA. La forme asymétrique de la surface du choc terminal reflète en partie la dépendance latitudinale du vent introduite par le champ magnétique solaire (on verra comment sous peu à la §3.4), ainsi qu’au déplacement du système solaire dans le disque de notre galaxie.

De toute évidence, une solution de type vent doit avoir $u_{r\infty} > 0$ pour tout r , d’où:

$$\frac{c_{s0}^2}{\alpha - 1} - \frac{GM}{r_0} \geq 0. \quad (3.31)$$

Pour $\alpha = 1.1$, ceci se traduit en $T_0 \gtrsim 9 \times 10^5$ K. De surcroît, une solution accélérante exige aussi $du_r/dr > 0$ à la base de la couronne. Sur la base de l’éq. (3.17), on en déduit qu’on doit aussi avoir

$$2c_{s0}^2 - \frac{GM}{r_0} < 0, \quad (3.32)$$

ce qui exige que $T_0 \lesssim 5 \times 10^6$ K. On en conclut qu’une solution transsonique ne peut exister que dans un intervalle de température coronale basale donné par:

$$\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right) \frac{GM\mu m_p}{kr_0} \leq T_0 < \left(\frac{1}{2\alpha}\right) \frac{GM\mu m_p}{kr_0} \quad (3.33)$$

Que se passe-t-il à l’extérieur de cet intervalle ? La borne inférieure correspond au critère obtenu à la §3.2, soit celui déterminant la possibilité d’avoir une couronne en équilibre hydrostatique. La borne supérieure est plus délicate à interpréter physiquement. Elle correspond à une température coronale limite au dessus de laquelle une solution transsonique stationnaire n’est plus possible. Imaginons qu’un mécanisme quelconque puisse soudainement pousser la couronne solaire au delà de cette limite; toute la couronne “explorerait” alors, produisant un écoulement dépendant fortement du temps, et se développant certainement en une forme d’onde de détonation comme dans le cas considéré à la §1.3.3. En examinant de plus près l’éq. (3.33), on réalise aussi que pour qu’il puisse exister un intervalle fini de température à l’intérieur duquel la double inégalité puisse être satisfaite, on doit absolument avoir $\alpha \leq 3/2$, et ce indépendamment de la température T_0 à la base de la couronne.

Toutes ces contraintes se traduisent en une région relativement restreinte dans le plan $[T_0, \alpha]$ où peuvent exister des solutions de type vent transsonique stationnaire. Ceci est illustré sur la Figure 3.7. La contrainte “thermodynamique” sur α ($1 \leq \alpha \leq 5/3$ pour un gaz parfait monoatomique) restreint ainsi la plage de valeurs acceptables pour l’Indice polytropique; l’équation (3.31) (vitesse asymptotique finie) restreint les solutions à la droite du trait en point+tirets; l’équation (3.32) (accélération subsonique à r_0) confine les solutions à la gauche du trait en tirets. La région I correspond aux couronnes en équilibre hydrostatique d’étendue radiale finie, tel que discuté à la §3.2. Dans les régions III et IV, aucune solution de type vent stationnaire n’est possible. Les solutions acceptables se retrouvent donc confinées à la région II du plan $[T_0, \alpha]$.

3.3.6 Énergétique polytropique

Nous avons maintenant en main une solution de vent coronal qui semble excellente, cependant à ce stade nous n’avons aucune idée si l’énergétique de ces solutions est raisonnable physiquement. En effet, les solutions de vent transsonique obtenues ci-dessus ne satisfont pas à l’équation de conservation de l’énergie pour un fluide compressible dans sa forme générale (soit l’éq. (1.56)), puisque dans notre processus de solution nous avons effectivement remplacé cette équation

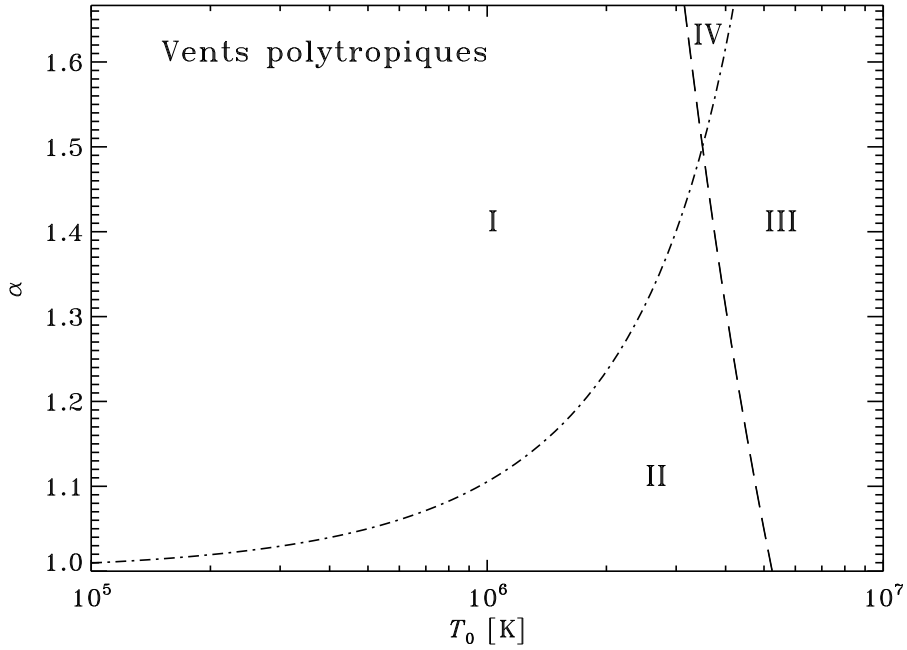


Figure 3.7: Espace de paramètres $[T_0, \alpha]$ cartographiant le domaine à l'intérieur duquel l'existence de vents stationnaires transsoniques est possible. Il s'agit ici de la région II, telle que définie par la double inégalité (3.33); pour qu'une telle région puisse exister, on doit aussi avoir $1 \leq \alpha \leq 3/2$, indépendamment du choix de température basale T_0 (voir texte). Notez que la numérotation I—IV ici n'a rien à voir avec celle utilisée à la Figure 3.5.

par l'approximation polytropique (3.11). Tel que discuté précédemment, cette approximation implique implicitement une source d'énergie qui maintient la température du plasma en dépit du refroidissement normalement associé à l'expansion. On peut cependant, *a posteriori*, utiliser l'équation de la conservation de l'énergie pour calculer la forme du terme source thermique $s(r)$ qui *aurait du* y apparaître pour que cette dernière soit satisfaite. Si on néglige la conduction thermique, et demeurant toujours dans le régime stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) La forme conservative de l'équation de conservation de l'énergie (1.56) peut se manipuler sous la forme hybride:

$$\nabla \cdot \left[\varrho \mathbf{u} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{3p}{2\varrho} \right) \right] + \nabla \cdot (p\mathbf{u}) - \varrho \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi = s(r), \quad (3.34)$$

où Φ est le potentiel gravitationnel. On a maintenant inclus explicitement l'énergie cinétique du vent (terme $\propto u^2$ dans la divergence du flux énergétique), et $s(r)$ est un terme de chauffage volumique (unités $\text{J s}^{-1} \text{m}^{-3}$), ajouté ici explicitement au membre de droite. Il s'agit maintenant de substituer les profils de $u(r)$, $p(r)$ et $\varrho(r)$ (voir Fig. 3.6) dans tous les termes au membre de gauche, et de calculer explicitement toutes les dérivées (e.g., par différences finies). On retire de cet exercice le profil du terme source $s(r)$ associé à cette solution, et donc nécessaire pour satisfaire la forme générale de l'équation de conservation de l'énergie. La Figure 3.8 montre de tels profils de $s(r)$, pour quelques solutions de vent transsonique ayant toutes $T_0 = 1.5 \times 10^6 \text{ K}$ et quelques différentes valeurs de α . La quantité totale d'énergie pompée dans la couronne par unité de temps, soit la puissance développée par notre mystérieux mécanisme de chauffage coronal, est donné par l'intégrale:

$$S(\alpha, T_0) = 4\pi \int_{r_0}^{\infty} s(\alpha, T_0; r) r^2 dr. \quad [\text{J s}^{-1}] \quad (3.35)$$

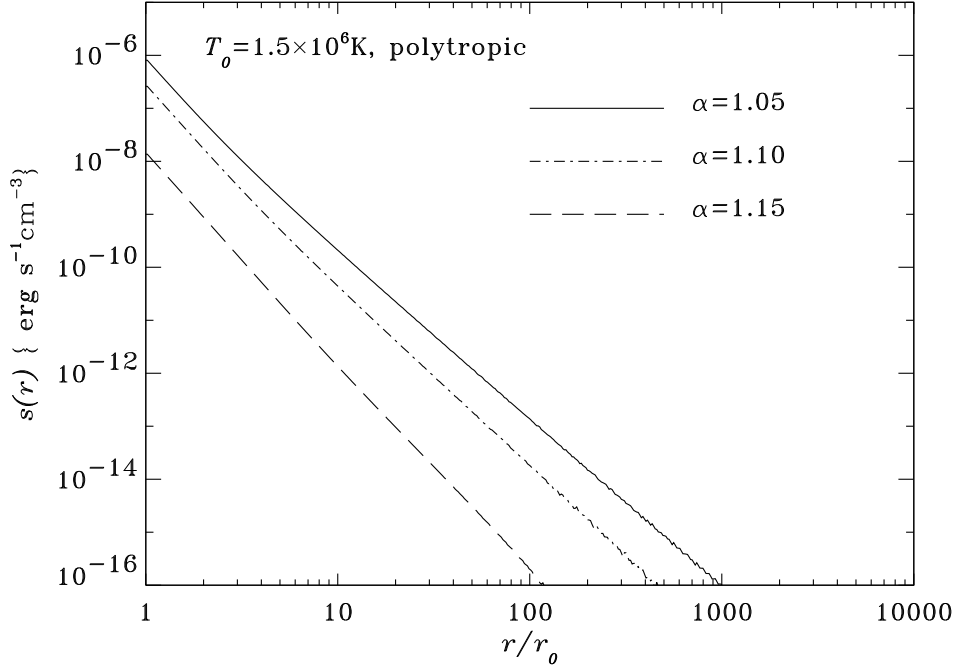


Figure 3.8: Profil radial du terme source thermique implicite à l'approximation polytropique, pour des solutions de vents transsoniques construites utilisant diverses valeurs de l'indice polytropique α . La température coronale basale est $T_0 = 1.5 \times 10^6$ K dans tous les cas. Noter l'échelle verticale logarithmique.

Le calcul (numérique) de cette intégrale donne $S = 1.1 \times 10^{21}$, 2.3×10^{20} , et 8.7×10^{19} J s^{-1} pour $\alpha = 1.05$, 1.1, et 1.15 respectivement. Dans tous les cas ceci est moins de 10^{-5} de la luminosité solaire, ce qui est rassurant. Il est également intuitivement satisfaisant que ce terme de chauffage soit maximal à la base de la couronne et décroisse très rapidement avec le rayon (notez l'échelle verticale logarithmique !), puisque le chauffage origine ultimement de la photosphère solaire.

3.3.7 Comparaison avec le vent solaire

Il est plus que temps de comparer quantitativement notre solution de vent coronal transsonique aux propriétés observées du vent solaire à 1 UA, telles que tabulées précédemment (Tableau 3.1). Le Tableau 3.2 ci-dessous liste les vitesse radiale, densité et température à quelques distances héliocentriques (dont évidemment 1 UA $\equiv r_{\oplus}$) pour la solution de la Fig. 3.6. Notre solution se compare surprenamment bien aux vitesse et densité observées pour la composante lente du vent. On rate cependant par un facteur 10 au niveau de la température (c'est celle des protons à laquelle on doit comparer ici). Ce peut être une conséquence de notre utilisation de l'approximation polytropique avec α constant, mais on a aussi déjà noté que les températures des protons, électrons et noyaux d'hélium diffèrent de manière significative dans le vent solaire à 1 UA, signe certain que le problème pourrait bien être plus fondamental, plus spécifiquement au niveau de l'approximation fluide même.

C'est donc la composante rapide du vent solaire qui demeure difficile à expliquer. Dans le cadre du modèle développé ici, la seule option est d'augmenter la température basale T_0 , mais ceci est exclu par les observations spectroscopiques de la couronne. Plusieurs solutions alternatives ont cependant été identifiées pour suraccélérer le vent à 1 UA. L'absorption d'ondes acoustiques ou magnétohydrodynamiques (cf. §2.8), par exemple, peut déposer de la quantité

Tableau 3.2
La solution de vent coronal transsonique de Parker

r	u_r [km s ⁻¹]	N [10 ⁶ m ⁻³]	T [K]
r_0	2.1	10 ⁸	1.5×10^6
r_s	113	4×10^4	6.8×10^5
r_\oplus	315	16	3.1×10^5
$10 r_\oplus$	377	0.12	1.9×10^5

de mouvement et/ou de l'énergie thermique à la fois dans la basse couronne (ondes acoustiques/magnétoacoustiques) ou loin dans le vent (ondes d'Alfvén). Il existe une vaste littérature sur ce sujet; on peut en tirer les conclusions générales suivantes:

- L'ajout de quantité de mouvement dans la région subsonique du vent ($r < r_s$) augmente le flux de masse, mais pas la vitesse asymptotique du vent (ou même à 1 UA);
- L'ajout de quantité de mouvement ou d'énergie dans la région supersonique du vent ($r > r_s$) augmente la vitesse asymptotique mais pas le flux de masse;

C'est très bien tout ça, mais comment arrive-t-on à produire ces ajouts d'énergie ou de quantité de mouvement en pratique ? C'est ici où les champs magnétiques arrivent à la rescousse.

3.4 Vents coronaux magnétisés

Jusqu'ici nous avons étudié la dynamique des vent coronaux sans prendre en considération le champ magnétique, même si on a déjà mentionné que ce dernier est un agent structurant important, voire dominant, dans la couronne. Il est temps de remédier à cette situation; dans cette section nous considérerons deux cas limites, correspondant à une dynamique dominée soit par le champ magnétique, soit le plasma. Un concept-clef sous-jacent à tout ce qui suit remonte au théorème d'Alfvén (§2.7), soit le "gel" du champ magnétique dans un plasma en régime MHD idéal. C'est clairement le régime dans lequel se retrouve le plasma coronal, en raison de sa très haute température, conduisant à une très bonne conductivité électrique (dans le sens $R_m \gg 1$).

3.4.1 Le plasma- β

Dans l'idée de pouvoir simplifier le problème, la première chose à se demander est si il existe une manière simple de déterminer si la dynamique est complètement dominée par le plasma ou par le champ magnétique. Une mesure souvent utilisée est le *plasma- β* , soit le rapport entre la densité d'énergie du plasma et celle du champ magnétique. Dans le contexte d'un vent coronal on écrirait:

$$\beta = \frac{2\mu_0(p + u^2/2)}{\mathbf{B}^2}. \quad (3.36)$$

En régime MHD idéal, le théorème d'Alfvén s'applique et le champ magnétique est donc gelé dans le plasma. On peut alors s'attendre à ce que dans le régime $\beta \gg 1$, le plasma entraîne le champ magnétique avec lui; tandis qu'à l'autre limite, $\beta \ll 1$, le champ magnétique entraîne le fluide, ou le contraint à s'écouler le long de ses lignes de champ. Dans quel régime la couronne solaire se trouve-t-elle ?

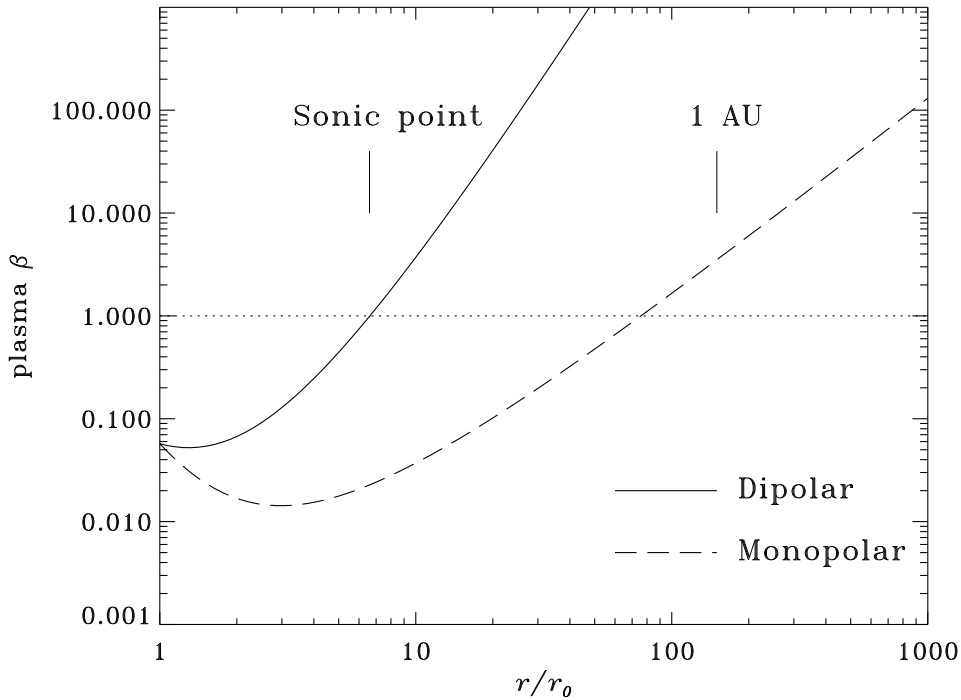


Figure 3.9: Variations du plasma- β dans la couronne et le vent solaire. L'énergie du plasma est calculée à partir de la solution polytropicque de la Fig. 3.6, et l'énergie magnétique suppose un champ magnétique basal d'intensité 10^{-3} T, en configuration soit monopolaire (décroissance en $1/r^2$) ou dipolaire ($\propto 1/r^3$). Dans un cas comme dans l'autre, le champ magnétique domine la dynamique ($\beta \ll 1$) dans la basse couronne, mais c'est le plasma qui domine ($\beta \gg 1$) au delà du point sonique, incluant à l'orbite terrestre.

La Figure 3.9 porte en graphique la variation radiale du plasma- β pour la solution de vent coronal polytropicque obtenue précédemment à la §3.3, et en supposant pour le champ magnétique une configuration soit de type monopolaire (trait en tirets), soit dipolaire (trait plein), dans les deux cas avec une intensité photosphérique de 10^{-3} T. Dynamiquement ce genre de juxtaposition est ridicule, mais du point de vue du calcul approximatif du plasma- β ça peut encore aller. Quelle que soit la configuration magnétique considérée, la Figure 3.9 montre clairement que dans la basse couronne $\beta \ll 1$, donc le champ magnétique contrôle la forme de l'écoulement, tandis qu'au delà du point sonique, $\beta \gg 1$ et donc c'est l'écoulement qui déformera le champ magnétique jusqu'à ce que \mathbf{u} et \mathbf{B} soient parallèles l'un à l'autre. Dans la région $\beta \sim 1$, il n'y a pas de compromis possible et on doit composer avec toute la complexité résultant des interactions entre l'écoulement en champ magnétique. Il sera donc sage de commencer par examiner les régimes extrêmes $\beta = 0$, $\beta \ll 1$, et $\beta \rightarrow \infty$.

3.4.2 Le cas $\beta = 0$: solutions magnétostatiques

En guise de point de départ à notre étude du confinement magnétique des vents, on considère tout d'abord une situation stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) où la dynamique est complètement contrôlée par le champ magnétique, i.e., $\beta = 0$. Dans une telle situation le problème se réduit à établir une solution à force nulle sujette à une condition limite donnée sur \mathbf{B} à la base de la couronne. Le défi est de produire ainsi une configuration coronale qui ressemble à celles qu'on observe, e.g. la Fig. 3.4: une configuration dipolaire et axisymétrique ($\partial/\partial\phi = 0$), avec un champ magnétique ouvert au dessus des pôles, et une ceinture d'arcades magnétiques fermées chevauchant l'équateur, ces dernières s'ouvrant radialement au delà d'une certaine distance au

dessus de la base de la couronne.

C'est tout un contrat, mais de telles solutions magnétostatiques ont bel et bien été développées. Une famille de solutions à force nulle qui satisfait aux contraintes énumérées ci-dessus peut être construite à partir d'un champ potentiel (donc pour lequel $\mathbf{J} = 0$; voir §2.3 au besoin), auquel un ajoute des nappes de courant électrique judicieusement positionnées. Travaillant en coordonnées sphériques polaires (r, θ, ϕ) , le point de départ est la définition du champ magnétique axisymétrique $\mathbf{B}(r, \theta)$ en terme d'une **fonction génératrice** $Z(r, \theta)$ également axisymétrique:

$$\mathbf{B}(r, \theta) = \frac{f_B B_0}{r \sin \theta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_r - \frac{\partial Z}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_\theta \right]. \quad (3.37)$$

Une telle expression satisfait identiquement la contrainte $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, et Z peut être interprété physiquement comme la composante ϕ d'un potentiel vecteur tel que $\mathbf{B} = \nabla \times (Z \hat{\mathbf{e}}_\phi)$. Il ne s'agit ici de rien de plus compliqué que la partie poloidale de la séparation poloidale/toroidale introduite à la §2.9. Sous cette représentation Z demeure constant sur chaque ligne de champ magnétique, chaque valeur de Z définissant donc une ligne de champ. C'est là une propriété intéressante, surtout quand vient le temps de porter en graphique les lignes de champ magnétique. La fonction génératrice même est construite à partir de deux composantes:

$$Z(r, \theta; a_1, a_2) = Z_1(r, \theta; a_1) + Z_2(r, \theta; a_2) \quad (3.38)$$

où a_1 et a_2 sont des facteurs d'échelle, et

$$Z(r, \theta; a) = r(1 - v^2) \left[(1 + u^2) \operatorname{atan} \left(\frac{1}{u} \right) - u \right] - \frac{\pi a^2 \sin^2 \theta}{2} \frac{1}{r} + 2a\eta, \quad (3.39)$$

avec

$$u^2 = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)^2 + \frac{4a^2}{r^2} \cos^2 \theta \right]^{1/2}, \quad (3.40)$$

$$v^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right)^2 + \frac{4a^2}{r^2} \cos^2 \theta \right]^{1/2}, \quad (3.41)$$

$$\eta^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right)^2 + \frac{4r^2}{a^2} \cos^2 \theta \right]^{1/2}. \quad (3.42)$$

Une séquence de solutions n'impliquant qu'un seul paramètre peut être formulée en fixant le rapport des deux paramètres d'échelle a_1 et a_2 , par exemple $a_1 = a/2$ et $a_2 = a$. La Figure 3.10 présente 4 membres d'une telle séquence de solutions magnétostatiques, pour des valeurs croissantes du paramètre a . Ces solutions sont de bonnes représentations qualitatives du champ magnétique coronal en période d'activité minimale, comme sur la Fig. 3.4.

Ceux/elles désirant tester leurs habiletés en calcul analytique de dérivées peuvent s'amuser à vérifier que cette solution est sans courants ($\nabla \times \mathbf{B} = 0$) partout sauf dans le plan équatorial, au delà d'un rayon a mesurant la hauteur maximale de la région magnétiquement fermée. Cependant, dans cette région on a $\mathbf{B} = 0$, donc le champ y est bel et bien à force nulle puisque $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$.

On a déjà fait connaissance avec de telles nappes de courants dans le cadre de notre discussion de la reconnexion magnétique (§2.10). Ce sont des structures particulières que l'on rencontrera de nouveau à quelques reprises dans les chapitres à venir, et qui peuvent jouer un rôle important dans la dissipation du champ magnétique. Leur formation est souvent inévitable dans la limite MHD idéale lorsqu'un champ magnétique est soumis à un forçage mécanique. La Figure 3.11 est une représentation schématique d'une toute petite portion de la nappe de

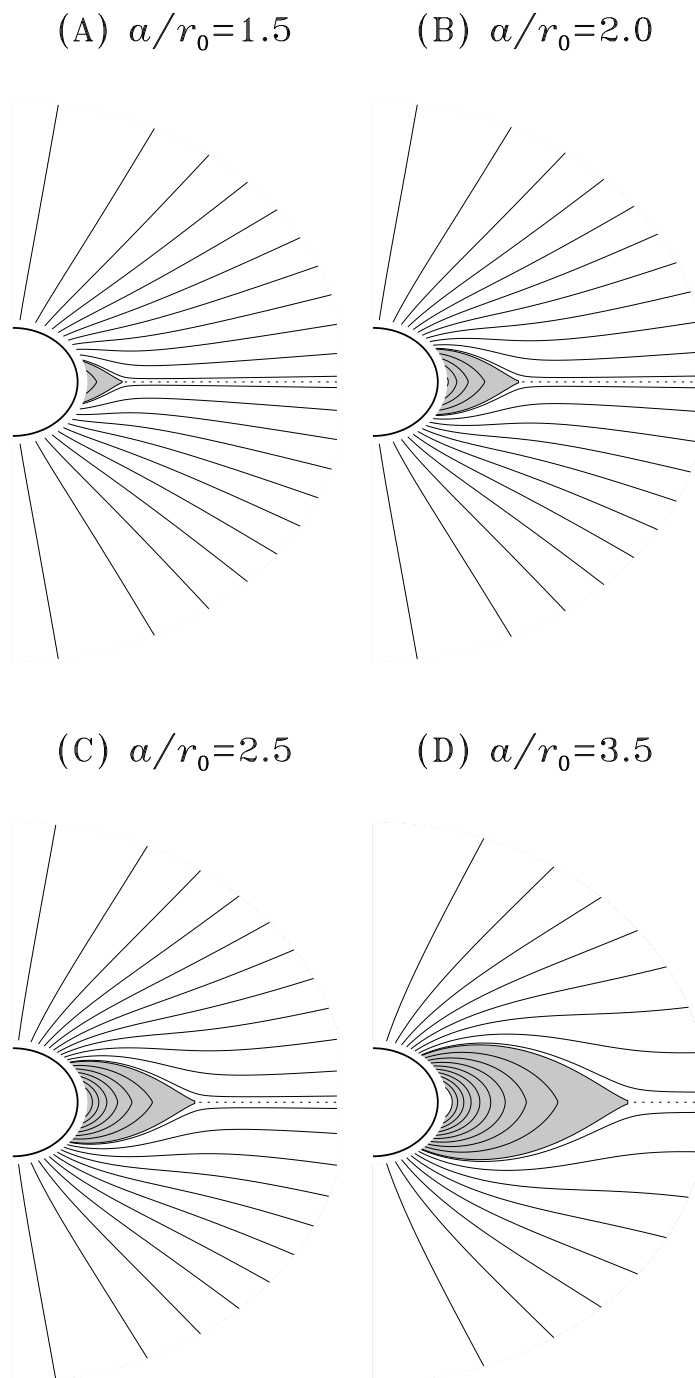


Figure 3.10: Quatre solutions magnétostatiques, telles que définies par les éqs. (3.37)—(3.42), pour des valeurs croissantes du paramètre a , tel qu'indiqué. Les régions en gris sont traversées par des lignes de champ magnétique fermées, i.e., ayant leurs deux extrémités ancrées à la photosphère. Le trait pointillé marque la position de la nappe de courant équatoriale.

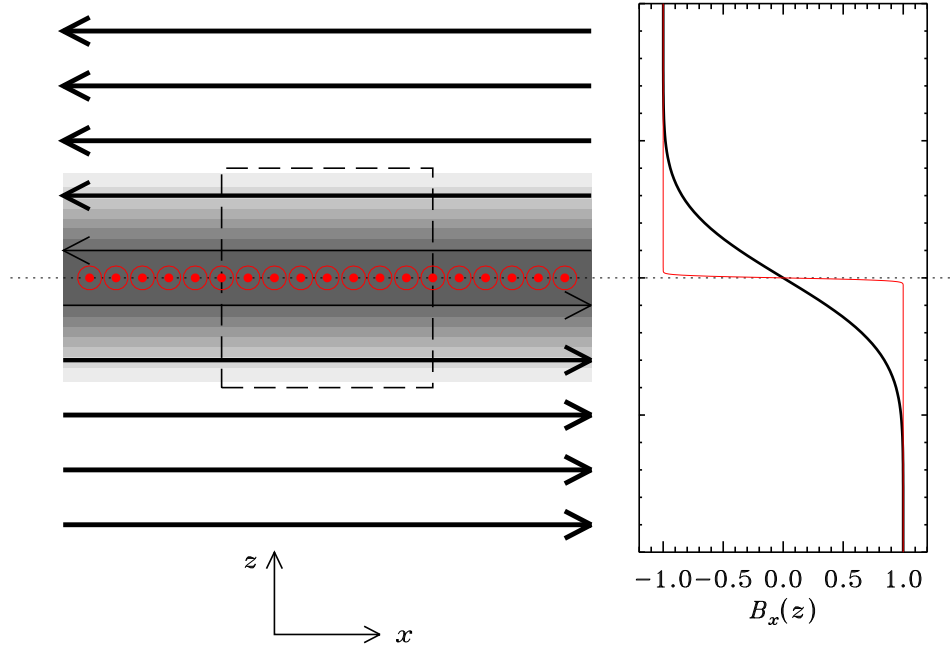


Figure 3.11: Représentation schématique d'une petite portion de la nappe de courant équatoriale présente au delà de $r = a$ dans les solutions de la Figure 3.10. Dans le système de coordonnées cartésiennes utilisé ici, x représente la direction radiale et z la direction perpendiculaire au plan équatorial. Le champ magnétique prédominamment horizontal (radial) change de signe de chaque côté du plan équatorial; la loi d'Ampère exige donc la présence d'une densité de courant (dégradé de gris) dans la direction azimuthale (ici perpendiculaire au plan de la page). Dans la limite où le champ magnétique inverse sa direction de manière discontinue dans le plan équatorial (profil en rouge à droite), l'épaisseur de la nappe de courant tend vers zéro (voir texte).

courant équatoriale qui est présente dans les solutions magnétostatiques de la Fig. 3.10. Sur ce schéma la direction horizontale (x) correspond à la direction radiale, et la verticale (z) est perpendiculaire au plan équatorial. Le graphique à droite illustre la variation de la composante x du champ magnétique en fonction de z (trait noir).

Considérons maintenant le carré en tirets comme un parcours d'intégration le long duquel on évalue la circulation du champ magnétique:

$$\Gamma_B = \oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} . \quad (3.43)$$

Pour une orientation antihoraire du parcours d'intégration, cette intégrale sera clairement positive. La loi d'Ampère (sous forme intégrale) nous informe que cette circulation de \mathbf{B} sur γ est égale au courant électrique net traversant la surface S délimitée par γ , autrement dit:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS . \quad (3.44)$$

Donc il doit exister une densité de courant sortant de la page, tel qu'indiqué sur la Figure 3.11 par les teintes de gris. Dans la limite où \mathbf{B} varie de manière discontinue dans le plan équatorial (profil en rouge sur le graphique de droite), l'épaisseur de cette nappe de courant tendra vers zéro. C'est dans ce sens que les solutions magnétostatiques de la Fig. 3.10 sont potentielles

partout sauf dans une nappe de courant équatoriale... dont l'épaisseur devient nulle dans la limite de la MHD idéale.

De quoi auraient l'air les configurations magnétostatiques de la Figure 3.10 loin au delà de la région fermée, i.e. $r \gg a$? On peut vérifier que le champ devient radial et décroît en $1/r^2$... comme le ferait un celui d'un monopôle magnétique. Cependant cette solution satisfait bien $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, autrement dit le flux magnétique à travers n'importe quelle surface fermée, coquilles sphériques incluses, est nul. Ceci peut paraître paradoxal à prime abord, mais il ne faut pas perdre de vue que ce champ radial à grande distances provient ultimement de la partie ouverte d'un champ supposé dipolaire au rayon de référence r_0 . Le signe de la composante radiale B_r change donc de signe, de manière discontinue, de chaque côté du plan équatorial, le flux magnétique étant le même, à un signe près, dans chaque hémisphère. Ce genre de configuration magnétique est appelée "split monopole" dans la littérature. Les mesures effectuées *in situ* par la sonde Ulysses (Fig. 3.4) sont en bon accord avec cette vision générale de l'héliosphère.

Tout ça peut sembler très artificiel, mais nous aurons l'occasion d'examiner plus loin de véritables solutions MHD de vent coronaux en configuration magnétique dipolaire qui développent des solutions stationnaires dans lesquelles le champ magnétique adopte une configuration ressemblant fort à celles produites ici en régime magnétostatique. Notons en particulier qu'une nappe de courant équatoriale est bel et bien observée à l'orbite terrestre. Cette nappe de courant équatoriale se développe de manière naturelle suite à l'ouverture des arcades magnétiques coronales par le forçage mécanique exercé par le vent solaire en expansion; dynamiquement c'est en fait la situation inverse de celle caractérisant les solutions magnétostatiques de la Figure 3.10, où une nappe de courant est introduite artificiellement dans le plan équatorial, pour forcer l'ouverture radiale des lignes de champ magnétique; mais dans les deux cas, on a toujours $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$.

3.4.3 La limite $\beta \ll 1$: tubes de flux

Que se passera-t-il si on ajoute maintenant un plasma coronal aux solutions magnétostatiques de la Fig. 3.10, mais dans le régime $\beta \ll 1$ où le champ magnétique domine toujours la dynamique. La configuration magnétique demeurera inchangée car le plasma ne peut déformer les lignes de champ, et ne pourra donc que s'écouler le long du champ magnétique puisque dans le régime MHD idéal le plasma et le fluide sont mutuellement gelés l'un dans l'autre. Tout plasma ajouté "a posteriori" à nos solutions magnétostatiques se comportera donc très différemment si il se retrouve sur une ligne de champ s'ouvrant vers l'infini, que sur une ligne faisant partie d'une arcade magnétique fermée chevauchant le plan équatorial.

Dans les régions magnétiquement fermées, et sous l'hypothèse que les conditions physiques à la base de la couronne (densité, température, etc.) sont indépendantes de la latitude, les seules solutions stationnaires ($\partial/\partial t \equiv 0$) possibles sont des solutions d'équilibre où le plasma est au repos ($\mathbf{u} = 0$), conservation de la masse oblige. Dans le cas des solutions magnétostatiques à force nulle considérées précédemment, on retombe alors sur un simple équilibre hydrostatique, comme à la §3.2; si le champ n'est pas à force nulle, alors l'éq. (3.14) doit être modifiée pour inclure la force de Lorentz, mais la solution ne peut que demeurer statique ($\mathbf{u} = 0$).

Dans les régions magnétiquement ouvertes, par contre, le plasma peut s'échapper sous la forme d'un vent coronal, mais cette fois canalisé par le champ magnétique. Même si T_0 , ρ_0 , etc., sont indépendants de la latitude, l'écoulement ne sera plus radial.

Il est en fait possible de calculer des solutions de vent polytropiques pour des vents canalisés dans des "tubes magnétiques" de forme arbitraire, caractérisés par une section $A(r)$, un peu comme on pourrait le faire pour l'écoulement dans une tuyère. On a déjà vu que l'équation de Bernoulli pour un vent polytropique prend la forme:

$$E = \frac{u_r^2}{2} + \frac{c_s^2}{\alpha - 1} - \frac{GM}{r}, \quad (3.45)$$

les trois termes au membre de droite représentant respectivement l'énergie cinétique de l'écoulement, l'énergie thermique (interne), et l'énergie potentielle gravitationnelle, par unité de masse dans

les trois cas. Le mieux que peut faire une tuyère, c'est convertir toute l'énergie thermique injectée dans la chambre de combustion (ici la basse couronne) en énergie cinétique, ce qui conduit à une vitesse asymptotique limite:

$$u_\infty^2 = \frac{2c_{s0}^2}{\alpha - 1} - \frac{GM}{r_0}, \quad (3.46)$$

où c_{s0} est encore une fois la vitesse polytropique du son à r_0 . Comment peut-on atteindre cette vitesse limite en pratique ? Si on se relance dans le processus de solution de la §3.3, mais cette fois pour un vent canalisé selon un facteur d'expansion $A(r)$, la composante r de l'équation d'Euler devient:

$$\begin{aligned} \frac{M^2 - 1}{2M^2} \frac{dM^2}{dr} &= \left[1 + \left(\frac{\alpha - 1}{2} \right) M^2 \right] \left[\frac{1}{A} \frac{dA}{dr} - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \right) \frac{GM/r^2}{(E + GM/r)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \right) \left[1 + \left(\frac{\alpha - 1}{2} \right) \right] \frac{1}{g} \frac{dg}{dr}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

où E est la constante de Bernoulli (voir l'éq. (3.45)), $M(r) = u_r/c_s$ est le nombre de Mach, et la fonction g est donnée par:

$$g(r) = A^{2(\alpha-1)/(\alpha+1)} \left(E + \frac{GM}{r} \right). \quad (3.48)$$

L'algèbre est définitivement plus complexe, mais c'est la même idée qu'avec la solution à symétrie sphérique de la §3.3. En particulier, l'éq. (3.47) a des points critiques à travers desquels les solutions doivent passer afin d'éviter les accélérations infinies. La nouveauté est que pour des tubes divergeant très rapidement, il peut exister plus d'un point critique dans l'écoulement. Une forme intégrale de l'éq. (3.47) peut aussi être obtenue:

$$\begin{aligned} M^{4/(\alpha+1)} + \left(\frac{2}{\alpha - 1} \right) M^{-2(\alpha-1)/(\alpha+1)} \\ = \frac{g(r)}{g_0} \left[M_0^{4/(\alpha+1)} + \left(\frac{2}{\alpha - 1} \right) M_0^{-2(\alpha-1)/(\alpha+1)} \right], \end{aligned} \quad (3.49)$$

avec $g_0 \equiv g(r_0)$ et $M_0 \equiv M(r_0)$. Ceci n'est rien de plus que l'équation de Bernoulli (3.45) écrite en terme du nombre de Mach. Cette forme est utile dans la reconstruction de solutions, puisqu'elle conduit de nouveau à un problème de recherche de racine en fonction de M pour un r donné.

3.4.4 La limite $\beta \rightarrow \infty$: La spirale de Parker

Tournons nous maintenant à la limite extrême opposée, $\beta \gg 1$, dans lequel cas le champ magnétique est passivement transporté par le vent. Plus spécifiquement, on suppose une situation stationnaire dans laquelle:

1. Le théorème d'Alfvén s'applique (gel du flux magnétique dans le fluide),
2. La force de Lorentz est éliminée du membre de droite des équations de Navier–Stokes,
3. La composante poloidale du champ magnétique est purement radiale dans le plan équatorial, avec son intensité connue au rayon de référence r_0 .

En vertu de la condition (3), la contrainte $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ s'intègre directement pour produire:

$$B_r(r) = B_{r0} \left(\frac{r_0}{r} \right)^2. \quad (3.50)$$

Pour un champ de surface moyen de $B_0 \sim 10^{-3}$ T, l'éq. (3.50) "prédit" $B_r \simeq 25$ nT à l'orbite terrestre, ce qui se compare assez bien au champ mesuré à 1 UA. En vertu de la condition (1), les lignes d'écoulement coïncident avec les lignes de champ magnétique. En l'absence de rotation, la solution de Parker obtenue à la §3.3.2 est donc immédiatement applicable. Introduisons maintenant la rotation, à une vitesse angulaire Ω suffisamment petite pour que la force centrifuge puisse être négligée par rapport au gradient de pression. La solution de Parker s'applique maintenant seulement dans un repère en co-rotation à vitesse angulaire Ω . Dans ce repère le vent souffle toujours le long des lignes de champ magnétiques, mais dans un repère inertiel la vitesse totale est maintenant donnée par:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \Omega r \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (3.51)$$

où les primes indiquent des quantités évaluées dans le repère en co-rotation. Pour un vent purement radial ayant une vitesse constante (une approximation raisonnable pour $r \gtrsim 10r_0$, voir Fig. 3.6), les lignes de champ magnétique sont définies par la spirale:

$$r = (u_r/\Omega_\odot)(\phi - \phi_0), \quad (3.52)$$

avec les composantes r et ϕ du champ magnétique données par:

$$B_r(r, \theta, \phi) = B_r(r_0, \theta, \phi - r\Omega_\odot/u_r) \left(\frac{r_0}{r} \right)^2, \quad (3.53)$$

$$B_\phi(r, \theta, \phi) = B_r(r_0, \theta, \phi - r\Omega_\odot/u_r) \left(\frac{r_0\Omega_\odot}{u_r} \right) \left(\frac{r_0}{r} \right). \quad (3.54)$$

Cette spirale est illustrée à la Figure 3.12, pour une vitesse radiale du vent $u_r = 350$ km s⁻¹, et le cercle en tiret correspondant à l'orbite terrestre. L'angle entre les lignes de champ magnétique et le segment de droite reliant la Terre au Soleil est:

$$\phi_B = \arctan \left(\frac{B_\phi}{B_r} \right) = \arctan \left(\frac{r\Omega_\odot}{u_r} \right), \quad (3.55)$$

ce qui, à 1 UA, produit la valeur $\phi_B \simeq 55^\circ$, qui bien qu'en apparence très grande se compare favorablement aux mesures in situ. La vitesse du vent, quant à elle, est essentiellement radiale à 1 UA.

Mais comment peut-on avoir un champ magnétique en spirale si l'écoulement est purement radial, dans la limite de la MHD idéale où le théorème d'Alfvén s'applique et le plasma est supposément gelé dans le fluide? La Figure 3.13 illustre schématiquement la réponse à ce paradoxe apparent. Les cercles gris représentent des éléments de fluides entraînés par le vent, et originant tous de la même longitude dans le plan équatorial, et donc "lancés" dans le vent de long de la même ligne de champ magnétique. Bien que chaque élément de fluide se déplace radialement une fois lancé, la forme en spirale vient du fait que les éléments progressivement plus éloignés ont été lancés dans le vent depuis proportionnellement plus longtemps. Tous les éléments de fluide demeurent cependant sur la même ligne de champ magnétique, comme il se doit.

Revenons maintenant à cette nappe de courant équatoriale présente dans les solutions magnétostatiques de la Fig. 3.10. L'axe de rotation du soleil est incliné de 7.2 degrés par rapport à l'axe orbital de la terre. Par conséquent, même si le champ magnétique solaire est parfaitement axisymétrique et dipolaire, la terre passera la moitié de son orbite "sous" cette nappe de courant, et l'autre moitié par dessus; on s'attendrait donc à des changements rapides,

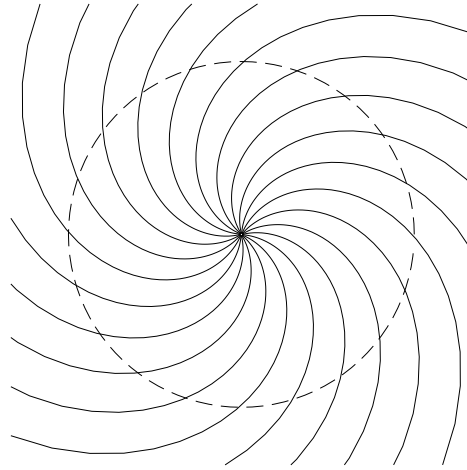


Figure 3.12: La spirale tracée par le champ magnétique solaire suite à son transport dans la direction radiale par le vent coronal transsonique émanant d'un soleil en rotation. Le cercle tracé en tirets représente l'orbite terrestre, le soleil se retrouvant (comme il se doit) au centre de la spirale.

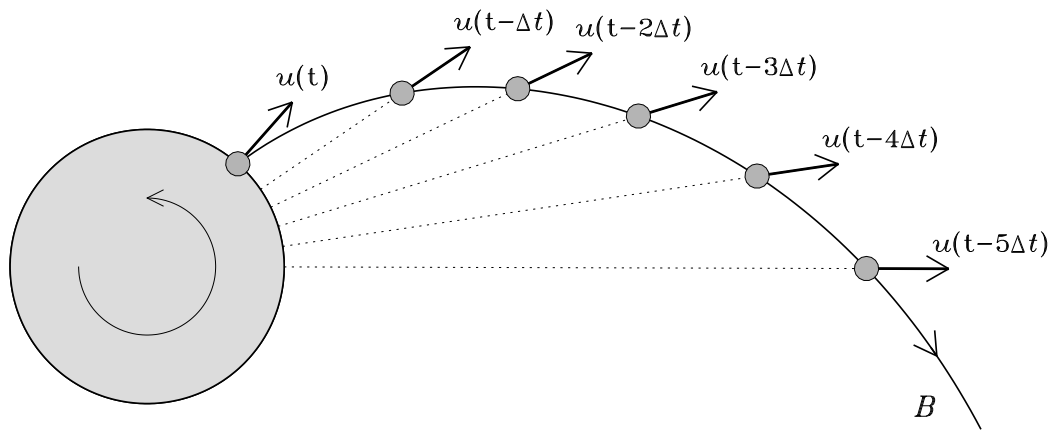


Figure 3.13: Déformation d'un champ magnétique initialement radial émanant d'une étoile en rotation et transporté par un vent radial. On voit ici le système dans le plan équatorial, depuis le pôle Nord solaire (i.e., l'axe de rotation est perpendiculaire au plan de la page). Tous les éléments de fluide (cercles gris) entraînés dans le vent originent de la même longitude dans le plan équatorial, mais vu d'un repère inertiel ce point se déplace à une vitesse angulaire constante, ici dans le sens antihoraire. Les traits pointillés indiquent les trajectoires de chacun des éléments de fluide depuis leur lancement, qui a eu lieu progressivement plus loin dans le passé pour les éléments de fluides progressivement plus éloignés de l'étoile.

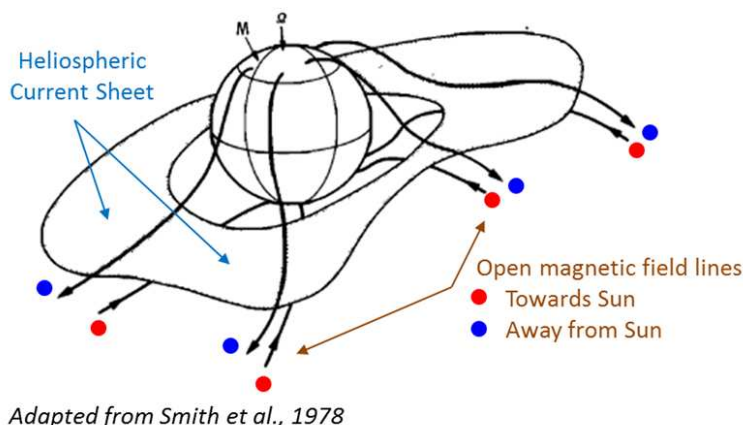


Figure 3.14: Représentation schématique de la forme “réelle” de la nappe de courant équatoriale. La principale source de distorsion peut être retracée au soleil même, à la surface duquel la ligne neutre $B_r = 0$ dévie habituellement de manière substantielle du cercle équatorial, même en phase d’activité solaire minimale. La terre, dans son orbite annuelle, traverse occasionnellement la nappe, ce qui conduit à un changement quasi-discontinu de la polarité du champ magnétique mesuré. Source: stce.be./news/269/welcome.html.

voire discontinus, du signe de la composante radiale du champ magnétique mesuré à l’orbite terrestre, deux fois par année. On observe bel et bien de telles variations brusques, mais plus souvent que deux fois par année; ceci est du principalement au fait que même en période d’activité minimale, la ligne $B_r = 0$ sur la photosphère dévie, et parfois substantiellement, du cercle équatorial. Cette distorsion est propagée dans le milieu interplanétaire par le vent solaire, avec le résultat que la nappe de courant équatoriale a beaucoup plus l’air d’un tutu de ballerine en rotation rapide que d’un beau disque plan. La Figure 3.14 offre une représentation schématisée de cette distorsion.

3.5 Les vents magnétohydrodynamiques

Le temps est venu de prendre le proverbial taureau par les cornes, et d’obtenir des solutions de vents coronaires magnétisés qui incorporent de manière dynamiquement cohérente les interactions entre les écoulements et les champs magnétiques. On débutera par la solution dite de Weber-Davis (§3.5.1), qui est dynamiquement correcte mais géométriquement réduite à une dimension spatiale. Malgré les simplifications inhérentes à cette solution, elle s’avèrera fort utile pour étudier le processus de perte de moment cinétique dans les étoiles en rotation (§3.6), mais seulement après un bref survol de solutions numériques en deux et trois dimensions spatiales (§3.5.3).

3.5.1 La solution MHD de Weber-Davis

La configuration géométrique est essentiellement la même que celle considérée à la §3.3 dans le cadre de notre solution polytropique pour un vent non-magnétisé en l’absence de la rotation. On considère un vent stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) en symétrie sphérique ($\partial/\partial\theta = \partial/\partial\phi = 0$) émanant d’une étoile tournant à vitesse angulaire Ω et ayant un champ magnétique photosphérique dont la composante radiale a une intensité B_{r0} connue. Nous demeurons dans le régime du fluide parfait ($\nu = 0$), et adoptons également le régime MHD idéal, soit $\eta = 0$ dans l’éq. (2.9). Comme auparavant, on suppose que la température coronale basale $T(r_0) \equiv T_0$ est

connue, et remplaçons l'équation de la conservation de l'énergie par la relation polytropique maintenant familière entre la pression et la densité. Mais voici où les choses se corsent; les solutions seront obtenues uniquement dans le plan équatorial, où l'on imposera $B_\theta = 0$. Ça pue le monopole magnétique, mais on a déjà fait ça en construisant la spirale de Parker à la §3.4.4. De plus, on a aussi vu, dans le contexte des solutions magnétostatiques de la §3.4.2, qu'à quelques rayons solaires au dessus de la photosphère le champ magnétique est ouvert par le vent et forcé en une configuration de type "split monopole", avec une nappe de courant dans le plan équatorial (voir les Figs. 3.10 et 3.11). Ceci s'avère par ailleurs une bonne première approximation du champ magnétique interplanétaire durant les phases d'activité solaire minimale.

Nous devons maintenant spécifier les valeurs numériques de cinq quantités pour définir notre modèle de vent (il y en avait trois dans le cas de la solution hydrodynamique de la §3.3.2):

1. l'indice polytropique α ;
2. une mesure de la température coronal basale, que l'on spécifiera ici en terme de la vitesse du son à r_0 , soit $c_{s0} = \sqrt{\alpha p_0 / \rho_0}$;
3. la gravité, que l'on spécifiera en terme du rapport adimensionnel (γ) entre la vitesse d'échappement $u_G = \sqrt{2GM/r_0}$ divisée par la vitesse basale du son définie précédemment;
4. une mesure du taux de rotation, que l'on spécifiera en terme d'un autre rapport adimensionnel, $\zeta = \Omega r_0 / c_{s0}$;
5. une mesure de l'intensité du champ magnétique basal à r_0 , que l'on spécifiera en terme d'un troisième rapport adimensionnel, celui là défini comme $\beta = A_{r0} / c_{s0}$, où A_{r0} est la composante radiale de la vitesse d'Alfvén à r_0 .

Allons-y maintenant pour la formulation mathématique du modèle. Comme auparavant, les symétries imposées *a priori* à la solution recherchée conduisent à d'importantes simplifications des équations gouvernant la (magnéto)hydrodynamique du système. La contrainte de conservation de la masse, telle que capturée par l'équation de continuité, conserve la même forme simplifiée que dans la solution purement hydrodynamique considérée précédemment à la §3.3:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u_r) = 0, \quad (3.56)$$

tandis que les composantes r et ϕ de l'équation d'Euler deviennent:

$$\rho \left(u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_\phi^2}{r} \right) = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{B_\phi}{\mu_0 r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi), \quad (3.57)$$

$$\rho \left(u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_r u_\phi}{r} \right) = \frac{B_r}{\mu_0 r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi). \quad (3.58)$$

Pour sa part, la composante- ϕ de l'équation d'induction se réduit à:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r B_\phi - r u_\phi B_r) = 0, \quad (3.59)$$

tandis que sa composante r est satisfaite trivialement (dans le sens $0 = 0$). Une équation pour B_r s'obtient en invoquant la condition $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, qui pour la géométrie considérée ici se réduit à une expression décrivant la conservation du flux magnétique traversant chaque coquille sphérique de rayon r :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) = 0. \quad (3.60)$$

Les équations (3.56), (3.60), et (3.59) s'intègrent facilement:

$$r^2 \varrho u_r = C_1 , \quad (3.61)$$

$$r^2 B_r = C_2 , \quad (3.62)$$

$$r(u_r B_\phi - u_\phi B_r) = C_3 , \quad (3.63)$$

où C_1 , C_2 et C_3 sont des constantes d'intégration. Les deux premières mesurent les flux de masse et de champ magnétique associés au vent. L'interprétation physique de C_3 est facilitée par le passage à un repère en corotation avec l'étoile centrale:

$$u_\phi \rightarrow u'_\phi + \Omega r , \quad (3.64)$$

où les primes indiquent une quantité mesurée dans le repère en co-rotation. Il faut bien noter que sous cette transformation (non-relativiste), les composantes radiales de \mathbf{u} and \mathbf{B} demeurent invariantes. Dans ce repère en rotation le champ magnétique est stationnaire, et comme nous travaillons dans le régime de la MHD idéale le théorème d'Alfvén s'applique. Par conséquent, \mathbf{u}' and \mathbf{B}' doivent être orientés parallèlement:

$$\frac{u'_r}{u'_\phi} = \frac{B'_r}{B'_\phi} . \quad (3.65)$$

Puisque $B_r = B'_r$, l'éq. (3.63) conduit à

$$C_3 = -\Omega r^2 B_r , \quad (3.66)$$

d'où

$$B_\phi = \frac{B_r}{u_r} (u_\phi - \Omega r) . \quad (3.67)$$

Bon maintenant; il est facile de vérifier que l'éq. (3.58) peut se réécrire sous la forme équivalente:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r u_\phi) = \frac{B_r}{\mu_0 \varrho u_r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) ; \quad (3.68)$$

mais, en vertu des eqs. (3.61) et (3.62), on a $B_r/\mu_0 \varrho u_r = C_2/\mu_0 C_1$, soit une constante! Par conséquent, l'éq. (3.68) s'intègre facilement, résultant en:

$$r u_\phi - \frac{r B_\phi B_r}{\mu_0 \varrho u_r} = L , \quad (3.69)$$

où L est une autre constante d'intégration, qui correspond au moment cinétique total transporté par le vent. Les deux contributions à L au membre de gauche correspondent à la quantité de mouvement par unité de masse du plasma (premier terme), et au couple de torsion produit par la tension magnétique du champ (second terme; n'oublions pas que le champ magnétique est entraîné par le vent!).

Toute cette jonglerie ne nous a pas encore fourni une solution complète, mais on peut déjà en tirer des conclusions fort intéressantes sur la base de cette "analyse préliminaire". On commence par réécrire les eqs. (3.67) et (3.69) en terme des composantes de la vitesse d'Alfvén:

$$A_r = \frac{B_r}{\sqrt{\mu_0 \varrho}} , \quad A_\phi = \frac{B_\phi}{\sqrt{\mu_0 \varrho}} , \quad (3.70)$$

ce qui conduit à

$$A_\phi = \frac{A_r}{u_r} (u_\phi - \Omega r) , \quad (3.71)$$

$$u_\phi = \frac{L}{r} + \frac{A_r A_\phi}{u_r} . \quad (3.72)$$

On substitue maintenant pour A_r et A_ϕ dans la dernière de ces expressions en utilisant les deux premières. Quelques manipulations algébriques plus tard on arrive à:

$$u_\phi = \Omega r \frac{(u_r^2 L / \Omega r^2) - A_r^2}{u_r^2 - A_r^2} . \quad (3.73)$$

Examinons le dénominateur de cette expression. On se retrouve dans une situation semblable à celle rencontrée avec la solution de Parker: si la vitesse radiale du plasma devient égale à la vitesse d'Alfvén, u_ϕ va nous péter au nez... sauf si le numérateur passe par zéro simultanément. Saisissant fermement cette planche de salut, on en conclut alors que:

$$\boxed{L = \Omega r_A^2} , \quad (3.74)$$

où r_A est le **rayon d'Alfvén**, définissant la coquille sphérique sur laquelle $u_r = A_r$. On se rappellera que L est la quantité totale de moment cinétique transportée par le vent, *incluant* le couple de torsion produit par la tension magnétique du champ. L'équation (3.74) indique que cette quantité est égale à ce qui serait transporté par un vent non-magnétisé demeurant en co-rotation avec la photosphère jusqu'à un rayon $r = r_A$. C'est un résultat remarquable, dont on tirera grand profit plus loin.

Voyons d'abord comment obtenir une solution complète. On revient à la composante- r de l'équation d'Euler (3.57); on utilise l'éq. (3.67) pour éliminer B_ϕ dans le dernier terme au membre de droite; puis on utilise l'éq. (3.67) pour éliminer la dérivée de B_ϕ multipliant u_ϕ , mais on ne touche pas à celle multipliant Ω . Une page (ou deux) d'algèbre laborieuse par instant nous mène en bout de ligne à:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{2}(u_r^2 + u_\phi^2) - \frac{GM}{r} + \frac{c_{s0}^2}{\alpha - 1} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\alpha-1} - \frac{r\Omega A_r A_\phi}{u_r} \right] = 0 , \quad (3.75)$$

où on a encore une fois exprimé les composantes du champ magnétique en terme des composantes de la vitesse d'Alfvén, et la pression a été exprimée en terme de la densité via l'approximation polytropic habituelle. Cette expression implique que la quantité entre parenthèses carrées est une constante de l'écoulement. Il s'agit ici encore une fois d'une variation sur le principe de Bernoulli (voir §1.2.5), et exprimant donc la conservation de l'énergie totale dans l'écoulement; et comme auparavant nous dénoterons cette quantité par le symbole E .

Obtenir une solution complète, c'est à dire les profils radiaux de u_r , $u_\phi(r)$, etc., est maintenant beaucoup plus corsé. On commence par manipuler l'éq. (3.57) sous la forme équivalente:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \left(\frac{u_r}{r} \right) \frac{(u_r^2 - A_r^2)(2c_s^2 + u_\phi^2 - GM/r) + 2u_r u_\phi A_r A_\phi}{(u_r^2 - A_r^2)(u_r^2 - c_s^2) - u_r^2 A_\phi^2} , \quad (3.76)$$

ce qui implique encore une fois une algèbre laborieuse mais aucun trucs avancés ou sournois. Comme dans le cas de l'éq. (3.73), le dénominateur au membre de droite de cette expression a le potentiel de nous sauter au nez. Il s'avère que ce dénominateur tombe à zéro lorsque la vitesse de l'écoulement devient égale soit à la vitesse du mode magnéto-sonique lent, ou du mode rapide. Vous vous rappelez j'espère que ces modes correspondent à des ondes compressives longitudinales où les pressions magnétique et gazeuse agissent comme force de rappel; quand les deux gradients de pression sont en phase on a le mode rapide, et hors phase le mode lent. Si vous ne vous rappelez pas de ça, **goto** §2.8, mais sans passer par GO ni ramasser \$200. Ici ces égalités se produiront à deux distances radiales distinctes, que l'on dénotera r_s and r_f dans ce qui suit, et où la vitesse radiale du fluide à ces positions sera dénotée par u_s et u_f . Finalement, introduisons la notation N et D pour représenter les numérateur et dénominateur au membre

de droite de l'éq. (3.76); Pour éviter que cette équation ne diverge, on exigera que

$$N(r_f, u_f) = 0 , \quad (3.77)$$

$$D(r_f, u_f) = 0 , \quad (3.78)$$

$$N(r_s, u_s) = 0 , \quad (3.79)$$

$$D(r_s, u_s) = 0 , \quad (3.80)$$

auxquelles s'ajouteront deux contraintes supplémentaires, soit que les solutions passant par ces deux points critiques soient caractérisées par la même valeur de la constante de Bernoulli dans l'éq. (3.75)²:

$$E(r_f, u_f) = E(r_0, u_{r0}) , \quad (3.81)$$

$$E(r_s, u_s) = E(r_0, u_{r0}) . \quad (3.82)$$

Ces expressions définissent un système de six équations algébriques couplées et très non-linéaires, qui doivent être solutionnées simultanément pour les six inconnues:

$$(u_{r0}, u_{\phi0}, r_s, u_s, r_f, u_f) . \quad (3.83)$$

Bon, au moins nous avons autant d'équations que d'inconnus, ce qui est certainement un bon début. Il n'en demeure pas moins que la solution de ce système d'équation fait dans le très costaud, numériquement parlant. Mais cela demeure possible, et pour des paramètres d'entrée correspondant à une solution "solaire", soit:

$$(\alpha, c_{s0}, \gamma, \zeta, \beta) = (1.1, 165., 0.01415, 3.495, 3.688) , \quad (3.84)$$

on trouve un vecteur-solution:

$$(u_{r0}, u_{\phi0}, r_s, u_s, r_f, u_f) = (0.0123, 0.0140, 6.60, 0.676, 29.5, 1.378) , \quad (3.85)$$

où les composantes de la vitesse de l'écoulement sont exprimées en fraction de la vitesse du son c_{s0} , à la base de la couronne, et les points critiques en unités du rayon basal r_0 . Le calcul d'une solution complète est un processus impliquant maintenant plusieurs étapes séquentielles, mais chacune de celles-ci est relativement simple:

1. Calculer $A_r(r, u_r)$; ceci ne dépend que de B_r et ϱ , le premier n'étant qu'une fonction de r selon l'éq. (3.62), tandis que ϱ ne dépend que de u_r et r via l'éq. (3.56).
2. Connaissant A_r , $u_\phi(r, u_r)$ est calculé via l'éq. (3.73), la constante L étant évaluée à r_0 :

$$L = r_0 u_{\phi0} \left[1 - \left(\frac{A_{r0}}{u_{r0}} \right)^2 \right] + \Omega r_0^2 \left(\frac{A_{r0}}{u_{r0}} \right)^2 . \quad (3.86)$$

3. B_ϕ (et donc A_ϕ) peut maintenant être calculé via l'éq. (3.71).

Une fois ces étapes complétées nous avons en main tous les morceaux nécessaires pour exprimer la constante de Bernoulli E (voir l'éq. (3.75)) en termes de r et u_r uniquement. De là il ne reste qu'à poser:

$$E(r_0, u_{r0}) = E(r, u_r) \quad (3.87)$$

pour nous ramener à un problème de recherche de racine en une dimension, conceptuellement identique à celui déjà traité dans le cadre de la solution de Parker à la §3.3.2. Une fois u_r ainsi obtenu, $\varrho(r)$ suit directement de l'éq. (3.56). Connaissant maintenant B_r/B_{r0} via l'éq. (3.62), u_ϕ est calculé via l'éq. (3.73), et finalement A_ϕ via l'éq. (3.71), ET ON Y EST!

²Minute moumoutte, n'avait pas-t-on dit que la solution devait aussi passer par le point d'Alfvén, pour pas que la vitesse azimutale nous pète au nez en vertu de l'éq. (3.73)? Il s'avère que dans le cadre des modèles de type Weber-Davis, toute solution passant par les points magnéto-soniques lent et rapide (r_s, u_s) , (r_f, u_f) passe *automatiquement* par le point d'Alfvén (r_A, u_{rA}) . Les obsessif(ve)s voulant vérifier la chose sont encouragé(e)s à consulter Goldreich & Julian 1970, ApJ, 160, 971.

3.5.2 Dynamique et comportement asymptotique

Une solution Weber-Davis pour le vent solaire magnétisé est présentée à la Figure 3.15, avec certaines quantités-clef listées au Tableau 3.3. Les profils des quantités purement hydrodynamiques ayant des équivalents dans la solution nonmagnétisée et sans rotation obtenue précédemment (§3.3), soit u_r , ρ , et $T(r)$, ressemblent dangereusement à ces derniers. Une différence notable est que l'écoulement n'est plus purement radial, mais développe une composante azimutale qui est substantielle près de la base de la couronne (dans le sens que l'angle $\phi_v \equiv \text{atan}(u_\phi/u_r)$ est grand), mais décroît ensuite rapidement avec la distance. Néanmoins, la valeur de ϕ_v à une unité astronomique est en bon accord avec celle mesurée *in situ*. Il y a là de quoi célébrer, finalement!

Tableau 3.3
Solution Weber-Davis de type vent solaire

r	u_r [km s ⁻¹]	N [10 ⁶ m ⁻³]	T [K]	ϕ_v [deg]	ϕ_B [deg]
r_0	2.0	10 ⁸	1.5×10^6	48.7	-0.59
r_s	115	37400	6.8×10^5	4.01	-3.95
r_f	231	891	4.7×10^5	2.00	-15.7
r_\oplus	319	17	3.1×10^5	0.53	-54.5
$10 r_\oplus$	380	0.14	1.9×10^5	0.06	-81.0

N'empêche, après tout ce travail c'est un peu désappointant de finir avec quelque chose qui ressemble tant à la solution de Parker obtenue à la §3.3. Ceci est du en grande partie à la vitesse de rotation relativement lente du soleil, et de son champ magnétique de surface relativement faible (on parle ici du champ aux grandes échelles spatiales, pas celui qu'on retrouve dans les taches solaires). Mais dans d'autres régimes de paramètres, les différences avec un vent purement hydrodynamique et sans rotation peuvent devenir substantielles. C'est le cas sur la Figure 3.16, qui présente une solution Weber-Davis pour une couronne toujours de type solaire ($\alpha = 1.1$ et $T_0 = 1.5 \times 10^6$ K) comme auparavant, mais tournant maintenant 25 fois plus rapidement que le soleil, et avec un champ magnétique basal également 25 fois plus intense. L'écoulement à grande distance dépasse maintenant la vitesse du son par un facteur 100, i.e., $M \simeq 10^2$! La vitesse azimutale u_ϕ dépasse la vitesse radiale sous le point magnétosonique lent, et lui demeure comparable jusqu'au point d'Alfvén. Ces différences proviennent des contributions centrifuge et magnétique à l'accélération du vent, comme le montre le graphique du bas. Près de la base du vent la force thermique domine toujours, mais au delà de quelques r_0 les accélérations centrifuge et magnétique deviennent comparable au gradient de pression thermique, et dominent la dynamique à plus grandes distances. On peut vérifier que la vitesse asymptotique du vent est maintenant donnée par:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_r \simeq \left(\frac{\Omega^2 r_0^4 B_{r0}^2}{\dot{M}} \right)^{1/3}, \quad (3.88)$$

avec $\dot{M} = 4\pi \rho_0 r_0^2 u_{r0}$ comme à la §3.3.

La Figure 3.17 montre la variation avec la distance des deux contributions à la perte de moment cinétique dans les deux solutions Weber-Davis des Figs. 3.15 et 3.16. On remarque que la solution en rotation rapide et fortement magnétisée perd beaucoup plus de moment cinétique que la solution "solaire". L'éq. (3.69) indique déjà qu'un facteur 25 provient de la rotation plus rapide, mais de surcroît le rayon d'Alfvén se retrouve aussi quatre fois plus loin (cf. les points noirs sur les Figs. 3.15 et 3.16). On peut en fait montrer que dans limite où les forces centrifuge et de tension magnétique contribuent peu à la dynamique radiale, on a:

$$r_A \simeq \frac{r_0^2 B_{r0}}{\sqrt{\dot{M} u_{r\infty}}}, \quad (3.89)$$

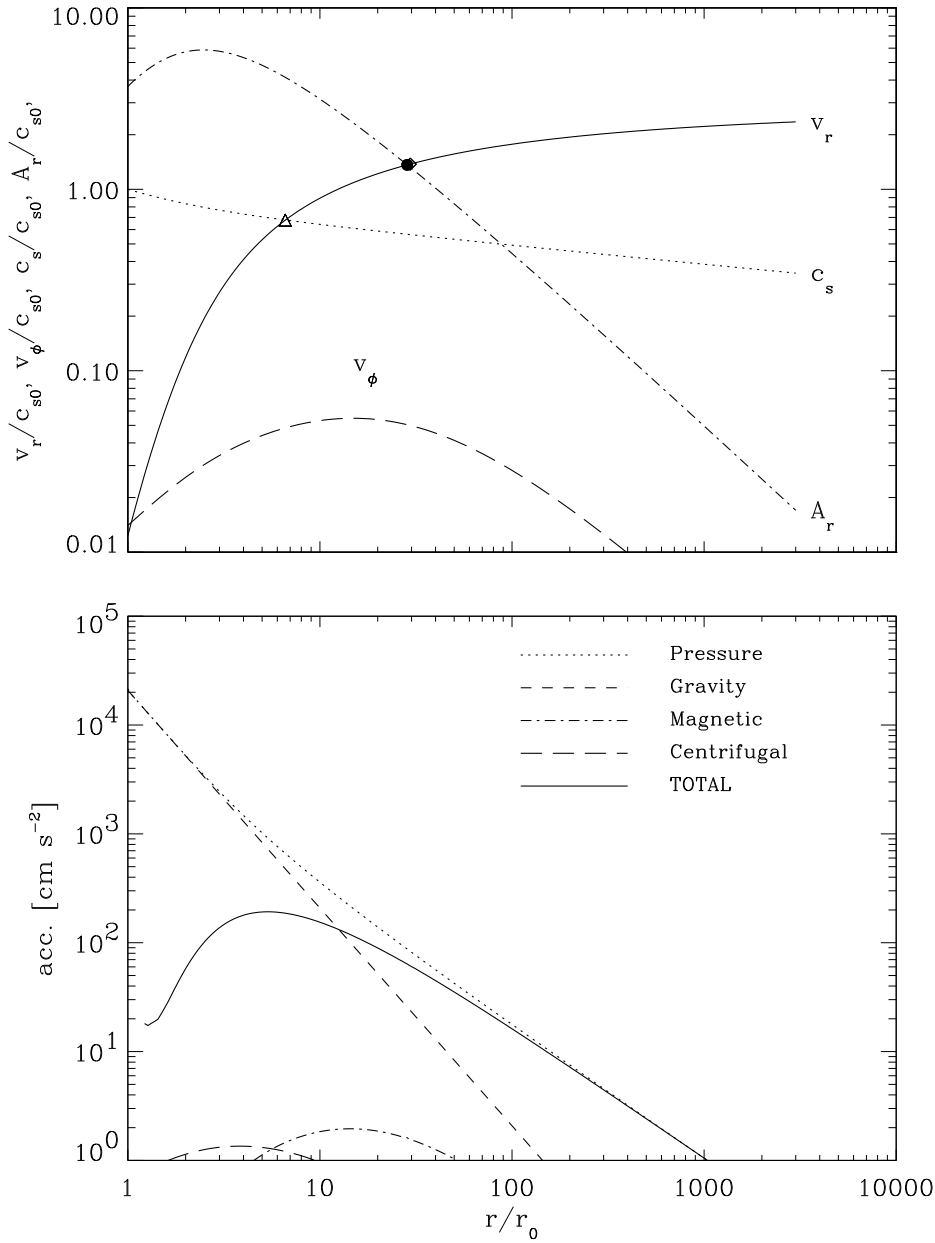


Figure 3.15: Solution Weber-Davis pour un vent coronal de type solaire. Le graphique du haut montre les profils radiaux du vent. Les points (en fait, surfaces) critiques des modes magnéto-soniques lent, Alfvén, et magnéto-sonique rapide, sont indiqués respectivement par les triangle, point noir et losange (ici coïncidant presque avec le point critique Alfvénique). Le graphique du bas présente le détail des contributions des différentes forces en présence.

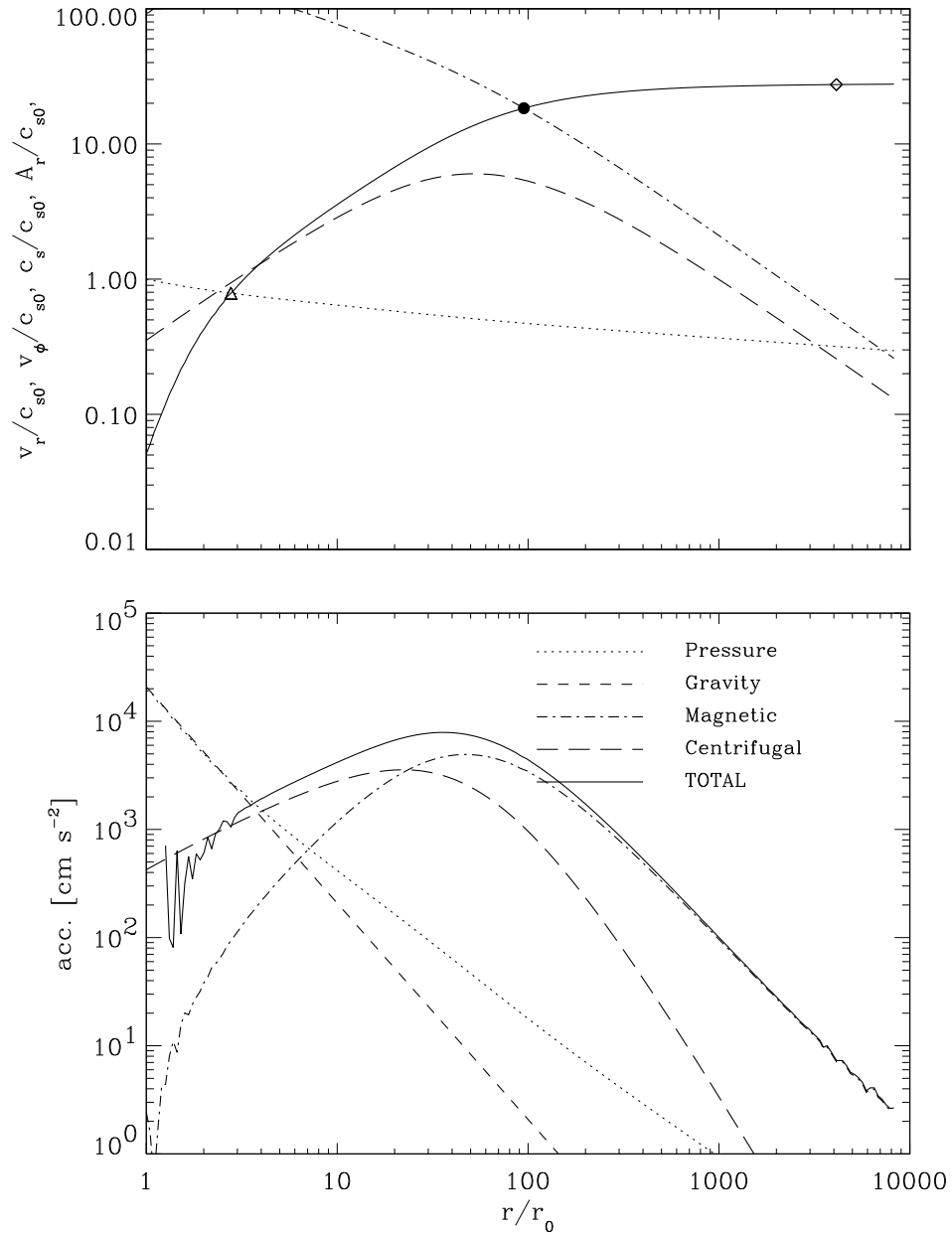


Figure 3.16: Semblable à la Fig. 3.15, mais cette fois dans le cas d'une étoile de type solaire en rotation rapide ($\Omega = 25\Omega_\odot$) et fortement magnétisée ($B_{r0} = 25B_{r0,\odot}$), caractéristiques plus typiques d'une étoile jeune. On remarque ici qu'à grandes distances, la force magnétique est le principal contributeur à l'accélération du vent.

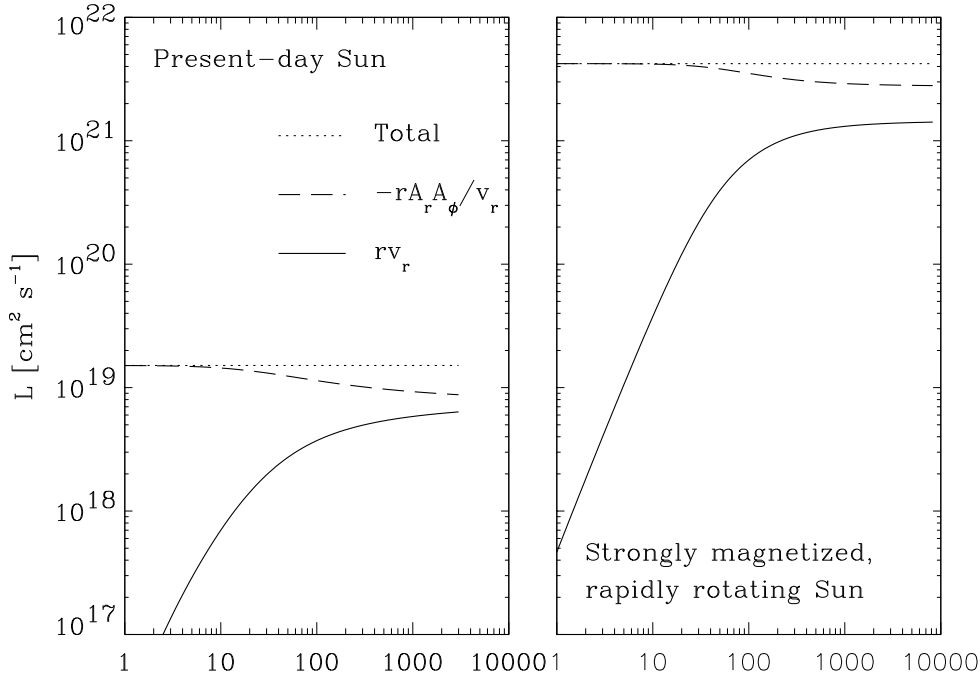


Figure 3.17: Contributions à la perte de moment cinétique dans un vent magnétisé, pour les deux solutions Weber-Davis présentées aux Figures 3.15 (gauche) et 3.16 (droite). Le trait continu correspond au moment cinétique par unité de masse transporté par le plasma en expansion, et le trait en tiret le couple de torsion associé à la tension magnétique. La somme de ces deux contributions (trait pointillé), demeure constante, en accord avec l'éq. (3.69).

tandis que pour la solution de la Fig. 3.16, fortement magnétisée et en rotation rapide, on obtient:

$$r_A \simeq \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{u_{r\infty}}{\Omega} \quad (3.90)$$

3.5.3 Modèles numériques de vent coronaux MHD et rotation

À strictement parler la solution de Weber-Davis que nous venons d'obtenir ne s'applique qu'au plan équatorial. On pourrait imaginer la projeter sur des cônes d'ouvertures angulaires décroissantes pour reconstruire une solution couvrant toute la sphère, mais cette idée ne fonctionne pas car, contrairement au plan équatorial où la symétrie impose $\partial/\partial\theta \equiv 0$ pour toutes les variables du problème, aux autres latitudes on se retrouve avec des gradients latitudinaux de pression magnétique que rien ne peut équilibrer. Il n'y a pas d'options autres que la solution numérique des équations complètes.

On peut au moins tenter de conserver les hypothèses de stationarité ($\partial/\partial t \equiv 0$) et d'axisymétrie ($\partial/\partial\phi \equiv 0$), ce qui réduit le problème à deux dimensions spatiales, soit le plan méridien $[r, \theta]$. L'approximation polytropicque peut aussi être conservée, afin de ne pas avoir à traiter explicitement l'équation de l'énergie, et on peut demeurer dans le régime MHD idéal ($\eta = 0$) et inviscide ($\nu = 0$). Ces hypothèses simplificatrices sont précisément celles choisies par R. Keppens and H. Goedbloed (références complètes en fin de chapitre). Leurs solutions numériques sont particulièrement intéressantes car elles peuvent donc se comparer assez directement aux solutions de type Weber-Davis.

L'avantage principal de passer au 2D est qu'il devient alors possible de considérer des configurations magnétiques plus réalistes. La configuration de type dipolaire choisie par Keppens & Goedbloed est qualitativement la même que les configurations magnétostatiques de la Fig. 3.10: une arcade magnétique axisymétrique à cheval sur l'équateur, et deux régions magnétiquement ouvertes aux hautes latitudes. En plus de l'intensité du champ magnétique et du taux de rotation, un troisième paramètre contrôle l'étendue latitudinale de la région magnétiquement fermée. Cette dernière est souvent appelée "dead zone" dans la littérature, puisque \mathbf{u} doit y être nul en vertu du théorème d'Alfvén, puisqu'on est ici en régime MHD idéal.

Les solutions numériques sont obtenues par une méthode de relaxation utilisant comme condition initiale la solution à symétrie sphérique de Parker, et un champ magnétique combinant un dipole pur dans la région fermée, et un champ purement radial de type "split-monopole" aux plus hautes latitudes. Les équations dans leur forme non-stationnaire sont intégrées comme un problème aux conditions initiales, jusqu'à ce qu'un état stationnaire soit atteint.

La solution présentée au haut de la Figure 3.18 est une solution de type "solaire", calculée en supposant un champ de surface de 0.0002 T, une région fermée montant jusqu'à $\pm 30^\circ$ de chaque côté de l'équateur, et un indice polytropique $\alpha = 1.13$. On remarque immédiatement que l'écoulement (flèches) est partout parallèle aux lignes de champ magnétique poloidal (traits noirs minces), comme il se doit pour une configuration stationnaire en MHD idéale. Aux mil-latitudes, la solution ressemble qualitativement à la solution Weber-Davis de la Fig. 3.15. La surface critique du mode magnéto-sonique lent est située loin à l'intérieur de la surface d'Alfvén, et cette dernière coïncide presque exactement avec la surface critique du mode magnéto-sonique rapide (voir les points critiques de la solution Weber-Davis en 1D, soit les triangle, losange et point noir sur la Fig. 3.15). Aux basses latitudes la configuration fermée du champ magnétique a un fort impact sur le vent; ce n'est qu'au delà de $\sim 10 R_\odot$ environ que la vitesse radiale du vent devient comparable à celle caractérisant les plus hautes latitudes. La densité du plasma, cependant, y demeure supérieure par un facteur d'environ 3. Un examen très attentif de cette Figure révèle également une composante latitudinale de la vitesse, pointant vers les pôles, et qui loin au delà de l'étendue radiale de la région magnétiquement fermée montre une dépendance en $\sin(2\theta)$ à un très bon niveau d'approximation.

La solution au bas de la Figure 3.18 est identique à la première, sauf pour l'intensité du champ poloidal ainsi que l'étendue latitudinale de la région magnétiquement fermée, qui ont toutes les deux été doublées. Loin de la région fermée, la solution est caractérisée par une symétrie plus sphérique, ce qui n'est pas surprenant puisque le champ magnétique, en configuration monopolaire, canalise plus efficacement le plasma en expansion, et ce en subissant moins de distorsion latitudinale. En fait, ici la forme des lignes de champ poloidales (trait noirs minces) ressemble dangereusement à celle de la solution magnétostatique (§3.4.2) de la Figure 3.10D.

La Figure 3.19 montre une troisième solution numérique axisymétrique, celle-ci correspondant à un "soleil" tournant à 20 fois la vitesse du véritable soleil, mais conservant la même configuration et intensité magnétique que sur la Fig. 3.18A. L'impact de la rotation est ici substantiel à plusieurs niveaux. Comme dans le cas de la solution Weber-Davis de la Fig. 3.16, la surface critique du mode magnéto-sonique rapide (tirets) est nettement séparée de la surface critique d'Alfvén (trait plein épais). La rotation rapide conduit à un fort resserement de la spirale magnétique, dont la composante toroidale contribue maintenant à l'établissement d'un gradient de pression magnétique pointant vers les pôles, ce qui produit une collimation du vent le long de l'axe de rotation. On reviendra à cet effet de collimation magnétique dans survol des jets astrophysiques au chapitre suivant (§4.6.2). De plus, aux basses latitudes la forte contribution magnétocentrifuge à la dynamique radiale conduit à de plus grandes densités de plasma dans et près du plan équatorial.

On peut aussi carrément abandonner l'hypothèse d'axisymétrie, et utiliser des magnétogrammes du soleil comme condition limite à la reconstruction de véritables solutions couronne+vent en trois dimensions spatiales (mais toujours stationnaires). La Figure 3.20 montre un exemple de ce genre de solution numérique. Ici l'équation de l'énergie est utilisée, et inclut la conduction thermique ainsi qu'un terme de chauffage permettant de garder la basse couronne à

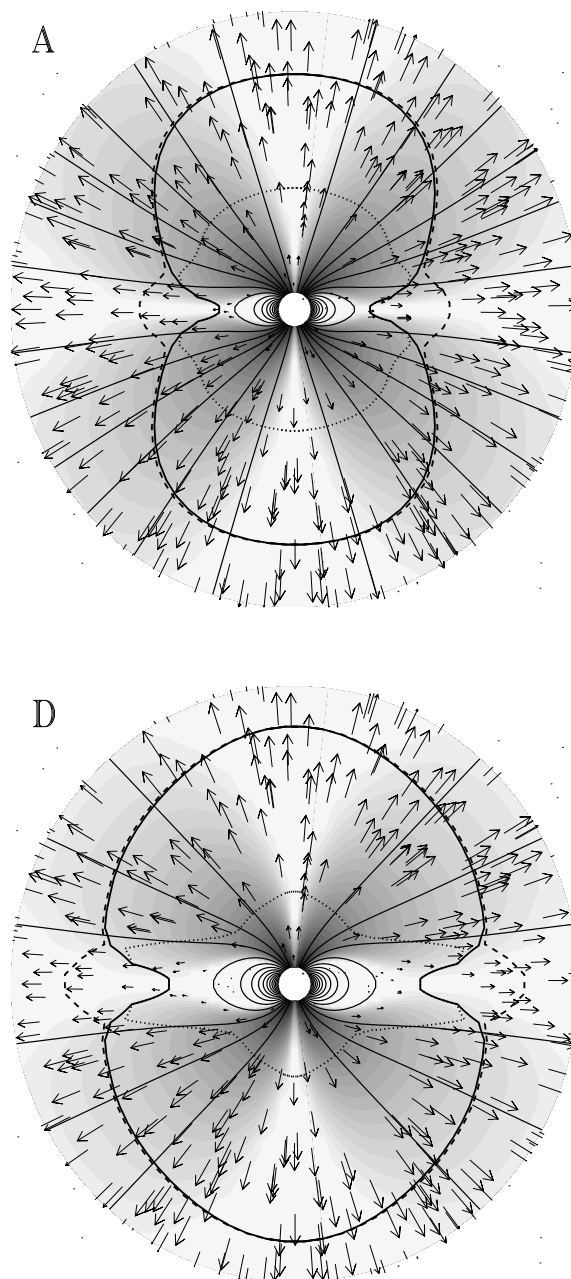


Figure 3.18: Solutions numériques en MHD 2D axisymétrique pour un vent coronal magnétisé émanant d’une étoile de type solaire en rotation. L’écoulement est représenté par des flèches, les lignes de champ poloidal par des traits noirs minces, et l’intensité de la composante magnétique toroidale par le dégradé de gris. Les traits plus épais en pointillés, tirets et plein tracent les surfaces critiques des modes magnéto-sonique lent, rapide, et du mode d’Alfvén, respectivement. La solution du haut correspond à des valeurs de paramètres solaires, tandis que la solution du bas s’applique à un “soleil” plus fortement magnétisé, et ayant donc une région magnétiquement fermée couvrant une plus grande plage de latitudes (voir texte). Graphiques fournis par Rony Keppens (U. Louvain, Belgique).

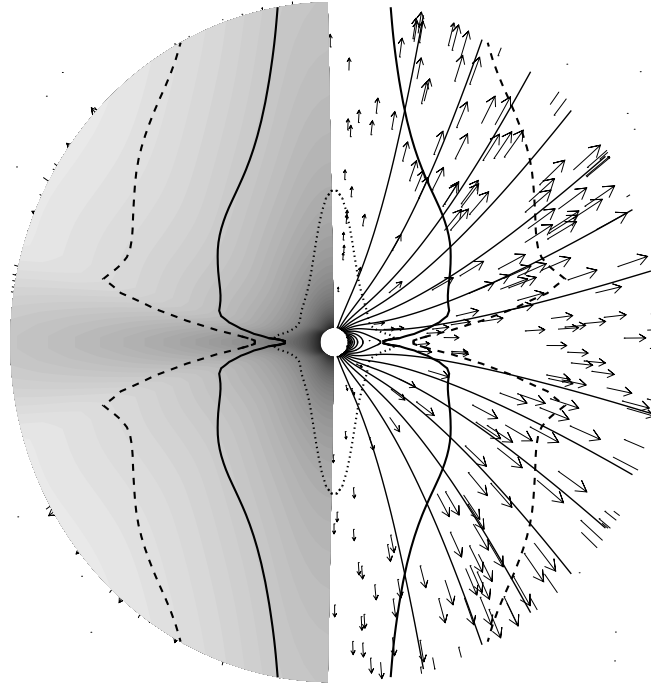


Figure 3.19: Similaire à la Fig. 3.18A, mais cette fois pour un “soleil” tournant à 20 fois le taux solaire, mais conservant les mêmes paramètres magnétiques. Ici le dégradé de gris de la moitié gauche du diagramme représente la densité du plasma dans le vent, plutôt que l’intensité de la composante toroidale. On notera la forte collimation du vent le long de l’axe polaire, ainsi que les plus grandes densités dans le plan équatorial. Graphiques fournis par Rony Keppens (U. Louvain, Belgique).

des températures de l’ordre de 10^6 K. Contrairement au champ magnétique, les paramètres plasma (température, densité, etc.) sont supposés constant à la base de la couronne. Ces reconstructions peuvent être validées en utilisant les distributions 3D de la densité du plasma pour produire des images synthétiques de la couronne solaire, qui sont par la suite comparées aux observations durant les éclipses totale du soleil. La page Web de *Predictive Science Inc.* (voir bibliographie en fin de chapitre) présente plusieurs comparaisons de ce genre. En bref, ça marche, et pas mal bien en plus !

La Figure 3.20 illustre aussi un autre aspect important du champ magnétique coronal, soit la tendance vers une configuration dipolaire, puis de type split-monopôle, à mesure que l’on s’éloigne de la photosphère. Si le champ magnétique coronal était potentiel ($\mathbf{J} = 0$), il serait possible de le représenter via un développement multipolaire pour un potentiel ϕ tel que $\mathbf{B} = \nabla\phi$. Dans un tel développement en puissance de $1/r^{n+1}$, la contribution des termes d’ordres élevés chute beaucoup plus rapidement avec la distance que celle des premiers termes du développement, donc on s’attend à ce que le terme dipolaire domine à grandes distances. Cet effet est clairement apparent sur l’image au haut de la Fig. 3.20, même si le champ magnétique n’y est pas du tout potentiel. Les termes d’ordres élevés contribuent principalement aux arcades magnétiques se refermant très bas dans la couronne. La dominance du terme (split-)monopolaire à très grande distance (image du bas) ne peut être capturée par un champ magnétique potentiel, puisque c’est fondamentalement un effet de force non-nulle, car c’est la pression du plasma qui force l’ouverture et l’étirement radial des lignes de champ magnétique, une fois dans le régime

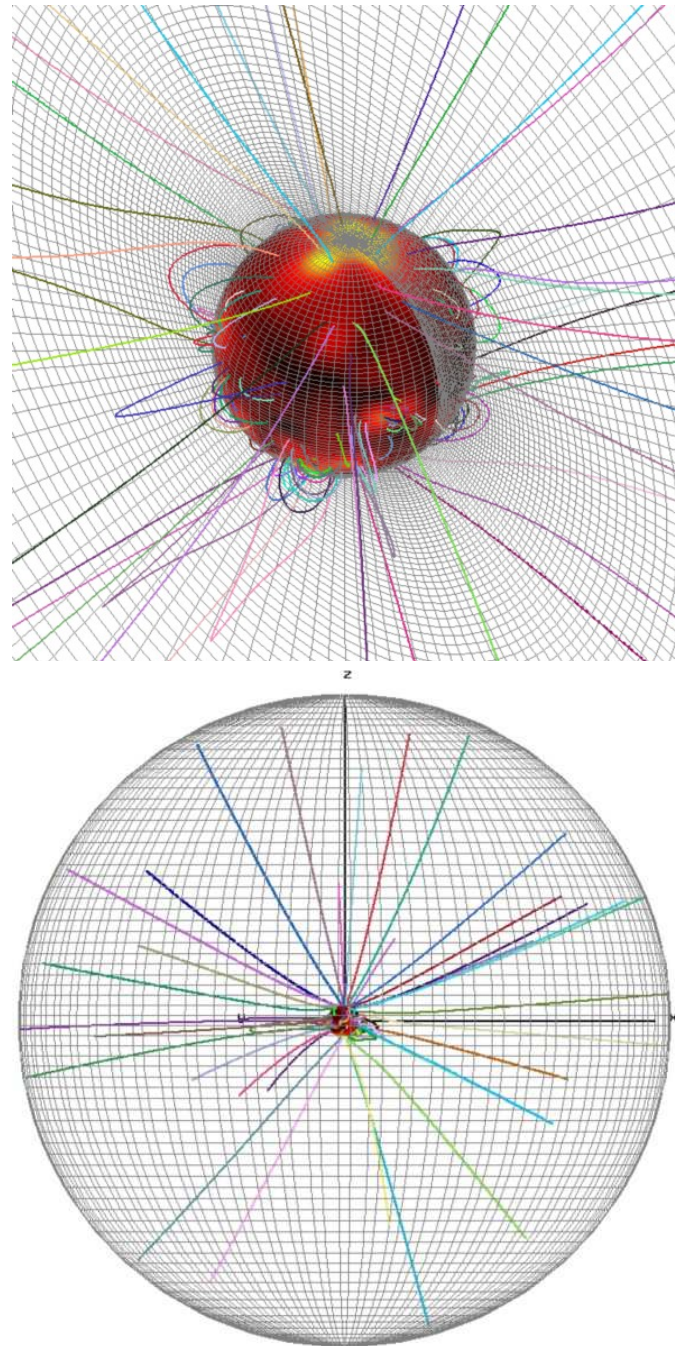


Figure 3.20: Solutions numériques en MHD 3D pour un vent coronal magnétisé émanant d'une étoile de type solaire en rotation. Le champ magnétique basal est donné ici par un magnétogramme du soleil, et dépend donc de la latitude et de la longitude, son intensité étant codée par le dégradé de couleur rouge–orange–jaune sur la vue rapprochée du diagramme du haut. Le diagramme du bas montre la même solution, cette fois s'étendant plus loin en rayon. On note comment les lignes de champ magnétique deviennent radiales à grandes distances. Diagrammes tirés du site Web de *Predictive Sciences Inc.* (voir bibliographie en fin de chapitre).

$\beta \gg 1$.

3.6 Le freinage rotationnel des étoiles

Même si le gradient de pression thermique est le principal moteur dynamique du vent, la solution Weber-Davis “solaire” de la Fig. 3.15 subit une perte de moment cinétique beaucoup plus grande qu’en l’absence de champ magnétique (viz. l’éq. (3.74)). Ceci offre une explication claire et nette pour la distribution des vitesses de rotation stellaire observées sur la séquence principale.

3.6.1 La rotation stellaire

La mesure de la rotation des étoile s’effectue principalement par la mesure le l’élargissement Doppler des raies spectrales, ou photométriquement si l’étoile présente des taches comme sur le soleil, ou tout autre structure présentant un contraste radiatif suffisamment élevé par rapport à la photosphère. Les premières mesures spectroscopiques remontent à 1929 (même si l’idée avait été avancée déjà en 1877!). À mesure que ces mesures se sont accumulées, il est devenu clair qu’il existe une forte variabilité dans les taux de rotation observés, même pour des étoiles dans un stade évolutif similaire. En particulier, il a été remarqué très rapidement qu’en descendant la séquence principale, des étoiles plus massives vers les moins massives, on observe une chute abrupte des vitesse de rotation au type spectral F5, de $\gtrsim 200 \text{ km s}^{-1}$ à $\lesssim 20 \text{ km s}^{-1}$. Si on suppose que ces étoiles tournent toutes comme des corps solides, alors pour celles dans l’intervalle de masse $1.5 \lesssim M/M_{\odot} \lesssim 20$ le moment cinétique total J prend la forme d’une loi de puissance en fonction de la masse:

$$J \propto M^{1.57} . \quad (3.91)$$

La contraction des étoiles durant leur évolution pré-séquence principale peut facilement expliquer les vitesse de rotation rapides observées dans les étoiles plus chaudes que F5; l’anomalie se trouve donc chez les étoiles plus froides, qui tournent beaucoup trop lentement. Une explication possible est que ces étoiles perdent leur moment cinétique, soit déjà dans les phases finales de contraction vers la séquence principale, et/ou suite à leur arrivée sur la ZAMS.

Le freinage rotationnel sur la séquence principal a été démontré par Andrew “Slamdunk” Skumanich dans un petit article (2 pages) devenu un grand classique (1592 citations sur ADS en août 2022). Utilisant les observations disponibles à l’époque pour quelques amas jeunes d’âges connus, Skumanich a montré que les vitesses de rotation des étoiles de type solaire suivent une tendance en $t^{-1/2}$ sur la séquence principale; il a également montré que l’émission non-radiative observée dans les raies H et K du Calcium, un indicateur d’activité magnétique déjà bien connu à l’époque, montre aussi une décroissance temporelle semblable. C’était là une première indication empirique d’un lien existant entre la rotation et l’activité magnétique, lien que nous aurons l’occasion d’étudier plus en détail dans un chapitre à venir. Les observations plus récentes ont démontré que le freinage rotationnel sur la séquence principale est très rapide, ne demandant que quelques 100 Myr après l’arrivée sur la ZAMS. Ce freinage se produit de manière telle qu’il conduit à une convergence des vitesses de rotation, dans le sens qu’après $\sim 1 \text{ Gyr}$, toutes les étoiles de type solaire tournent à des vitesses relativement faibles, correspondant à des périodes de rotation de quelques dizaines de jours (exception faite ici des étoiles membres de systèmes binaires serrés). La Figure 3.21 illustre cette convergence, ainsi que le vaste intervalle des vitesses de rotations mesurées dans les amas jeunes (pré-séquence principale et ZAMS).

3.6.2 La loi de Skumanich

Vous l’avez peut-être anticipé: le modèle de vent Weber-Davis étudié à la §3.5.1 peut nous fournir la quantité-clef requise pour modéliser le freinage rotationnel des étoiles, soit le taux de perte de moment cinétique. Le résultat crucial est l’éq. (3.74), indiquant que le moment

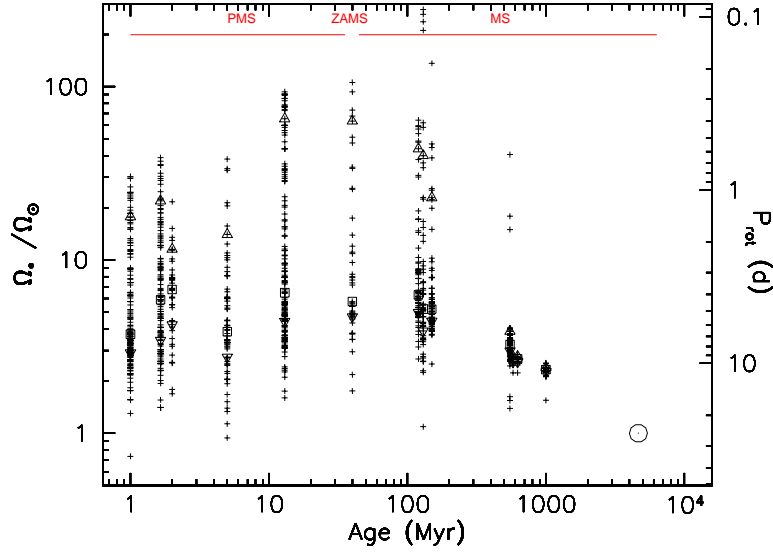


Figure 3.21: Compilations des vitesses angulaires de rotation mesurées dans les étoiles de type solaire membres d’amas jeunes ($0.9 \leq M/M_\odot \leq 1.1$, mais un peu plus large sur la PMS), et le soleil (\odot). Les carrés correspondent à la médiane pour chaque amas, et les triangles indiquent les décomptes 25% et 90%. Figure tirés de Gallet & Bouvier (2013, A&A **556**, A36; Figure 1).

cinétique net transporté par le vent (L) est égal à celui qui serait transporté par le plasma dans un vent non-magnétisé demeurant en co-rotation avec la photosphère jusqu’au rayon d’Alfvén r_A :

$$L = \Omega r_A^2 . \quad (3.92)$$

Cependant, le modèle Weber-Davis, et donc l’éq. (3.92), ne s’appliquent qu’au plan équatorial. L’expression équivalente pour la sphère complète n’est pas simplement $4\pi\Omega r_A^2$, car ce n’est que la composante de l’expansion dans la direction perpendiculaire à l’axe de rotation qui extrait du moment cinétique. Une option raisonnable est de supposer que ce sont toutes les coquilles sphériques de plasma en expansion qui demeurent en co-rotation jusqu’à $r = r_A$, dans lequel cas on aurait:

$$L_{\text{sph}} = \frac{2}{3}\Omega r_A^2 , \quad (3.93)$$

où le facteur 2/3 provient du calcul du moment d’inertie pour une coquille sphérique. Le taux de perte de moment cinétique devient alors:

$$\frac{dJ}{dt} = \dot{M} \times L_{\text{sph}} = -4\pi\rho_A r_A^2 u_{rA} \left(\frac{2}{3}\Omega r_A^2 \right) . \quad (3.94)$$

Bon maintenant; au rayon d’Alfvén on a $u_{rA} = A_{rA}$, avec $B_{rA}^2 = 4\pi\rho_A A_{rA}^2$. De plus, la conservation du flux magnétique exige que $r_0^2 B_{r0} = r_A^2 B_{rA}$. Substituant tout ceci dans l’éq. (3.94) donne:

$$\frac{dJ}{dt} = \dot{M} \times L_{\text{sph}} = -\frac{2}{3}B_{r0}^2 r_0^4 \Omega A_{rA}^{-1} . \quad (3.95)$$

Pour un vent de type coronal, donc propulsé en grande part par l’énergie thermique mais aussi magnétisé et en rotation (comme sur la Fig. 3.15), on a $A_{rA} \sim c_s$ à un facteur deux près. Si de plus on considère que la température coronale basale demeure fixe durant l’évolution de l’étoile

sur la ZAMS, la perte de moment cinétique ne devient dépendante que du taux de rotation et de l'intensité du champ magnétique photosphérique. Ces deux quantités sont mesurables et donc connues dans le cas du soleil actuel, mais quelles étaient-elles quand le soleil venait tout juste d'arriver sur la ZAMS, il y a 4.5 Gyr ? Si les étoiles d'une masse solaire observées aujourd'hui dans des amas stellaires jeunes comme α Persei ou les Pléiades sont représentative du soleil jeune, alors le taux de rotation de ce dernier aurait pu se situer n'importe où entre 5 et 100 fois sa rotation actuelle. Quant à son champ magnétique photosphérique, les observations stellaires indiquent assez clairement que le magnétisme de surface augmente avec le taux de rotation (on reviendra là-dessus à la §5.1.3, viz. Fig. 5.8), et certains modèles dynamo que nous étudierons dans un chapitre ultérieur "prédissent" $B_{r0} \propto \Omega$. Si c'est le cas, et si on néglige la variation du moment d'inertie d'une étoile de type solaire évoluant sur la ZAMS (une excellente approximation, pour faire changement...), alors l'éq. (3.94) conduit à:

$$\frac{d\Omega}{dt} \propto \Omega^3, \quad (3.96)$$

Cette expression indique que les rotateurs rapides freinent plus rapidement que les rotateurs lents, ce qui explique déjà la convergence dans le temps des vitesses de rotation observées dans les étoiles de type solaires membres d'amas jeunes. L'éq. (3.96) s'intègre facilement:

$$\frac{1}{\Omega^2(t)} - \frac{1}{\Omega^2(t_0)} \propto t - t_0, \quad (3.97)$$

où t_0 est le temps de l'arrivée sur la ZAMS (ou pas loin). Dans la limite asymptotique $t \gg t_0$, $\Omega \ll \Omega(t_0)$, ceci se réduit à

$$\Omega(t) \propto t^{-1/2}, \quad (3.98)$$

ce qui est précisément la dépendance temporelle déduite observationnellement, telle que quantifiée par la Loi de Skumanich. BANZAI !!

3.6.3 Temps caractéristiques

La constante de proportionnalité manquante dans l'éq. (3.98) est calculable à partir de la solution de Weber-Davis, en fait nous avons déjà fait tout le travail en obtenant l'éq. (3.95). Si l'on suppose en première approximation que les étoiles tournent comme des corps solides, on écrirait alors:

$$J = I_* \Omega_*, \quad (3.99)$$

où I_* est le moment d'inertie de l'étoile. Par analyse dimensionnelle on arrive à l'estimé suivant pour le temps caractéristique de freinage rotationnel:

$$\tau_{\text{sp}} = I_* \Omega_* \left(\frac{dJ}{dt} \right)^{-1}. \quad (3.100)$$

Tout ce qui manque maintenant est la valeur du moment d'inertie, qui se calcule facilement à partir d'un modèle stellaire, plus précisément du profil de densité en fonction de la position dans l'étoile. Pour une distribution de masse ayant une symétrie sphérique,

$$I_* = \int_V \varrho(r) r^2 \sin^2 \theta dV. \quad (3.101)$$

Le tableau 3.4 liste les moments d'inertie de quelques modèles d'étoiles de type solaire sur la ZAMS, pour des masses allant de 0.8 and 1.2 M_{\odot} . Le tableau donne également les temps caractéristiques de freinage rotationnel, en supposant ici des périodes de rotation d'un jour, et un champ magnétique de surface de 0.005 T, des valeurs raisonnables basées sur les observations et modèles d'évolution sur la pré-séquence principale.

Tableau 3.4
Temps caractéristiques de freinage rotationnel sur la ZAMS³

M/M_{\odot}	R/R_{\odot}	$I_* [10^{53}]$	$\tau_{J,*} [\text{Myr}]$
0.8	0.703	4.41	810
0.9	0.784	5.50	604
1.0	0.882	6.75	396
1.2	1.131	9.02	133

Les temps caractéristiques de freinage sont de l'ordre de 10^8 – 10^9 années, confortablement plus court que l'âge du soleil, quoiqu'un facteur d'environ 10 plus long que les temps équivalents déduits des observations des vitesses de rotation dans les amas jeunes. Cet écart provient en fait de l'hypothèse de rotation solide, mais se lancer là-dedans nous entrainerait trop loin de notre sujet.

Il y a clairement des limites à l'applicabilité de l'éq. (3.98). Comme on peut le constater sur la Fig. ??, dans les amas stellaires très jeunes ($\lesssim 100$ Myr), on observe une population de rotateurs lents qui ne cadre pas du tout avec l'extrapolation dans le passé de la Loi de Skumanich. L'hypothèse la plus plausible est que la rotation de ces étoiles est demeurée régulée par une interaction (magnétique!) avec un disque d'accrétion, jusqu'à l'approche finale à la ZAMS; on reviendra là-dessus au chapitre 4. De même, l'astérosismologie permet maintenant de dater de manière relativement fiable les étoiles vieilles du champ. Des études récentes ont démontré que la perte de moment cinétique conduisant à la Loi de Skumanich subit une forte chute pour des étoiles un peu plus vieilles que le soleil. A l'heure actuelle cette transition est interprétée en terme d'une transition dans le mode d'action dynamo (voir chap. 5) dans ces rotateurs lents, qui conduirait à un champ coronal ayant une topologie moins propice à la perte de moment cinétique; voir références en fin de chapitre si ça vous intéresse d'approfondir ces subtilités de l'évolution rotationnelle des étoiles.

3.7 Au delà des vents coronaux

La perte de masse par le biais d'un vent est en fait un phénomène assez répandu en astrophysique, et les vents de type coronaux (i.e., puisant dans un réservoir thermique de plasma surchauffé) sont très certainement émis par toutes les étoiles de type solaire. Des vents obéissant essentiellement à la même dynamique originent également des galaxies, et de certains disques d'accrétion. Les étoiles massives et chaudes propulsent des vents très massifs à l'aide de leur luminosité radiative. Il existe des indications indirectes que même les étoiles trop froides pour propulser un tel vent radiatif, mais trop chaudes pour avoir une enveloppe convective, supportent également une perte de masse, mais à des taux bien inférieurs à celui du soleil actuel. En effet, la modélisation des abondances des espèces chimiques déterminées spectroscopiquement dans leurs atmosphères demande souvent l'ajout d'un faible taux de perte de masse afin de bien reproduire les abondances observées. Dans les étoiles évoluées au stade de géante et supergéante, l'accélération d'un vent par l'absorption d'ondes acoustique, magnétoacoustique, et/ou Alfvén joue probablement un rôle important, autant au niveau du chauffage coronal (via leur dissipation) que du dépôt de quantité de mouvement dans le vent même. Les ondes d'Alfvén sont particulièrement attrayantes dans ce dernier cas, puisqu'elles sont sujettes à une absorption beaucoup moindre à la base de la couronne, en comparaison aux ondes acoustiques et magnétoacoustiques. La bibliographie liste quelques bonnes références pour ceux ou celles désirant examiner ces questions de plus près.

Bibliographie:

³Modèles stellaires par D. Vanderberg, Université de Victoria.

Ceux/celles intéressé(s) à l'histoire lointaine des observations de la couronne solaire trouveront de quoi approfondir le sujet sur les pages Web *Grands Moments de la Physique Solaire*, développées au fil des ans par mon oncle votre humble serviteur ici présent:

http://www.astro.umontreal.ca/~paulchar/grps/histoire/newsite/history_f.html

Au niveau de l'histoire plus récente, en particulier sur les indices pointant vers l'existence d'un vent solaire, voir:

Behr, A., & Siedentopf, H. 1953, *Zeitschrift Ap.*, **32**, 19.

Biermann, L. 1951, *Zeitschrift Ap.*, **29**, 274.

Même plus d'un demi-siècle plus tard, le grand classique de Eugene Parker mérite encore amplement d'être lu (1935 citation sur ADS en date de septembre 2018!):

Parker, E.N. 1958, *Astrophys. J.*, **128**, 664

Le site Web de la mission *Ulysses* donne un bon survol de l'état actuel des connaissances sur le vent solaire:

<http://ulysses.jpl.nasa.gov>

Sur la question de l'ajout d'énergie et/ou quantité de mouvement dans les vents coronaux, voir:

Leer, E., & Holzer, T.E. 1980, *JGR*, 85, 4681

Ofman, L. 2010, *Liv. Rev. Solar Phys.*, **7**, 4:

<http://solarphysics.livingreviews.org/Articles/lrsp-2010-4>

Les solutions magnétostatiques décrites à la section §3.4.2 sont le fruit du très dur labeur de

Low, B.C. 1986, *Astrophys. J.*, **310**, 953-965,

tandis que les calculs de vents polytropiques pour des facteurs d'expansion non-radiaux doivent être crédités au tout aussi dur labeur de

Kopp, R.A., & Holzer, T.A. 1976, *Sol. Phys.*, **49**, 43-56,

dont la seconde moitié de la §3.4.3 est fortement inspirée. Sur l'évolution en spirale du champ magnétique solaire entraîné dans le milieu interplanétaire par le vent, voir

Parker, E.N. 1963, *Interplanetary Dynamical Processes* (New York: John Wiley), chap. 10.

Ainsi que la §2 de l'article de revue suivant, disponible en ligne:

Owens, M.J., & Forsyth, R.J. 2013, *Liv. Rev. Solar Phys.*, **10**, 5:

<http://solarphysics.livingreviews.org/Articles/lrsp-2013-5>

Le modèle Weber-Davis de la §3.5.1 a été développé par

Weber, E.J., & Davis, L. Jr. 1967, *ApJ*, 148, 217.

Belcher, J.W., & MacGregor, K.B. 1976, *ApJ*, 210, 498.

Le contenu de la §3.5.3 est basé en quasi-totalité sur les deux articles suivants:

Keppens, R., & Goedbloed, J.P. 1999, *Astron. Astrophys.*, **343**, 251-260,

Keppens, R., & Goedbloed, J.P. 2000, *Astrophys. J.*, **530**, 1036-1048,

Les images de solutions MHD tridimensionnelles présentées à la Figure 3.20 sont tirées de la page Web suivante:

http://www.preds-ci.com/corona/coronal_modeling.html

qui contient de nombreuses comparaisons (par l'image) entre les prédictions des modèles et une dizaine d'éclipses totales du soleil (consultée septembre 2015). L'idée d'une perte de moment cinétique dans un écoulement magnétisé remonte à:

Schatzman, E. 1962, *Ann. Astrophys.*, 25, 18.

mais l'article suivant, ayant eu une très grande influence sur le développement du sujet, reste à lire:

Mestel, L. 1968, MNRAS, 138, 359.

Sur la Loi de Skumanich, voir:

Skumanich, A. 1972, ApJ, 171, 565,

Durney, B. 1972, in *Solar Wind*, eds. C.P. Sonett, P.J. Coleman, & L.M. Wilcox (Washington: NASA), p. 282.

et sur son bris dans les étoiles très jeunes et très âgées:

Gallet, F., & Bouvier, J. 2013, A&A 556, A36,

van Saders, J.L., et al. 2016, Nature, 529, 181–184,

Metcalfe, T.S., Egeland, R., & van Saders, J.L. 2016, ApJL, 826, L2.

Au niveau de l'accélération des vents via l'absorption d'ondes acoustique, magnétoacoustique ou Alfvén, commencez avec:

Cuntz, M. 1990, ApJ, 353, 255,

Hartmann, L., & MacGregor, K.B. 1980, ApJ, 242, 260,

MacGregor, K.B., & Charbonneau, P. 1994, in *Cosmic winds and the heliosphere*, ed. J.R. Jokipii, C.P. Sonett, & M.S. Giampapa, Tucson: University of Arizona Press, 327-ff.

Finalement, l'ouvrage suivant offre un excellent survol des vents stellaires dans à peu près tous les coins du diagramme Hertzsprung-Russell:

Lamers, H.G.L.M., et Cassinelli, J.P., *Introduction to Stellar Winds*, Cambridge University Press (1999).

Chapitre 4

Les disques d'accrétion

La formation des étoiles se produit par effondrement gravitationnel de nuages moléculaires très diffus. Parce que ces nuages sont souvent dans un état turbulent, la portion de nuage qui deviendra ultimement une étoile présente habituellement un très faible mouvement de rotation par rapport à un axe orienté arbitrairement dans l'espace. Par conservation du moment cinétique, cette rotation sera grandement amplifiée durant le processus d'effondrement, ce qui conduira à la formation d'un disque autour de l'objet central, et c'est via ce disque que la matière s'y accrétera. La formation d'un disque d'accrétion est également attendue dans les systèmes binaires serrés dont l'une des composantes déborde de son lobe de Roche. Finalement, à une échelle véritablement cosmologique, les trous noirs supermassifs au centre des galaxies actives doivent ultimement leur émission d'énergie au chauffage extrême auquel est sujet le disque d'accrétion via lequel ils avalent le gaz et les étoiles de leur galaxie-hôte¹.

Dans ce chapitre nous examinerons un modèle simple de disque d'accrétion, soit le modèle du disque Keplérien dit mince (§4.2 et 4.3). Ceci nous conduira à examiner les différentes instabilités hydrodynamiques (§4.4) et magnétohydrodynamiques (§4.5) pouvant produire la turbulence qui s'avère requise pour produire un disque d'accrétion astronomiquement crédible. La §4.5 offre également un survol du couplage magnétique pouvant exister entre une étoile (magnétisée) et son disque d'accrétion, et des conséquences d'un tel couplage sur la structure du disque ainsi que sur l'évolution rotationnelle de l'étoile centrale. Le chapitre se clot (§4.6) par une brève discussion de l'accélération et collimation des jets par le champ magnétique dans un système étoile+disque d'accrétion.

4.1 L'accrétion et la formation des étoiles

Sous sa forme quantitative exprimée en terme de la mécanique Newtonienne, l'hypothèse nébulaire, soit l'idée de la formation du système solaire par l'effondrement gravitationnel, remonte aux travaux de Pierre Simon de Laplace, à la toute fin du dix-huitième siècle. Laplace avait bien compris que si le nuage est imbu d'un mouvement de rotation même très faible, la conservation du moment cinétique implique qu'un effondrement initialement radial perdrait rapidement cette symétrie, en raison de la barrière centrifuge associée à l'accélération rotationnelle du nuage en contraction. Ce concept est illustré très schématiquement à la Figure 4.1. L'effondrement se retrouve ralenti dans les directions perpendiculaires à l'axe de rotation du système (ici horizontalement), mais pas dans les directions parallèles à cet axe (ici vertical). Ceci conduit naturellement à la production d'une structure en forme de disque perpendiculaire à l'axe de rotation. Ce concept permettait d'expliquer, uniquement par l'action de la gravité, plusieurs caractéristiques déjà connues du système solaire, dont le fait que toutes les planètes

¹Dans le cas de trous noirs supermassifs en rotation rapide, il est possible d'extraire de l'énergie rotationnelle de ce trou noir via des écoulements et/ou champ magnétique pénétrant son ergosphère; ceci représente vraisemblablement une source d'énergie importante dans la propulsion des gigantesques jets émanant des coeurs des galaxies actives.

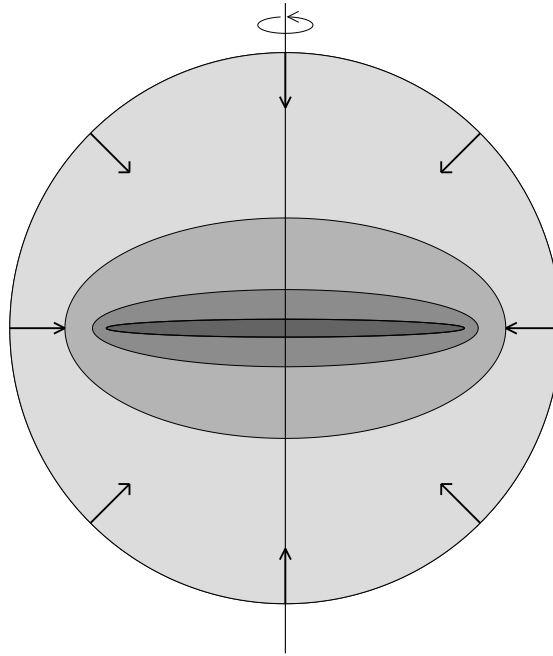


Figure 4.1: Représentation très très schématique des phases initiales de l'effondrement d'un nuage moléculaire pour former un disque d'accrétion. La force centrifuge ralentit l'effondrement dans les directions perpendiculaires à l'axe de rotation du système, mais pas dans les directions lui étant parallèle.

ont des axes orbitaux (1) presque parallèles, (2) alignés de près à l'axe de rotation du soleil, et (3) que presque toutes les planètes (Vénus et Uranus étant les exceptions) ont des axes de rotation qui sont approximativement alignés à leur axe orbital.

Il convient de distinguer (au moins) trois phases au processus d'accrétion conduisant à la formation d'une étoile entourée d'un disque:

1. La phases initiales de l'effondrement, quand le système accumule la masse verticalement dans son plan équatorial, comme illustré schématiquement à la Fig. 4.1;
2. La phase principale d'accrétion, où l'accumulation de masse par l'objet central se produit principalement via le flux radial de masse dans le disque;
3. La phase finale, où le plasma du disque a été en quasi-totalité accrété, ne laissant qu'un *disque protoplanétaire* de débris orbitant l'étoile centrale.

C'est la seconde de ces phases qui nous occupera principalement au travers ce chapitre. La Figure 4.2 montre un exemple de disque autour d'une étoile jeune de type TTauri, prise par Hubble. Ici le disque est vu par la tranche et éclipse l'étoile centrale, permettant ainsi de voir le disque, principalement via la réflexion de la luminosité de l'étoile sur le disque. On aperçoit également un jet très bien collimaté le long de l'axe de rotation du système, caractéristique typique de bien d'autres types de disques d'accrétion. On verra dans ce qui suit que les disques d'accrétion autour des étoiles jeunes émettent principalement dans l'infrarouge. Dans la phase du disque protoplanétaire, les observations radios à haute résolution permettent de visualiser ces disques beaucoup plus froids. La Figure 4.3 en monte un exemple, et la bibliographie en fin de chapitre liste quelques références récentes donnant des points d'entrée vers l'immense littérature sur les observations des disques d'accrétion.

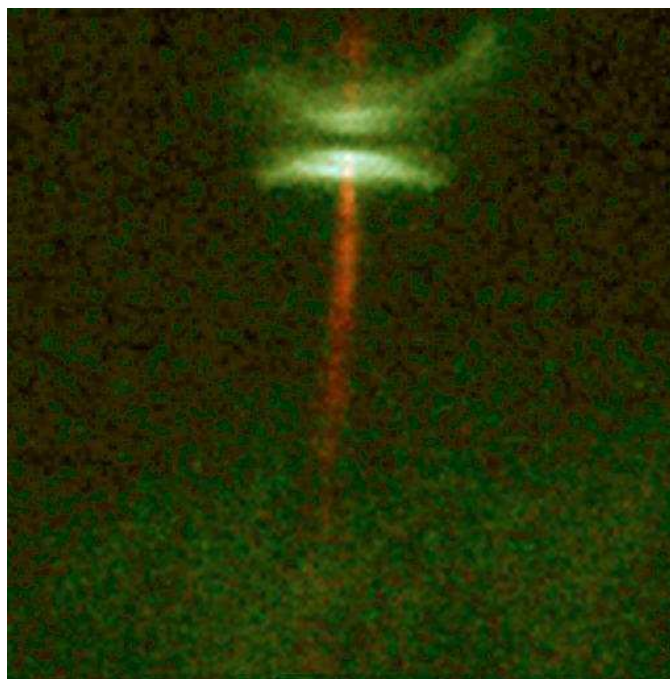


Figure 4.2: Objet Herbig-Haro HH-30 dans la constellation du Taureau. Il s’agit ici d’une étoile en formation, entourée d’un disque d’accrétion et émettant deux jets le long de son axe de rotation. Le système est vu par la tranche, et le disque cache l’étoile centrale. Le disque même est pratiquement invisible, mais les deux structures concaves brillantes sont causées par la réflexion de la lumière émise par l’étoile centrale sur la surface du disque. La partie visible du disque a ici un diamètre d’un peu plus de 300 Unités Astronomiques. Image prise par Hubble/NASA, en domaine public.

Il est bien dommage de devoir composer avec la conservation du moment cinétique, car si ce n’était pas le cas, on aurait pu clore ce chapitre en une page. Retournez examiner la solution de vent coronal polytropique construite à la §3.3.2. Ses deux équations maitresses, soit (3.17) et (3.21), sont invariantes sous la transformation $u_r \rightarrow -u_r$. Sous cette transformation, ce que nous avons nommé la solution transsonique déccélérante de la Figure 3.5 est donc une solution tout à fait acceptable pour une accrétion transsonique en symétrie sphérique! On doit cependant rajouter un choc près de la surface de l’étoile, pour faire passer la vitesse de supersonique à subsonique, ce choc devant connecter à la branche accélérante (qui a le même E , vous vous rappelez j’espère...) afin de satisfaire aux relations de Rankine-Hugoniot (§1.3.3). Mais bon, ça aurait été trop facile...

4.2 Le disque Keplérien

On se limite pour commencer aux disques inviscides et non-magnétisés, et on considère la situation dite du “disque froid”, pour laquelle la pression du plasma n’influence pas la dynamique —une situation très différente de l’équilibre hydrostatique qui était à la base de nos modèles de couronnes! On suppose que le disque est très mince et réside dans le plan équatorial du système, tel que défini par l’axe de rotation de l’étoile centrale, et que la masse (M_*) de cette dernière est beaucoup plus grande que celle du disque, et donc que le champ gravitationnel $\propto GM_*/r^2$. Pour un système étoile TTauri+disque typique, on a $M_* \simeq M_\odot$ et la masse du disque $\sim 10^{-2} M_\odot$, donc l’approximation est justifiable. Cette configuration géométrique est illustrée à la Figure 4.4, qui montre le système étoile+disque vu par la tranche.

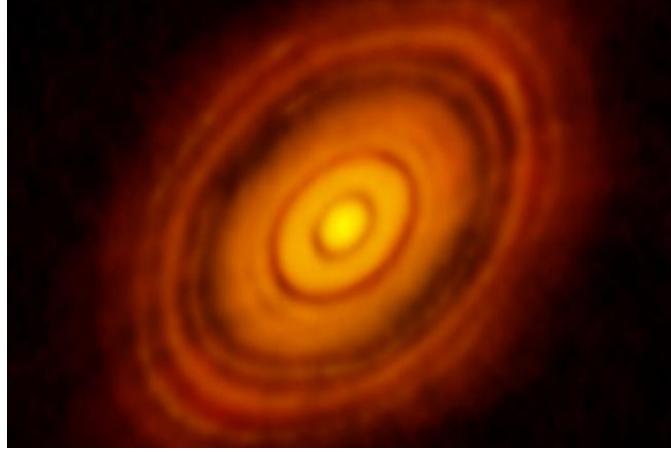


Figure 4.3: Imagerie directe du disque protoplanétaire autour de l'étoile jeune HL Tau, observé par le réseau radiotélescopique ALMA (Atacama Large Millimeter Array). Les anneaux sombres démarquent les orbites de protoplanètes, qui, “nettoient” le disque de son contenu de gaz et poussière —encore un processus d'accrétion ! Situé à 456 années-lumière de la Terre, ce disque a un rayon d'environ 200 UA, et sa masse est estimée à $0.1 M_{\odot}$. Image téléchargée de cfa.harvard.edu/research/topic/disks, crédit C. Brogan & B. Saxton (NRAO/AU/NSF).

En supposant une configuration stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) et travaillant en coordonnées cylindriques (s, ϕ, z) avec l'axe- z aligné à l'axe de rotation, on suppose que les éléments de fluide orbitent sur des trajectoires circulaires, i.e.,

$$\mathbf{u} = u_{\phi}(s, z)\hat{\mathbf{e}}_{\phi} . \quad (4.1)$$

Si le disque est très mince (dans le sens que son épaisseur $h \ll R_*$), on peut formuler la dynamique uniquement dans le plan équatorial en supposant invariance en z dans le disque même, ce qui fait que u_{ϕ} ne dépend plus que de s , et $\partial/\partial z = 0$. Dans une telle situation la dynamique se limite à la composante- s de l'équation d'Euler, qui en l'absence de composante radiale à l'écoulement se réduit à une expression d'équilibre entre gravité et la force centrifuge:²

$$\frac{GM_*}{s^2} = \frac{u_{\phi}^2}{s} \equiv \Omega^2 s , \quad (4.2)$$

d'où on tire immédiatement la variation de la vitesse angulaire en fonction du rayon cylindrique s :

$$\Omega(s) = \left(\frac{GM_*}{s^3} \right)^{1/2} , \quad [\text{rad s}^{-1}] . \quad (4.3)$$

Ce profil est tracé sur le graphique en encart sur la Fig. 4.4. La dépendance en $s^{-3/2}$ est évidemment celle caractérisant les orbites Kepleriennes, en conséquence de quoi un disque obéissant à l'éq. (4.3) est appelé *disque Keplerien*. Un concept qui deviendra important plus loin est celui du *rayon de co-rotation*, soit le rayon (r_c) pour lequel la vitesse angulaire de rotation du disque est égale à celle de l'étoile centrale:

$$\Omega(r_c) = \Omega_* \quad \rightarrow \quad r_c = \left(\frac{GM_*}{\Omega_*^2} \right)^{1/3} . \quad (4.4)$$

²Que le disque soit mince ou non, l'invariance en z peut paraître absurde, puisque le disque est clairement délimité par deux surfaces planes perpendiculaire à l'axe- z . On reviendra sur ce paradoxe apparent plus loin.

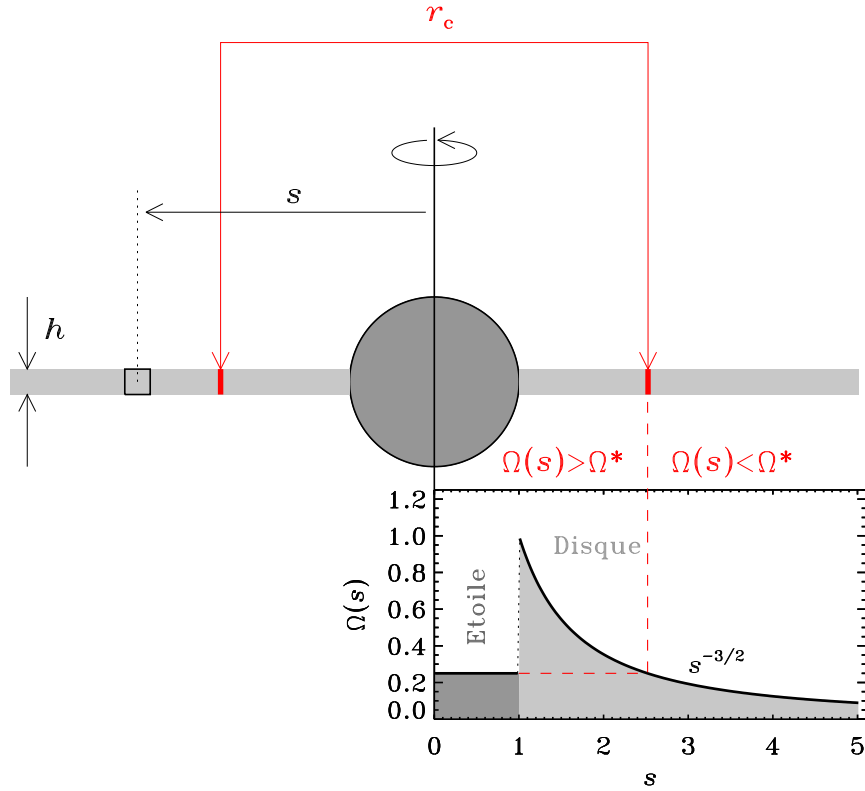


Figure 4.4: Géométrie du disque Keplerien, vu ici par la tranche. L'étoile centrale de rayon R_* et masse M_* tourne à vitesse angulaire Ω_* . Un disque d'épaisseur h occupe le plan équatorial, la vitesse de rotation du plasma étant déterminée par l'équilibre entre la gravité et la force centrifuge (voir texte). Si la masse du disque est beaucoup plus petite que celle de l'objet central, la vitesse angulaire dans le disque varie en $s^{-3/2}$ (voir encart). Au rayon de co-rotation r_c , la vitesse angulaire du disque est égale à celle de l'étoile (traits rouges).

La position de ce rayon de corotation est indiqué en rouge sur la Fig. 4.4. La vitesse angulaire du disque est $\Omega > \Omega_*$ pour $s < r_c$, et inversement $\Omega < \Omega_*$ pour $s > r_c$. En général, l'étoile centrale tourne beaucoup plus lentement que le bord du disque avec lequel elle fait contact, et le rayon de co-rotation se retrouve donc à plusieurs R_* de l'étoile.

Dans un disque froid et de faible densité, on peut légitimement s'attendre à ce que la viscosité dynamique $\mu = \rho\nu$ soit très petite. Durant les phases initiales de la formation du disque, il paraît donc raisonnable de supposer que la force visqueuse y est effectivement nulle; mais ce n'est plus nécessairement le cas pour les disques plus denses, comme par exemple durant la phase T Tauri précédant l'arrivée sur la séquence principale. Pour qu'un tel disque demeure en régime stationnaire, il faut donc absolument trouver un autre mécanisme qui puisse équilibrer la force visqueuse dans la dynamique zonale. En effet, le disque Keplerien est caractérisé par un cisaillement rotationnel donné par:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial s} = -\frac{3}{2} \left(\frac{GM_*}{s^5} \right)^{1/2}. \quad (4.5)$$

Ceci implique que la composante $\tau_{s\phi}$ du tenseur des stress visqueux:

$$\tau_{s\phi} = \mu s \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u_\phi}{s} \right) = \mu s \frac{\partial \Omega}{\partial s} \quad (4.6)$$

sera non-nulle si $\mu \neq 0$. Ici, comme $\Omega(s)$ décroît rapidement avec le rayon s , la viscosité tendra à décélérer la partie intérieure (s petit) du disque au profit de sa partie éloignée (s grand). Autrement dit, la force visqueuse transporte du moment cinétique vers la périphérie du disque, et donc le profil Keplerien devrait “s’aplatir”. Second problème, un disque Keplerien avec $u_s = 0$ n’accrète rien, ce qui n’est pas très “winner” pour un disque d’accrétion... Il s’avère que ces deux problèmes sont intimement reliés, comme on l’examinera maintenant dans le contexte du modèle dit du disque mince.

4.3 Le modèle du disque mince

4.3.1 Définition du modèle

On s’en tient pour le moment à la même configuration géométrique et physique qu’introduite dans notre construction du disque Keplerien (voir Fig. 4.4): un disque mince, non-magnétisé, et froid (i.e., pression gazeuse négligeable dans la dynamique radiale) où les éléments de fluide du disque décrivent des orbites (quasi-)circulaires autour d’une étoile centrale de masse M_* . Encore une fois nous considérons que la masse du disque est négligeable par rapport à celle de l’étoile centrale, cette dernière fournissant donc la seule contribution à la gravité. Cependant la force visqueuse est maintenant ramenée dans le portrait. Nous travaillons toujours en coordonnées cylindriques (s, ϕ, z) sous l’hypothèse d’axisymétrie des écoulements et de la structure du disque: $\partial/\partial\phi = 0$. Considérant toujours le disque invariant en z , on écrit maintenant l’écoulement sous la forme:

$$\mathbf{u} = u_s(s)\hat{\mathbf{e}}_s + u_\phi(s)\hat{\mathbf{e}}_\phi . \quad (4.7)$$

Sous cette configuration, les seules composantes non-nulles du tenseur des stress visqueux sont τ_{ss} et $\tau_{s\phi}$. Conservant pour le moment les dépendances temporelles, les composantes s et ϕ de l’équation de Navier–Stokes se réduisent à:

$$\rho \left(\frac{\partial u_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial u_s}{\partial s} - \frac{u_\phi^2}{s} \right) = -\frac{\partial p}{\partial s} - \rho \frac{GM}{s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s\tau_{ss}) , \quad (4.8)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_s \frac{\partial u_\phi}{\partial s} + \frac{u_\phi u_s}{s} \right) = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s\tau_{s\phi}) + \frac{\tau_{s\phi}}{s} , \quad (4.9)$$

tandis que l’équation de continuité prend la forme:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s\rho u_s) = 0 . \quad (4.10)$$

On s’intéresse ici à un disque quasi-Keplerien, dans le sens que $u_s \ll u_\phi$ partout dans le disque; de plus, pour un profil de densité sans discontinuité on s’attend à ce que $\partial u_s/\partial s$ soit très petit, la seule exception résiduelle étant le point de contact du disque avec l’étoile centrale, où u_s doit présument passer à zéro sur une très petite distance. Néanmoins, partout ailleurs dans le disque, on peut approximer l’éq. (4.8) par

$$\rho \left(\frac{\partial u_s}{\partial t} - \frac{u_\phi^2}{s} \right) \simeq -\rho \frac{GM}{s^2} \quad (4.11)$$

ayant encore supposé un disque froid, où la pression gazeuse est négligeable dans la dynamique radiale. Cette expression indique que l’écoulement radial ne peut résulter que d’un (léger) déséquilibre entre la gravité et la force centrifuge.

Passons maintenant à la composante- ϕ . On commence par la réexprimer en fonction de la vitesse angulaire $\Omega = u_\phi/s$:

$$\rho \left(\frac{\partial(\Omega s)}{\partial t} + u_s \frac{\partial(\Omega s)}{\partial s} + \Omega u_s \right) = \frac{1}{s^2} \frac{\partial}{\partial s} (s^2 \tau_{s\phi}) , \quad (4.12)$$

où on a également fait bon usage de la dérivée en chaîne pour regrouper les deux termes de la force visqueuse sous une seule dérivée. La suite implique un peu d'algèbre conceptuellement simple mais un tantinet fastidieuse; écrivons d'abord

$$\frac{\partial(\rho \Omega s^2)}{\partial t} = \Omega s^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial(\Omega s^2)}{\partial t} . \quad (4.13)$$

Sous utilisation de l'équation de continuité (4.10) pour remplacer le $\partial \rho / \partial t$ dans le premier terme au membre de droite de cette expression, on peut "rentrer" la densité sous la dérivée temporelle. Le terme en $\partial / \partial s$ résultant de cette substitution peut se combiner aux deux autres termes au membre de droite, conduisant à:

$$\frac{\partial(\rho \Omega s^2)}{\partial t} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (\rho u_s s^3 \Omega) = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(\mu s^3 \frac{\partial \Omega}{\partial s} \right) \quad (4.14)$$

Comme $\Omega s \equiv u_\phi$ dans le plan équatorial, la quantité $\rho \Omega s^2$ correspond au moment cinétique par unité de volume; le second terme au membre de gauche correspond à la divergence du flux de cette quantité associé à la composante radiale de l'écoulement; tandis que le terme au membre de droite représente l'action de la force visqueuse.

Passons maintenant au cas d'un disque d'accrétion stationnaire, dans le sens que tous les $\partial / \partial t = 0$. Les équations (4.10) et (4.14) deviennent alors:

$$\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} [s \rho u_s] = 0 , \quad (4.15)$$

$$\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left[\rho u_s s^3 \Omega - \mu s^3 \frac{\partial \Omega}{\partial s} \right] = 0 . \quad (4.16)$$

Dans les deux cas on en conclut que les quantités entre parenthèses carrées sont des constantes, correspondant respectivement au flux de masse et de moment cinétique. L'équation (4.16) indique donc que pour que le disque soit stationnaire, le transport de moment cinétique vers l'étoile par l'écoulement radial doit être partout équilibré par le transport vers la périphérie du disque produit par la force visqueuse. Nous avons donc réglé deux problèmes d'un coup: maintenant notre disque accrete, et de plus il peut demeurer en régime stationnaire.

4.3.2 Un disque mince doit être froid

Avant d'aller plus loin il importe d'ouvrir une petite parenthèse relative à la structure verticale du disque (mince). Même si on suppose que u_s et u_ϕ ne dépendent pas de la hauteur z dans le disque (à un s donné), une structure verticale doit exister puisque toutes les variables du problème chutent à zéro à l'extérieur du disque. Si on suppose de surcroît que $u_z = 0$, alors la composante- z de l'équation d'Euler se réduit à un équilibre hydrostatique, cette fois entre le gradient vertical (en z) de pression, et la composante dans la direction z de la force gravitationnelle:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{GM_*}{r^2} \frac{z}{r} = \frac{GM_* z}{(s^2 + z^2)^{3/2}} , \quad (4.17)$$

où le terme z/r représente la projection de la force gravitationnelle dans la direction z , et la seconde égalité résulte du fait que $r^2 = s^2 + z^2$. La Figure 4.5 illustre cette géométrie. Si le

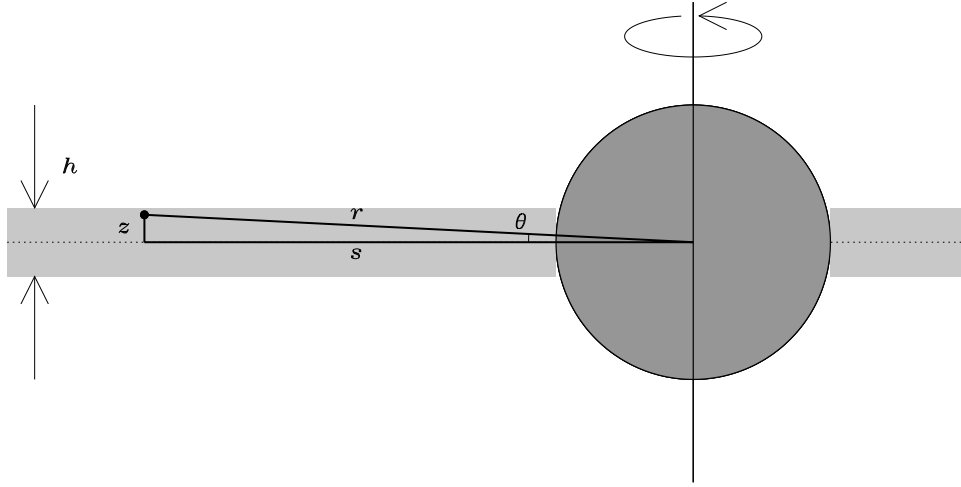


Figure 4.5: Géométrie du disque mince, qui ici n'est pas particulièrement mince afin de pouvoir bien illustrer cette géométrie. Les rayons cylindrique s et sphérique r d'un élément de fluide situé à une hauteur z dans le disque sous-tendent un angle $\theta = \arcsin(z/r) \simeq z/r$ puisque $z/r \ll 1$ par rapport au centre du système.

disque est géométriquement mince, dans le sens $h \ll s$ jusqu'au point de contact avec la surface de l'étoile centrale, alors on peut approximer le gradient de pression par $\partial p / \partial z \simeq p/h$, où h est l'épaisseur du disque. L'expression ci-dessus devient

$$\frac{p}{\rho h} \simeq \frac{GM_* z}{s^3}, \quad (4.18)$$

où on a approximé $s^2 + z^2 \simeq s^2$ puisque $z \leq h \ll s$. En posant $z \simeq h$ on obtient:

$$\left(\frac{h}{s}\right)^2 = \frac{sp}{GM_* \rho} \ll 1, \quad (4.19)$$

l'inégalité résultant du fait qu'on considère ici un disque géométriquement mince. Revenons maintenant à la composante- s de l'équation de Navier–Stokes (éq. (4.8) ci-dessus), et calculons le rapport dimensionnel des deux premiers termes au membre de droite:

$$\frac{[\rho^{-1} \partial p / \partial s]}{[GM/s^2]} \equiv \frac{sp}{GM_* \rho}, \quad (4.20)$$

ce qui est identique au membre de droite de l'éq. (4.19)! On en conclut que si un disque est géométriquement mince, dans l'équation de la dynamique radiale on peut légitimement négliger le terme en gradient de pression, puisque ce dernier est plus petit que le terme gravitationnel par un facteur $h^2/s^2 \ll 1$. Autrement dit, non seulement un disque mince peut être dynamiquement “froid”, en fait il *doit* être froid. Tout colle... c'est bôôô...

Fin de la parenthèse, revenons à nos moutons...

4.3.3 Le taux d'accrétion

Dans le contexte d'un disque mince, il est possible d'intégrer la densité sur la hauteur du disque, et exprimer les équations fluides en terme de la *densité surfacique* (σ):

$$\sigma = \int_{-h/2}^{+h/2} \rho dz, \quad [\text{kg m}^{-2}]. \quad (4.21)$$

mais ça ne change vraiment pas grand chose à la formulation du modèle, puisque pour une densité constante dans le disque on aurait $\sigma = \rho h$, et la distribution verticale de la masse dans le disque n'affecte en rien le moment d'inertie d'un anneau de fluide par rapport à son axe de symétrie.

Similairement, notre solution de la section précédente pour \mathbf{u} est invariante en z (sur l'épaisseur du disque) et axisymétrique; donc on peut intégrer la quantité entre parenthèses carrées dans les éqs. (4.15) et (4.16) de $z = -h/2$ à $+h/2$ et de 0 à 2π en ϕ ; ceci fera donc apparaître un facteur $2\pi h$, et on aura alors:

$$2\pi sh \rho u_s = -\dot{M} , \quad (4.22)$$

$$2\pi sh \left(\rho u_s s^2 \Omega - \mu s^2 \frac{\partial \Omega}{\partial s} \right) = -\dot{J} , \quad (4.23)$$

les deux constantes au coté droit étant maintenant les taux d'accrétion de masse (\dot{M}) et de moment cinétique (\dot{J}) sur l'étoile centrale. Les deux signes “-” aux cotés droits de ces expressions sont ajoutés “à bras” afin que les taux d'accrétion soient positifs quand u_s est négatif. Au point de contact du disque avec l'étoile, la vitesse angulaire du plasma doit passer de sa valeur au bord interne du disque à celle de la photosphère. Pour un disque Keplerien la première sera beaucoup plus grande que la seconde, donc il doit exister un point, $s \simeq R_*$, où $\partial \Omega / \partial s = 0$; mais comme \dot{J} est une quantité conservée dans le disque, l'évaluation de l'éq. (4.23) là où $\partial \Omega / \partial s = 0$ nous donne immédiatement la valeur de \dot{J} :

$$-\dot{J} = 2\pi h \rho u_s R_*^3 \Omega(R_*) , \quad (4.24)$$

où on a supposé que la transition du profil Keplerien à la surface de l'étoile se produit effectivement à la surface de cette dernière. Substituant ceci dans l'éq. (4.23), et utilisant encore une fois (4.22) pour exprimer ρu_s en terme de \dot{M} , on obtient:

$$-\dot{M} s^2 \Omega - 2\pi h \mu s^3 \frac{\partial \Omega}{\partial s} = -\dot{M} R_*^2 \Omega(R_*) , \quad (4.25)$$

Il s'agit maintenant de substituer le profil Keplerien pour la vitesse angulaire (eq. (4.3)), ce qui après un peu d'algèbre (faites-le!) conduit éventuellement à

$$\boxed{\mu h = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left(1 - \sqrt{\frac{R_*}{s}} \right)} . \quad (4.26)$$

Ceci est un résultat remarquable à bien des points de vues; non le moindre étant le fait que le taux d'accrétion \dot{M} ne dépend *pas* de la masse de l'étoile centrale! Le taux d'accrétion de masse se retrouve en fait entièrement déterminé par la viscosité du disque; en y réfléchissant un peu, c'est en fait normal. On a déjà vu que dans un disque Keplerien, la gravité est équilibrée par la force centrifuge. Donc, si la viscosité ralentit un peu un anneau de fluide, cet équilibre est rompu, la gravité l'emporte, et l'anneau se contracte donc vers l'étoile centrale, i.e., un écoulement radial est produit. La vitesse de cet écoulement vers l'étoile est donc entièrement *contrôlée* par le taux auquel la viscosité peut transporter le moment cinétique vers la périphérie du disque.

4.3.4 Énergétique et Rayonnement

Les disques d'accrétion représentent donc un de ces rares exemples en astrophysique où la viscosité joue un rôle essentiel. Ce rôle ne se limite pas à la dynamique zonale; l'énergie dissipée par la viscosité dans le disque est sa principale source d'énergie thermique, et ultimement détermine donc la luminosité radiative du disque. Un petit tour à l'Annexe B révèle qu'en

coordonnées cylindriques avec l'écoulement dominé par sa composante ϕ , i.e., $\mathbf{u} \simeq s\Omega(s)\hat{\mathbf{e}}_\phi$, la fonction de dissipation visqueuse prend la forme:

$$\Phi_\nu = \mu s^2 \left(\frac{\partial\Omega}{\partial s} \right)^2. \quad (4.27)$$

Dans un état stationnaire l'énergie émise par unité de surface du disque doit correspondre à l'intégrale de Φ_ν sur l'épaisseur du disque:

$$-\dot{E} = \int \mu s^2 \left(\frac{\partial\Omega}{\partial s} \right)^2 dz = \mu h s^2 \left(\frac{\partial\Omega}{\partial s} \right)^2. \quad (4.28)$$

où le signe “-” est encore une fois introduit à bras pour indiquer que le disque perd ici de l'énergie même si le membre de droite est positif. Pour un profil Keplérien, le cisaillement zonal est donné par l'éq. (4.5); substituant ceci dans l'expression ci-dessus, et utilisant l'éq. (4.26) pour remplacer μh , on obtient

$$-\dot{E} = \frac{3GM_*\dot{M}}{4\pi s^3} \left(1 - \sqrt{\frac{R_*}{s}} \right). \quad (4.29)$$

La luminosité totale du disque d'accrétion est finalement obtenue en intégrant cette expression sur la surface du disque:

$$L = \int_0^{2\pi} \int_{R_*}^{R_d} (-\dot{E}) s ds d\phi = \frac{3GM_*\dot{M}}{2} \left[-\left(\frac{1}{R_d} - \frac{1}{R_*} \right) + \frac{2R_*^{1/2}}{3} \left(\frac{1}{R_d^{3/2}} - \frac{1}{R_*^{3/2}} \right) \right], \quad (4.30)$$

où l'on a supposé que le disque s'étend jusqu'à une distance radiale R_d ; dans une situation (astrophysiquement très raisonnable) où $R_d \gg R_*$, cette expression se réduit à:

$$L = \frac{GM_*\dot{M}}{2R_*}. \quad (4.31)$$

Ceci est encore une fois un résultat absolument remarquable. La quantité $-GM_*/R_*$ est l'énergie potentielle gravitationnelle à la surface de l'étoile centrale, soit l'énergie potentielle “finale” du gaz accrété; l'éq. (4.31) indique que la moitié de cette énergie est effectivement dissipée dans le disque. Il peut paraître surprenant à prime abord que cette expression ne dépende ni de l'épaisseur du disque, ni de son profil de densité $\varrho(s)$, ni même de sa viscosité, qui est pourtant l'agent ultimement responsable de la luminosité; il faut cependant ne pas perdre de vue que ces quantités sont effectivement incorporées dans le taux d'accrétion \dot{M} , via l'éq. (4.26).

L'autre moitié de l'énergie potentielle gravitationnelle libérée sert à accélérer la vitesse zonale du plasma, selon l'orbite Keplérienne. Cette énergie cinétique est ultimement dissipée, encore une fois par la viscosité, au point de contact entre le disque et l'étoile, marquant la finale du processus d'accrétion depuis l'infini. Pour un disque Keplérien s'étendant jusqu'à la surface de l'étoile centrale, on aura un très fort cisaillement rotationnel à $s \simeq R_*$, et donc un taux de dissipation visqueuse très élevé (en vertu de l'éq. (4.27)), concentré en un anneau très mince en latitude et coïncidant avec l'équateur. On s'attend donc à ce que ce chauffage spatialement très localisé conduise à une émission radiative importante aux courtes longueurs d'onde.

Mais l'important dans tout ça, c'est que l'équation (4.31) permette de déterminer le taux d'accrétion d'un disque en fonction de sa luminosité, cette dernière quantité étant en principe mesurable. “En principe”, car il faut s'assurer de pouvoir bien soustraire la luminosité de l'étoile centrale, son absorption/re-émission à la surface du disque, et l'émission associée au chauffage dans la couche limite où le disque se connecte à l'étoile, le cas échéant (on verra plus loin ce qui pourrait être échéant...)

Supposons que toute l'énergie dissipée par la viscosité est ultimement émise à la surface du disque sous la forme d'un rayonnement de type corps noir; on peut alors définir une température

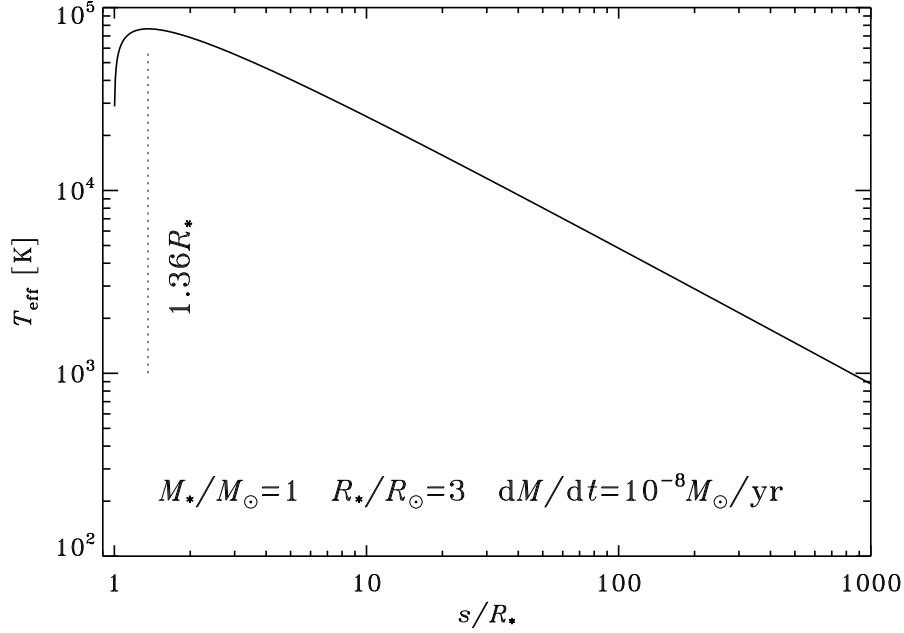


Figure 4.6: Variation de la température de surface dans un disque Keplérien, tel que décrit par l'éq. (4.34). On a supposé ici des valeurs de paramètres correspondant à une étoile TTauri “classique”, soit $M_*/M_\odot = 1$, $R_*/R_\odot = 3$, et $\dot{M} = 10^{-8} M_\odot \text{ yr}^{-1}$. Si l'étoile est de type spectral K7 ($T_{\text{eff}} \simeq 3900 \text{ K}$, typique des TTauri), la température du disque demeure supérieure à celle de l'étoile jusqu'à plusieurs dizaines de rayons stellaires.

effective T_{eff} telle que

$$2\sigma T_{\text{eff}}^4 = \int \Phi_\nu dz = \mu h s^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial s} \right)^2. \quad (4.32)$$

où le facteur 2 au membre de gauche capture le fait que le disque irradie de ses deux surfaces, à $z = \pm h/2$ (voir Fig. 4.4). Notez bien, ceci revient à dire que le disque est optiquement épais, même dans sa dimension verticale, où le disque est pourtant géométriquement “mince”! Substituant le profil Keplérien au membre de droite de l'expression ci-dessus, on arrive à:

$$T_{\text{eff}}^4(s) = \frac{9\mu h G M_*}{8\sigma s^3}. \quad (4.33)$$

Sous substitution de l'éq. (4.26), ceci devient:

$$T_{\text{eff}}^4(s) = \frac{3GM_*\dot{M}}{8\pi\sigma s^3} \left(1 - \sqrt{\frac{R_*}{s}} \right). \quad (4.34)$$

Cette expression indique que la température de surface du disque est entièrement déterminée par le taux d'accrétion de masse. La Figure 4.6 montre le profil de température effective prédit par l'éq. (4.34) dans le cas d'une étoile de pré-séquence “typique” de la variété TTauri, ayant $M_*/M_\odot = 1$, $R_*/R_\odot = 3$, et un taux d'accrétion $\dot{M} = 10^{-8} M_\odot \text{ yr}^{-1}$. Je vous laisse vérifier que la température maximale du disque est

$$T_{\text{max}} = 0.488 \left(\frac{3GM_*\dot{M}}{8\pi\sigma R_*^3} \right)^{1/4}, \quad (4.35)$$

à un rayon $s/R_* = 1.36$, tel qu'indiqué par le segment pointillé sur la Figure 4.6. La température dans les régions rapprochées du disque peuvent dépasser 10^4 K ici, ce qui suggère que la luminosité observée du disque puisse dépasser celle de l'étoile centrale, à moins que le système soit observé par la tranche, ou pas loin. La chute rapide de la température vers zéro tout près de la surface de l'étoile ($s/R_* \rightarrow 1$) résulte d'une petite incohérence dans la démarche suivie pour arriver à l'éq. (4.34); on a en effet utilisé l'éq. (4.26) pour remplacer la viscosité par le taux de perte de masse, cette dernière expression résultant d'une évaluation du taux de perte de moment cinétique \dot{J} , soit l'éq. (4.24), qui suppose que le profil de rotation varie de manière discontinue exactement à $s = R_*$, ce qui n'est pas physiquement réaliste.

Malgré tout, ceci indique donc que la température de surface est maximale près du bord intérieur du disque, et décroît par la suite avec la distance, ce qui est raisonnable car le cisaillement, et donc la dissipation visqueuse, décroît également avec la distance (cf. éq. 4.5). Loin dans le disque, soit $s \gg R_*$, l'éq. (4.34) se réduit à

$$T_{\text{eff}}(s) = \left(\frac{3GM_*\dot{M}}{8\pi\sigma} \right)^{1/4} s^{-3/4}. \quad (4.36)$$

L'énergie irradiée par un anneau circulaire de rayon s et épaisseur radiale ds dans le disque est alors donnée par

$$L_\nu d\nu \propto T_{\text{eff}}^4 s ds \propto \frac{ds}{s^2}, \quad [\text{J s}^{-1}]. \quad (4.37)$$

où ν est la fréquence de la radiation électromagnétique émise. On suppose maintenant que toute l'énergie irradiée est émise sous la forme de photons au pic du spectre du corps noir; la Loi de Wien nous informe que $\nu \propto T_{\text{eff}}$, et on a alors $s \propto \nu^{-4/3}$ selon l'éq. (4.33), et donc $s^{-2} ds \propto \nu^{1/3}$; d'où:

$$\nu L_\nu \propto \nu^{4/3}, \quad (4.38)$$

soit un spectre en loi de puissance. Cette expression diverge (i.e. $\rightarrow \infty$) dans la limite des très hautes fréquences, mais on ne s'attend pas à ce que l'éq. (4.38) tienne jusque là de toute façon, car en plus du fait que l'approximation $s \gg R_*$ nous lâche, il faut aussi prendre en considération que:

1. le disque atteint sa température maximale à $s/R_* = 1.36$ (cf. éq. (4.35), ce qui impose une coupure à hautes fréquences;
2. près de l'étoile centrale le flux radiatif de cette dernière peut chauffer la partie intérieure du disque, affectant son spectre;
3. à $s = R_*$, on s'attend à un chauffage localisé intense suite à l'action de la dissipation visqueuse au point de contact entre le disque et l'étoile.
4. le disque, étant optiquement épais, peut éclipser l'étoile en partie ou même en totalité, dépendant de son inclinaison par rapport à la ligne de visée. Dans un tel cas il faut aussi considérer la réflexion du spectre de l'étoile sur le disque (comme sur la Fig. 4.2).

Gardant donc bien en tête tous ces bémols, la Figure 4.7 montre un tel spectre (trait en tirets), avec celui d'un corp noir à $T_{\text{eff}} = 3900$ K correspondant à l'émission radiative d'une étoile centrale de type spectral K7 (trait plein). Cette température, et la luminosité du disque, sont caractéristiques des étoiles TTauri de la pré-séquence principale. Ici le continu stellaire domine dans le visible, mais déjà dans l'infrarouge rapproché le disque apporte une contribution significative, et domine le spectre pour les longueurs d'onde $\lambda \gtrsim 5000$ nm. Rappelez-vous que le spectre d'un corp noir est donné par

$$B_\lambda(T_{\text{eff}}) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/kT_{\text{eff}}\lambda) - 1}; \quad (4.39)$$

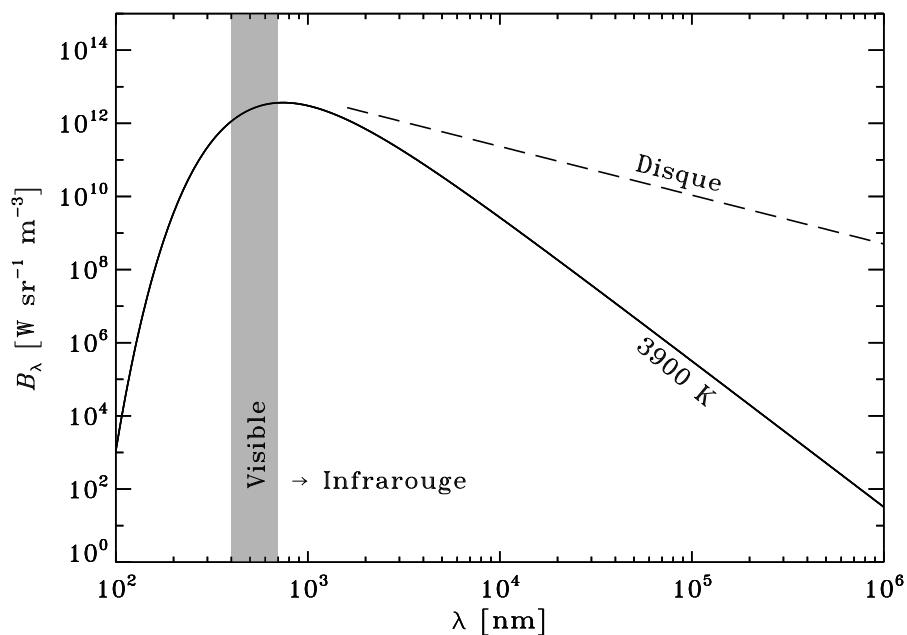


Figure 4.7: Rayonnement corp noir pour un système étoile+disque avec des paramètres typiques d'une étoile TTauri. L'étoile est représentée par un corps noir de $T_{\text{eff}} = 3900 \text{ K}$ (trait plein), tandis que l'émission en $\lambda^{-4/3}$ du disque est indiquée par le trait en tiret. L'émission du disque domine largement dans l'infrarouge moyen et lointain, et apporte une contribution significative même dans l'infrarouge rapproché.

dans la limite $h/(\lambda k T_{\text{eff}}) \ll 1$, ce spectre chute en $1/\lambda^4$, ce qui est beaucoup plus rapide que la chute en $1/\lambda^{4/3}$ du spectre du disque, rendant inévitable la dominance du spectre du disque aux grandes longueur d'onde.

Les spectres d'étoile TTauri ressemblent rarement à la Fig. 4.7, pour toutes sortes de raisons, dont celles déjà énumérées précédemment; mais un excès infrarouge est pratiquement toujours présent, et de manière plus générale est maintenant considéré comme l'indicateur le plus fiable de la présence d'un disque d'accrétion (ou protoplanétaire) autour des étoiles jeunes. La Figure 4.8 en montre quelques exemples pour des étoiles TTauri. Il a été suggéré que l'excès de luminosité dans le visible et ultraviolet, comme ici pour BP Tau et CY Tau, est associé à l'émission provenant de l'anneau équatorial où le disque prend contact avec l'étoile. Sa surface émettrice est très petite, mais une grande quantité d'énergie y est libérée, $\sim GM_* \dot{M} / 2R_*$ comme on l'a vu précédemment; on peut donc s'attendre à de très hautes températures, et donc une contribution spectrale aux courtes longueurs d'onde. Dans bien des TTauri, comme celles sur la Figure 4.8, la pente du spectre infrarouge devient un peu plus faible que $-4/3$ dans l'infrarouge moyen, et se raidit ensuite notablement dans l'infrarouge lointain. Cette dernière tendance est attribuée au passage au régime optiquement mince, tandis que la première est probablement causée par une variation systématique de la viscosité en fonction de la structure du disque. N'empêche qu'en bout de ligne, tout ça ressemble pas mal à la Figure 4.7!

4.4 Instabilités hydrodynamiques

Le modèle du disque mince semble finalement être un assez bon modèle, compte tenu du grand nombre de simplifications et hypothèses plus ou moins douteuses introduites au fil de la §4.3.

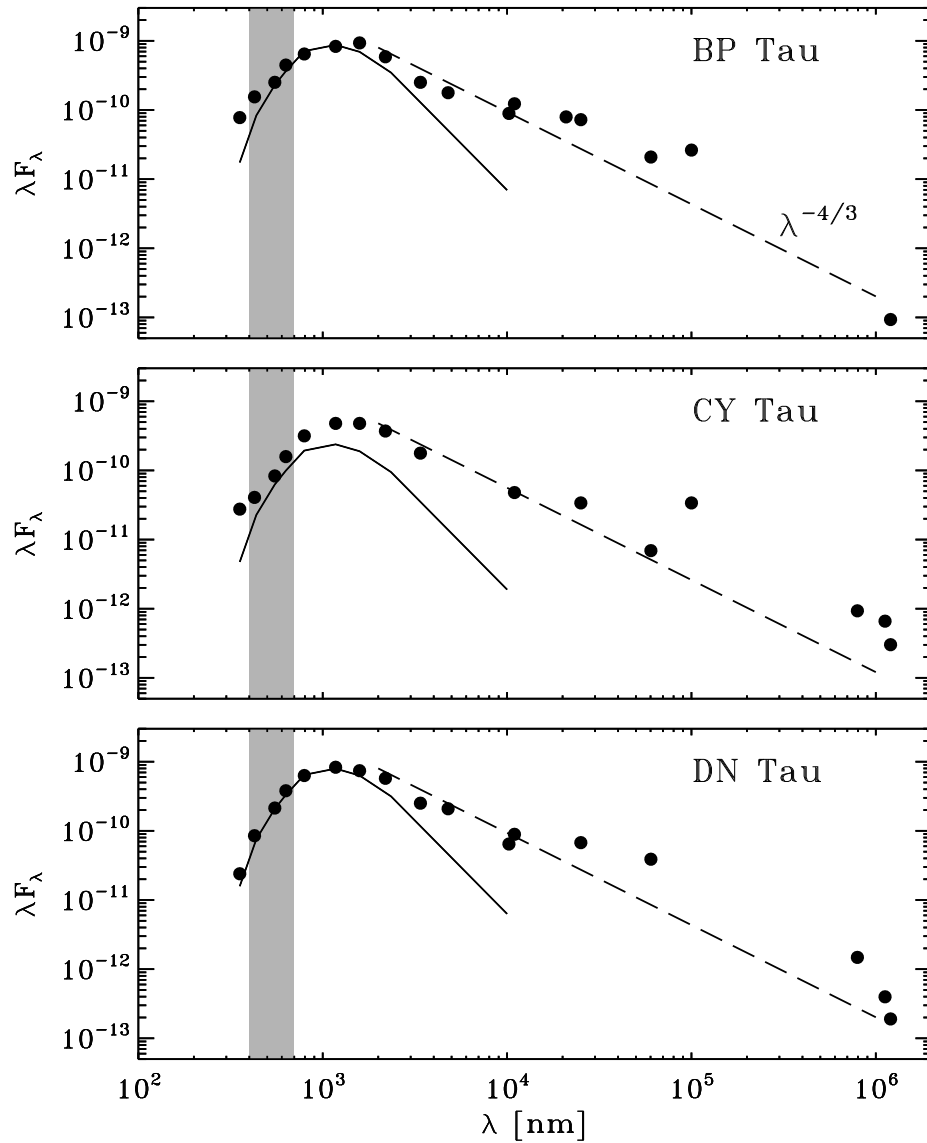


Figure 4.8: Observations infrarouge (points noirs) de trois étoiles TTauri dans la constellation du Taureau. Le trait plein représente la distribution de flux observée pour une “jumelle” de type spectral K7-M0 (plus spécifiquement, la WTTs LkCa7), qui ne montre aucun signe d’accrétion. La droite en tirets est une loi de puissance en $\lambda^{-4/3}$. Figure produite à partir des données présentées dans Kenyon & Hartmann, *ApJS* **101**, 117–171 (1995), et très fortement inspirée de la Fig. 6.2 du bouquin de Lee Hartmann cité en bibliographie en fin de chapitre.

Mais en fait, caché dans tout ça il y a un problème majeur. Il existe bien des types de disques d'accrétion autour de bien des types d'objets astrophysiques, et il est rarement facile de mesurer (ou calculer) de manière fiable les conditions physiques (densité, température, etc.) dans ces disques. Cependant, quelle que soit la nature de ces déterminations, la viscosité se retrouve toujours à un niveau qui conduit à des taux d'accrétion absolument minuscules par rapport aux taux déterminés observationnellement.

Si on estime la viscosité microscopique par le produit du libre parcours moyen et de la vitesse thermique du plasma on trouve ce coefficient de viscosité cinématique du genre $\nu \sim 10^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Le temps de dissipation visqueuse, qui contrôle le temps d'établissement du profil képlérien, est de l'ordre de $\tau_\nu \sim R_*^2/\nu \sim 10^{22} \text{ s} \sim 3 \times 10^{14} \text{ yr}$, pas mal plus long que l'âge de l'univers, et un solide 7–8 ordres de grandeur plus long que le temps de vie observé chez les disques autour d'étoiles de la pré-séquence principale. De plus, pour un disque TTauri “typique” d'épaisseur $h \sim 10^8 \text{ m}$ et $\rho \sim 10^{-4} \text{ kg m}^{-3}$ à quelques R_* de l'étoile centrale, l'équation (4.26) donne $\dot{M} \sim 10^6 \text{ kg s}^{-1} \sim 10^{-17} M_\odot \text{ yr}^{-1}$, ce qui est minuscule en comparaison aux taux d'accrétion $\dot{M} \sim 10^{-9} \text{—} 10^{-6} M_\odot \text{ yr}^{-1}$ estimés via la luminosité des disques TTauri. Et si l'on répète l'exercice pour un disque d'accrétion autour d'un trou noir supermassif, on se retrouve plus de dix ordres de grandeur sous les luminosités des noyaux de galaxie actives.

4.4.1 L'hypothèse de Shakura-Sunyaev

Une solution “facile” est d'invoquer l'existence de turbulence au niveau du disque, produisant des coefficients de dissipation turbulente beaucoup plus élevés que les valeurs microscopiques, et conduisant ainsi à des taux d'accrétion plus raisonnables. Il est toujours “facile” de tirer de son chapeau des vitesses et longueurs caractéristiques, u_T et ℓ , et de construire un coefficient de viscosité turbulente selon la recette classique discutée à la §1.5.6:

$$\nu_T = \ell \times u_T ; \quad (4.40)$$

La théorie de Kolmogorov indique que les plus grands tourbillons contribuent le plus au transport, donc il serait tentant —et justifiable— d'utiliser l'épaisseur h du disque comme valeur de ℓ ; le calcul de u_T est vraiment le noeud du problème ici. Le modèle dit de Shakura-Sunyaev suppose que la turbulence dans le disque est subsonique, et introduit une simple relation linéaire entre la vitesse turbulente et la vitesse du son:

$$u_T = \alpha c_s , \quad \alpha < 1 . \quad (4.41)$$

Avec l'hypothèse additionnelle $\ell = h$ et un modèle pour la structure thermodynamique du disque, on obtient directement ν_T , et en principe on peut alors bâtir un modèle complet du disque.

Pour un disque à $T \sim 10^4 \text{ K}$ dans ses régions interne (voir Fig. 4.6), on a $c_s \sim 10 \text{ km s}^{-1}$; pour un disque d'épaisseur $\sim 10^8 \text{ m}$, soit $\sim 1\%$ du rayon $R_* \sim 2R_\odot$ pour une TTauri typique, les éqs. (4.40)—(4.41) conduisent alors à

$$\nu_T \sim 10^{10} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} , \quad (4.42)$$

avec $\alpha = 10^{-2}$, valeur tirée du chapeau de Shakura par Sunyaev (ou le contraire). Il s'agit ici d'une valeur de viscosité turbulente qui, tout en étant définitivement substantielle, n'en est pas pour autant ridiculement élevée au point de ne pas en être physiquement crédible; et qui, via l'éq. (4.26), nous ramène à des taux d'accrétion $\sim 10^{-9} M_\odot \text{ yr}^{-1}$, ce qui commence à ressembler beaucoup plus à ceux déterminés dans les étoiles TTauri.

Le problème est donc repoussé d'un autre cran, et consiste maintenant à identifier le mécanisme physique causant cette turbulence, et en évaluer au moins certaines propriétés statistiques —plus spécifiquement la grandeur de la vitesse turbulente moyenne u_T . Nous devons donc nous tourner vers les diverses instabilités hydrodynamiques et magnétohydrodynamiques pouvant potentiellement déstabiliser le disque képlérien et produire cette turbulence, afin de mieux quantifier tout ça. Il s'avère qu'un très grand nombre de ces instabilités sont de bons candidats potentiels; on en examine quelques-unes des plus prometteuses dans ce qui suit.

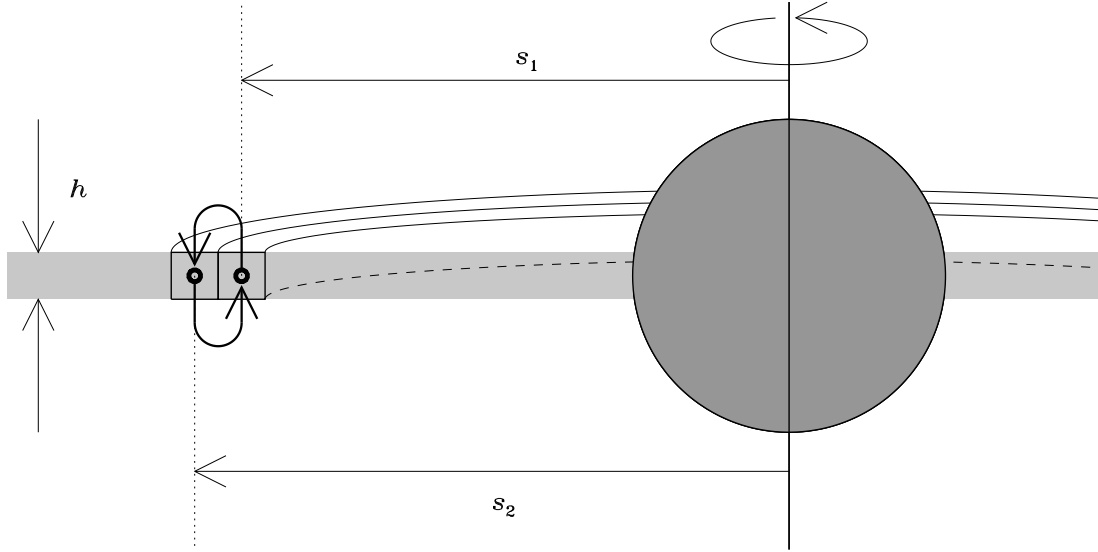


Figure 4.9: Interchange de deux petits tores axisymétriques de fluide initialement situés à des rayons cylindriques s_1 et $s_2 > s_1$. On suppose que les deux tores demeurent axisymétriques et conservent leur moment cinétique durant leur contraction/expansion respectives.

4.4.2 Le critère de Rayleigh

L'énergie cinétique associée au mouvement orbital dans le disque Keplerien offre, potentiellement, un réservoir phénoménal d'énergie pouvant servir à nourrir la turbulence, et il est donc naturel de regarder de ce côté là pour commencer.

Revenons au disque Keplerien pur, qui est caractérisé par un équilibre entre la gravité ($\propto 1/s^2$) et la force centrifuge ($\propto \Omega^2 s$). Considérons maintenant, comme le montre la Fig. 4.9, un mince tore de fluide de rayon s_1 quelquepart dans le disque, et dénotons sa vitesse angulaire par $\Omega(s_1)$. Ce tore est supposé avoir une section beaucoup plus petite que l'épaisseur du disque. Oubliant pour l'instant le théorème de Taylor-Proudman, étirons ce tore radialement, augmentant ainsi son rayon de s_1 à une valeur $s_2 > s_1$, *tout en conservant le moment cinétique du tore de fluide*. La vitesse angulaire du tore devra donc chuter à une valeur

$$\Omega'(s_2) = \Omega(s_1) \left(\frac{s_1}{s_2} \right)^2. \quad (4.43)$$

Partout ailleurs dans le fluide, l'équilibre radial est caractérisé par une gravité chutant en $1/s^2$ et pointant vers l'intérieur du disque, compensée par la force centrifuge qui pointe dans la direction opposée. On en déduit que si la force centrifuge agissant sur le tore déplacé est plus grande que celle caractérisant le fluide à rayon s_2 , on aura une force nette pointant vers l'extérieur, ce qui tendra à amplifier l'étirement du tore. On aura donc instabilité si

$$(\Omega'(s_2))^2 > (\Omega(s_2))^2, \quad [\text{instable}] \quad (4.44)$$

ou encore, faisant bon usage de l'éq. (4.43),

$$\Omega^2(s_1) \left(\frac{s_1}{s_2} \right)^4 > \Omega^2(s_2). \quad (4.45)$$

Notons que la conservation de la masse implique qu'un autre petit tore de fluide initialement à s_2 doit se déplacer à un rayon s_1 pour compenser l'arrivée du tore initialement à s_1 . Cette

fois le déplacement intérieur de ce second tore sera instable si sa force centrifuge à sa nouvelle position est plus petite que la force centrifuge du fluide à s_1 :

$$(\Omega'(s_1))^2 = \Omega^2(s_2) \left(\frac{s_2}{s_1} \right)^4 < \Omega^2(s_1) . \quad (4.46)$$

Ce qui est effectivement identique à l'éq. (4.45). En écrivant $s_1 \rightarrow s$ et $s_2 \rightarrow s_1 + ds$, ces expressions peuvent être exprimées sous la forme équivalente

$$\boxed{\frac{d}{ds} (\Omega^2 s^4) < 0 \quad [\text{instable - Rayleigh}]} . \quad (4.47)$$

C'est le *critère de Rayleigh*. Il nous indique clairement que tout écoulement où le profil de vitesse angulaire augmente avec le rayon cylindrique est inconditionnellement stable, et que seuls les écoulements dont la vitesse angulaire chute plus rapidement que $1/s^2$ peuvent être instables. Dans le cas de notre désormais familier profil képlérien, on a $\Omega = (GM_*/s^3)^{1/2}$, et donc

$$\frac{d}{ds} (\Omega^2 s^4) = \frac{d}{ds} (GM_* s) = GM_* > 0 , \quad (4.48)$$

indiquant que notre disque képlérien est stable par rapport au critère de Rayleigh. C'est bien dommage, car la rotation aurait été un réservoir d'énergie pratiquement inépuisable pour nourrir la turbulence.

4.4.3 La convection

Notre disque mince est caractérisé par une substantielle décroissance de sa température avec le rayon cylindrique (viz. Fig. 4.6), soit dans la direction opposée à la gravité (de l'étoile centrale). Tout modèle semi-raisonnable d'un disque d'accrétion est également caractérisé par une décroissance de la densité avec s , sauf possiblement très près du point de contact avec l'étoile. Ce genre de situation est potentiellement sujet à l'instabilité convective.

De plus, les pertes radiatives à la surface du disque conduiront à un très fort gradient de température dans la direction- z puisque que le disque est supposé très mince. Cette chute de température se fait encore une fois dans la direction opposée à la projection en z de l'accélération gravitationnelle causée par la masse de l'étoile centrale (voir Fig. 4.5). Ceci est donc également sujet à l'instabilité convective, et ce même si cette projection est de très faible amplitude, car le gradient vertical de température est très grand.

Cependant, et malheureusement pour nous ici, dans presque tous les cas étudiés quantitativement l'application du critère de Schwarzschild à des modèles détaillés indique que le disque d'accrétion est convectivement stable, même si le disque mince est optiquement épais. Il faut chercher autre chose.

4.4.4 Instabilité de Kelvin-Helmholtz

Un disque képlérien est caractérisé par de forts cisaillements rotationnels, qui sont potentiellement sujets au développement de l'instabilité dite de Kelvin-Helmholtz. La dynamique de cette instabilité hydrodynamique est illustrée schématiquement à la Figure 4.10. On y a représenté une petite partie du disque, vu du dessus, sous la forme de trajectoires (arcs de cercle) d'éléments de fluide en rotation képlérienne, ici dans le sens antihoraire. L'étoile centrale est quelquepart loin à gauche, et les flèches indiquent la grandeur de la vitesse zonale $u_\phi(s) = s\Omega(s)\hat{e}_\phi \propto s^{-1/2}$.

Considérons deux éléments de fluides contigus situés respectivement à s et $s + ds$, et ayant des vitesses zonales u et $u + du$. L'énergie cinétique par unité de masse de ces deux éléments est:

$$e = \frac{1}{2} ((u + du)^2 + u^2) . \quad (4.49)$$

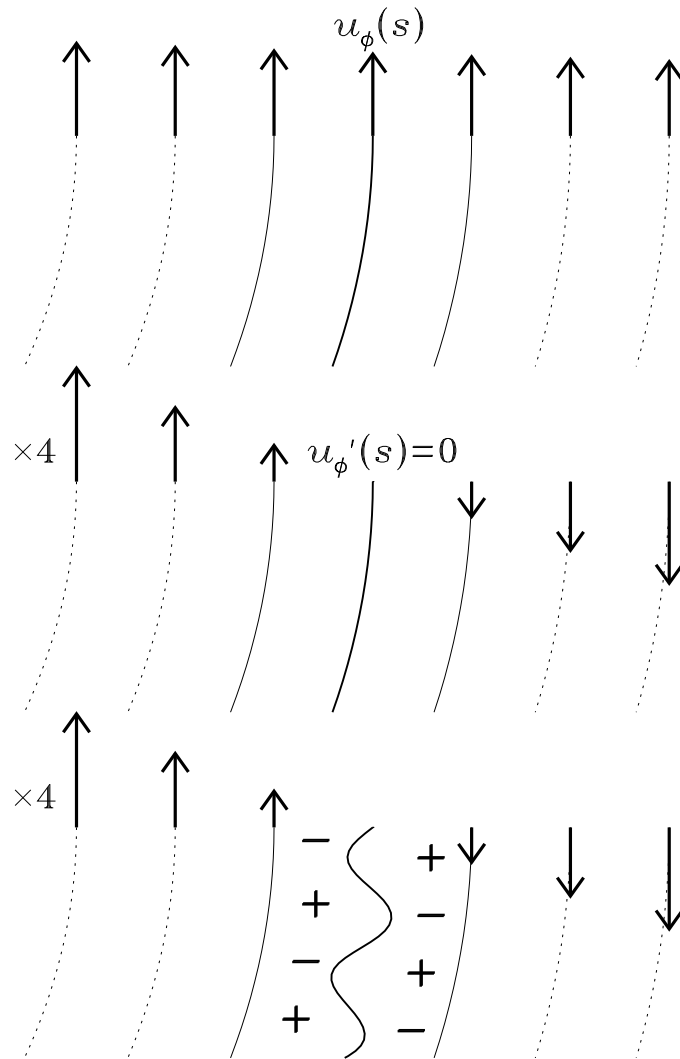


Figure 4.10: Représentation schématique du fonctionnement de l’instabilité de Kelvin-Helmholtz. Chaque panneau représente une petite partie du disque d’accrétion, vu du dessus et avec l’étoile centrale loin vers la gauche. Les arcs de cercles indiquent les trajectoires circulaires d’éléments de fluide situés à des rayons s augmentant de la gauche vers la droite. Les flèches indiquent la grandeur de la vitesse zonale u_ϕ , et les signes “+” et “-” les fluctuations en pression associées à une perturbation harmonique de la trajectoire centrale.

Imaginons maintenant qu'un processus quelconque (mais non-dissipatif) puisse équilibrer la vitesse zonale des deux éléments à une valeur égale à leur moyenne, soit $u + (du/2)$. L'énergie cinétique dans cette nouvelle configuration sera alors:

$$e^* = 2 \times \frac{1}{2} \left(u + \frac{du}{2} \right)^2 . \quad (4.50)$$

Je vous laisse calculer (c'est facile!) que la différence $(\Delta e)_K$ entre la configuration initiale et la configuration "homogénéisée" est

$$(\Delta e)_K \equiv e - e^* = \frac{1}{4}(du)^2 > 0 . \quad (4.51)$$

Autrement dit, peu importe le signe du cisaillement la configuration initiale contient plus d'énergie cinétique que la configuration finale, et on a donc ici un puit d'énergie pouvant potentiellement propulser une instabilité. Il s'agit maintenant d'identifier un processus dynamique permettant de puiser dans ce réservoir d'énergie.

Plaçons nous dans un repère en co-rotation avec la trajectoire Képlérienne de l'anneau de fluide indiqué par un trait plein épais sur le diagramme au haut de la Fig. 4.10. Ceci conduit aux vitesses zonales indiquées sur le diagramme du centre. Dans ce repère, tous les éléments de fluide sur la trajectoire utilisée pour cette transformation se retrouvent donc au repos, i.e., $u'_\phi = 0$. Maintenant on suppose qu'un agent perturbateur induit un déplacement radial de cette trajectoire, avec une dépendance zonale harmonique, i.e., $\propto \sin(2m\pi\phi)$, où m est un entier $\gg 1$. On suppose que l'écoulement perturbé demeure stationnaire, dans le sens que $\partial/\partial t = 0$ dans notre repère en co-rotation.

Imaginons maintenant que les trajectoires tracées sur la Figure agissent comme des murs qui canalisent l'écoulement du plasma dans la direction zonale. Dans le cas des deux canaux délimités par les trois traits plein, la section n'est pas constante en ϕ suite à la déformation de la trajectoire centrale. Pour un écoulement subsonique, la conservation de la masse exige qu'il y ait accélération là où la section diminue, et ralentissement là où elle augmente. Comme la configuration est stationnaire, on peut appliquer le principe de Bernoulli (voir la §1.2.5), qui nous informe que la pression devra augmenter là où la vitesse diminue, et baisser là où elle augmente. Ces variations sont indiquées par des signes "+" et "-" sur le diagramme au bas de la Figure 4.10. Ces variations locales de la pression de chaque côté de la trajectoire déformée conduisent à l'établissement d'un gradient de pression perpendiculaire à cette surface, pointant des "+" vers les "-", donc dans une direction qui tendra à augmenter la déformation de la surface. On a donc ici une situation dynamiquement instable, dont le développement nonlinéaire peut conduire à la turbulence.

Le mécanisme décrit ci-dessus correspond à l'explication conventionnelle de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Sa nature même semble indiquer que son apparition est assurée dans n'importe quel écoulement cisailé, mais ce serait sans compter les mécanismes qui peuvent contrer le développement de l'instabilité. Dans le cas du disque Keplérien, on doit composer avec le fait que le fluide déplacé extérieurement se retrouve dans un milieu de plus basse densité, et inversement pour le fluide déplacé intérieurement. La force de flottaison tendra donc à s'opposer au déplacement. L'énergie $(\Delta e)_B$ requise pour déplacer l'élément de fluide est égale au travail effectué contre la force de flottaison lors d'un déplacement ds :

$$(\Delta e)_B = -g(\Delta \rho) ds \quad (4.52)$$

où $\Delta \rho$ est la différence de densité entre la position finale et initiale de l'élément déplacé. Le signe "-" ici apparaît car la gravité pointe ici dans la direction $-\hat{e}_s$. Si on ignore pour l'instant les effets associés à la compressibilité du milieu, on a simplement $\Delta \rho = (\partial \rho / \partial s) ds$, d'où

$$(\Delta e)_B = -g \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) (ds)^2 \quad (4.53)$$

L'instabilité pourra se développer si cette quantité est inférieure à l'énergie cinétique libérée, tel que calculée plus haut, i.e., $(\Delta e)_B < (\Delta e)_K$, ce qui conduit au *critère de Richardson*:

$$\boxed{-g \frac{(\partial \rho / \partial s)}{(\partial u / \partial s)^2} < \frac{1}{4} \quad [\text{instable} - \text{Kelvin} - \text{Helmholtz}]} \quad (4.54)$$

La quantité au membre de gauche s'appelle le *Nombre de Richardson*, et mesure le rapport de l'influence stabilisatrice (pour $\partial \rho / \partial s < 0$) de la force de flottaison au numérateur, versus l'influence toujours déstabilisatrice du gradient de vitesse au dénominateur.

Si on prend en considération la variation (adiabatique) de densité associée à la compression/dilatation requise pour équilibrer la pression du milieu dans lequel l'élément est déplacé, comme dans la dérivation classique du critère de Schwarzschild, on arrive à un critère semblable, mais en terme du Nombre de Richardson modifié:

$$-\frac{gT}{c_P} \frac{(\partial \rho / \partial T)_P}{(\partial u / \partial s)^2} < \frac{1}{4} \quad [\text{instable}] \quad (4.55)$$

Dans le cas spécifique de notre disque Keplérien, on doit de plus composer avec une autre force de rappel s'opposant au développement de l'instabilité: la force centrifuge, qui comme on l'a vu précédemment a une influence stabilisatrice pour un profil de rotation Keplérien. Une analyse de stabilité formelle (costaude!) produit une relation de dispersion qui dépend du détail de la structure supposée pour le disque, plus spécifiquement des profils radiaux de densité, viscosité et température. Cependant, sous des hypothèses raisonnables les influences stabilisatrices des forces de flottaison et surtout centrifuge se retrouvent à empêcher le développement de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Il faut trouver autre chose.

4.5 Les disques magnétisés

Bon, ça va vraiment mal, pas moyen de trouver une instabilité hydrodynamique convaincante pour justifier un transport turbulent du moment cinétique dans notre modèle de disque d'accrétion. Il s'agit donc maintenant d'adopter une approche trop longtemps classique en astrophysique: quand toutes les autres options possibles ne marchent pas, on invoque la présence d'un champ magnétique... Ici l'hypothèse est loin d'être gratuite, car la conservation du flux magnétique indique qu'une étoile formée par la contraction d'un nuage même très faiblement magnétisé devrait se retrouver avec un champ magnétique des plus substantiels, et ce déjà sur la pré-séquence principale (cf. §2.7).

Déjà à quelques rayons stellaires de l'étoile, on s'attendrait (un peu naïvement) à ce que la composante dipolaire du champ magnétique domine, et raison de la décroissance très rapide ($\propto l^{-(n+1)}$) des multipôles d'ordres l (et m) plus élevés. Aux fins de ce qui suit, on suppose que le champ magnétique stellaire peut être décrit comme un pur dipôle, de surcroît aligné à l'axe de rotation de l'étoile centrale, comme on l'observe dans le soleil. La Figure 4.11 illustre une telle configuration, pour laquelle les lignes de champ magnétique se retrouvent à traverser perpendiculairement le disque d'accrétion. Autrement dit, dans le disque (mince!) on peut écrire:

$$\mathbf{B} \simeq -B_* \left(\frac{R_*}{s} \right)^3 \hat{\mathbf{e}}_z . \quad (4.56)$$

où B_* est une mesure de l'intensité du champ magnétique à la surface de l'étoile. On a déjà vu que la dissipation visqueuse peut conduire à des températures substantielles dans le disque d'accrétion (viz. Fig. 4.6). On en concluerait que la fraction d'ionisation doit y demeurer significative facilement jusqu'à $\sim 10^2 R_*$, et donc que la conductivité électrique demeurera tout aussi significative. On peut donc s'attendre à ce que le théorème d'Alfvén s'applique, et que les lignes de champ soient effectivement gelées dans le plasma.

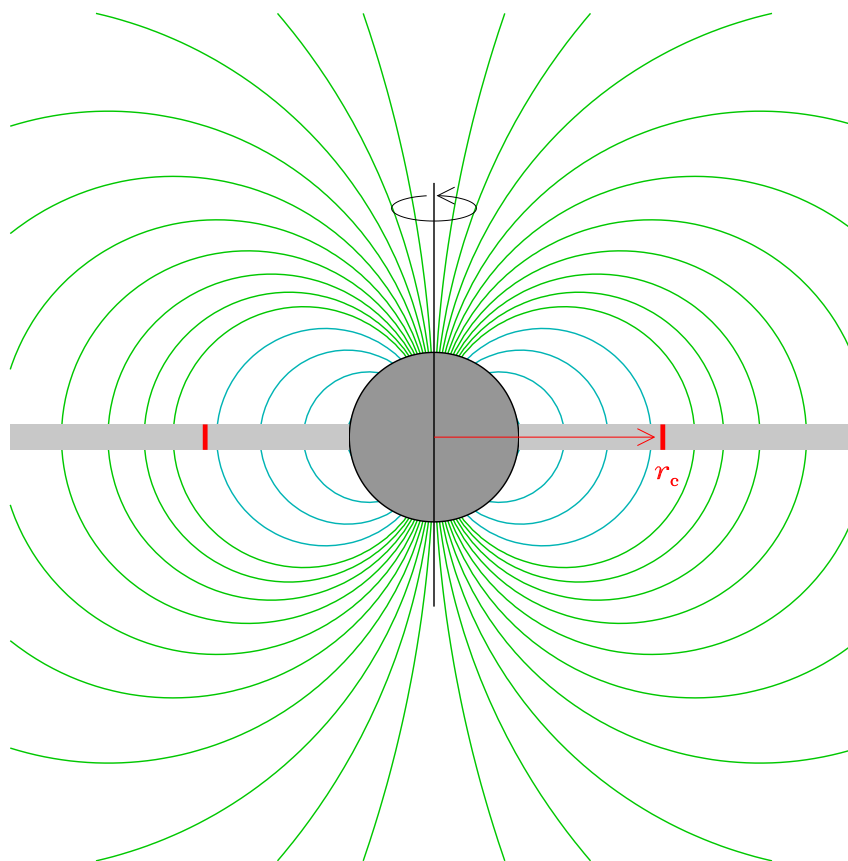


Figure 4.11: Couplage magnétique entre une étoile et son disque circumstellaire. On suppose que le champ magnétique stellaire a la forme d’un dipôle aligné à l’axe de rotation. Pour un disque mince, dans le sens $h \ll R_*$, les lignes de champ magnétique traversent le disque perpendiculairement à son plan. Les lignes de champ magnétique en bleu le font à l’intérieur du rayon de co-rotation (traits rouges), tandis que celles en vert le traversent au delà de ce rayon. La région extérieure au disque et à l’étoile centrale est souvent appelée magnétosphère.

La présence d’un champ magnétique traversant le disque a de nombreuses conséquences dynamiquement importantes, non la moindre étant qu’il peut déstabiliser un profil de rotation képlérien autrement stable selon le critère de Rayleigh de la §4.4.2. Examinons de plus près cette instabilité magnétorotationnelle.

4.5.1 L’instabilité magnétorotationnelle, dite “de Balbus-Hawley”

L’instabilité magnétorotationnelle dont il est question ici a été identifiée il y a déjà plus d’un demi-siècle par Chandrasekhar dans son tome traitant d’instabilités hydrodynamiques et magnétohydrodynamiques (cité en bibliographie à la fin de ce chapitre). Ce sont cependant les travaux beaucoup plus récents de Steve Balbus et John Hawley qui ont établi son importance dans le contexte des disques d’accrétion, d’où l’appellation “instabilité de Balbus-Hawley” qui lui est maintenant communément attachée.

Le fonctionnement de cette instabilité est illustré de manière schématique à la Figure 4.12. La colonne de gauche montre une séquence temporelle (du haut vers le bas) d’une petite portion du disque vu par la tranche, tandis que la colonne de droite montre la même séquence vue du dessus. Dans les deux cas l’étoile centrale est quelquepart loin à gauche.

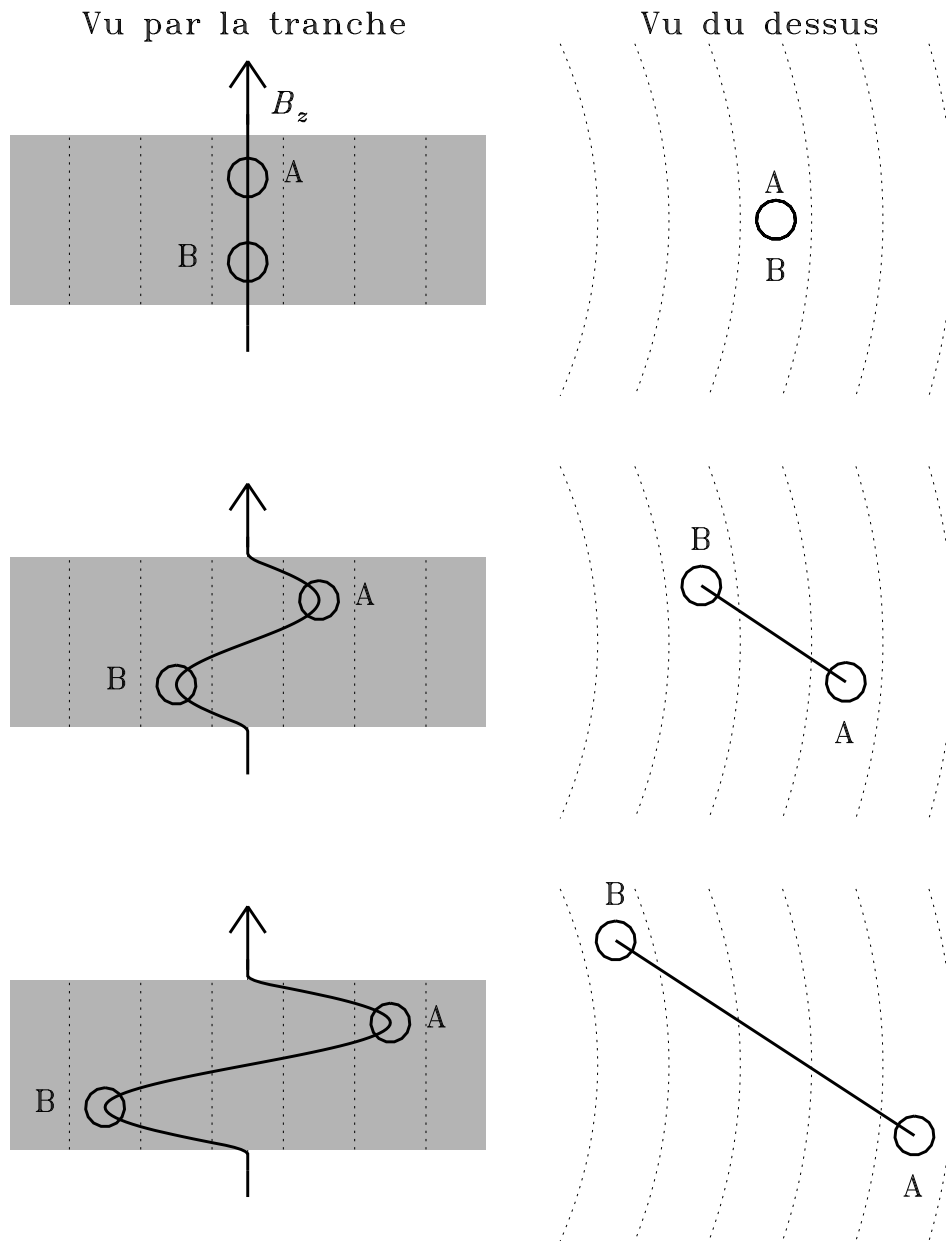


Figure 4.12: Représentation schématique du fonctionnement de l'instabilité magnérorotationnelle, dite de Balbus-Hawley. La colonne de droite montre une petite portion du disque vu par la tranche, celle de gauche du dessus, l'étoile centrale étant loin vers la gauche dans les deux cas. Les trois rangées montrent le déplacement instable de deux petits éléments de fluide, A et B, situés sur la même ligne de champ magnétique traversant le disque initialement verticalement. Les traits pointillés indiquent des surfaces $s = \text{constante}$, et le trait épais la projection d'une ligne de champ magnétique dans le plan $[s, z]$ (colonne de droite) et $[s, \phi]$ (colonne de gauche).

La première paire de schémas au haut de la Figure montre deux petits éléments de fluide, identifiés par A et B, situés sur la même ligne de champ magnétique traversant verticalement le fluide (sur le schéma de droite les deux éléments de fluides sont indistingables car superposés). Supposons maintenant que les deux éléments sont déplacés à des rayons légèrement plus grand (élément A) et petit (B) que leur positions initiales, comme le montre la paire centrale de schémas. Le champ magnétique subira une déformation verticale, comme l'illustre le schéma de gauche, mais sera aussi étiré dans la direction longitudinale en raison du fait que l'élément B à plus faible s est maintenant entraîné à une vitesse angulaire plus grande que l'élément A, puisque dans un profil Keplérien la vitesse angulaire décroît en $s^{-3/2}$ avec le rayon cylindrique. Cependant, la force de tension magnétique agit comme un "élastique" qui tendra à ralentir B et accélérer A; le premier se retrouvera donc à tourner plus lentement que le reste du fluide dans son anneau, et inversement pour le second. L'élément A ressentira donc un excès de force centrifuge (par rapport au profil Képlérien), et B un déficit, et se retrouveront donc en déséquilibre vis-à-vis la force gravitationnelle. Par conséquent, A tendra à se déplacer à un rayon encore plus grand, et B vers un rayon encore plus petit, comme l'illustre la paire de schémas du bas. Mais ces déplacements déforment encore plus la ligne de champ, conduisant à une augmentation de la force de tension magnétique, qui tendra maintenant encore plus à décélérer B et accélérer A. On se retrouve ici clairement en présence d'une situation instable, où une petite perturbation tend à être amplifiée par la réaction dynamique du système.

Existe-t-il d'autres forces de rappel qui pourraient stabiliser ce système? La déstabilisation est associée à la composante ϕ de la tension magnétique, mais en y réfléchissant un peu on réalise rapidement que la tension magnétique tend aussi à résister à la déformation dans la direction- s , tout comme elle le fait dans la direction ϕ . La tension magnétique est donc déstabilisatrice dans la dynamique zonale, mais stabilisatrice dans la dynamique radiale. Lequel des deux l'emportera? La réponse dépend de l'intensité du champ magnétique initial: dans un disque fortement magnétisé, la tension magnétique empêche tout déplacement radial, et donc étouffe l'instabilité avant même qu'elle ne puisse se mettre en branle. Pour un champ de faible magnitude, par contre, une forte composante zonale peut être induite sans que la composante s de la tension devienne importante. Ce sont donc les champs magnétiques *faibles* qui peuvent être sujets à cette instabilité.

La valeur critique de ce champ peut être estimée très grossièrement de la manière suivante. Dans la direction radiale, l'action de la composante radiale de la tension magnétique conduit à une forme d'onde d'Alfvén se propageant verticalement dans le disque. On estimera donc le temps de réaction de la dynamique radiale par le temps d'Alfvén basé sur l'épaisseur h du disque:

$$\tau_A \simeq \frac{h}{u_A} = h \frac{\sqrt{\mu_0 \varrho}}{B_z}; \quad (4.57)$$

Le temps caractéristique pour la dynamique zonale, lui, est directement relié à l'étirement de la ligne de champ magnétique par le cisaillement rotationnel, soit le même processus étudié dans un contexte stellaire à la §2.4. Un temps caractéristique τ_Ω associé à un cisaillement $\partial\Omega/\partial s$ à une distance s de l'axe du disque peut être construit selon:

$$\tau_\Omega \simeq \left(s \frac{\partial\Omega}{\partial s} \right)^{-1} \simeq \Omega^{-1} \quad (4.58)$$

où la dernière égalité approximative tient pour un disque de type Keplérien. On aura donc instabilité si ce temps est plus court que le temps d'Alfvén défini ci-dessus:

$$\frac{\tau_\Omega}{\tau_A} = \frac{B_z}{\Omega h \sqrt{\mu_0 \varrho}} < 1. \quad (4.59)$$

ce qui conduit à une condition sur l'intensité critique du champ magnétique sous laquelle on peut avoir instabilité:

$$B_z < B_c = \Omega h \sqrt{\mu_0 \varrho}. \quad (4.60)$$

Il faut maintenant évaluer le membre de droite de cette expression. Je vous laisse vérifier que pour une étoile de masse $\sim M_\odot$ et rayon $\sim 2R_\odot$, à quelques rayons stellaires dans le disque on a $\Omega^{-1} \sim 0.1$ yr. Reprenons aussi nos valeurs introduites précédemment pour un disque TTauri “typique”: $h \sim 10^8$ m et $\rho \sim 10^{-4}$ kg m $^{-3}$ à quelques R_* de l'étoile. On trouve en bout de ligne $B_c \simeq 10^{-3}$ T, ce qui est un chiffre intéressant. En effet, un champ dipolaire en surface de 0.1 T, typique des TTauri, se voit dilué par un facteur $(R_*/s)^3 \sim 10^3$, conduisant à un champ de $\sim 10^{-4}$ T à $10 R_*$, ce qui satisfait facilement à la condition (4.60). Nonobstant la nature très “ordre-de-grandeur” du raisonnement ci-dessus, on en concluerait que l'instabilité peut probablement opérer dans un disque magnétisé typique des étoiles TTauri.

Il est possible de faire mieux, soit d'effectuer une analyse locale de stabilité à partir des formes linéarisées des équations magnétohydrodynamiques, un peu comme on l'avait fait dans notre étude des ondes MHD (§2.8), mais exprimées cette fois en coordonnées cylindriques dans le plan équatorial et en supposant axisymétrie, pour un profil quelconque de vitesse angulaire $\Omega(s)$ et un champ magnétique vertical de faible intensité (i.e., satisfaisant à l'éq. (4.60)). L'analyse est ardue, mais conduit finalement à un critère particulièrement simple:

$$\boxed{\frac{d}{ds} (\Omega^2) < 0 \quad [\text{instable} - \text{Balbus} - \text{Hawley}]} . \quad (4.61)$$

Ce qui ressemble au critère de Rayleigh (cf. éq. 4.47), sauf que le facteur s^4 a disparu. Substituant là-dedans notre profil Keplérien habituel:

$$\frac{d}{ds} (\Omega^2) = \frac{d}{ds} \left(\frac{GM_*}{s^3} \right) = -\frac{3GM_*}{s^4} < 0 \quad \forall s . \quad (4.62)$$

BANZAI !! On a finalement trouvé quelque chose de crédible pour déstabiliser notre profil Keplérien !

Bon nombre de simulations numériques MHD ont maintenant démontré que l'instabilité magnétorotationnelle de Balbus-Hawley est en toute probabilité active dans divers types de disques d'accrétion, c'est à dire pas seulement dans le cas des étoiles jeunes. Les intéressé(e)s peuvent consulter les références fournies en fin de chapitre. L'instabilité de Balbus-Hawley illustre encore une fois le caractère paradoxal d'une limite singulière: cette instabilité opère sans problème dans la limite $B_0 \rightarrow 0$, mais n'existe pas à $B_0 = 0$!

La prochaine étape est de se calculer un ν_T capturant le transport de moment cinétique associé au développement et saturation nonlinéaire de l'instabilité de Balbus-Hawley, ce qui n'est pas exactement de la tarte. On a vu à la §1.5.4 que si une bonne séparation d'échelle existe entre la turbulence et l'écoulement moyen, l'impact de la turbulence sur ce dernier est capturé par le stress de Reynolds $\langle u'_i u'_j \rangle$; dans le contexte du disque d'accrétion on s'intéresse à la composante $s\phi$ de ce tenseur; Définissons

$$\pi_{s\phi} = -\rho \langle u_s u_\phi \rangle , \quad [\text{HD}] . \quad (4.63)$$

Dans un contexte de turbulence MHD, tel que produite par l'instabilité de Balbus-Hawley, on doit également prendre en compte la composante magnétique au stress; si on répète la dérivation de la §1.5.4 en incluant la force de Lorentz au membre de droite dans l'équation de Navier-Stokes, l'équation pour la vitesse moyenne hérite d'une seconde contribution, magnétique celle-là, aux stress turbulent:

$$\pi_{s\phi} = -\rho \langle u_s u_\phi \rangle + \frac{1}{\mu_0} \langle b'_s b'_\phi \rangle , \quad [\text{MHD}] . \quad (4.64)$$

où les b' représentent les composantes à petites échelles du champ magnétique “turbulent”. Il est possible de calculer les quantités au membre de droite en moyennant des sorties de simulations numériques MHD. À la surprise générale, ces calculs ont démontré que l'équation (4.41) introduite précédemment en offre une représentation tolérable si l'on pose $\alpha \sim 10^{-2}$. C'est presque trop beau pour être vrai...

4.5.2 Couplage magnétique étoile-disque

Un champ magnétique du type représenté à la Fig. 4.11 peut aussi affecter le transport du moment cinétique dans le disque directement aux grandes échelles spatiales. Le cisaillement rotationnel du disque Keplérien peut étirer le champ poloidal dans la direction zonale, tout comme dans l'exemple déjà considéré à la §2.4. Le champ sera étiré dans la direction positive en ϕ dans la partie du disque située en deçà du rayon de co-rotation r_c (voir l'éq. (4.4)), et dans la direction négative en ϕ pour $s > r_c$. Ce processus est décrit par la composante- ϕ de notre équation d'induction magnétohydrodynamique (2.9) en coordonnées cylindriques.

Exprimée en terme de la vitesse angulaire Ω plutôt que de la vitesse zonale u_ϕ , et posant pour le moment $u_s = u_z = 0$ et $B_s = 0$ dans le plan équatorial, la composante- ϕ de l'équation d'induction prend la forme:

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial t} = sB_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \eta \left[\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial B_\phi}{\partial s} \right) + \frac{\partial^2 B_\phi}{\partial z^2} - \frac{B_\phi}{s^2} \right], \quad (4.65)$$

où on a aussi supposé que B_z dans le disque (mince!) ne dépend que de s , et axisymétrie, $\partial/\partial\phi = 0$, comme auparavant. Bien qu'on ait supposé invariance en z dans notre disque mince, il est clair que la vitesse angulaire associée au profil Keplérien tombe de manière discontinue à zéro aux bords du disque, $z \pm h/2$, ce qui correspond à un très fort cisaillement vertical qui induira une composante ϕ très intense, initialement localisée à la surface du disque, dans le genre $B_\phi \propto \delta(z \pm h/2)$. Un tel champ diffusera à la fois dans la magnétosphère à l'extérieur du disque, ainsi que vers l'intérieur du disque, et assez rapidement si le disque est turbulent et la diffusivité effective η y assume une valeur élevée.

La Figure 4.13 illustre schématiquement ce processus d'étirement du champ initialement vertical dans la direction- ϕ et la diffusion dans la direction- z de la composante toroidal ainsi induite. Il s'agit ici d'une vue dans le plan $[\phi, z]$, où l'on regarde dans la direction de l'étoile centrale, i.e., l'axe de coordonnées $\hat{\mathbf{e}}_s$ pointe vers le plan de la page, avec l'étoile quelque part derrière, et la rotation du disque se fait de la gauche vers la droite. Ici on a supposé que nous sommes à l'intérieur du rayon de co-rotation, donc le disque tourne plus rapidement que l'étoile et sa magnétosphère. Dans un repère en corotation avec l'étoile, une ligne de champ magnétique est donc immobile à l'extérieur du disque, mais est entraînée vers la droite en son intérieur, comme l'illustre la Figure pour quatre intervalles de temps successifs.

Il est important de comprendre que ce processus d'étirement en soi ne diminue pas l'intensité de la composante verticale du champ magnétique. On remarquera aussi que le B_ϕ induit change de signe au centre du plan du disque ($z = 0$), conséquence directe du fait que $\partial\Omega/\partial z$ est de signe opposé à $z = \pm h/2$. La combinaison de l'étirement dans la direction ϕ et diffusion vers le centre du disque conduira donc à la formation d'une quasi-discontinuité de B_ϕ à $z = 0$, comme le montre la ligne la plus étirée sur la Fig. 4.13. Comme on l'a vu à quelques reprises précédemment (§§3.4.2, 3.4.4), une nappe de courant électrique est inévitablement associée à une telle quasi-discontinuité, la densité de courant étant donnée ici par:

$$J_s = \frac{1}{\mu_0} [\nabla \times \mathbf{B}]_s = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_\phi}{\partial z}. \quad (4.66)$$

Comme le disque est supposé très mince on peut introduire la substitution $\partial/\partial z \equiv 1/h$, ce qui permet d'approximer l'expression ci-dessus par

$$J_s \simeq -\frac{1}{\mu_0} \frac{|B_\phi|}{h}. \quad (4.67)$$

La valeur absolue et le signe moins résultent du fait que $\partial\Omega/\partial z > 0$ là où $B_\phi < 0$, mais $B_\phi > 0$ là où $\partial\Omega/\partial z < 0$ (au besoin voir la Fig. 4.13 pour vous en convaincre). Je vous laisse vérifier ici que cette densité de courant pointe dans la direction $-\hat{\mathbf{e}}_s$, tel qu'indiqué par les “ \otimes ” rouges. On a donc maintenant une densité de courant perpendiculaire au plan dans lequel évolue le champ magnétique, et donc une force magnétique ayant des composantes en ϕ ainsi qu'en z :

$$[\mathbf{J} \times \mathbf{B}]_\phi = -J_s B_z = \frac{|B_\phi| B_z}{\mu_0 h}, \quad (4.68)$$

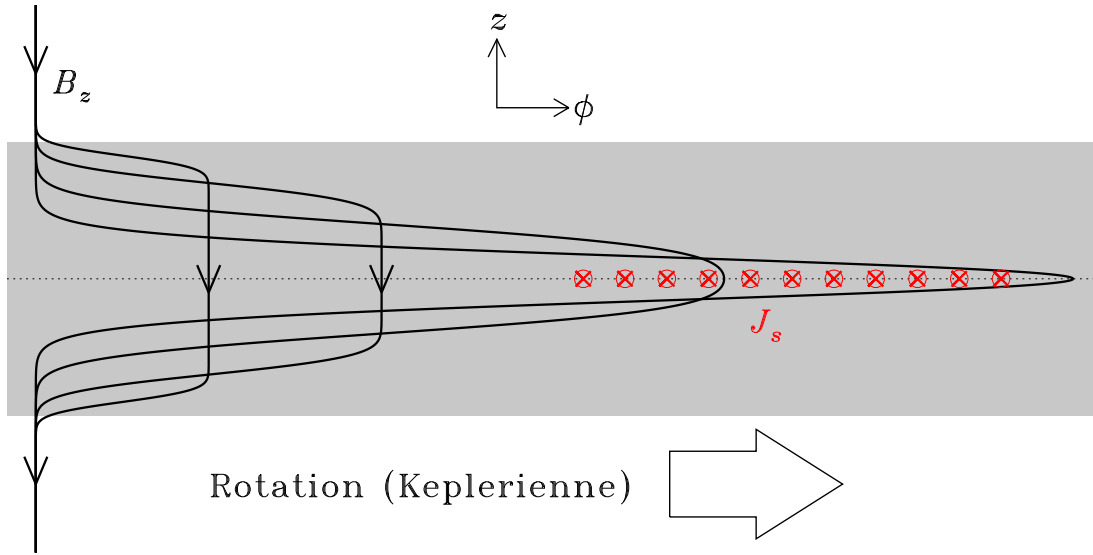


Figure 4.13: Cisaillement du champ (poloidal) stellaire traversant un disque en rotation Keplerienne. On voit une section $s = \text{constante} < r_c$ du disque, le long d'une ligne de visée pointant vers l'étoile centrale. Le diagramme est tracé dans un repère en co-rotation avec l'étoile et sa magnétosphère. Le champ magnétique vertical ($B_z < 0$, cf. Fig. 4.11) est entraîné par la rotation dans le disque, ce qui induit à sa surface une composante toroidale qui diffuse vers le centre du disque. Une densité de courant (en rouge) pointant dans la direction- s est produite par ce processus de forçage mécanique/diffusif du champ magnétique (voir texte).

$$[\mathbf{J} \times \mathbf{B}]_z = J_s B_\phi = -\frac{|B_\phi| B_\phi}{\mu_0 h}, \quad (4.69)$$

où la seconde égalité résulte de l'utilisation de l'éq. (4.67). Considérons d'abord la composante en ϕ de la force magnétique. Ici comme $B_z < 0$, cette force tend à ralentir la rotation Keplerienne du disque. Si le diagramme de la Fig. 4.13 avait été tracé à un rayon s situé au delà du rayon de co-rotation r_c , la rotation du disque aurait été plus lente que celle de la magnétosphère, l'étirement aurait été produit dans la direction négative en ϕ (vers la gauche sur la Fig. 4.13), et je vous laisse vérifier qu'on aurait alors eu $J_s = +|B_\phi|/\mu_0 h$, et que la force magnétique aurait accéléré le disque.

Revenons maintenant à la Figure 4.11 pour tirer une vision globale de tout ça. Les lignes de champ magnétique stellaire y étant tracées en bleu croisent le disque à l'intérieur du rayon de co-rotation, et on vient de voir que pour ces lignes la force magnétique ralentit le disque. En d'autres mots, la force magnétique transfère du moment cinétique du disque vers l'étoile, et donc accélère la rotation de cette dernière. Inversement, pour les lignes tracées en vert et traversant le disque au delà de r_c , la force magnétique transfère du moment cinétique de l'étoile vers la périphérie du disque. Comme dans le cas de la solution de vent magnétisé de Weber-Davis étudiée à la §3.5.1 (voir en particulier la Fig. 3.17), cette contribution magnétique au flux de moment cinétique domine en général celle associée à l'accrétion du plasma, et le couplage magnétique permet donc de stabiliser la rotation de l'étoile centrale durant sa phase d'accrétion. Des calculs (simplifiés) de ce couplage rotationnel de l'étoile au disque via son champ magnétique réussissent ainsi à expliquer ce qui a longtemps été un mystère astronomique, soit le fait que la rotation des étoiles TTauri n'augmente que très peu durant leur phase finale de contraction vers la ZAMS. La bibliographie en fin de chapitre contient quelques références pour ceux/celles intéressé(e)s à cet aspect du sujet.

4.5.3 Impact sur l'accrétion

Revenons maintenant à la composante z de la force magnétique:

$$[\mathbf{J} \times \mathbf{B}]_z = J_s B_\phi = -\frac{|B_\phi| B_\phi}{\mu_0 h} ; \quad (4.70)$$

Cette composante pointe de l'intérieur vers les deux surfaces du disque à $z = \pm h/2$. Si on continue de négliger la gravité du plasma du disque, la seule force à notre disposition pour équilibrer la force magnétique est la projection en z de la force gravitationnelle de l'étoile centrale. On a déjà calculé ça à la section 4.3.2, soit l'éq. (4.17). Évaluant cette expression à $z = h/2$ et supposant de nouveau $s \gg h$, on pourra équilibrer la force magnétique tant que

$$\frac{B_\phi^2}{\mu_0 h} < \frac{GM_* h}{2s^3} \quad (4.71)$$

où on a largué les valeur absolues pour alléger la notation. Que se passera-t-il maintenant si cette inégalité n'est plus satisfaite? Le fluide à la surface du disque sera alors propulsé dans la direction verticale, soit le long du champ magnétique magnétosphérique. Plutôt que d'accréter le plasma radialement dans le plan du disque, l'accrétion se retrouvera canalisée par les lignes de champ magnétique croisant le disque à un rayon cylindrique $s = r_d$ pour lequel l'inégalité ci-dessus n'est plus satisfaite. Ce rayon critique est appelé *rayon de fracture*³ et est donné par:

$$r_d = \left(\frac{\mu_0 GM_* h^2}{2B_\phi^2} \right)^{1/3} . \quad (4.72)$$

La Figure 4.14 illustre, toujours schématiquement, ce nouveau pattern d'accrétion. Le plasma touche maintenant l'étoile centrale à plus hautes latitudes, mais on s'attend toujours à un très fort surchauffage local et émission de radiation aux courtes longueurs d'onde.

Il s'agit maintenant de calculer la position de ce rayon de fracture, ce qui exige de pouvoir calculer (ou estimer) la grandeur de la composante magnétique induite B_ϕ . Nous avons déjà établi la forme de son évolution temporelle (éq. (4.65)), telle que décrite par la composante ϕ de l'équation d'induction. On peut supposer que dans un disque mince, la dissipation associée aux gradients verticaux est dominante, et donc on ne conservera que le terme en dérivée seconde en z parmi les termes diffusifs entre parenthèses carrées au membre de droite de l'éq. (4.65). Si on suppose que le disque atteint un état stationnaire, on a alors

$$-sB_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \eta \frac{\partial^2 B_\phi}{\partial z^2} . \quad (4.73)$$

On approxime maintenant le cisaillement vertical $\partial \Omega / \partial z \sim (\Omega - \Omega_*) / h$ et la dérivée seconde par B_ϕ / h^2 , d'où on tire

$$B_\phi(s) = \frac{sB_z h}{\eta} (\Omega(s) - \Omega_*) . \quad (4.74)$$

Si l'on suppose (pour le moment) que le rayon de fracture r_d est plus près de la surface de l'étoile que du rayon de co-rotation, alors on peut s'attendre à ce que $\Omega(s) \gg \Omega_*$. Utilisant cette approximation pour éliminer Ω_* de l'éq. (4.74), y substituant notre bon vieux profil Keplérien pour $\Omega(s)$, et le résultat de tout ça dans l'éq. (4.72), on arrive finalement à l'expression suivante pour le rayon de fracture (faite-le!):

$$r_d = \frac{\sqrt{\mu_0 \eta}}{B_z} . \quad (4.75)$$

³Ma traduction de "disruption radius", le terme conventionnellement utilisé dans la langue de Shakespeare.

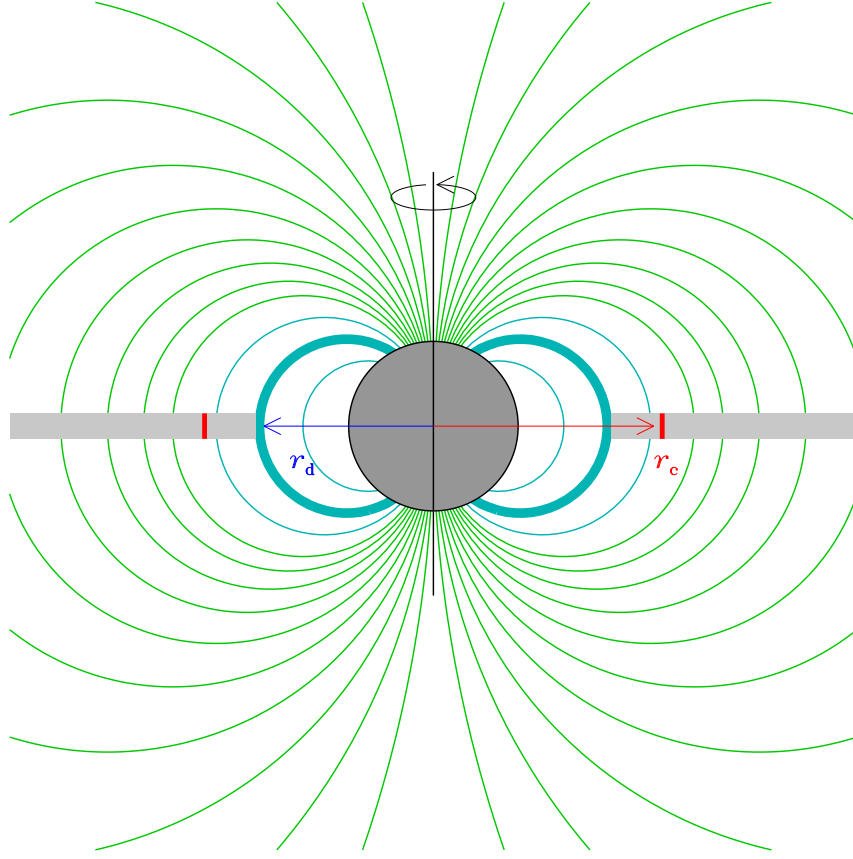


Figure 4.14: Variation sur le thème de la Figure 4.11. Ici la présence du champ magnétique bloque l'accrétion, et donc détruit le disque, à des distances inférieures au rayon de fracture r_d dans le plan équatorial. L'accrétion est maintenant canalisée aux hautes latitudes photosphériques (voir texte).

en supposant de surcroît un champ dipolaire tel que dans le plan équatorial

$$B_z(s) = B_* \left(\frac{R_*}{s} \right)^3, \quad (4.76)$$

on peut réécrire (4.75) sous la forme:

$$\frac{r_d}{R_*} = \left(\frac{B_* R_*}{\sqrt{\mu_0 \eta}} \right)^{1/2}. \quad (4.77)$$

Si la diffusivité magnétique est d'origine turbulente, on s'attendrait à ce que sa grandeur soit du même ordre que la viscosité turbulente, autrement dit le nombre de Prandtl magnétique turbulent devrait être ~ 1 . Nous avons estimé à la §4.4.1 $\nu_T \sim 10^{10} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$; pour une étoile TTauri "typique" ayant $R_* \sim 2R_\odot$ et $B_* \sim 0.1 \text{ T}$, l'éq. (4.77) donne alors $r_d/R_* \simeq 3$, ce qui est très raisonnable considérant la nature très ordre-de-grandeur de tout ce petit calcul.

Mais est-il raisonnable de penser que le champ magnétique demeure gelé dans le fluide pour des valeurs de diffusivité magnétique si élevées ? On peut se définir un nombre de Reynolds magnétique basé sur l'échelle horizontale $\sim R_*$ du disque, et une vitesse $\Omega(r_d) \times r_d$ selon:

$$R_m = \frac{\Omega(r_d) r_d R_*}{\eta} \simeq \frac{(GM_* R_*)^{1/2}}{\eta} \sim 10^4, \quad (4.78)$$

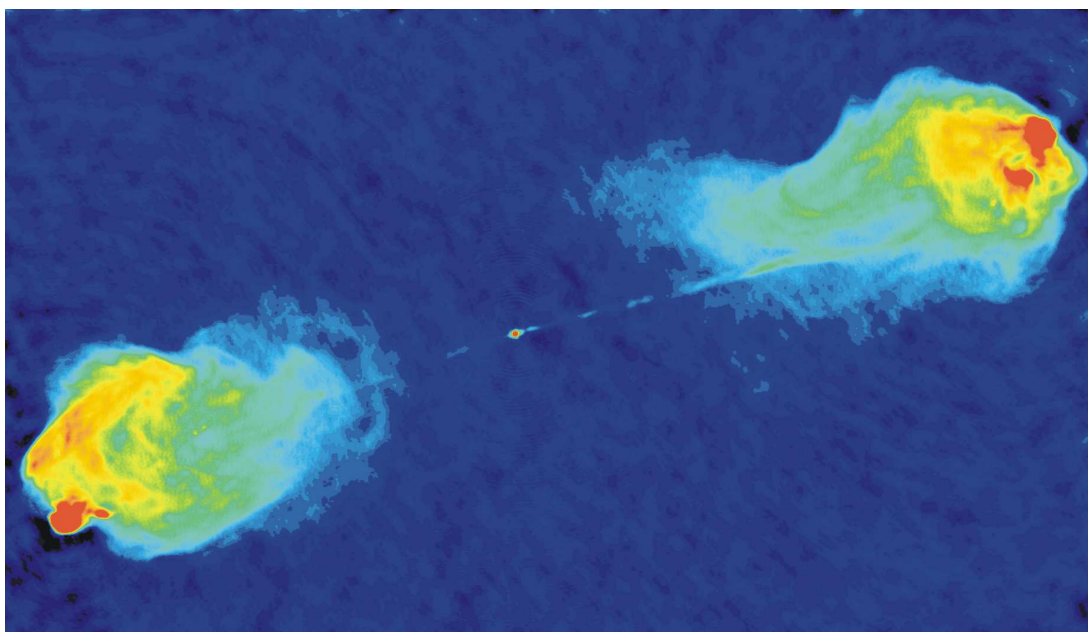


Figure 4.15: Jets et lobes radio ($\lambda = 6$ cm) dans la galaxie active Cygnus-A, une des plus brillantes source radio dans tout le ciel. La galaxie même coïncide avec le petit point au centre de l’image et d’où originent les deux jets. Les deux lobes au bout des ces jets sont situés à environ 450,000 années-lumière l’un de l’autre, soit une dizaine de fois le diamètre de la galaxie centrale. Source: NRAO/AUI, images.nrao.edu/260 (domaine public).

ayant encore supposé ici $\eta \sim 10^{10} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$; on est ici confortablement dans le régime $R_m \gg 1$... mais ce n’aurait pas nécessairement été le cas si nous avions plutôt choisi comme longueur caractéristique l’épaisseur du disque $h \ll R_*$ plutôt que le rayon de fracture $r_d \sim R_*$!

La littérature sur la modélisation des disques d’accrétion regorge de calculs d’ordre de grandeur semblable à celui effectué ici, et “démontrant” telle ou telle idée ou hypothèse. Le message à retenir de tout ça est qu’il faut vraiment prendre de telles “démonstrations” avec un très gros grain de sel.

Et ça continue; nous n’avons même pas considéré ici les complications additionnelles associées à la présence d’un écoulement radial, et de ses effets, directs et surtout indirects, sur l’induction d’une composante magnétique toroidale dans le disque. Encore ici, bon nombre de calculs incorporant ces effets de manière très approximative sont éparpillés dans la littérature technique. La dynamique globale des systèmes magnétisés étoile+disque est vraiment un sujet mûr pour de véritables simulations numériques magnétohydrodynamiques!

4.6 Vents et jets

Observationnellement, on sait que les les systèmes accrétant des quantités susbtantielles de matière via un disque d’accrétion réussissent à en rééjecter une partie sous la forme de vents (écoulements relativement diffus) et de jets très fortement collimatés; on a déjà vu un exemple avec la Figure 4.2 pour une proto-étoile. La Figure 4.15 en montre un autre, cette fois une paire de jets fortement relativistes émanant du centre de la galaxie active Cygnus-A. Il s’agit ici d’observations radio à haute résolution des jets et de leurs lobes radio, la galaxie étant le tout petit point rouge au centre de l’image. L’émission radio même est due à l’effet synchrotron, soit la radiation électromagnétique produite par l’accélération de particules chargées relativistes par un champ magnétique.

Dans le cas d'une proto-étoile, comme sur la Figure 4.2, les jets ont des dimensions de l'ordre d'un parsec ($1 \text{ pc} = 3.086 \times 10^{16} \text{ m}$), des vitesses de l'ordre de $10^{-3} c$, un output énergétique allant chercher dans les 10^3 – $10^4 L_\odot$ ($L_\odot \simeq 4 \times 10^{24} \text{ W}$), et l'objet central a une masse $\sim M_\odot$. Pour une galaxie active comme sur la Figure 4.15, les jets s'étendent sur $\sim 10^6 \text{ pc}$, ont des vitesses $\sim c$, des output énergétiques $\sim 10^{34}$ – 10^{39} W , et un objet central (trou noir supermassif) de 10^6 – $10^9 M_\odot$. En gros, sept ordres de grandeurs séparent ces deux systèmes. Et il en existe également à des échelles intermédiaires, comme les jets émis par certaines étoiles à neutron. Néanmoins, on note de très fortes similarités dans tous ces cas; les jets

- sont associés à des disques d'accrétion,
- originent de ses régions centrales,
- sont bien collimatés le long de l'axe de symétrie/rotation du système disque+objet central, et ce déjà près de ce dernier,
- atteignent des vitesses de l'ordre de la vitesse d'échappement associée l'objet central.

Ceci suggère une certaine universalité dans les mécanismes d'accélération et collimation de ces jets, en encore une fois il semble bien que le champ magnétique y joue un rôle central. La modélisation de ces systèmes est géométriquement et dynamiquement assez complexe, et particulièrement au niveau des jets la majorité des efforts de modélisation font dans la simulation magnétohydrodynamique massive. Cependant, il est possible de comprendre le mécanisme d'accélération à l'aide d'un modèle assez simple, sujet de la section qui suit.

4.6.1 L'accélération magnétique des jets

Notre discussion de l'instabilité de Balbus-Hawley (§4.5.1), et particulièrement notre calcul de l'estimé du champ critique (B_c dans l'éq. (4.60), présupposait que le champ magnétique traversant le disque originait de l'étoile centrale; mais il est très probable que le disque lui-même supporte son propre champ magnétique, soit par effet dynamo —on en reparlera au chapitre ??— soit par le transport et l'amplification par conservation du flux du champ magnétique du nuage interstellaire à partir duquel s'est formé l'étoile (§2.7).

Adoptons la seconde de ces hypothèses, et supposons qu'un disque d'accrétion mince est traversé par un champ magnétique dont les lignes s'étendent très loin verticalement de part et d'autre du disque. La Figure 4.16 illustre schématiquement la géométrie du problème. En raison de l'écoulement radial dans le disque, on peut s'attendre à ce que les lignes soit déformées, comme sur la Figure.

Considérons maintenant un point P situées à la position (s, z) , telle que mesurée en coordonnées cylindriques. On supposera une situation où $R_m \gg 1$ et le plasma- β est dans la limite $\beta \ll 1$ (voir §3.4.3), donc cet élément de fluide est “canalisé” par le champ magnétique, se retrouvant forcé à se déplacer seulement le long de sa ligne de champ magnétique. Les deux autres forces en présence sont la force gravitationnelle \mathbf{F}_g , et la force centrifuge \mathbf{F}_c associée à la rotation Képlérienne du disque. En régime stationnaire, en vertu du théorème de Ferraro (voir §2.4 et éq. (2.38), au besoin) l'élément de fluide P doit avoir une vitesse angulaire de rotation égale à celle du disque au point d'ancrage (rayon cylindrique s_0 sur la Fig. 4.16) de la ligne de champ sur laquelle il est situé:

$$\Omega(s_0) = \left(\frac{GM_*}{s_0^3} \right)^{1/2}. \quad (4.79)$$

Donc on peut écrire:

$$\mathbf{F}_c = \Omega_0^2 s \hat{\mathbf{e}}_s, \quad \mathbf{F}_g = -\frac{GM_*}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r, \quad (4.80)$$

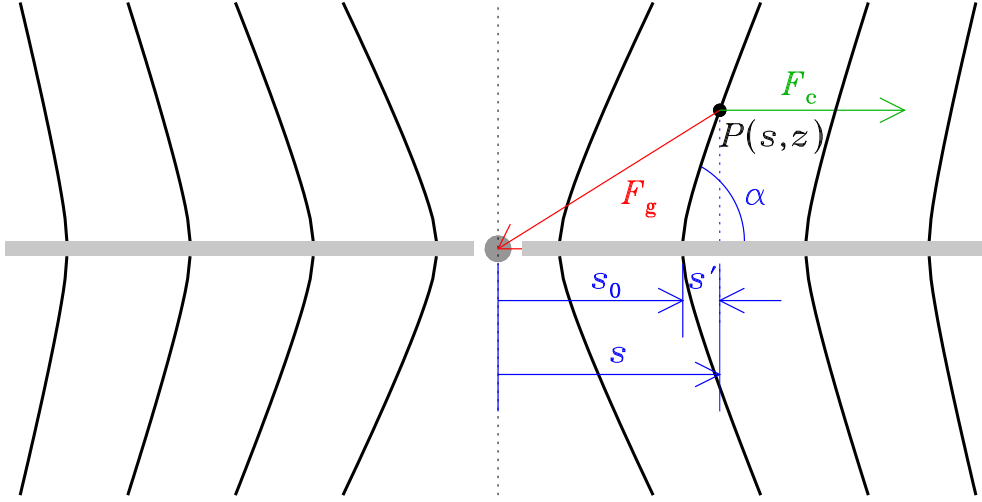


Figure 4.16: Géométrie du modèle Blandford-Payne décrivant l'accélération d'un jet par un disque d'accrétion magnétisé. Les lignes de champ magnétique (en noir) traversant le disque (froid et mince) proviennent du nuage ayant formé le disque, et deviennent progressivement inclinées à mesure que l'écoulement radial dans le disque les entraîne vers l'objet central. À l'extérieur du disque, un élément de fluide (point noir) ressent la force gravitationnelle F_g due à l'objet central, ainsi une force centrifuge F_c associée à son mouvement de rotation autour de l'axe du système (ligne pointillée verticale), transmis par la force magnétique depuis le point d'ancrage de la ligne de champ dans le disque (voir texte).

où le rayon sphérique r peut s'écrire en coordonnées cylindriques selon $r = \sqrt{s^2 + z^2}$. Ces deux forces peuvent s'exprimer comme le gradient d'un potentiel total (gravitationnel + centrifuge) donné par:

$$\Phi(s, z) = -\frac{GM_*}{s_0} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{s}{s_0} \right)^2 + \frac{s_0}{\sqrt{s^2 + z^2}} \right]. \quad (4.81)$$

où on a fait bon usage de (4.79) pour se débarrasser de Ω_0 . Maintenant considérons que l'élément de fluide est beaucoup plus près du disque que de l'objet central; on peut alors supposer $|z|/s_0 \ll 1$ et $|s'|/s_0 \ll 1$, et développer les deux termes au membre de droite en puissances de z/s_0 et s'/s_0 . Un des exercices de la troisième série vous guide dans ce processus, au bout duquel, en conservant jusqu'aux termes d'ordre 2 (quadratiques), on obtient l'expression approximative suivante pour le potentiel:

$$\Phi(s, z) = -\frac{GM_*}{s_0} \left[\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \left(\frac{s'}{s_0} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{s_0} \right)^2 \right], \quad z, s' \ll s_0. \quad (4.82)$$

Revenant à la Figure 4.16 on voit qu'il est possible d'exprimer z et s' en terme de l'angle α mesurant l'inclinaison de la ligne de champ magnétique au point P par rapport au plan du disque:

$$s' = d \cos \alpha, \quad z = d \sin \alpha, \quad (4.83)$$

où d est la distance entre P et le point d'ancrage sur le disque de sa ligne de champ, supposée ici rectiligne. Substituant ceci dans (4.82) et calculant la composante- s du gradient, on obtient finalement:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial s} = -\frac{GM_* d}{s_0^3} (3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \quad (4.84)$$

La force totale pointera donc dans la direction $+\hat{e}_s$ si le membre de droite est positif:

$$\tan^2 \alpha < 3 \quad \rightarrow \quad \alpha < \pi/3 . \quad (4.85)$$

On a donc démontré ici que dans le régime $R_m \gg 1$, un élément de fluide situé sur une ligne de champ magnétique ancrée dans un disque Képlérien ressent une force nette le faisant “glisser” le long de cette ligne de champ dans une direction l'éloignant du disque et de l'objet central, si cette ligne de champ est inclinée extérieurement par moins de 60 degrés par rapport au plan du disque. Cette accélération magnétocentrifuge est maintenant connue sous le nom de mécanisme de Blandford-Payne (voir bibliographie en fin de chapitre).

4.6.2 La collimation magnétique des jets

Bien que la géométrie en soit bien différente, l'écoulement le long des lignes de champ se développant si le critère (4.85) est satisfait conduira à une configuration magnétique à grandes distances de l'objet central montrant de fortes similarités physiques avec les solutions de vent coronaux magnétisés considérées au chapitre précédent (§3.4). À mesure que l'élément de fluide s'éloigne de l'objet central (s croissant) tout en conservant la vitesse angulaire du disque au point d'ancrage de “sa” ligne de champ magnétique (puisque $\beta \ll 1$), sa vitesse azimutale $u_\phi = \Omega_0 s$ augmente inexorablement. Cette accélération magnétique du fluide dans la direction zonale perdurera jusqu'à ce que sa vitesse atteigne la vitesse d'Alfvén, après quoi on tombe dans le régime où la conservation du moment cinétique impose un ralentissement de l'écoulement zonal, déformant maintenant le champ magnétique sous la forme d'une spirale du genre de celle caractérisant la solution de Parker pour le vent solaire dans le plan équatorial (voir Fig. 3.12).

Ici, vue en 3D, la ligne de champ développe inexorablement une structure en “tire-bouchon”, où les lignes de champ deviennent fortement enroulées autour de l'axe de rotation. Cet enroulement est plus marqué à grand s que le long de l'axe de symétrie du système, comme dans le cas des modèles MHD axisymétriques du vent solaire considérés à la §3.5.3. Et encore une fois ici, cet enroulement résultera en un gradient de pression magnétique pointant vers l'axe de rotation/symétrie du système disque+étoile, causant une déviation vers cet axe des lignes de champ magnétique, et donc de l'écoulement qu'elles canalisent (retournez examiner la Fig. 3.19). Ce fort enroulement produit également une tension magnétique qui s'oppose à l'expansion latérale du jet. Tout ceci conduit à une collimation et un confinement latéral du jet le long de l'axe de symétrie du système, perpendiculairement au plan du disque, comme on l'observe habituellement.

La Figure 4.17 montre un instantané d'une simulation numérique MHD de l'accélération et collimation d'un jet par un disque d'accrétion, situé ici au centre de la frontière inférieure du domaine de la simulation. Le dégradé de couleur encode la vitesse azimutale du fluide, et quelques lignes de champ magnétique sont également tracées. La partie magnétisée du disque a ici une étendue radiale correspondant à seulement 9% de l'étendue horizontale du domaine de simulation. Même en présence de l'inévitable diffusivité d'origine purement numérique caractérisant ce genre de simulations, l'accélération et le confinement magnétiques fonctionnent très bien ici. On notera le mouvement tourbillonnaire du coeur du jet, et le développement de structures aux petites échelles le long de son axe, qui caractérisent également les observations de vrais jets astrophysiques.

Notons finalement que l'accélération magnétocentrifuge des jets représente un mécanisme intéressant pour évacuer le moment cinétique du disque, et ainsi favoriser l'accrétion. Comme dans le cas de la solution de vent coronal de Weber-Davis considérée à la §3.5.1, les stress magnétiques dominent typiquement la perte de moment cinétique, par rapport au moment angulaire spécifique transporté par le plasma en expansion (viz. Fig. 3.17).

Bibliographie:

Je ne connaissais pas grand chose aux disques d'accrétion avant de me mettre à l'écriture de ce chapitre. Bien qu'étant une production originale qui contient plusieurs développements et

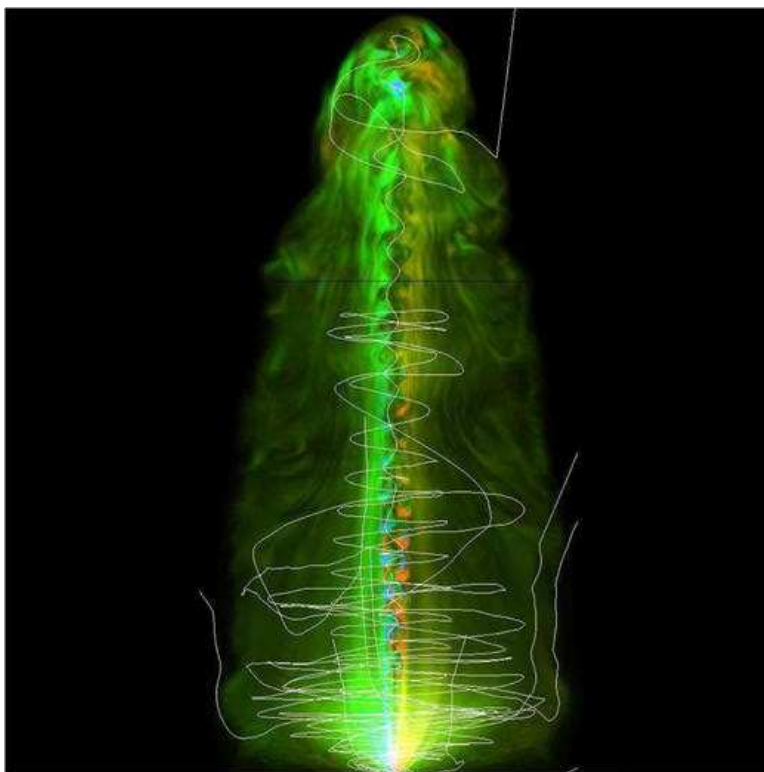


Figure 4.17: Simulation numérique MHD de la collimation d'un jet propulsé par un disque d'accrétion magnétisée (situé ici au point central le long du bas de l'image). Le dégradé de couleur code la vitesse zonale du plasma autour de l'axe (ici vertical) du jet, et quelques lignes de champ magnétique y sont superposées. Notez l'enroulement du champ magnétique le long de l'axe du jet. Tiré de Staff et al. (2015), MNRAS, **446**, 3975–3391 (Figure 4, pivotée par 90°).

ajouts de mon cru, dans sa préparation je me suis tout de même beaucoup inspiré des trois ouvrages suivants:

- Shu, F.H., *The Physics of Astrophysics II: Gas Dynamics*, University Science Books, 1992: chapitre 7,
- Choudhuri, A.R., *The Physics of Fluids and Plasmas*, Cambridge University Press, 1998: §5.7,
- Hartmann, L., *Accretion Processes in Star Formation*, Cambridge University Press, 1998: chapitres 5 et 6.

Il semblerait cependant que l'incontournable classique dans le domaine demeure:

- Frank, J., King, A., & Rain, D. *Accretion Power in Astrophysics*, 2^e éd., Cambridge University Press, 1992.

Bien que je ne sois pas très au fait de cette très volumineuse littérature en expansion rapide, l'article suivant me semble un bon point d'entrée sur les progrès plus récents dans l'observation des disques d'accrétion et protoplanétaires:

- MacGregor, M.A., Wilner, D.J., Andrews, S.M., Lestrade, J.-F., & Maddison, S., ApJ, **809**, 47 (2015).

Sur les questions d'instabilités hydro- et magnétohydrodynamiques, le classique encyclopédique demeure:

Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Réimpression Dover 1981, (1961),

mais accrochez bien vos tuques avec de la broche! J'aime en fait mieux la présentation du sujet faite au fil des pages de l'ouvrage suivant:

Pringle, J., & King, A., *Astrophysical Flows*, Cambridge University Press (2007).

Plus spécifiquement sur l'instabilité de Balbus-Hawley, voir

Balbus, S.A., & Hawley, J.F., *ApJ*, **376**, 214 (1991)

Hawley, J.F., & Balbus, S.A., *ApJ*, **376**, 223 (1991)

Balbus, S.A., & Hawley, J.F., *Rev. Mod. Phys.*, **70**, 1 (1998)

L'idée d'un rayon de fracture, en deçà duquel le disque est détruit et l'accrétion canalisée par le champ magnétique, remonte aux travaux de Ghosh et Lamb, qui avaient développé ce concept dans le contexte de l'accrétion sur les étoiles à neutron; voir

Ghosh, P., & Lamb, F.K., *ApJ*, **232**, 259 (1979),

Ghosh, P., & Lamb, F.K., *ApJ*, **234**, 296 (1979).

Au niveau du couplage magnétique étoile+disque, incluant ses impacts sur l'évolution de la rotation de l'étoile centrale, débutez avec les trois articles suivants, et les références s'y trouvant (au besoin!):

Königl, A., *ApJ*, **370**, L39-42 (1991),

Cameron, A.C., & Campbell, C.G., *A&A*, **274**, 309-318 (1993),

Keppens, R., MacGregor, K.B., & Charbonneau, P., *A&A*, **294**, 469-487 (1995).

BOUVIER GANG RECENT, FROM Ilyabook

L'article original décrivant le modèle de Blandford & Payne présenté à la §4.6.1 demeure un incontournable du sujet:

Blandford, R.D., & Payne, D.G., *MNRAS*, **1999**, 883-903 (1982).

La simulation numérique des jets est un sujet demeurant très actif en "fluides astrophysiques", et Ralph Pudritz, de l'Université McMasters à Hamilton, demeure un des Grands Maîtres du sujet; pour vous faire une idée des progrès continuels dans ce domaine, voir par exemple:

Ouyed, R., & Pudritz, R.E., *ApJ*, **482**, 712-732 (1997),

Kudoh, T., Matsumoto, R., & Shibata, K., *PASJ*, **54**, 121 (2002),

Ouyed, R., Clarke, D.A., & Pudritz, R.E., *ApJ*, **582**, 292 (2003),

Fendt, C., *ApJ*, **651**, 292-287 (2006),

Staff, J.E., Koning, N., Ouyed, R., Thompson, A., & Pudritz, R.E., *MNRAS*, **446**, 3975-3991 (2015).

Chapitre 5

Dynamos astrophysiques

Une dynamo est un système effectuant la conversion de l'énergie mécanique en énergie électromagnétique, sous la forme de courants électriques dans le contexte qui nous occupera ici. En régime magnétohydrodynamique, c'est le terme en $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ dans l'équation d'induction (2.9) qui fait le travail, car c'est lui qui conduit au terme en $\mathbf{u} \cdot \mathbf{F} < 0$ dans notre équation de l'énergie magnétique (2.40).

Nous avons déjà invoqué la présence de champ magnétiques pour nous tirer de pétrins divers dans notre étude des vents et des disques d'accrétion. Quel est l'origine de ces champs? Il s'avère qu'une grande partie, sinon la totalité des 23 ordres de grandeurs séparant le champ magnétique $\sim 10^{-12}$ T du milieu intergalactique du $\sim 10^{11}$ T des pulsars peut s'expliquer par simple conservation du flux magnétique lors du processus de contraction/effondrement gravitationnel, comme on l'a vu brièvement à la §2.7. Ce qui ne peut pas du tout être expliqué de cette façon, cependant, est la structure à grande échelle des champs magnétiques galactiques, et les variations cycliques des champs magnétiques stellaires, ces derniers se développant sur des temps caractéristiques beaucoup, beaucoup plus courts que le temps de diffusion (2.13), et donc le cycle solaire demeure l'exemple le mieux documenté. Par conséquent, commençons par un petit survol de ces "anomalies".

5.1 L'aspect observationnel

5.1.1 Le cycle des taches solaires

Suite à l'invention du télescope au début du dix-septième siècle, les premiers astronomes ayant observé systématiquement les taches solaires notèrent que ces dernières n'apparaissent que très rarement à l'extérieur d'une bande latitudinale large d'environ $\pm 40^\circ$ centrée sur l'équateur solaire. Ils ne purent cependant discerner de régularité dans l'apparition ou la disparition des taches, que Galilée finit par déclarer être des formes nuageuses dans l'atmosphère du soleil. Il fallu attendre la patience de l'astronome amateur Samuel Heinrich Schwabe (1789–1875), qui en 1843, après 17 ans d'observations assidues des taches, annonça l'existence d'une périodicité de 10 ans dans le nombre moyen de taches visibles à la surface du soleil. Grandement impressionné par la découverte de Schwabe, Rudolf Wolf (1816–1893) se lança alors dans un programme d'observations et de recherches historiques visant à compiler toutes les observations disponibles afin de retracer le cycle de Schwabe jusqu'au début de l'ère télescopique. Face à la tâche complexe consistant à étalonner les observations d'un grand nombre d'astronomes, brouillons à des degrés divers et utilisant une grande variété d'instruments et de techniques d'observation, Wolf choisit de se définir un *nombre relatif* (r) calculé à partir du décompte du nombre g de groupes de taches et du nombre total f de taches individuelles, incluant celles faisant partie des groupes:

$$r = k(f + 10g), \quad (5.1)$$

où k est un facteur de correction variant d'un observateur à l'autre (avec $k = 1$ pour Wolf lui-même!). Cette définition est toujours d'usage aujourd'hui, mais r est habituellement appelé *nombre de Wolf*, quoique son nom officiel soit maintenant devenu "international sunspot number". Wolf put ainsi reconstruire le cycle des taches jusqu'au cycle 1755–1766, numéroté "1" depuis, par convention. En septembre 2022 nous sommes présentement dans la phase ascendante du cycle 25.

La Figure 5.1 présente trois séquences temporelles du nombre de Wolf. La première (en orange) est la moyenne mensuelle de r , et le trait rouge plus épais est une moyenne courante sur treize mois. Les points rouges indiquent les moyennes annuelles avant 1749, et les points bleus une reconstruction alternative basée uniquement sur les groupes de taches solaires (le "Group Sunspot Number"), habituellement jugée plus fiable que celle de Wolf. On constate que l'on n'est pas en présence ici d'une simple forme sinusoidale, et que les amplitudes et durées peuvent varier substantiellement d'un cycle à l'autre. La période va d'un peu moins de 9 ans (cycle 2) jusqu'à près de 14 ans (cycles 4 et 24). La quasi-absence de taches durant l'intervalle 1645–1715 n'est pas due à un manque de données, mais reflète une période d'activité magnétique fortement réduite maintenant connue sous le nom de Minimum de Maunder.

La nature physique des taches solaires a fait l'objet de nombreuses spéculations déjà à l'époque de Galilée, mais ce n'est que depuis un siècle qu'elle fut finalement établie sur des bases solides par George Ellery Hale (1868–1938) et ses collaborateurs qui, en 1907–1908 réussirent à mesurer la séparation Zeeman de certaines raies spectrales et la polarisation des composantes séparées. C'était une démonstration sans équivoque de la nature magnétique des taches solaires. Non seulement s'agissait-il de la première détection d'un champ magnétique extraterrestre (dans le sens littéral du terme), mais les champs mesurés s'avéraient très substantiels, soit de l'ordre de 0.3 Tesla, quelques milliers de fois plus intense que le champ magnétique terrestre. Il a été compris depuis que ce fort champ magnétique freine le transport convectif de l'énergie, conduisant ainsi aux températures plus basses observées dans les taches, en comparaison à la photosphère environnante.

5.1.2 Le cycle magnétique

Hale et ses collaborateurs ne se sont pas arrêtés à la simple détection du champ magnétique des taches solaires. Durant près de deux décennies d'observations et d'analyses, ils ont su exposer plusieurs régularités importantes relatives au champ magnétique des taches, maintenant collectivement connues comme les *Lois de polarité de Hale*. Ayant noté assez tôt que les plus grandes taches tendent à apparaître en paires ayant des polarités magnétiques opposées, ils ont pu démontrer que:

1. En tout temps, la polarité de la tache avant (par rapport à la direction de rotation de la photosphère) est la même dans le même hémisphère solaire.
2. En tout temps, la polarité de la tache avant est inversée entre les hémisphères N et S.
3. Ces patrons de polarité magnétique s'inversent d'un cycle des taches au suivant.

L'interprétation la moins tarabiscotée de ces observations est que ces paires bipolaires de taches solaires sont une manifestation photosphérique d'un champ toroidal interne, ayant émergé sous la forme d'une soi-disant "boucle- Ω ", l'intersection avec la photosphère produisant ainsi une paire de taches de polarités opposées. Si c'est bien ce qui se passe, et si le champ n'a pas été trop déformé durant son ascension vers la surface, alors le signe de la composante arrière (par rapport à la direction de rotation) donne le signe de la composante magnétique toroidale sous-jacente. Cette interprétation, dans le contexte des Lois de polarité de Hale, mène alors à la conclusion que le champ magnétique interne du soleil est antisymétrique par rapport à son plan équatorial et inverse sa polarité d'un cycle des taches à l'autre; autrement dit, le cycle des taches et sa période de $\simeq 11$ ans est la manifestation d'un cycle magnétique global ayant une période de $\simeq 22$ ans.

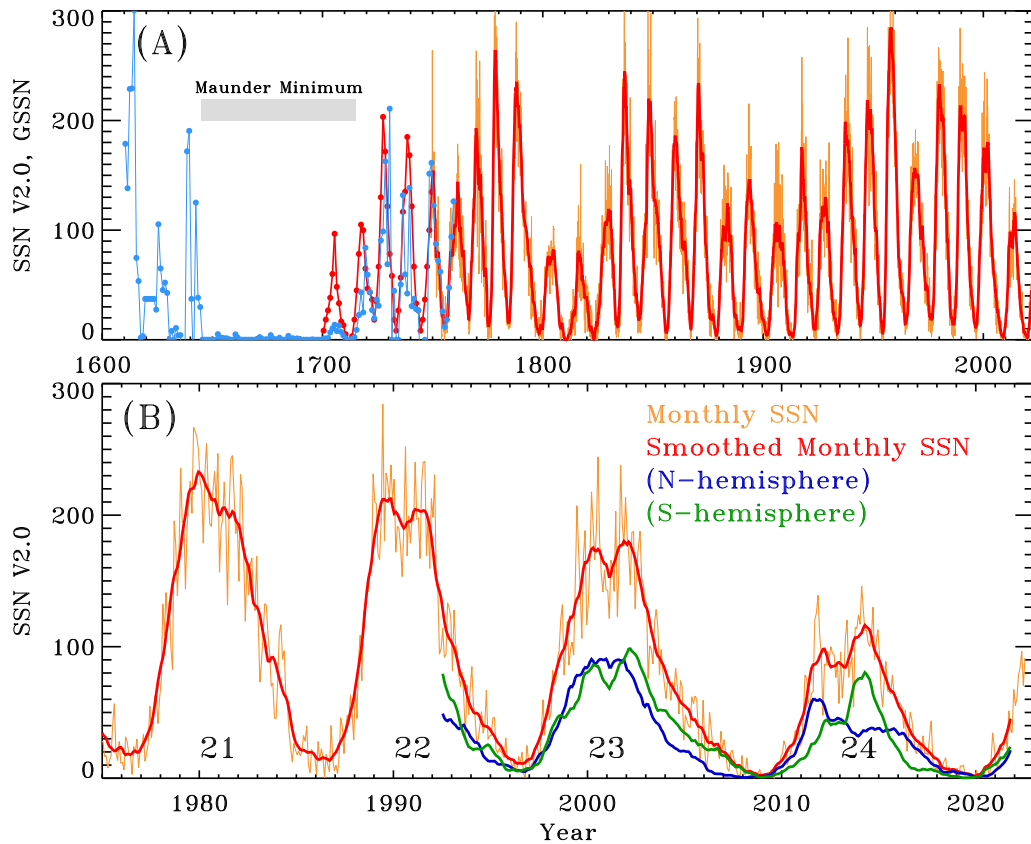


Figure 5.1: (A) Trois séquences temporelles du nombre de Wolf, mesurant le nombre de taches visibles sur le soleil depuis quatre siècles. Le trait orange est la moyenne mensuelle, et le trait rouge une moyenne courante sur 13 mois. Les points rouges indiquent les moyennes annuelles avant 1749, et les points bleus une reconstructions alternative basée uniquement sur les groupes de taches solaires (voir Hoyt & Schatten 1998, *Solar Phys.* **181**(2), 491). En (B), la période 1975-présent, incluant les moyennes mensuelles hémisphériques, également lissées sur 13 mois. Suivant la convention introduite par Wolf, les cycles vont d'un minimum en SSN au suivant. Ces données sont en domaine public et distribuées par le Solar Influences Data Analysis Center à Bruxelles, Belgique (<http://sidc.oma.be>).

Une telle (anti)symétrie hémisphérique du champ toroidal interne est exactement ce à quoi on s’attend du cisaillement d’un champ poloidal de type dipolaire et aligné avec l’axe de rotation, par une rotation différentielle étant symétrique par rapport au plan équatorial; précisément comme nous l’avons déjà modélisé à la §2.4. Ce dipôle magnétique est bel et bien présent, mais s’avère d’une intensité trop faible pour avoir été détectable à l’époque de Hale; mais il l’est maintenant.

La Figure 5.2 (en haut) est un magnétogramme, soit une carte magnétique du soleil où chaque pixel encode l’intensité de la composante du champ dans la ligne de visée (gris, $|\mathbf{B}| \lesssim 1 \text{ mT}$; allant vers le blanc pour la polarité positive, en noir pour négative, saturée à 0.4 T dans les deux cas). Comparant ceci à une image dans le continu (en bas) révèle que les champs les plus intenses coïncident avec les taches solaires, et les deux premières Lois de Hale ressortent clairement du magnétogramme de la Fig. 5.2. On notera aussi que des champs substantiels, de quelques 10^{-2} T , sont également observés en périphérie des groupes de taches. À l’extérieur de ces “régions actives”, le champ est plus faible, se retrouvant concentré dans des agrégats qui définissent un *réseau magnétique* spatialement disjoint, distribué plus ou moins uniformément sur la photosphère. Les taches et régions actives, elles, sont rarement observées à l’extérieur d’une bande latitudinale couvrant $\lesssim 40^\circ$ centré sur l’équateur.

La Figure 5.3 est un *diagramme papillon magnétique*, soit un diagramme temps-latitude de la composante radiale du champ photosphérique, moyennée en longitude et couvrant quatre cycles de taches, soit deux cycles magnétiques complets. Ce diagramme est construit à partir de magnétogrammes, comme celui de la Fig. 5.2, en calculant la moyenne latitudinale sur une séquence couvrant une rotation solaire. On concatène ensuite temporellement la séquence de profils latitudinaux résultant de cette moyenne en ϕ , pour construire un diagramme latitude-temps. Le pattern global le plus frappant sur la Figure 5.3 est certainement la variation cyclique sur une période de $\sim 22 \text{ yr}$ ans, les inversions de polarités magnétique les accompagnants, et l’antisymétrie du champ par rapport au plan équatorial. La composante dipolaire du champ magnétique solaire est également clairement visible, et très fortement concentrée dans les régions polaires.

Le signal magnétique présent aux basses latitudes de chaque coté de l’équateur est l’empreinte magnétographique des taches solaires. Bien que leurs champs soient très intenses ($\sim 0.1 \text{ T}$), leur tendance à apparaître en paires de polarités magnétiques opposées, approximativement alignées à la direction Est-Ouest, a pour conséquence qu’une moyenne zonale annule (presque) leur contribution. En début de cycle (e.g., 1976, 1986, 1997, 2009, 2020 sur la Fig. 5.3), les taches sont observées à relativement hautes latitudes héliocentriques ($\sim 40^\circ$) mais émergent à des latitudes de plus en plus basses à mesure que le cycle avance, jusqu’à ce qu’en fin de cycle on les observe très près de l’équateur, tandis que les taches du prochain cycle commencent déjà à apparaître aux latitudes avoisinant $\sim 40^\circ$. Ceci résulte en un pattern spatiotemporel appelé *diagramme papillon*, qu’on croit refléter une migration vers l’équateur des systèmes de flux magnétique toroidal hémisphériques à l’intérieur du soleil, d’où originent ultimement les taches. Le maximum du cycle, tel que mesuré par le nombre de Wolf, se produit à mi-chemin de chaque papillon, lorsque la couverture surfacique des taches est maximale aux alentours de ± 15 degrés en latitude, soit ici en 1980, 1991, 2002 et 2015.

Aux hautes latitudes héliocentriques ($\gtrsim 50^\circ$), le magnétogramme synoptique est dominé par une composante dipolaire bien définie, le champ magnétique y atteignant une intensité $\sim 10^{-3} \text{ T}$, en inversant sa polarité environ au maximum du cycle des taches. Par exemple, durant le cycle 1976–1986 le champ toroidal était négatif dans l’hémisphère Nord, et le champ radial de la calotte polaire est passé d’une polarité magnétique positive à négative; ceci suggère que le dipôle de surface retarde sur le champ toroidal interne par un intervalle de phase $\Delta\varphi \simeq \pi/2$.

Aux mi-latitudes, on observe principalement une dérive vers les pôles de champs magnétiques originant des basses latitudes suite à la désaggrégation des taches et régions actives. Ce transport et cette accumulation aux pôles du flux magnétique provenant des régions actives pourraient fort bien contribuer à l’inversion de polarité du dipôle solaire, et il existe des modèles du cycle solaire basés sur ce mécanisme; on y reviendra brièvement plus loin.

Un champ magnétique dipolaire de $\sim 10^{-3} \text{ T}$ concentré dans une calotte de largeur angulaire

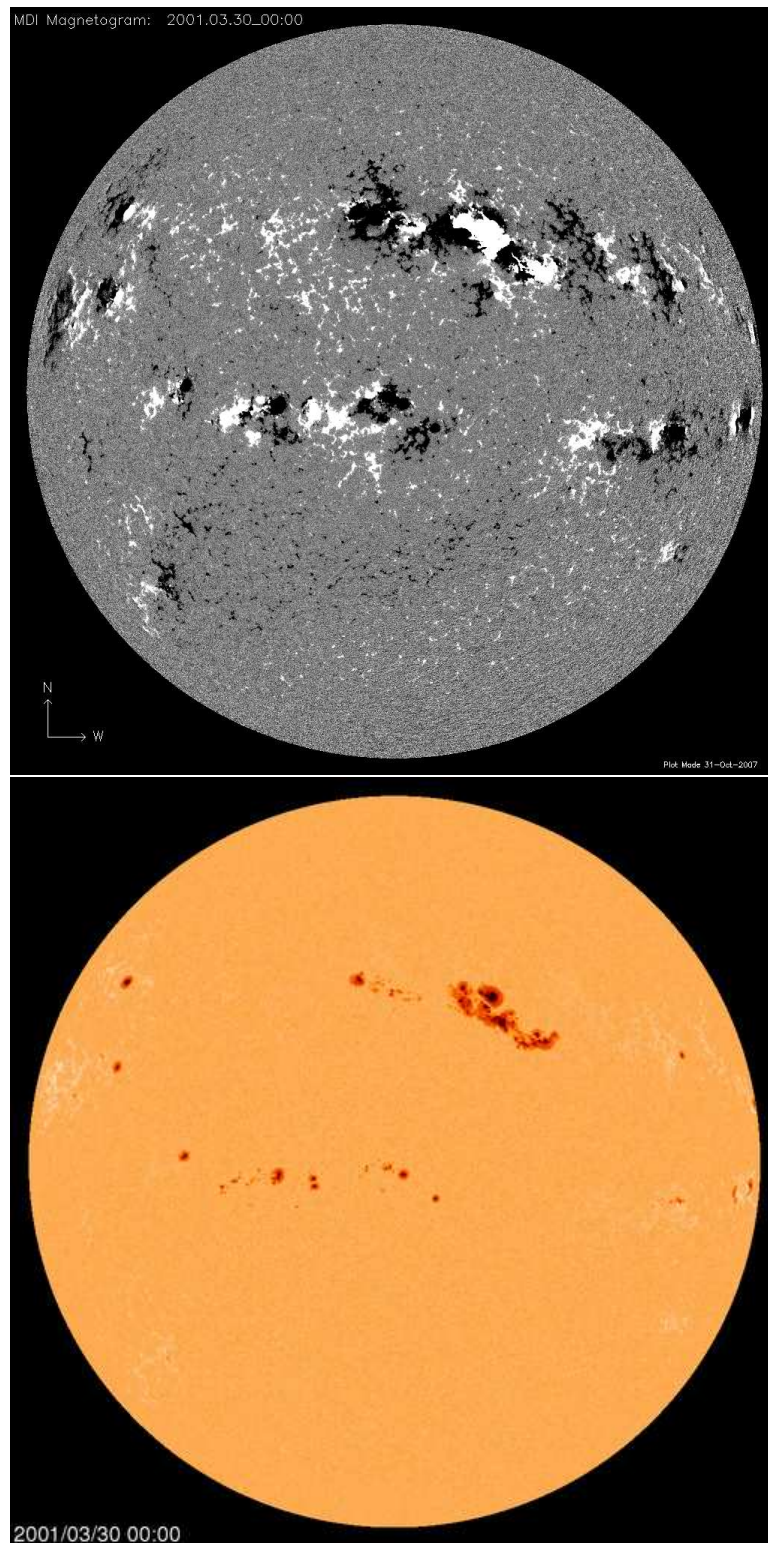


Figure 5.2: Magnétogramme (en haut) et image dans le continu (en bas) du soleil le 30 mars 2001, observé par l'instrument MDI à bord de la mission SoHO. L'axe de rotation est vertical sur les deux images. Images dans le domaine public, téléchargées du site Web de la mission SoHO: <http://sohowww.nascom.nasa.gov>

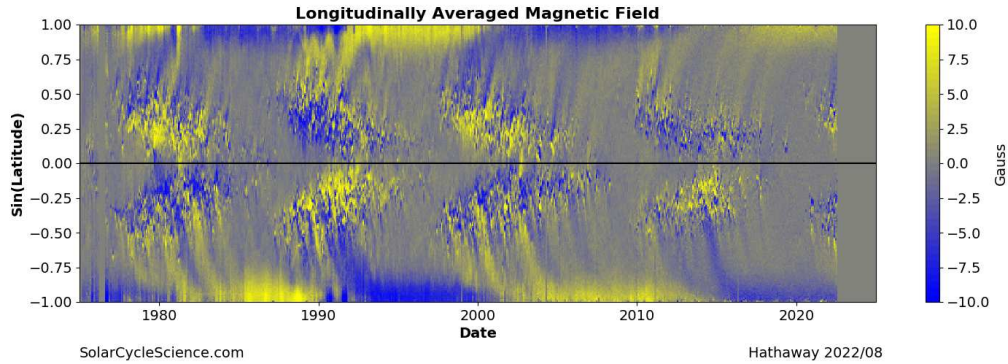


Figure 5.3: Un magnétogramme temps-latitude couvrant les quatre derniers cycles des taches, et le tout début du cycle 25, maintenant en phase ascendante. La composante radiale du champ magnétique photosphérique est moyennée sur une rotation solaire, et les profils latitudinaux en résultant sont concaténés pour former ce diagramme latitude-temps. Rappel: $1\text{T} \equiv 10^4 \text{ Gauss}$. Donnée et graphisme par David Hathaway, en domaine public: [<http://solarscience.com/solarcycle.html>]

$\sim 30^\circ$, comme on le déduirait de la Fig. 5.3, correspond à un flux radial de $\sim 10^{14} \text{ Wb}$. Le flux combiné de toutes les polarités arrières des groupes de taches émergeant durant un demi-cycle magnétique monte à quelques 10^{17} Wb pour un cycle typique. Si ce flux est considéré un bon indicateur de l'intensité de la composante magnétique toroidale interne, alors on en concluerait que cette dernière domine le champ interne total.

Le champ magnétique du soleil structure son atmosphère jusque dans la couronne, et représente la source d'énergie et le moteur dynamique de tous les phénomènes définissant l'activité solaire. Ceci inclut, entre autre, l'émission radiative aux courtes longueurs d'onde (voir Fig. 3.2). La Figure 5.4 montre une séquence d'images en rayons-X "mous" ($\lambda \sim 10 \text{ \AA}$) prises par le satellite Yohkoh, chacune séparée de la suivante par un an, débutant en 1991 en bas à gauche. La séquence débute au maximum du cycle 22, et se termine au maximum du cycle 23. L'émission X est dominée par le champ magnétique des régions actives, et donc montre une forte variation avec la phase du cycle. Cependant même au minimum d'activité une émission diffuse est présente, conséquence du magnétisme aux petites échelles spatiales, qui est présent en tout temps.

5.1.3 Cycles magnétique stellaires

Contrairement au cas très particulier du soleil (en raison de sa proximité aux standards astronomiques), la photosphère des autres étoiles ne peut pas être résolue spatialement et donc il n'est pas possible en général d'y distinguer directement des taches ou autres structures magnétiques. La spectropolarimétrie ne produit des résultats probant que si l'étoile possède un champ magnétique de forte intensité aux grandes échelles spatiales; en effet, le signal en polarisation d'une paire de taches de polarités opposées produit une annulation mutuelle lorsqu'intégré sur la face visible de l'étoile. On peut cependant déduire la présence de champ magnétiques indirectement, via bon nombre d'observations incluant: (1) la modulation rotationnelle que les taches produisent dans les mesures photométriques; (2) des signaux de types éruptifs aux courtes longueurs d'ondes, ainsi que dans le domaine radio; (3) la variabilité dans des raies spectrales sensibles à la présence de champ magnétique. À date, de telles indications suggérant la présence de magnétisme ont été détectées dans *toutes* les étoiles de type solaire ayant été observées avec des instruments suffisamment sensibles. Le soleil est vraiment typique d'une étoile de type solaire!

Un type d'observation stellaire particulièrement intéressant à ce niveau est l'émission dans

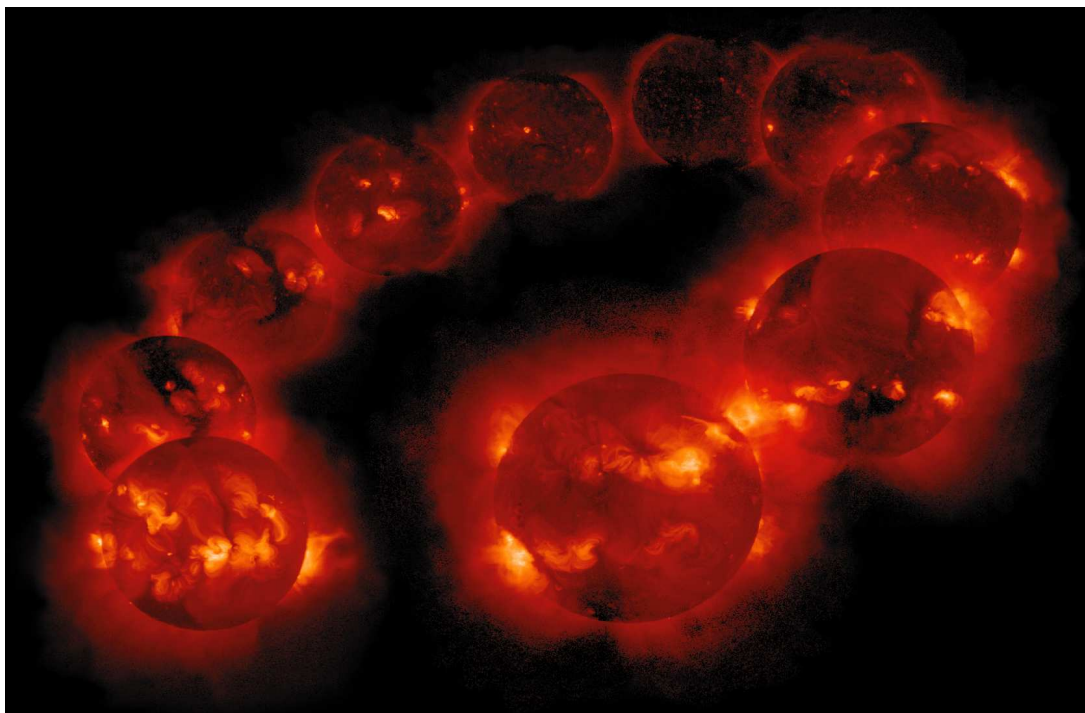


Figure 5.4: Émission en rayons-X par la couronne solaire, d'un maximum du cycle des taches au suivant. Les images sont séparées d'un an, allant de 1991 à gauche à 2000 à droite. Le minimum d'activité (entre le cycle numéro 22 et le 23) est en 1996, correspondant à l'image la plus "éloignée". Image téléchargée de la Yohkoh Legacy Archive à la Montana State University: <http://solar.physics.montana.edu/ylegacy>

le coeur des raies spectrales H et K du CaII (396.8nm et 393.4nm, respectivement). Dans la photosphère solaire, cette émission est associée au chauffage non-radiatif de la haute atmosphère, et montre une très bonne corrélation avec le flux magnétique photosphérique local. En 1968 à l'Observatoire du Mt Wilson, Olin C. Wilson (1909–94) commença à mesurer le flux des raies CaII H+K dans un échantillon d'étoiles de type solaire, un travail de moine qu'a perpétué un brave groupe de collaborateurs infatigables pendant trois décennies. Le résultat de ce labeur collectif est une archive de séquences temporelles d'émission en CaII H+K pour 111 étoiles de types spectraux allant de F2 à M2, certaines observées pendant plus de 40 ans. Un second programme semblable basé à l'Observatoire de Lowell continue ces observations depuis l'arrêt du programme Mt-Wilson, ce qui fait que pour certaines étoiles les séquences temporelles d'émission en Ca H+K couvrent plus de 50 ans!

La Figure 5.5 montre un échantillon représentatif de séquences temporelles de l'indice du Calcium S , mesurant le rapport de l'émission dans le coeur des raies sur celle du continu avoisinant. Certaines montrent des cycles réguliers de type solaire (environ 60% de l'échantillon), d'autres des variations plus irrégulières (25%) parfois accompagnées de dérives à long terme, tandis que quelques unes (15%) ont hérité du titre de "flatliners". Même chez ces dernières, il ne faut pas perdre de vue que la simple présence d'une émission détectable en Ca H+K est un signe d'activité magnétique; la constance de l'émission indique simplement que le champ magnétique de ces étoiles n'est pas sujet à des variations cycliques.

Dans les étoiles montrant une variation cyclique nette, il devient alors possible d'examiner la variation de la période du cycle magnétique en fonction du taux de rotation. La Figure 5.6 illustre l'interprétation classique de ces observations, soit que les étoiles se séparent en deux branches, chacune montrant une augmentation claire de la période du cycle avec la période

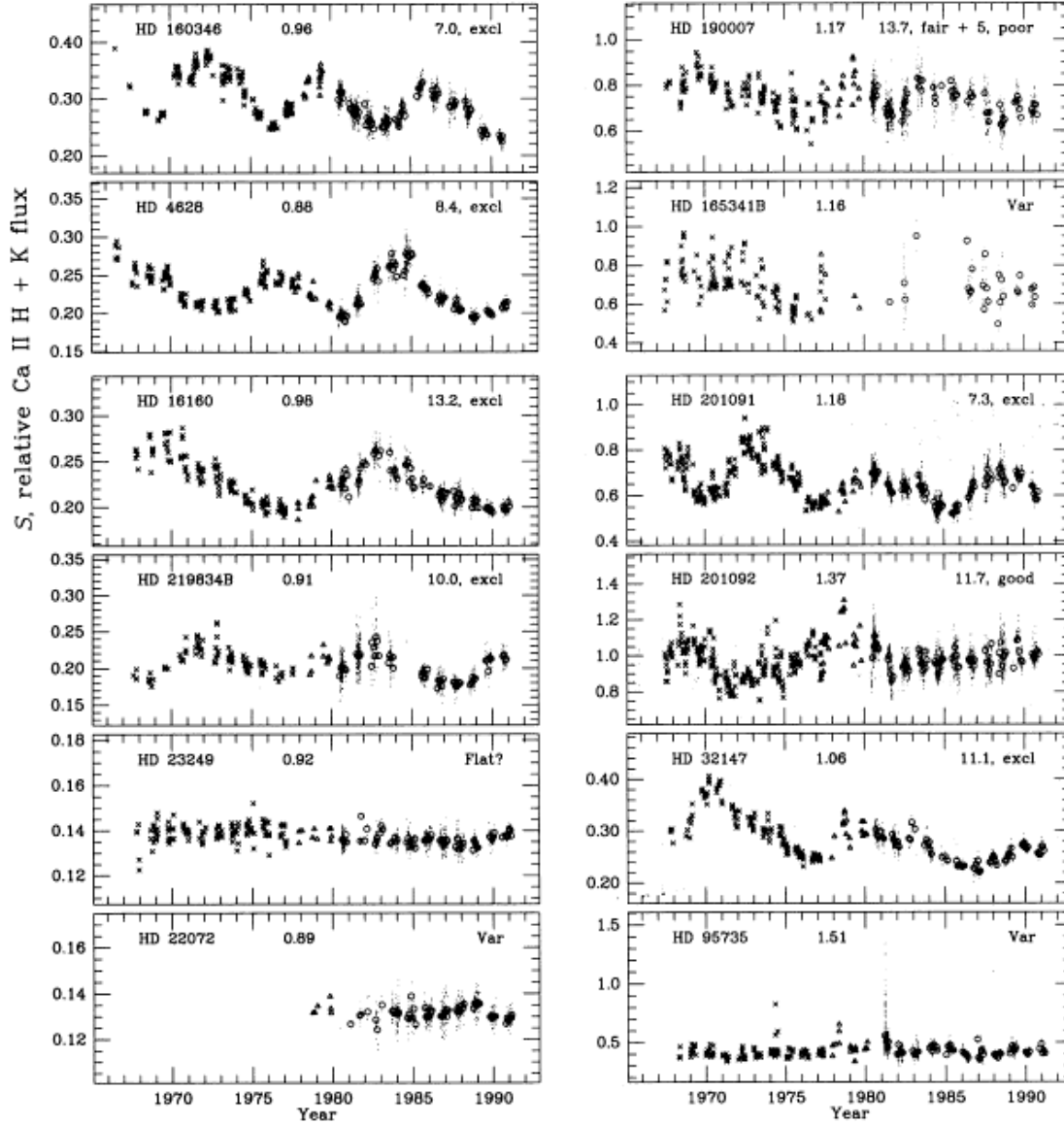


Figure 5.5: Séquences temporelles de l'indice d'émission du Calcium, dans un petit sous-ensemble des étoiles de la base de données du Mt Wilson, mais illustrant néanmoins la variété des variations observées: cycles réguliers ou irréguliers, dérives à long terme, et émission constante. Le soleil, observé comme une étoile, aurait un niveau moyen d'émission $\langle S_{\odot} \rangle = 0.179$, et une variation cyclique d'amplitude $\simeq 0.04$. Graphique découpés d'une Figure beaucoup plus grande tirée de Baliunas *et al.* 1995, ApJ, **438**, 269 [Figure 1g].

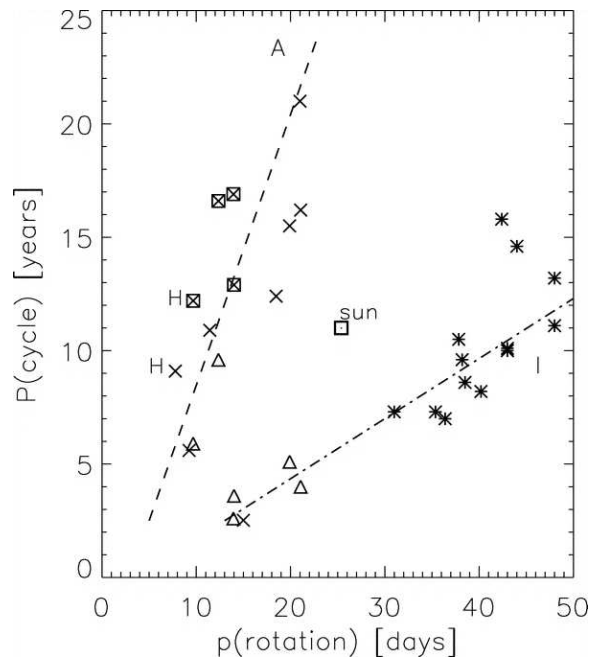


Figure 5.6: Variation de la période des cycles magnétiques stellaires en fonction de la période de rotation. Les \times correspondent à des étoiles jeunes (celle appartenant aux Hyades indiquées par un “H”), les $*$ des étoiles du champ, typiquement plus vieilles, et celles de type spectral plus chaud que G2 sont indiquées par un carré. Les Δ indiquent des périodes secondaires dans 5 étoiles montrant des cycles magnétiques multipériodiques. Les deux droites indiquent les deux branches “active” (A) et “inactive” (I) d’activité magnétique traditionnellement définies dans ce genre de diagramme (voir texte). Tiré de Böhm-Vitense, ApJ **657**, 486–493 (2007).

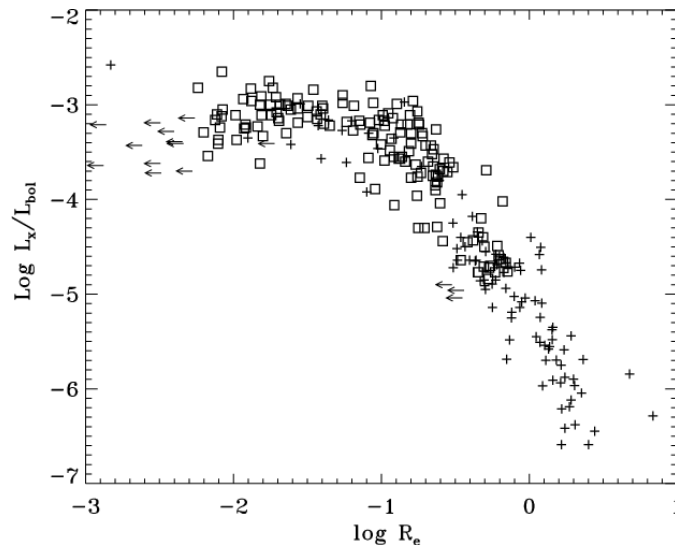


Figure 5.7: Émission en rayons-X dans un échantillon d’étoiles de type solaire. La luminosité en X est ici normalisée par la luminosité bolométrique, c.-à-d. intégrée sur le spectre entier. Les carrés correspondent à des étoiles dans des amas jeunes, tandis que les $+$ indiquent des étoiles du champ, la plupart plus vieilles. La luminosité en X est approximativement inversement proportionnelle au Nombre de Rossby jusqu’à $Ro \sim 0.1$, et sature à des valeurs plus basses de Ro (voir texte). Tiré de Pizzolato et al., A&A **397**, 147–157 (2003).

de rotation. La branche dite “active” regroupe surtout des étoiles jeunes en rotation rapide, tandis que la branche dite “inactive” hérite des étoiles plus vieilles et des cycles secondaires observés dans certaines étoiles dont le cycle principal se trouve sur la branche active. Cette interprétation laisse cependant le soleil dans un “no man’s land” entre les deux branches, forçant l’hypothèse que le soleil représente un cas particulier d’une étoile en train de transiter entre les deux branches; une situation préoccupante. Des réanalyses observationnelles très récentes (voir bibliographie) ont cependant commencé à peupler l’espace entre les branches A et I, et des simulations MHD suggèrent qu’une fois la dépendance de la période du cycle sur la luminosité prise en considération, la période des cycles pourrait fort bien décroître quand la période de rotation augmente. Cependant, le niveau d’activité magnétique même, tel que mesurée par l’émission en Ca H+K, augmente quand la période de rotation P_{rot} décroît.

Jusqu’à preuve du contraire, on peut supposer que les cycles magnétiques observés dans les étoiles de type solaire sont dus au même processus dynamo opérant dans le soleil. On verra sous peu que l’action dynamo dépend ultimement de l’action de la force de Coriolis sur les écoulements turbulents dans la zone convective du soleil. Cette influence, rappelez-vous, est mesurée par le Nombre de Rossby (voir §1.4). Cette idée est appuyée par les observations de l’émission en rayons-X des étoiles montrant des signes d’activité magnétique. Les observations solaires nous indiquent que cette émission est dominée par les régions actives, et représentent donc un bon indicateur de l’activité magnétique en général (voir Fig. 5.4). La Figure 5.7 montre la variation de l’émission en X, divisée par la luminosité bolométrique de l’étoile, versus le nombre de Rossby estimé via la théorie de la longueur de mélange et des observations de la rotation. Elle regroupe des observations couvrant une vaste gamme de type spectraux, allant de F5 au types K tardifs. Néanmoins, la relation est très bien définie, avec une augmentation du flux X à mesure que Ro diminue, suivi d’une “saturation” débutant à $Ro \simeq 0.1$. Des observations plus récentes montrent que même les étoiles complètement convectives, de type spectraux encore plus tardifs, tombent parfaitement sur cette séquence. Le soleil moyen (i.e., moyenné sur un cycle d’activité) se retrouverait ici en plein centre de la branche ascendante.

Il n’est pas clair si la saturation observée pour $Ro \lesssim 0.1$ reflète une saturation de l’intensité du mécanisme d’émission, de la couverture surfacique des structures émettrices, ou du champ magnétique global produit par la dynamo (ou une combinaison de ces effets). Les déterminations récentes du champ magnétique moyen à la surface d’étoiles de masses allant d’environ 0.1 à $1 M_{\odot}$ (voir Figure 5.8) indiquent cependant que la saturation de $\langle B \rangle$ dans les rotateurs rapides (bas Ro) se produit au même nombre de Rossby critique ($Ro \simeq 0.13$) que la saturation de l’émission X (cf. Fig. 5.7), suggérant que cette dernière est définitivement reliée causalement à une saturation du magnétisme.

Les observations de la Figure 5.8 s’avèrent être bien reproduites par la relation empirique:

$$\langle B \rangle = \begin{cases} 200 \text{ G} \times Ro^{-1.25} & Ro > 0.13, & \text{[rotation lente]} \\ 2050 \text{ G} \times Ro^{-0.11} & Ro < 0.13. & \text{[rotation rapide]} \end{cases} \quad (5.2)$$

On se rappelle (n’est-ce-pas...) que notre dérivation de la Loi de Skumanich à la §3.6.2 se basait sur la relation $B \propto \Omega$, qui se traduirait ici par $\langle B \rangle \propto Ro^{-1}$ (à luminosité constante); ce qui ne colle pas si mal du tout avec l’expression ci-dessus, pour les rotateurs “lents”.

Notons finalement que la comparaison de ce genre d’observations avec les “prédictions” des modèles dynamos qui suivent est très sensible à la manière dont est défini le nombre de Rossby. Il n’est pas du tout évident d’estimer de manière fiable Ro à partir des caractéristiques globales des étoiles, car ceci requiert l’utilisation d’un modèle de la convection pour estimer la vitesse turbulente et/ou le temps de retournement convectif. On y reviendra plus loin.

5.1.4 Magnétisme galactique et au-delà

Les champs magnétiques dans le milieu interstellaire sont détectés via l’émission synchrotron des particules chargées relativistes capturées sur des trajectoires spiralant le long des lignes de champ. De telles mesures sont possibles dans la Voie Lactée, mais aussi dans d’autres galaxies. D’autres techniques, limitées à l’heure actuelle à notre galaxie, incluent la mesure de

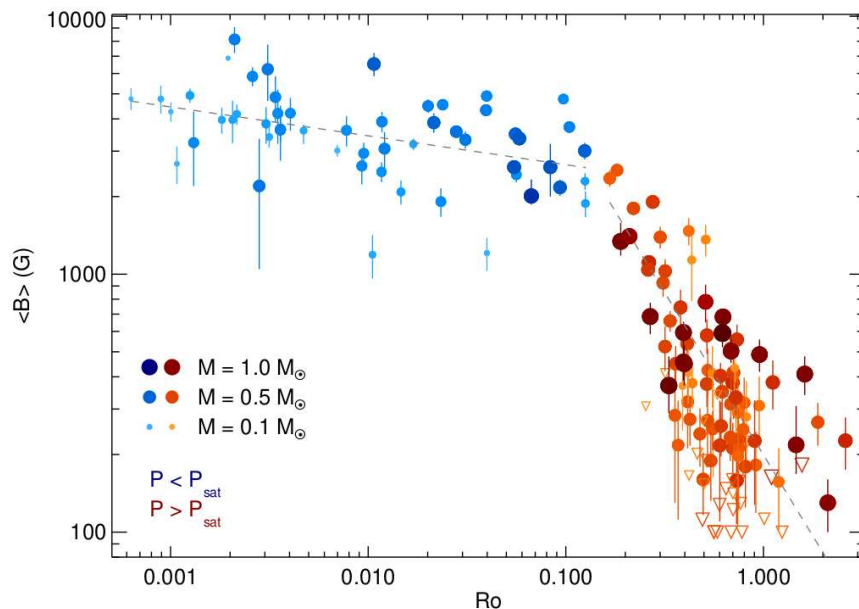


Figure 5.8: Variation du champ magnétique moyen $\langle B \rangle$ mesuré à la surface d'étoiles de faible masse, versus le nombre de Rossby. La taille des symboles code les masses stellaires, tel qu'indiqué. Les triangles inversés indiquent des limites supérieures dans les cas de non-détection. Comparez à la Fig. 5.7. Diagramme tiré de Reiners et al. (2022, A&A **662**, A41; Figure 5).

la polarisation de l'émission stellaire induite par des grains de poussière non-sphériques alignés perpendiculairement au champ magnétique galactique. Sous certaines conditions ces grains sont également détectables directement via la polarisation de leur émission infrarouge. Finalement, la séparation Zeeman de raies spectrales dans le domaine radio a également été mesurée dans des régions du disque galactique plus fortement magnétisées. Dans la mesure où on peut en juger, et tout comme dans les étoiles, la présence de champ magnétique aux échelles galactiques semble être la règle plutôt que l'exception.

Dans les environs galactiques du système solaire, le champ magnétique interstellaire atteint une intensité d'environ 0.6nT, montant à quelques nT près du centre galactique. Ces valeurs semblent typiques des galaxies spirales, dont les champs se distribuent dans l'intervalle 0.5–1.5nT, et atteignant localement 3nT dans les régions de plus hautes densités dans les bras spiraux. Les champs magnétique galactiques globaux les plus intenses atteignent quelques nT dans les galaxies de type “starburst”. Ces valeurs peuvent sembler très faibles, mais elles influent fortement sur la formation des étoiles, sur la distribution et le spectre des rayons cosmiques, et comme agent pouvant équilibrer la gravité dans le milieu interstellaire.

Considérant que toutes les étoiles semblent magnétisées à un degré plus ou moins élevé, et que beaucoup d'étoiles perdent de la masse via des vents —ou en explosant,— il n'est peut-être pas surprenant de mesurer du champ magnétique dans le milieu interstellaire. La Figure 5.9 montre un tracé de l'orientation du champ magnétique de notre galaxie, tel que reconstruit à partir de mesures de la polarisation du rayonnement micro-onde par la poussière du milieu interstellaire. La structure du champ galactique est très complexe et s'étend loin hors du plan du disque, sous la forme de “bulles” et de grands “arcs”. On remarque cependant, dans le plan galactique même (forte émission, en orange-rouge), une forte tendance du champ à être contenu dans ce plan. Ce genre d'organisation spatiale bien définie aux échelles galactiques n'est pas limité à la Voie Lactée, mais se retrouve dans la plupart des galaxies spirales. La Figure 5.10 en montre un exemple, sous la forme d'isocontours d'émission radio et de vecteurs indiquant la direction de polarisation, superposés à une image optique de la galaxie spirale M51.

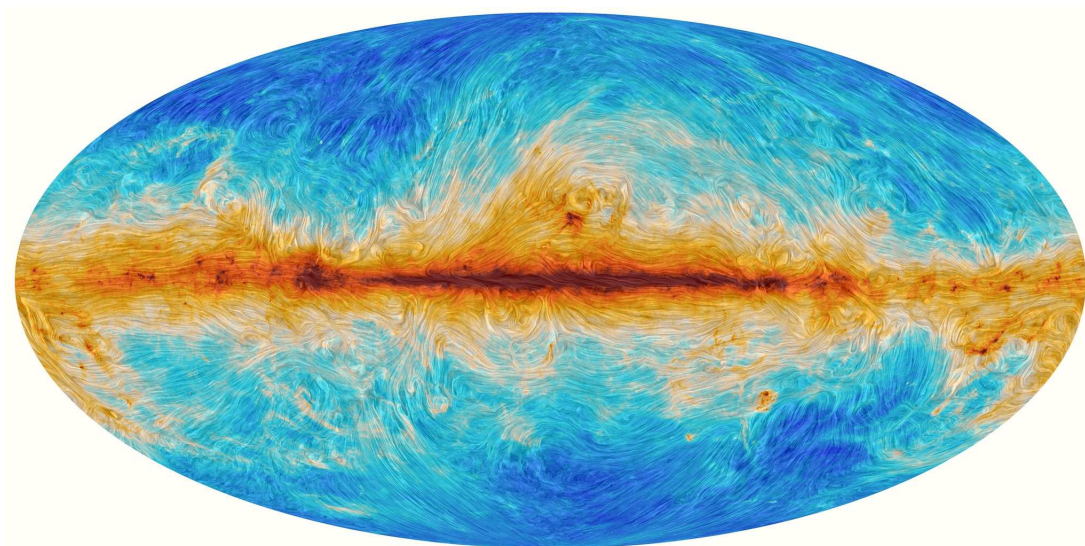


Figure 5.9: Non, ce n'est pas une oeuvre de van Gogh; mais plutôt une image de l'émission micro-onde (combinaison d'observations à 353, 545 et 857 GHz) par la poussière de la Voie Lactée, par le télescope spatial Planck (ESA). La texture van Goghienne superposée à l'échelle de couleur trace l'orientation du plan de polarisation de l'émission micro-onde, due à un alignement des grains (non-sphériques) par le champ magnétique galactique. Image disponible en haute résolution sur le site Web du cours, et téléchargée du site Web de l'ESA: www.esa.int/spaceinimages/Images/2015/02/Polarised_emission_from_Milky_Way_dust

De tels champs, organisés de manière cohérente aux échelles galactiques, sont fort probablement produits par un mécanisme dynamo n'étant fondamentalement pas si différent de celui produisant les champs magnétiques dans les étoiles de type solaire. Aux mesures directes doivent s'ajouter des indications indirectes, comme la collimation des jets galactiques, et certains phénomènes hautement énergétiques observés dans les quasars et les coeurs de galaxies actives. À l'heure actuelle, les modèles physiques les plus crédibles pour expliquer ces phénomènes impliquent tous des champs magnétiques.

Au niveau du milieu intergalactique, les indications de la présence de champs magnétiques sont indirectes, et suggèrent une limite supérieure de $\sim 10^{-3}$ nT sur des échelles de l'ordre de 100Mpc ou plus. De tels champs magnétiques pourraient être primordiaux ou avoir été entraînés dans l'environnement intergalactique par des vents émanant des galaxies mêmes.

5.2 Une dynamo mécanique simple

La conversion inductive d'énergie mécanique en énergie électromagnétique n'a vraiment rien de très exotique; elle est effectuée sans problème chaque jour dans tous les coins de la planète, plus spécifiquement dans chaque centrale hydroélectrique, nucléaire, ou éolienne, produisant ainsi l'électricité que nous consommons si avidement. Le simple exemple considéré ici illustre très bien le fondement électromagnétique de la chose, et s'avère de plus à présenter plusieurs caractéristiques qui referont surface dans les dynamos astrophysiques considérées plus loin.

Parmi les innombrables inventions pratiques de Michael Faraday (1791–1867), on compte un générateur électrique DC basé sur la rotation d'un disque métallique conducteur traversé par un champ magnétique. La Figure 5.11(A) en illustre schématiquement le design: un disque circulaire de rayon a monté sur un essieu tourne à vitesse angulaire ω via un forçage mécanique externe, e.g., Faraday qui tourne une manivelle. Un champ magnétique vertical est appliqué perpendiculairement au disque. Les porteurs de charges électriques libres dans le disque ressen-

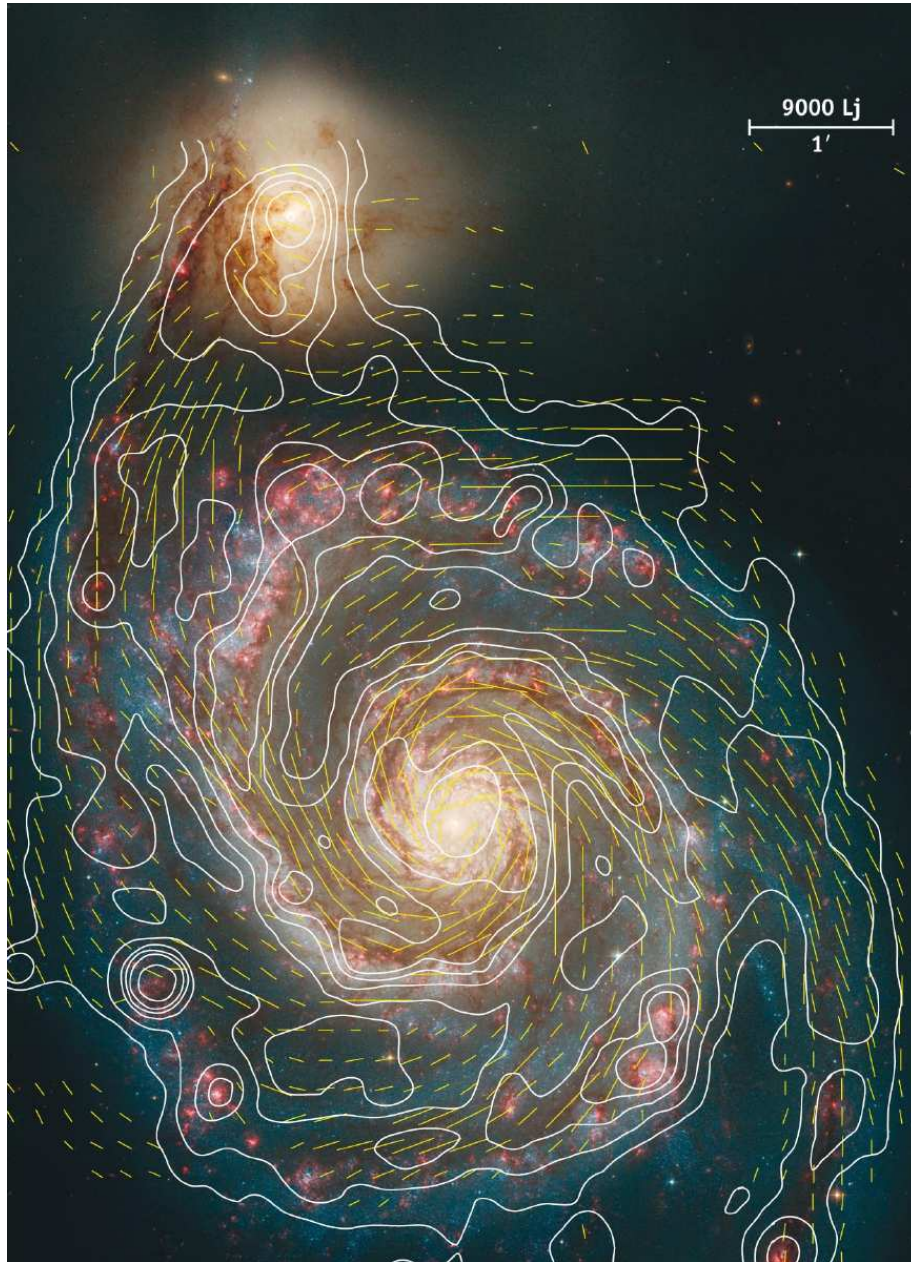


Figure 5.10: Image optique (Hubble) avec contours d'émission radio à $\lambda = 6$ cm (en blanc) et orientation de la polarisation (segments oranges, dans les deux cas provenant d'observations au VLA). On notera l'organisation aux grandes échelles suivant la structure des bras en spirale. Image tirée de l'article de revue de Rainer Beck sur *Scholarpedia*, cité en bibliographie en fin de chapitre.

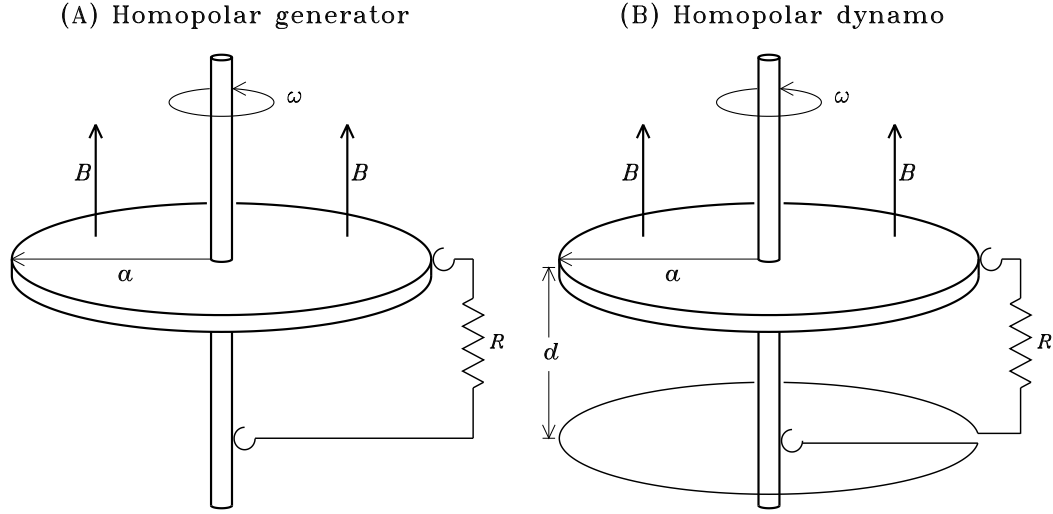


Figure 5.11: Un générateur homopolaire (en A) et une dynamo homopolaire (en B). Un champ magnétique externe B traverse un disque conducteur en rotation, produisant ainsi une force électromotrice qui propulse un courant électrique radial dans le plan du disque si le bord de ce dernier est connecté à son axe à l'aide d'un fil et de contacts lubrifiés, formant ainsi un circuit fermé de résistance R . La seule différence entre ces deux dispositifs est que dans le cas de la dynamo, le fil connectant le bord du disque à son axe est enroulé de manière à former une boucle dans un plan parallèle au disque, produisant ainsi un champ magnétique secondaire traversant également ce dernier (voir texte).

tiront conséquemment une force de Lorentz $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ où, initialement du moins, \mathbf{v} est entièrement dû à la rotation du disque. Travaillant en coordonnées cylindriques (s, ϕ, z) on peut donc écrire:

$$\mathbf{v} = (\omega s)\hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad \mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{e}}_z, \quad (5.3)$$

d'où

$$\mathbf{F} = (q\omega s B_0)\hat{\mathbf{e}}_s. \quad (5.4)$$

Considérons maintenant le circuit électrique formé en connectant le bord du disque à l'essieu, à l'aide de contacts sans friction, afin de ne pas freiner la rotation. Si le contact sur l'essieu est à l'extérieur de la région sous influence du champ magnétique, dans tout le circuit la force magnétique ne joue que dans le disque, où on produit donc une force électromotrice:

$$\mathcal{E} = \oint_{\text{circuit}} \left(\frac{\mathbf{F}}{q} \right) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_0^a \omega B_0 s ds = \frac{\omega B_0 a^2}{2}. \quad (5.5)$$

Négligeant pour le moment l'autoinductance du circuit, le courant s'y écoulant est simplement donné par $I = \mathcal{E}/R$. Ce dispositif est appelé *générateur homopolaire*. Une modification en apparence mineure peut transformer ce générateur en une *dynamo homopolaire*, soit un dispositif permettant l'amplification d'un champ magnétique et des courants électriques lui étant associés, via la Loi d'Ampère. Plutôt que de connecter le circuit directement au bas de l'essieu, comme sur la 5.11(A), on forme avec le fil une boucle perpendiculaire à l'essieu avant d'établir le contact électrique, comme l'illustre la Figure 5.11(B).

Sortez la main droite de votre poche (ou de votre nez) et vérifiez que le courant électrique circulant dans cette boucle produira un champ magnétique secondaire B_* orienté dans la même direction que le champ magnétique appliqué extérieurement, et se superposant donc à ce dernier. Indépendamment du détail de la géométrie du système, le flux magnétique à travers le disque

associé à ce champ secondaire sera linéairement proportionnel au courant circulant dans la boucle:

$$MI = \Phi = \pi a^2 B_* , \quad (5.6)$$

où la constante de proportionnalité M est l'inductance, et la seconde égalité résulte d'avoir supposé le champ secondaire constant en intensité et partout perpendiculaire au disque. C'est une approximation, mais ce qui est vraiment important pour tout ce qui suit c'est que $B_* \propto I$.

Établissons maintenant une équation différentielle décrivant l'évolution temporelle du courant I , prenant en considération cette fois la force contre-électromotrice associée à la self-inductance du circuit; ceci est nécessaire puisque \mathbf{B} , et donc aussi le courant I , ne sont plus stationnaires:

$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = RI , \quad (5.7)$$

où L est le coefficient de self-inductance. Substituant les éqs. (5.5) et (5.6) dans l'expression ci-dessus conduit à:

$$L \frac{dI}{dt} = \frac{\omega a^2}{2} \left(B_0 + \frac{MI}{\pi a^2} \right) - RI , \quad (5.8)$$

indiquant que le courant —et donc le champ magnétique— pourra croître dans le temps en autant qu'initialement,

$$\frac{\omega a^2 B_0}{2} > RI , \quad (5.9)$$

ce qui sera certainement le cas puisque $I = 0$ à $t = 0$. On peut imaginer en arriver à un point où le champ secondaire dépasse en intensité le champ appliqué B_0 , dans lequel cas on peut alors “déconnecter” B_0 ; l'éq. (5.8) se réduit alors à:

$$L \frac{dI}{dt} = \left(\frac{\omega M}{2\pi} - R \right) I , \quad (5.10)$$

qui s'intègre facilement:

$$I(t) = I(t_*) \exp \left[\frac{1}{L} \left(\frac{\omega M}{2\pi} - R \right) t \right] . \quad (5.11)$$

Ce résultat nous indique que le courant —et donc le champ magnétique— ne pourra croître que si la vitesse angulaire de rotation du disque dépasse une valeur critique donnée par:

$$\omega > \omega_c = \frac{2\pi R}{M} . \quad (5.12)$$

Nous ne venons pas ici d'inventer une variante sur le thème du mouvement perpétuel. L'énergie magnétique associée au champ magnétique amplifié provient des biceps du pauvre étudiant gradué engagé pour tourner la manivelle et garder ω à une valeur constante, Faraday étant décédé depuis déjà un bon bout de temps. Je vous laisse vérifier qu'une fois que les charges commencent à se déplacer dans le disque, la force de Lorentz développe une composante dans la direction $-\phi$ à laquelle est associé un couple de torsion tendant donc à ralentir la rotation; c'est essentiel, puisque c'est le terme en $-\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}$ dans l'éq. (2.40) qui est responsable du transfert d'énergie vers \mathbf{B} .

Faraday ne s'en serait probablement jamais douté, mais nous retrouverons plusieurs caractéristiques de cette dynamo homopolaire dans les dynamos astrophysiques étudiées dans ce qui suit, notamment:

1. Il existe une vitesse angulaire critique qui doit être dépassée pour que l'induction surpasse la dissipation Ohmique du circuit, permettant alors la croissance exponentielle du champ magnétique une fois que B_0 est déconnecté.
2. Ce ne sont pas tous les circuits connectant le bord du disque à l'essieu qui produiront cet effet d'amplification; si, par exemple, la boucle avait été enroulée dans le sens contraire autour de l'essieu, le champ induit se serait opposé au champ appliqué;

3. Le champ appliqué B_0 n'est requis que pour enclencher le processus d'amplification.
4. En bout de ligne, la dynamo homopolaire n'est qu'un dispositif permettant de convertir l'énergie mécanique en énergie (électro)magnétique.

Notre défi est donc de produire le même effet d'amplification dans un fluide magnétisé. Dans le régime MHD tout se joue dans le terme d'induction $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ au membre de droite de l'équation d'induction (2.9). Sous sa forme la plus simple, le *problème dynamo* consiste donc à trouver un écoulement \mathbf{u} qui puisse amplifier, ou du moins soutenir, un champ magnétique contre la dissipation Ohmique —le second terme au membre de droite de l'équation d'induction. Bon nombre d'écoulements sont en mesure d'amplifier un champ magnétique durant une courte période de temps, au bout de laquelle la dissipation ohmique l'emporte et \mathbf{B} disparaît. Il faudra donc formuler une définition plus contraignante: un écoulement sera considéré une dynamo si $\mathcal{E}_B > 0$ sur des temps au moins aussi long que le temps caractéristique diffusif du problème, et ce sans apport externe d'énergie magnétique via les frontières du domaine —le fameux terme surfacique $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = 0$ au membre de droite de l'éq. (2.40).

Il convient également de distinguer la version *cinématique* du problème dynamo, dans le cadre de laquelle on recherche simplement un écoulement \mathbf{u} ayant les caractéristiques requises pour conduire à une amplification du champ magnétique, sans s'inquiéter de son support dynamique ou de la rétroaction du champ magnétique via la force de Lorentz. Nous nous limiterons effectivement à ce régime dans presque tout le présent chapitre.

5.3 Le théorème de Cowling

Même en régime cinématique, tester une à une toutes les configurations imaginables d'écoulements astrophysiques dans le but d'en vérifier les propriétés dynamos n'est évidemment pas jouable, d'autant plus que la majorité des systèmes astrophysiques d'intérêt sont caractérisés par des nombres de Reynolds magnétique très élevés, ainsi que des temps de dissipation Ohmique très longs (voir Tableau 2.1). Il est cependant possible de disqualifier *a priori* de vastes classes d'écoulements caractérisées par certaines symétries. Ces démonstrations sont appelées *théorèmes anti-dynamos*, et nous en considérons ici un des plus pertinents au contexte astrophysique.

Le théorème anti-dynamo dit de Cowling (T.G. Cowling, 1906–90) revêt une importance historique particulière, puisque qu'il disqualifie les écoulements 3D axisymétriques, qui sont précisément le genre d'écoulements observés aux plus grandes échelles spatiales dans les étoiles, disques d'accrétion et disques galactiques. Il existe au moins trois preuves mathématiques formelles distinctes du théorème de Cowling, mais on peut en fait y arriver de manière intuitivement satisfaisante¹.

On suppose d'entrée de jeu qu'il n'existe aucune source de champ magnétique extérieure au domaine spatial considéré. On considère l'action inductive d'un écoulement 3D stationnaire mais axisymétrique sur un champ magnétique également 3D et axisymétrique. Travaillant en coordonnées sphériques polaires, on a donc:

$$\mathbf{u}(r, \theta) = \underbrace{\frac{1}{\varrho} \nabla \times (\Psi(r, \theta) \hat{\mathbf{e}}_\phi)}_{\equiv \mathbf{u}_p} + \varpi \Omega(r, \theta) \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (5.13)$$

$$\mathbf{B}(r, \theta, t) = \underbrace{\nabla \times (A(r, \theta, t) \hat{\mathbf{e}}_\phi)}_{\equiv \mathbf{B}_p} + B(r, \theta, t) \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (5.14)$$

où $\varpi = r \sin \theta$. Ici le potentiel vecteur A n'a qu'une composante toroidale décrivant la composante magnétique poloidale, la fonction d'écoulement Ψ définit l'écoulement dans les plans

¹Voir l'Annexe C pour une démonstration formelle d'un second théorème anti-dynamo, dit de Zeldovich; la logique physique de sa démonstration est très semblable à une des preuves formelles du théorème de Cowling.

méridiens $[r, \theta]$, et Ω est la vitesse angulaire (en rad s^{-1}). Notez que la forme de l'éq. (5.13) assure que $\nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) = 0$, satisfaisant ainsi la conservation de la masse dans un écoulement compressible stationnaire.

Il s'agit maintenant de séparer l'équation d'induction en deux équations, décrivant l'évolution temporelle des composantes scalaires 2D A et B . L'idée est de substituer les éqs. (5.13)—(5.14) dans l'équation d'induction, et de regrouper en une équation tous les termes orientés dans la direction $\hat{\mathbf{e}}_\phi$, et dans une autre les termes orientés perpendiculairement à cette direction. Puisque ces deux groupes de termes sont orthogonaux, ils doivent s'annuler séparément, ce qui conduit aux deux équations aux dérivées partielles suivantes:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_p \cdot \nabla \right) (\varpi A) = \varpi \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) A, \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_p \cdot \nabla \right) \left(\frac{B}{\varpi} \right) &= \frac{\eta}{\varpi} \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) B \\ &\quad - \left(\frac{B}{\varpi} \right) \nabla \cdot \mathbf{u}_p + \mathbf{B}_p \cdot \nabla \Omega, \end{aligned} \quad (5.16)$$

où on a supposé une diffusivité magnétique η constante, et \mathbf{B}_p et \mathbf{u}_p sont des raccourcis notationnels pour le champ magnétique poloidal et l'écoulement méridien. On remarque que le potentiel vecteur A évolue d'une manière complètement découplée de la composante magnétique toroidale B , cette dernière étant absente du membre de droite de l'éq. (5.15). Ce n'est pas le cas avec l'évolution de la composante toroidale, qui réagit à la présence du champ poloidal via le terme de cisaillement $\propto \nabla \Omega$.

Les membres de gauche des deux expressions ci-dessus sont des dérivées Lagrangienne, mesurant les variations de A et B dans un élément de fluide se déplaçant avec l'écoulement méridien. Le premier terme au membre de droite de chacune est l'ennemi, soit la dissipation Ohmique. Le terme suivant au membre de droite de l'éq. (5.16) disparaît pour un écoulement incompressible, et demeure négligeable pour un écoulement subsonique. Le dernier terme, enfin, est un terme source, dans le sens qu'il peut conduire à une croissance de B , *tant que A est présent*. C'est là exactement la situation du cisaillement d'un champ poloidal par la rotation différentielle, que nous avons considérée à la §2.4, avec une importante exception: ici la dissipation est incluse, et donc le champ poloidal ne sera plus constant (cf. les éqs. (2.34)—(2.35)). Or, il n'y a aucun terme source inductivement équivalent à ce terme de cisaillement au membre de droite de l'éq. (5.15), qui gouverne l'évolution de A . Ceci implique donc que A —et donc la composante poloidale du champ magnétique— devra inexorablement se dissiper, après quoi B devra en faire de même puisqu'il n'y aura alors plus de terme source au membre de droite de l'éq. (5.16).

On en conclut qu'un écoulement axisymétrique ne peut soutenir un champ magnétique axisymétrique face à la dissipation Ohmique, et donc ne peut agir comme une dynamo pour un tel champ magnétique. Le théorème de Cowling n'est pas spécifique à la géométrie sphérique, mais s'applique à tout système écoulement+champ magnétique où \mathbf{u} et \mathbf{B} sont invariants sous translation le long du même axe de coordonnées.

Il s'agit donc clairement d'introduire une composante non-axisymétrique à l'écoulement \mathbf{u} . Que ce soit dans le cas d'une étoile, d'un disque d'accrétion ou même d'une galaxie, au niveau des plus grandes échelles spatiales, c'est difficile à justifier; mais aux petites échelles spatiales c'est plus prometteur, les meilleurs candidats étant:

1. dans les étoiles: la turbulence associée à la convection thermique
2. dans les disques d'accrétion: la turbulence associée au développement nonlinéaire de l'instabilité magnétorotationnelle de Balbus-Hawley (§4.5.1).
3. dans les disques galactique: la turbulence produite par les explosions supernovas.

La turbulence, c'est déjà compliqué en mode purement hydrodynamique, alors imaginez en magnétohydrodynamique, dans un environnement stratifié par la gravité et en rotation... Cependant, ce qui nous sauve ici c'est la très grande disparité d'échelles entre le champ magnétique aux échelles du système, que nous cherchons à modéliser, et cette composante turbulente de l'écoulement dont l'effet inductif s'avère essentiel pour contourner le théorème de Cowling.

5.4 Dynamos en champs moyens

La forme même de l'équation d'induction magnétohydrodynamique (2.9) suggère qu'en présence d'un écoulement vigoureusement turbulent aux petites échelles spatiales, le terme inductif $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ devrait naturellement conduire à la production d'une composante magnétique aux échelles spatiales caractérisant l'écoulement \mathbf{u} . Cependant, sous certaines conditions, la turbulence aux petites échelles spatiales peut également conduire à la production de champ magnétique structuré aux grandes échelles spatiales. C'est en fait l'équivalent de la cascade inverse propulsant les écoulements aux grandes échelles dans un fluide en rotation, comme l'a vu à la §1.5.5. Pour comprendre comment tout cela fonctionne en MHD, il nous faudra donc appliquer à l'équation d'induction la procédure de Reynolds introduite à la §1.5.4 dans un contexte purement hydrodynamique.

5.4.1 L'électrodynamique en champs moyens

L'idée fondamentale ici est de décomposer les variables du problème en une partie moyenne, qui varie sur une échelle caractéristique L comparable à la taille du système physique considéré, et une partie fluctuante à une échelle spatiale $\lambda \ll L$:

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}' , \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{b}' . \quad (5.17)$$

L'opérateur de moyenne peut être défini en terme d'une moyenne spatiale, temporelle, ou même d'une moyenne d'ensemble. Aux fins de ce qui suit il est plus naturel de considérer une moyenne spatiale sur une échelle intermédiaire ℓ :

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\ell^3} \int_V A \, d\mathbf{x} . \quad (5.18)$$

qui éventuellement deviendra une moyenne zonale, mais n'anticipons pas à outrance... En présence d'une bonne séparation d'échelles, dans le sens que

$$\lambda \ll \ell \ll L , \quad (5.19)$$

cette décomposition implique que $\langle \mathbf{u}' \rangle = \langle \mathbf{b}' \rangle = 0$. Rappelons-nous qu'il ne s'agit pas ici d'une linéarisation, dans le sens qu'aucune contrainte n'est introduite sur les grandeurs relatives des composantes moyennes et fluctuantes.

On substitue maintenant l'éq. (5.17) dans l'équation d'induction (2.9) et on applique l'opérateur de moyenne, ce qui conduit à une équation d'évolution pour la composante moyenne du champ magnétique:

$$\boxed{\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \mathcal{E} - \eta \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle)} . \quad (5.20)$$

Si maintenant on soustrait cette expression de l'équation d'induction résultant de la substitution de (5.17) dans (2.9) *sans* en voir pris la moyenne, on obtient une équation d'évolution pour la composante fluctuante du champ magnétique:

$$\frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{u} \rangle \times \mathbf{b}' + \mathbf{u}' \times \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{G} - \eta \nabla \times \mathbf{b}') , \quad (5.21)$$

où on a défini

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle, \quad \text{et} \quad \mathbf{G} = \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' - \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle. \quad (5.22)$$

Le résultat crucial ici est que l'éq. (5.20) contient maintenant un terme source, $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, déterminé par la moyenne des corrélations croisées entre les fluctuations de vitesse et de champ magnétique (un peu comme dans le cas du tenseur des stress de Reynolds, $\langle u'_i u'_j \rangle$). Il est important de comprendre que ce terme ne sera pas nécessairement nul même si les moyennes individuelles de \mathbf{u}' et \mathbf{b}' le sont. Le terme $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ est appelé *force électromotrice moyenne*, et jouera un rôle central dans tout ce qui suit.

Bon, toute l'idée de l'approche statistique à la turbulence est d'éviter d'avoir à composer explicitement avec les petites échelles. Donc pas question d'essayer de solutionner explicitement les éqs. (5.20) et (5.21) comme un système couplé. Nous faisons cependant alors face à un problème familier: l'éq. (5.20) est en soi un système de trois équations différentielles, une par composante de $\langle \mathbf{B} \rangle$, mais qui implique six inconnues, soit les trois composantes de $\langle \mathbf{B} \rangle$ et les trois de \mathbf{b}' (laissant \mathbf{u}' hors du portrait pour le moment). Trois équations, six inconnues; il faudra donc, pour solutionner l'éq. (5.20), trouver une manière d'exprimer $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ en terme de $\langle \mathbf{u} \rangle$ et $\langle \mathbf{B} \rangle$. C'est essentiellement l'approche que nous avons suivie à la §1.5.4 en exprimant le tenseur des stress de Reynolds comme une fonction de l'écoulement moyen.

Il faut d'abord noter que l'éq. (5.21) est *linéaire* en \mathbf{b}' , avec le terme $\nabla \times (\mathbf{u}' \times \langle \mathbf{B} \rangle)$ agissant comme terme source. Par conséquent il doit exister une relation linéaire entre \mathbf{B} et \mathbf{b}' , et donc également entre \mathbf{B} et $\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle$. Cette dernière relation peut s'exprimer sous la forme du développement en série suivant:

$$\mathcal{E}_i = a_{ij} \langle B \rangle_j + b_{ijk} \frac{\partial \langle B \rangle_j}{\partial x_k} + c_{ijkl} \frac{\partial^2 \langle B \rangle_j}{\partial x_j \partial x_k} + \dots, \quad (5.23)$$

où la convention de sommation sur les indices répétés est en vigueur. Les tenseurs \mathbf{a} , \mathbf{b} , etc, sont des tenseurs qui peuvent dépendre de $\langle \mathbf{u} \rangle$, de la statistique de l'écoulement aux petites échelles \mathbf{u}' , et possiblement de la diffusivité η —mais *pas* de $\langle \mathbf{B} \rangle$. C'est dans ce sens qu'on peut dire que les éqs. (5.20) et (5.23) forment maintenant un ensemble complet et fermé d'équations d'évolution pour $\langle \mathbf{B} \rangle$.

La convergence du développement en série ci-dessus sera assurée dans les situations où une bonne séparation d'échelles caractérise le système. Dans de tels cas on peut légitimement s'attendre à ce que chacune des dérivées d'ordre successivement plus élevé dans l'éq. (5.23) est plus petite que la précédente par un facteur de l'ordre de $\lambda/L \ll 1$. Avec un peu de chance, on pourrait espérer que le membre de droite de l'éq. (5.23) soit dominé par les quelques premiers termes.

Conservons les deux premiers termes du développement tensoriel (5.23) et séparons les tenseurs en leurs parties symétriques et antisymétriques (un peu comme on l'avait fait dans le cas du cisaillement plan introduit à la §1.2.3):

$$\boldsymbol{\xi} = \underbrace{\boldsymbol{\alpha} \cdot \langle \mathbf{B} \rangle}_{\text{Effet } \alpha} + \underbrace{\boldsymbol{\gamma} \times \langle \mathbf{B} \rangle}_{\text{Pompage turbulent}} - \underbrace{\boldsymbol{\beta} \cdot (\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle)}_{\text{Diffusivité turbulente}} - \boldsymbol{\delta} \times (\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) - \boldsymbol{\kappa} \cdot (\nabla \langle \mathbf{B} \rangle) \quad (5.24)$$

Ici le tenseur $\boldsymbol{\alpha}$ correspond à la partie symétrique du tenseur \mathbf{a} , le vecteur $\boldsymbol{\gamma}$ regroupe ses trois composante antisymétriques indépendantes, et le tenseur $\boldsymbol{\beta}$ est la partie antisymétrique du tenseur \mathbf{b} :

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}), \quad (5.25)$$

$$\gamma_k = -\frac{1}{2}\epsilon_{kij}a_{ij}, \quad (5.26)$$

$$\beta_{ij} = \frac{1}{4}(\epsilon_{ikl}b_{jkl} + \epsilon_{jkl}b_{ikl}), \quad (5.27)$$

où ϵ_{ijk} est le tenseur de Levi-Civita². Les deux derniers termes au membre de droite de (5.24) héritent des autres composantes du tenseur \mathbf{b} , et ne seront plus considérées dans ce qui suit, la quasi-totalité des modèles dynamo en champ moyen sur le marché se limitant aux trois premiers termes au membre de droite de l'éq. (5.24).

5.4.2 Parenthèse terminologique sur la statistique de la turbulence

Avant d'aller plus loin un petit rappel terminologique est requis concernant certaines propriétés statistiques d'un écoulement turbulent. La statistique d'un champ de vitesse turbulent peut se quantifier en termes de la fonction de *densité de probabilité* (ci-après FDP) de ses composantes et/ou des corrélations entre ses composantes (e.g., $u'_x u'_y$). Considérons par exemple la composante en x de \mathbf{u}' ; la FDP $f(u'_x)du'_x$ mesure la probabilité de mesurer, dans un échantillonnage de u'_x , une valeur dans l'intervalle $[u'_x, u'_x + du'_x]$. Il est important de réaliser qu'une telle FDP existe et peut couvrir une grande plage en u'_x , même si $\langle u'_x \rangle = 0$. Introduisons maintenant les définitions suivantes: Un champ vectoriel (turbulent) est dit:

1. **stationnaire**, si les FDPs de ses composantes sont indépendantes du temps;
2. **homogène**, si les FDPs de ses composantes sont indépendantes de la position (i.e., in-variantes sous translation);
3. **isotropes**, si les FDPs de ses composantes sont indépendantes de l'orientation du système de coordonnées (i.e., invariantes sous rotation);
4. **symétriques sous réflexion**, si les FDPs de ses composantes sont invariantes sous changement de parité, i.e., sous passage d'un système de coordonnées "main droite", à "main gauche" (e.g., $x \rightarrow -x$).

5.4.3 L'effet- α

Commençons par examiner de plus près la contribution ($\mathcal{E}^{(1)}$) à la force électromotrice turbulente totale \mathcal{E} provenant du premier terme au membre de droite de l'éq. (5.24), impliquant le tenseur d'ordre deux α :

$$\mathcal{E}^{(1)} = \alpha \cdot \langle \mathbf{B} \rangle . \quad (5.28)$$

La nature du tenseur α se perçoit le plus facilement dans une situation où l'écoulement aux petites échelles, \mathbf{u}' est isotrope. Le tenseur α ne peut alors qu'être isotrope lui aussi, i.e., $\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}$, ce qui réduit l'éq. (5.28) à

$$\mathcal{E}^{(1)} = \alpha \langle \mathbf{B} \rangle . \quad (5.29)$$

Cette force électromotrice produira une densité de courant moyenne donnée par la Loi d'Ohm:

$$\mathbf{j}^{(1)} = \alpha \sigma_e \langle \mathbf{B} \rangle , \quad (5.30)$$

où σ_e est la conductivité électrique. Un α non-nul implique donc la présence d'un courant électrique moyen *parallèle* au champ magnétique moyen; c'est le très fameux *effet- α* . On est

²Ce tenseur est défini de la manière suivante: $\epsilon_{ijk} = 0$ si i, j, k ne sont pas tous distincts, et $\epsilon_{ijk} = +1$ ou -1 si i, j, k sont tous distincts et ordonnés de manière cyclique ou acyclique respectivement (i.e. nombre pair ou impair de permutations de deux indices, à partir de $ijk = 123$). Une identité tensorielle particulièrement utile ici est:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} ,$$

avec comme toujours sommation implicite sur les indices répétés, et δ_{ij} est le delta de Kronecker habituel, i.e., $\delta_{ij} = 0$ sauf si $i = j$, dans lequel cas $\delta_{ij} = 1$. Rappelons également qu'en notation indicielle,

$$\epsilon_{ijk} A_j B_k \equiv \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad \text{et} \quad \epsilon_{ijk} \partial_j B_k \equiv \nabla \times \mathbf{B} .$$

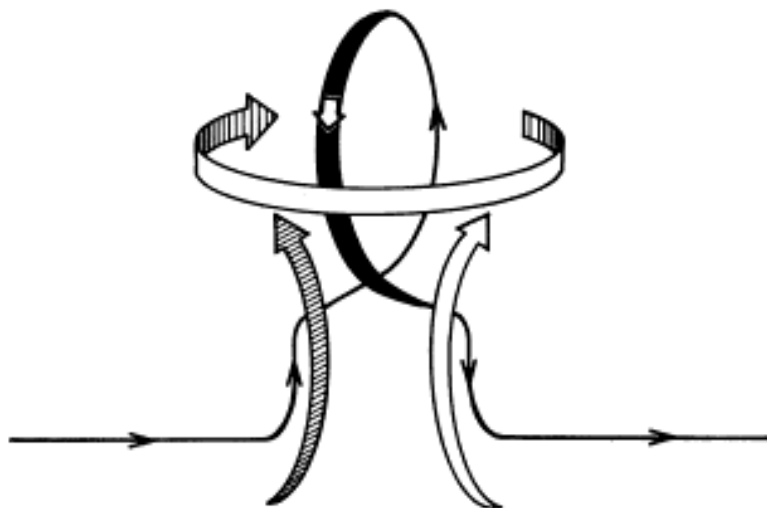


Figure 5.12: Représentation schématique d'une ligne de champ magnétique entraînée par un courant ascendant cyclonique. La boucle ayant pivoté ici de 90 degrés par rapport au plan de la page, la règle de la main droite implique que la composante de courant électrique y étant associée pointe ici de la gauche vers la droite dans le plan de la page, soit dans la direction du champ magnétique uniforme initial. [tiré de: Parker 1970, *The Astrophysical Journal*, vol. **162**, Figure 1].

ici en présence d'une situation très différente de celle décrite par le terme $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ dans l'équation d'induction, pour lequel le courant induit (total) $\sigma_e(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ est *perpendiculaire* au champ magnétique (total).

Pausons pour examiner l'image physique de ce processus inductif telle qu'initialement proposée en 1955 par E.N. Parker —oui, le même Parker qui a pondé la solution de vent solaire transsonique du chapitre 3. On considère une bulle convective ascendante imbuée d'un mouvement cyclonique de rotation par rapport à son axe d'ascension, disons antihoraire vu du dessous. Dans la limite où le champ magnétique est gelé dans le fluide, cette bulle ascendante entrainera vers le haut toute ligne de champ la traversant horizontalement, tout en lui imposant une déformation hors du plan défini par la ligne de champ et la direction d'ascension; la Figure 5.12 illustre schématiquement cette double déformation. Supposons maintenant que la boucle, comme sur la Fig. 5.12, a été pivotée d'un quart de tour suite à cette déformation. Un courant électrique $\propto \nabla \times \mathbf{B}$ est associé à cette boucle, et pointe ici dans la même direction que le champ magnétique initialement horizontal. Ceci demeurera le cas tant que la rotation cyclonique de la boucle demeure inférieure à π , mais la composante zonale de ce courant pointerà en direction opposée si la rotation dépasse π . Cette dernière situation ne se produira pas si la déformation du champs toroidal demeure de relativement faible amplitude.

Imaginons maintenant, en géométrie sphérique, l'action d'un grand nombre de ces bulles convectives cycloniques apparaissant à des longitudes et temps aléatoires, en présence d'un champ magnétique purement toroidal, comme l'illustre la Fig. 5.13. Chacune de ces bulles produira une boucle ayant une projection non-nulle dans les plans méridiens $[r, \theta]$. Ici le champ toroidal et la cyclonicité changent tous les deux de signe d'un hémisphère à l'autre, donc dans les deux hémisphères la densité de courant ainsi produite pointerà dans la même direction zonale, ici celle du champ toroidal dans l'hémisphère Sud. Dans une telle situation, l'effet collectif de toutes les bulles cycloniques est donc de produire, via la Loi d'Ampère, une composante magnétique poloidale d'intensité proportionnelle à celle de la composante toroidale sous-jacente.

De toute évidence, pour que ce processus fonctionne, il est essentiel d'avoir une cohérence hémisphérique dans la direction de la torsion du champ magnétique toroidal. La cyclonicité

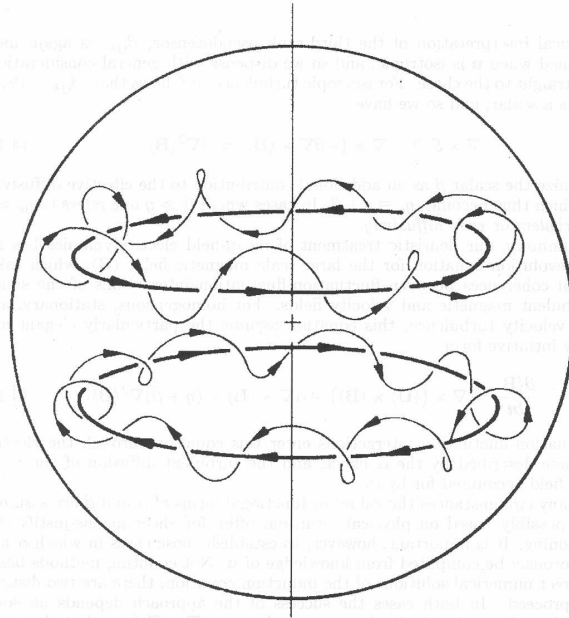


Figure 5.13: Représentation schématique d'un champ toroidal (traits épais) déformé par des bulles cycloniques, chacune déformant le champ toroidal en boucles dans les plans méridiens (traits minces). L'effet collectif de ces déformations est la production d'un champ torsadé auquel est associé une densité de courant ayant une composante pointant dans la direction du champ toroidal, indépendamment du signe de ce dernier. Une telle densité de courant produira une composante magnétique poloidale aux grandes échelles spatiales, en vertu de la Loi d'Ampère. [tiré de: Parker 1979, *Cosmical Magnetic Fields*, Oxford: Clarendon Press, p. 548].

imposée par la force de Coriolis est clairement un agent prometteur à cette fin. De manière plus mathématique, toute turbulence pour laquelle le tenseur α n'est pas invariant sous réflexion peut faire l'affaire. C'est le cas sur la Fig. 5.12, où il existe une forte corrélation entre le mouvement vertical divergeant et la rotation dans le plan horizontal, imposée par la force de Coriolis dans le régime $Ro \ll 1$. L'importance dynamique d'une telle corrélation est quantifiée par l'hélicité moyenne de l'écoulement turbulent, $\langle \mathbf{u}' \cdot (\nabla \times \mathbf{u}') \rangle$. On verra sous peu qu'il existe une relation directe entre l'hélicité et l'effet- α .

Une corrélation hémisphérique de type cyclonique est donc essentielle, mais n'est pas suffisante en soi; la déformation de lignes de champ par les bulles cycloniques doit demeurer relativement faible, sinon les courants induits se retrouveront à pointer dans toutes les directions, sans produire de densité de courant nette aux grandes échelles spatiales, comme ils le font sur la Fig. 5.13. Trois situations physiques distinctes peuvent satisfaire cette contrainte:

1. Une turbulence dont le temps de corrélation est significativement plus petit que son temps de retournement; la bulle cyclonique se dissipe alors sans avoir eu le temps de déformer excessivement le champ magnétique.
2. Un nombre de Reynolds magnétique $\ll 1$, impliquant que la ligne de champ n'est que faiblement gelée dans le plasma et donc ne se déforme que très peu sous l'action de l'écoulement;
3. Un champ magnétique suffisamment intense pour que la tension magnétique freine rapidement la déformation des lignes de champ.

Il existe quelques situations dans le cadre desquelles on peut calculer formellement la forme des fonctions scalaires α et β si les propriétés statistiques de \mathbf{u}' sont connues. En bref, ces

approches se basent sur un traitement de l'éq. (5.21) dans des situations où soit le terme \mathbf{G} , soit le terme $\propto \nabla \times \mathbf{b}'$, peut être omis au membre de droite. La bibliographie en fin de chapitre donne quelques bons points d'entrée dans cette littérature très technique. Malheureusement, les formes de la turbulence auxquelles correspondent ces régimes mathématiques ne correspondent pas vraiment à celles attendues dans les zones convectives solaire et stellaires. L'approche probablement la plus crédible est connue sous le nom de "Second-Order Correlation Approximation" (SOCA), applicable à la turbulence faiblement inhomogène et quasi-isotrope, et où en première approximation on simplifie les corrélations croisées entre les composantes turbulentes de l'écoulement en supposant:

$$\langle u'_j u'_k \rangle = \frac{1}{3} \langle (\mathbf{u}')^2 \rangle \delta_{jk}. \quad (5.31)$$

Ceci conduit à une forme diagonale simple pour le tenseur- α : $\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}$, et on peut montrer (c'est du costaud) que

$$\alpha = -\frac{1}{3} \tau_c \langle \mathbf{u}' \cdot (\nabla \times \mathbf{u}') \rangle \quad [\text{m s}^{-1}], \quad (5.32)$$

où τ_c est le temps de corrélation de l'écoulement turbulent. L'éq. (5.32) indique que l'effet- α est proportionnel à l'hélicité cinétique de la partie turbulente de l'écoulement. Retournez à la Fig. 5.12 pour vous convaincre que c'est exactement ce qui est requis pour que le processus opère tel que nous l'avions décrit.

Si on suppose maintenant que la faible inhomogénéité est due à la stratification, que le bris (léger) de la symétrie sous réflexion est dû à la force de Coriolis, et que le temps de vie des tourbillons turbulents est de l'ordre de leur temps de retournement, on peut montrer (encore du costaud!) que l'éq. (5.32) devient:

$$\alpha = -\frac{16}{15} \tau_c^2 \langle u'^2 \rangle \mathbf{\Omega} \cdot \nabla \ln(\rho u'), \quad (5.33)$$

où $u' = \sqrt{\langle \mathbf{u}'^2 \rangle}$ est la moyenne rms de la vitesse turbulente, et $\mathbf{\Omega}$ la rotation angulaire du système. Dans une zone convective stratifiée de type solaire/stellaire, les vitesses turbulentes sont en bonne première approximation indépendantes de la latitude et augmentent avec le rayon plus lentement que ne décroît la densité, ce qui implique $\nabla \ln(\rho u') < 0$. L'équation (5.33) "prédit" donc un effet- α variant en $\cos \theta$, positif (négatif) dans l'hémisphère solaire Nord (Sud), et d'intensité proportionnelle à la rotation de l'étoile. Cette dernière dépendance sur Ω est qualitativement cohérente avec l'augmentation observée de l'émission en Ca H+K avec le taux de rotation des étoiles de type solaire (viz. §5.1.3).

5.4.4 Le pompage turbulent

Examinons maintenant la contribution à la force électromotrice turbulente associée à la partie antisymétrique du tenseur α , dont les trois composantes indépendantes se retrouvent incorporées dans le vecteur γ :

$$\mathcal{E}^{(2)} = \boldsymbol{\gamma} \times \langle \mathbf{B} \rangle. \quad (5.34)$$

Ici le vecteur $\boldsymbol{\gamma}$ agit au membre de droite de l'équation d'induction pour le champ moyen (5.20) comme le ferait un écoulement s'ajoutant vectoriellement à l'écoulement moyen: $\langle \mathbf{u} \rangle + \boldsymbol{\gamma}$; c'est le *pompage turbulent*. Mais il ne s'agit pas ici d'un écoulement physique, dans le sens qu'il n'agit que sur le champ magnétique aux grandes échelles, étant une reformulation mathématique d'une partie de la force électromotrice turbulente.

Sous l'approximation SOCA, la vitesse de pompage turbulent est donnée par:

$$\boldsymbol{\gamma} = -\frac{\tau_c}{6} \nabla \langle (\mathbf{u}')^2 \rangle \quad [\text{m s}^{-1}], \quad (5.35)$$

Ce n'est que relativement récemment que le pompage turbulent commence à être inclus dans les modèles de dynamo en champs moyens du genre qui est discuté dans ce qui suit. Son rôle

pourrait cependant être important, en particulier parce sa composante radiale, typiquement dirigée vers le bas dans le gros de la zone convective en raison de la stratification, s'oppose à la flottaison magnétique et favorise ainsi l'accumulation des champs magnétiques aux grandes échelles à la base de la zone convective d'où originent les taches solaires. Une composante latitudinale au pompage peut également se matérialiser en présence de rotation, et atteindre des (pseudo-)vitesses de quelques mètres par seconde, et donc contribuer de manière significative à la migration équatoriale du champ magnétique toroidal, offrant donc une alternative aux ondes dynamos dans l'explication du diagramme papillon de l'émergence des taches.

5.4.5 La diffusivité turbulente

Passons maintenant au troisième terme au emmbre de droite de (5.24, soit tensoriel (5.23), soit

$$\mathcal{E}^{(3)} = \beta \cdot (\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) . \quad (5.36)$$

Comme dans le cas du tenseur α , une interprétation physique simple du tenseur β peut être encore une fois obtenue dans une situation où \mathbf{u}' est isotrope, dans lequel cas on aura $\beta_{jk} = \beta \delta_{jk}$ (ou encore, si on travaille directement avec l'éq. (5.23), $b_{ijk} = \beta \varepsilon_{ijk}$), où β est une fonction scalaire. On obtient alors

$$\mathcal{E}_i^{(3)} = -\beta (\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle)_i . \quad (5.37)$$

Revenant à l'équation d'induction en champs moyens (5.20), on constate que $\mathcal{E}^{(3)}$ ajoute une contribution au terme de dissipation Ohmique de $\langle \mathbf{B} \rangle$, la diffusivité nette devenant $\eta + \beta$, avec β la *diffusivité turbulente*. Pour une turbulence homogène et isotrope, on a :

$$\beta = \frac{1}{3} \tau_c \langle (\mathbf{u}')^2 \rangle \quad [\text{m}^2 \text{s}^{-1}] , \quad (5.38)$$

où τ_c est encore une fois le temps de corrélation de la turbulence. Cette expression demeure valide sous SOCA, β devenant une fonction de la position dans l'écoulement via la variation spatiale de \mathbf{u}' . L'équation (5.38) indique que la diffusivité turbulente est plus efficace quand la turbulence est plus vigoureuse (énergétiquement parlant), ce qui est intuitivement satisfaisant.

Un estimé basé sur la théorie de la longueur de mélange appliquée à la convection solaire suggère $u' \sim 10 \text{ m s}^{-1}$ et $\tau_c \sim 1$ mois au bas de la zone convective ($r/R \sim 0.7$), ce qui conduit à $\beta \sim 10^8 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Cette valeur est immensément plus grande que la diffusivité microscopique $\eta_c \sim 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, et donc on a $\beta \gg \eta$. De plus, le temps de diffusion magnétique (2.13) résultant de l'utilisation de β plutôt que η au dénominateur conduit maintenant à $\sim 10 \text{ yr}$ pour $\ell \sim 0.3R$, correspondant à l'épaisseur de la zone convective solaire. Ceci est maintenant du même ordre que la période du cycle magnétique, et suggère donc que la dissipation (turbulente) joue bel et bien un rôle important dans la MHD du cycle solaire.

5.5 Les équations dynamos en champ moyen

Récapitulons où nous en sommes: l'approche basée sur l'électrodynamique en champ moyen produit une équation d'évolution pour le champ moyen $\langle \mathbf{B} \rangle$ qui incorpore l'effet inductif des fluctuations aux petites échelles spatiales (turbulentes), en terme des corrélations pouvant exister entre les composantes magnétiques et l'écoulement à ces petites échelles. Pour une turbulence stationnaire, homogène et isotrope, cette équation prend une forme particulièrement simple, soit:

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \alpha \langle \mathbf{B} \rangle - (\eta + \beta) \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) , \quad (5.39)$$

qui, sous l'approximation SOCA, demeure valide pour une turbulence faiblement inhomogène et/ou faiblement anisotrope; les coefficients α et β s'expriment en fonction de la statistique de l'écoulement aux petites échelles selon les eqs. (5.32) et (5.38). Ceci peut conduire à une force électromotrice alignée au champ magnétique moyen, l'effet- α ; ainsi qu'à une dissipation

(turbulente) accélérée de ce même champ moyen. Impossible d’invoquer la première sans hériter de la seconde (“no free lunch”, comme disent nos voisins du Sud).

Les coefficients α et β sont en principe calculables dans certains régimes statistico-physiques spécifiques, mais qui (malheureusement) ne semblent guère applicables aux propriétés de la turbulence convective dans les étoiles. En pratique, la forme de ces coefficients est donc posée *a priori*, mais d’une manière qui incorpore certaines contraintes fondamentales pertinentes au contexte solaire/stellaire. Les modèles dynamos résultants de ces choix ne sont donc pas bâtis à partir de principes premiers, mais conservent une valeur descriptive indéniable. Comme les différents modèles développés plus bas le démontreront, il y a beaucoup à apprendre de ces dynamos en champs moyens.

5.5.1 Le nombre dynamo critique

Commençons par considérer une situation très simple où seule la turbulence contribue à l’induction, i.e., il n’y a pas d’écoulement aux grandes échelles ($\mathbf{u} = 0$). Supposons de plus que le champ magnétique aux grandes échelles est à force nulle³, autrement dit on peut écrire $\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle = K \langle \mathbf{B} \rangle$ (viz. l’éq. (2.31)). Si de plus on a $\beta \gg \eta$, alors il est facile de vérifier que l’éq. (5.39) se réduit alors à:

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = K(\alpha - K\beta) \langle \mathbf{B} \rangle . \quad (5.40)$$

Ceci accepte des solutions de la forme générale:

$$\langle \mathbf{B} \rangle(\mathbf{x}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \exp(K(\alpha - K\beta)t) . \quad (5.41)$$

Une amplification (exponentielle) du champ magnétique aux grandes échelles n’est ici clairement possible que si

$$\frac{\alpha}{K\beta} > 1 . \quad (5.42)$$

La combinaison adimensionnelle de constantes au membre de gauche définit le *nombre dynamo* (D), et le *nombre dynamo critique* (D_{crit}) est obtenu en remplaçant l’inégalité ci-dessus par un “=”. Se rappelant que que K à des unités de 1/longueur, on en conclut que les échelles spatiales les plus grandes qui peuvent être casées dans le système sont celles qui caractériseront le champ magnétique moyen; ce qui est tout à fait normal, puisque les plus grandes échelles sont les moins affectées par la dissipation Ohmique.

Revenant à notre dynamo homopolaire de la §5.2, et plus spécifiquement à l’éq. (5.10), on constate que α joue ici le rôle de la vitesse de rotation du disque, tandis que β joue celui de la résistance du circuit; et comme dans le cas de la dynamo homopolaire, l’induction turbulente (l’effet- α) doit dépasser un seuil critique pour vaincre la diffusivité turbulente (le β). Belle analogie!

5.5.2 Les ondes dynamos

Comme on l’a déjà discuté à la §5.1, la forme du diagramme papillon des taches solaires suggère que le système de flux toroidal dans l’intérieur solaire responsable de leur formation migre vers l’équateur à mesure que le cycle magnétique avance. Cette remarquable propriété peut être reproduite de manière naturelle dans le contexte de modèles de dynamos turbulentes simples, basés sur l’effet- α .

Considérons un système de coordonnées cartésiennes locales orientées de manière telle que le système est invariant en y ($\partial/\partial y = 0$), que l’on associera donc à la direction zonale dans un système sphérique, et avec x et y orientés dans les directions latitudinales et radiales,

³Le champ aux petites échelles, lui, n’est certainement pas à force nulle, sinon aucun transfert d’énergie de l’écoulement turbulent au champ magnétique n’est possible, en vertu de l’éq. (2.40).

respectivement. Il s'agit d'examiner, dans ce système, l'induction par un effet- α constant agissant conjointement avec un cisaillement vertical:

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \Omega z \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (5.43)$$

où Ω est constant [unités: s^{-1}]. On supposera de plus que les coefficients turbulents α [unités: m s^{-1}] et β ($\gg \eta$) [unités: $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$] sont également constants, et $\gamma = 0$. L'équivalent cartésien de l'éq. (5.14) prend alors la forme:

$$\langle \mathbf{B} \rangle(x, z, t) = \nabla \times (A(x, z, t)\hat{\mathbf{e}}_y) + B(x, z, t)\hat{\mathbf{e}}_y. \quad (5.44)$$

La substitution des éqs. (5.43) et (5.44) dans notre équation d'induction en champs moyens (5.39) conduit à:

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \beta \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right) = \alpha B, \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} - \beta \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} \right) = \Omega \frac{\partial A}{\partial x} - \alpha \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right). \quad (5.46)$$

Les termes aux membres de droite de ces deux équations sont les termes sources, deux associés à l'effet- α agissant à la fois sur le champ "toroidal" (B dans l'éq. (5.45)), ainsi que sur le champ "poloidal" (dérivées de A dans l'éq. (5.46)), et le troisième au cisaillement agissant sur le champ "poloidal" (comme à la §2.4). Ces termes sources peuvent, en principe, surpasser la dissipation Ohmique aux membres de gauche, et permettre l'amplification du champ magnétique.

Les équations (5.45)–(5.46) forment un système d'équations différentielles couplées à coefficients constants. Il est donc permis de rechercher des solutions prenant la forme d'ondes planes du genre:

$$\begin{bmatrix} A(x, z, t) \\ B(x, z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \exp[\lambda t + ik(z \cos \vartheta + x \sin \vartheta)]. \quad (5.47)$$

Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $k \geq 0$ et $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ sont des quantités données, la première correspondant au nombre d'onde de la perturbation harmonique, et la seconde à l'orientation du vecteur de propagation de l'onde dans le plan $[x, z]$. Substituant cette expression dans les éqs. (5.45)–(5.46) résulte en un système de deux équations algébriques couplées. Une solution de ce système (exprimé sous forme matricielle) exige que son déterminant soit nul, ce qui conduit à la relation de dispersion:

$$(\lambda + \beta k^2)^2 = \alpha k(\alpha k + i\Omega \sin \vartheta). \quad (5.48)$$

Il s'agit ici d'un polynôme quadratique (complexe) en λ , qui compte donc deux solutions:

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm} = & -\beta k^2 \pm \sqrt{\frac{|\alpha|k}{2}} \left\{ \left(\sqrt{\Omega^2 \sin^2 \vartheta + \alpha^2 k^2} + |\alpha|k \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. + i \operatorname{sign}(\Omega \alpha \sin \vartheta) \left(\sqrt{\Omega^2 \sin^2 \vartheta + \alpha^2 k^2} - |\alpha|k \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, \end{aligned} \quad (5.49)$$

obtenues en faisant bien attention à la manière appropriée de prendre la racine carrée d'une quantité complexe! Il est clair ici que la racine λ_- ne peut que produire une solution qui s'atténue avec le temps, donc nous ne pouvons compter que sur la racine λ_+ , qui conduira à des solutions sujettes à amplification si $\operatorname{Re}(\lambda_+) > 0$. Un examen attentif de l'éq. (5.49) conduit à la conclusion qu'une *onde dynamo* d'amplitude croissant exponentiellement peut exister dans un intervalle $0 < k < k_*$, où le nombre d'onde critique k_* est une des (six!) racines de l'équation

$$k_*^6 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} k_*^4 - \frac{\alpha^2 \Omega^2}{4\beta^4} \sin^2 \vartheta = 0. \quad (5.50)$$

Si $k_* \rightarrow 0$, la fenêtre dynamo disparaît, ce qui se produira quand $\alpha \rightarrow 0$, en accord avec le théorème de Cowling. Physiquement, c'est un résultat intuitivement satisfaisant, car on s'attend à ce que les perturbations de très courtes longueurs d'onde soit fortement amorties par la dissipation (termes proportionnels à β). Par contre, si k est trop petit, alors l'échelle caractéristique de $\langle \mathbf{A} \rangle$ devient très grande, et donc l'effet- α n'a pas un fort $\langle \mathbf{B} \rangle$ à se mettre sous la dent, ce qui freine l'effet dynamo quand $k \rightarrow 0$.

L'équation (5.50) peut être solutionnée de manière exacte comme un polynôme cubique en $\zeta \equiv k_*^2$. Cependant il nous suffira ici d'estimer k_* directement à partir de l'éq. (5.49) dans le cas où le terme de cisaillement domine au membre de droite de l'éq. (5.46), situation habituellement considérée la plus pertinente dans le cas du soleil et des étoiles. Ceci implique que $\Omega^2 \sin^2 \vartheta \gg \alpha^2 k^2$ dans l'éq. (5.49), et on a alors

$$\operatorname{Re}(\lambda_+) \simeq -\beta k_*^2 + \sqrt{\frac{|\alpha| k_*}{2}} \left(\sqrt{\Omega^2 \sin^2 \vartheta} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.51)$$

ce qui, pour un mode critique ($\operatorname{Re}(\lambda_+) = 0$) mène à

$$k_* \approx \left[\frac{|\alpha \Omega \sin \vartheta|}{2\beta^2} \right]^{1/3}. \quad (5.52)$$

On parle ici d'une "onde dynamo" car il est clair, selon l'éq. (5.49), qu'on aura ici $\operatorname{Im}(\lambda_+) \neq 0$. Il faut également noter que la direction de propagation de ces ondes dépend du signe du produit $\alpha \times \Omega$, et que le taux de croissance maximal résultera pour $\vartheta = \pi/2$, soit une onde dynamo se propageant dans la direction "latitudinale" x . Tout ça est en parfait accord avec la propagation de l'émergence des taches et régions actives observée dans le magnétogramme synoptique de la Fig. 5.3!

5.6 Les dynamos en champs moyens axisymétriques

On passe maintenant à une géométrie ressemblant plus à une étoile. Travaillant en coordonnées sphériques polaires (r, θ, ϕ) , notre domaine de solution est maintenant une sphère de rayon R que l'on supposera convective dans $r_c \leq r \leq R$ et sans turbulence sous un rayon r_c correspondant donc à l'interface entre un coeur radiatif et une enveloppe convective. Dans le soleil, les inversions héliosismiques indiquent que $r_c/R \simeq 0.7$.

Il s'agit maintenant de reformuler l'équation d'induction en champs moyens (5.39) sous une forme appropriée aux champs magnétiques axisymétriques aux grandes échelles spatiales ($\partial \langle \mathbf{B} \rangle / \partial \phi = 0$). Nous avons déjà fait une bonne partie du travail à la §5.3, en exprimant le champ poloidal comme le rotationnel d'un potentiel vecteur toroidal (cf. éq. (5.13)), avec l'écoulement moyen, stationnaire et axisymétrique, donné par l'éq. (5.14). On considérera cette fois fois que la diffusivité magnétique nette (turbulente) peut dépendre que du rayon r . La nouveauté est évidemment la présence des termes associés à la force électromotrice turbulente, en particulier l'effet- α .

Il sera utile d'exprimer les équations dynamos sous forme adimensionnelle. À cette fin toute les longueurs sont exprimées en unités du rayon R de la sphère/étoile, et le temps en unités du temps de diffusion magnétique, $\tau = R^2/\eta_e$ basé sur la diffusivité nette (que l'on supposera dominée par sa contribution turbulente β) dans l'enveloppe convective, associée à la forme isotrope du tenseur β introduit précédemment. Larguant les " $\langle \rangle$ " pour alléger la notation, la procédure de séparation poloidal/toroidal ayant conduit aux éqs. (5.15)–(5.16) appliquée cette fois à l'équation d'induction en champs moyen mène maintenant à:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) A - \frac{R_m}{\varpi} \mathbf{u}_p \cdot \nabla(\varpi A) + C_\alpha \alpha B, \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} = & \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) B + \frac{1}{\varpi} \left(\frac{d\eta}{dr} \right) \frac{\partial(\varpi B)}{\partial r} - R_m \varpi \nabla \cdot \left(\frac{B}{\varpi} \mathbf{u}_p \right) \\ & + C_\Omega \varpi (\nabla \times A \hat{\mathbf{e}}_\phi) \cdot (\nabla \Omega) + C_\alpha \hat{\mathbf{e}}_\phi \cdot \nabla \times [\alpha \nabla \times (A \hat{\mathbf{e}}_\phi)], \end{aligned} \quad (5.54)$$

où les trois nombres adimensionnels suivants ont fait leur apparition:

$$C_\alpha = \frac{\alpha_e R}{\eta_e}, \quad (5.55)$$

$$C_\Omega = \frac{\Omega_e R^2}{\eta_e}, \quad (5.56)$$

$$R_m = \frac{u_e R}{\eta_e}, \quad (5.57)$$

avec α_e (unités m s^{-1}), u_e (dimension m s^{-1}) et Ω_e (dimension s^{-1}) des valeurs typiques pour les magnitudes de l'effet α , de l'écoulement méridien, et de la rotation différentielle, respectivement. Les quantités α , η , \mathbf{u}_p et Ω apparaissant dans les éqs. (5.53)–(5.54) sont donc maintenant des fonctions adimensionnelles.

Les coefficients numériques C_α et C_Ω sont des *nombre dynamo*, mesurant l'importance relative de l'induction (numérateurs) versus la dissipation (dénominateurs) aux membres de droite des éqs. (5.53)–(5.54). Le troisième coefficient numérique adimensionnel, R_m , est un nombre de Reynolds magnétique mesurant l'importance relative de l'advection par l'écoulement méridien par rapport au transport diffusif de A et B dans les plans méridiens. Par convention, on continue d'utiliser le symbole η pour la diffusivité magnétique nette, avec une dépendance possible sur le rayon r , même si on s'attend à ce que dans les zones convectives la contribution turbulente soit dominante.

Dans ce qui suit on fera référence aux équations (5.53)–(5.54) comme étant les “équations dynamos”, plutôt que “équations dynamos en champs moyen axisymétriques”, techniquement préférable mais un peu lourd à la longue. Structuellement, elles ne diffèrent des éqs. (5.15)–(5.16) que par la présence de deux nouveaux termes sources aux membres de droite, tous deux associés à l'effet- α . La présence d'un tel terme au membre de droite de l'éq. (5.53) est crucial, puisque c'est lui qui permet de déjouer le théorème de Cowling.

Puisqu'il agit comme terme source apparaissant aux membres de droite des équations pour A (poloidal) et B (toroidal), l'effet- α rend possible l'opération d'une dynamo même en l'absence de cisaillement rotationnel dans l'écoulement moyen, i.e., avec $\nabla\Omega = 0$ dans l'éq. (5.54). De tels dynamos sont appelés “dynamos α^2 ”, en raison du fait que les deux composantes magnétiques aux grandes échelles sont toutes deux produites par la force électromotrice turbulente, telle que capturée par l'effet- α . Les dynamos agissant dans les coeurs métalliques de plusieurs planètes du système solaire, y compris la Terre, sont traditionnellement considérées appartenir à cette famille, du moins du point de vue des dynamos en champs moyens. À l'autre extrême des possibilités, le terme de cisaillement rotationnel peut complètement dominer l'effet- α au membre de droite de l'éq. (5.54), dans lequel cas on laisse carrément tomber ce dernier. Ceci correspond au modèle dynamo dit “ $\alpha\Omega$ ”, généralement considéré comme la formulation la plus pertinente pour les étoiles de type solaire. Si tous les termes sources sont conservés au membre de droite de l'éq. (5.54), on parle alors d'une dynamo de type “ $\alpha^2\Omega$ ”. Dans le contexte solaire/stellaire, cette classe de dynamos a été moins étudiée que la version $\alpha\Omega$, sur la base d'estimés (simples tirant sur simplistes) des nombres dynamos C_α et C_Ω indiquant que $C_\alpha/C_\Omega \ll 1$; cet estimé peut cependant se retrouver sérieusement dans le champ si l'action dynamo est limité à une coquille sphérique mince, dans lequel cas l'effet- α peut contribuer significativement, voire dominer, via le terme en $\partial A/\partial r$.

En géométrie sphérique, les solutions des équations dynamos sont obtenues numériquement dans un plan méridien $[r, \theta]$ d'une sphère de rayon R . La régularité des solutions sur l'axe de symétrie ($\theta = 0$) exige qu'on y pose $A(r, 0, t) = A(r, \pi, t) = 0$ et $B(r, 0, t) = B(r, \pi, t) = 0$. La condition limite en surface la plus couramment utilisée est celle d'un champ extérieur $r/R > 1$ potentiel.

En pratique il est souvent utile d'imposer une symétrie équatoriale aux solutions. Ceci peut se faire en solutionnant seulement dans un quadrant méridien ($0 \leq \theta\pi/2$), et en imposant des conditions limites appropriées dans le plan équatorial. Pour un champ antisymétrique par

rapport à l'équateur, soit de type dipolaire,

$$\frac{\partial A(r, \pi/2)}{\partial \theta} = 0, \quad B(r, \pi/2) = 0, \quad [\text{Antisymétrique}], \quad (5.58)$$

tandis que pour un champ équatoriellement symétrique (de type quadrupolaire) on poserait plutôt:

$$A(r, \pi/2) = 0, \quad \frac{\partial B(r, \pi/2)}{\partial \theta} = 0, \quad [\text{Symétrique}]. \quad (5.59)$$

5.6.1 Solutions dynamo $\alpha\Omega$ linéaires

Commençons par mettre au point un modèle minimal de dynamo applicable au cas du soleil. Dans le cadre d'un tel modèle minimal on peut négliger l'écoulement méridien aux grandes échelles (\mathbf{u}_p dans les éqs. (5.53)–(5.54)), et adopter la forme $\alpha\Omega$ des équations dynamos, basé sur le fait qu'avec $R \simeq 7 \times 10^8$ m, $\Omega_e \sim 10^{-6}$ rad s $^{-1}$, et $\alpha_e \sim 1$ m s $^{-1}$, on trouve $C_\alpha/C_\Omega \sim 10^{-3}$, et ce indépendamment de la valeur (très mal contrainte) supposée pour la diffusivité turbulente. On s'en tient également à une formulation cinématique du problème, i.e, tous les écoulements sont supposés stationnaires ($\partial/\partial t \equiv 0$) et donnés *a priori*. Les équations (5.53)–(5.54) se réduisent alors aux “équation dynamos $\alpha\Omega$ ”:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) A + C_\alpha \alpha B, \quad (5.60)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) B + C_\Omega \varpi (\nabla \times \mathbf{A} \hat{\mathbf{e}}_\phi) \cdot (\nabla \Omega) + \frac{1}{\varpi} \frac{d\eta}{dr} \frac{\partial(\varpi B)}{\partial r}. \quad (5.61)$$

Dans l'optique d'un modèle solaire, on fixe la valeur du nombre dynamo C_Ω à 2.5×10^4 , résultant de $\Omega_e \equiv \Omega_{Eq} \sim 10^{-6}$ rad s $^{-1}$ $\eta_e = 5 \times 10^7$ m 2 s $^{-1}$, cette dernière valeur conduisant à un temps de diffusion $\tau = R^2/\beta \simeq 300$ yr.

Pour le profil de rotation différentielle $\Omega(r, \theta)$ on utilise une paramétrisation des inversions héliosismiques décrite par

$$\Omega(r, \theta) = \Omega_C + \frac{\Omega_S(\theta) - \Omega_C}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{r - r_C}{w} \right) \right], \quad (5.62)$$

où

$$\Omega_S(\theta) = (1 - a_2 \cos^2 \theta - a_4 \cos^4 \theta) \quad (5.63)$$

avec les valeurs de paramètres $\Omega_C = 0.939$, $a_2 = 0.1264$, $a_4 = 0.1591$, $r_c/R = 0.7$, et $w/R = 0.05$. La Figure 5.14 illustre les isocontours de vitesse angulaire en résultant, ainsi que quelques coupes radiales extraites au pôle, à mi-latitudes ainsi qu'à l'équateur. Comparez ceci à l'inversion héliosismique utilisé dans notre calcul du cisaillement d'un champ poloidal présenté à la §2.4. Ce profil paramétrique capture adéquatement plusieurs caractéristiques importantes de la rotation différentielle interne du soleil, notamment: (1) un cisaillement principalement latitudinal dans la zone convective, les pôles tournant $\simeq 29\%$ plus lentement que l'équateur, et (2) une mince couche de cisaillement radial appelée *tachocline*, coïncidant approximativement avec la base de la zone convective, et assurant une transition continue entre la rotation différentielle de la zone convective et la rotation solide du coeur radiatif.

Un tel profil est en fait passablement complexe du point de vue de la dynamo, étant caractérisé par trois régions de cisaillement se recoupant partiellement: un cisaillement radial positif ($\partial\Omega/\partial r > 0$) à basses latitudes dans la tachocline, un cisaillement radial encore plus intense mais négatif aux hautes latitudes de la tachocline, et un cisaillement latitudinal substantiel à travers toute la zone convective et s'étendant dans la tachocline. Comme on peut le constater sur la Fig. 5.14B, pour une tachocline de demie-largeur $w/R_\odot = 0.05$, le cisaillement latitudinal aux mi-latitudes à $r/R_\odot = 0.7$ se compare en grandeur au cisaillement radial équatorial; son effet inductif est donc potentiellement important.

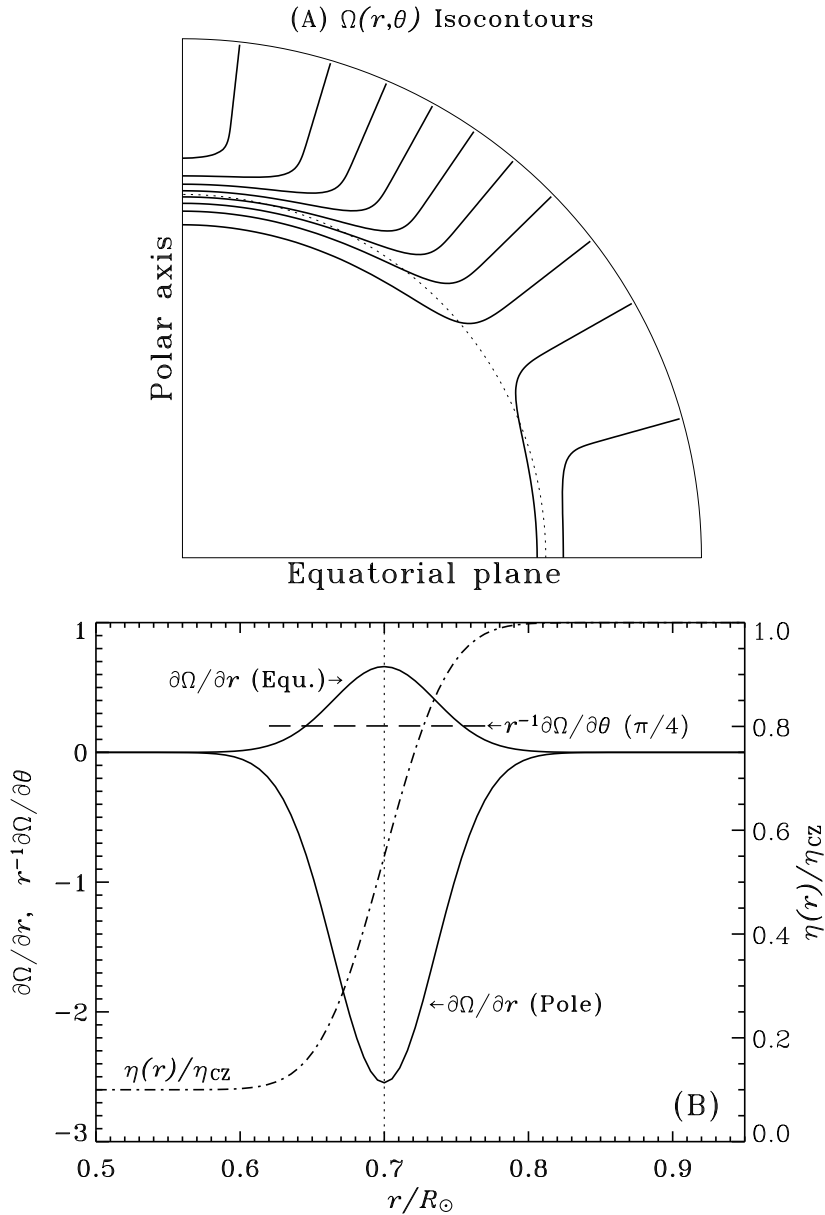


Figure 5.14: Isocontours du profil de vitesse angulaire normalisé généré par les  qs. (5.62)–(5.63), avec valeurs de paramètres $w/R = 0.05$, $\Omega_C = 0.8752$, $a_2 = 0.1264$, $a_4 = 0.1591$ (partie A). Ici $\Omega = 1$ à l’ quateur ($\theta = \pi/2$) en surface, et chute à 0.715 au pôle ($\theta = 0$). Le cisaillement radial change de signe à $\theta = 55^\circ$, et le profil est symétrique par rapport au plan équatorial. La partie B porte en graphique le cisaillement radial en fonction du rayon au pôle et à l’ quateur, ainsi que le profil radial de la diffusivité magnétique totale (trait en tirets-points), telle que produite par l’éq. (5.64) avec $\Delta\eta = 0.1$. L’interface coeur-enveloppe est situ e ici à $r/R = 0.7$ (trait pointillé).

Pour le profil de diffusivité magnétique nette (somme des contributions microscopique et turbulente), on utilise le profil normalisé suivant, où la valeur unitaire correspond à la diffusivité turbulente dans la zone convective:

$$\frac{\eta(r)}{\eta_e} = \Delta\eta + \frac{1 - \Delta\eta}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{r - r_c}{w} \right) \right]. \quad (5.64)$$

Le trait en tirets-points sur la Fig. 5.14 illustre ce profil, pour un rapport des diffusivité $\Delta\eta \equiv \eta_c/\eta_e = 0.1$. Ce rapport est traité ici comme un paramètre libre du modèle, sujet à la contrainte $\Delta\eta \ll 1$, puisqu'on associe ici η_c à la diffusivité microscopique, et η_e à la diffusivité turbulente β . Pour une diffusivité microscopique $\eta_c \sim 1 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ sous la zone convective, et sous utilisation des estimés SOCA (spécifiquement, l'éq. (5.38)), on aurait en fait $\Delta\eta \sim 10^{-9}$ – 10^{-6} ; les solutions dynamos discutées dans ce qui suit utilisent des rapports beaucoup plus modestes, $\Delta\eta = 10^{-3}$ – 10^{-1} , pour des raisons essentiellement numériques.

La variation spatiale de α est très difficile à calculer de manière fiable à partir de principes premiers. L'idée est donc d'introduire une paramétrisation *ad hoc*, mais tout de même inspirée de ce que nous avons appris sur l'effet- α dans le cadre de notre discussion de l'électrodynamique en champs moyens (§5.4). On écrira donc:

$$\alpha(r, \theta) = f(r)g(\theta), \quad (5.65)$$

où

$$f(r) = \frac{1}{4} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{r - r_c}{w} \right) \right] \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{r - 0.8}{w} \right) \right], \quad (5.66)$$

avec $r_c/R = 0.7$ et $w/R = 0.05$. Cette combinaison de fonctions d'erreur concentre l'effet- α dans la moitié inférieure de la zone convective, le laissant chuter à zéro lorsqu'on entre dans le coeur radiatif, où la turbulence convective disparaît, tout comme nous l'avons fait pour la diffusivité turbulente (cf. éq. (5.64)). L'idée de concentrer l'effet- α en profondeur vient du fait que si l'on en croit la théorie de la longueur de mélange, c'est à ces profondeurs que le temps de retournement convectif devient du même ordre que la période de rotation, ce qui est requis pour pouvoir produire des bulles cycloniques. De plus, la dépendance hémisphérique de la force de Coriolis suggère que l'effet- α devrait changer de signe à l'équateur ($\theta = \pi/2$) et atteindre son amplitude maximale aux pôles (voir aussi l'éq. (5.33)). On choisit donc la dépendance latitudinale suivante:

$$g(\theta) = \cos \theta. \quad (5.67)$$

Le nombre dynamo C_α , quant à lui, est traité comme un paramètre libre du modèle, sujet cependant à la contrainte $|C_\alpha| \ll C_\Omega$ puisque nous travaillons avec la forme $\alpha\Omega$ des équations dynamos axisymétriques.

Avec $\alpha(r, \theta)$, $\eta(r)$ et $\Omega(r, \theta)$ tous spécifiés a priori, les équations dynamos $\alpha\Omega$ (5.60)–(5.61) deviennent linéaires en \mathbf{B} . Comme aucun de leurs coefficients ne dépend explicitement du temps, on peut rechercher des solutions en terme de modes propres ayant une structure mathématique du genre:

$$\begin{bmatrix} A(r, \theta, t) \\ B(r, \theta, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(r, \theta) \\ b(r, \theta) \end{bmatrix} e^{\lambda t}, \quad (5.68)$$

où λ ainsi que les amplitudes a et b sont en général des quantités complexes. Sous substitution de ces expressions dans les équations dynamos, on se retrouve avec un problème aux valeurs propres classique. Il sera utile d'exprimer la valeur propre même sous la forme:

$$\lambda = \sigma + i\omega, \quad (5.69)$$

de manière telle que σ corresponde au taux de croissance, et ω à la fréquence angulaire du mode propre défini par le couple $[a, b]$. En vertu de notre adimensionalisation des équations, σ et ω sont tous les deux exprimés en temps de diffusion inverse, $\tau^{-1} = \beta/R^2$. Dans le contexte d'une dynamo de type solaire, on recherche évidemment une solution oscillatoire ($\omega \neq 0$) ayant $\sigma \geq 0$.

Assez tourné autour du pot, allons-y avec une solution numérique des équations dynamos $\alpha\Omega$ comme un problème aux valeurs propre en 2D. Débutons par une séquence de solutions dynamos pour des valeurs croissantes de $|C_\alpha|$, avec C_Ω fixe à sa valeur “solaire” de 2.5×10^4 . La méthode numérique appelée *itération inverse* fonctionne bien ici. La Figure 5.15 montre la variation du taux de croissance σ et de la fréquence ω en fonction de C_α . Quatre séquences distinctes sont portées en graphique, pour des modes qui sont antisymétriques ou symétriques par rapport au plan équatorial (étiquetés “A” et “S” respectivement), calculés pour des nombres dynamos C_α positifs ou négatifs. Pour des valeurs de $|C_\alpha|$ sous un certain seuil, l’induction ne parvient pas à surpasser la dissipation Ohmique, conduisant à des solutions évanescentes ($\sigma < 0$). C’est tout comme la dynamo mécanique de la §5.2 quand l’éq. (5.12) n’est pas satisfaite. Mais à mesure que $|C_\alpha|$ augmente, on atteint éventuellement un point où $\sigma = 0$. Cette solution, caractérisée par une fréquence ω non-nulle, inverse sa polarité de façon cyclique tout en conservant une amplitude constante. Si on augmente encore plus $|C_\alpha|$, alors $\sigma > 0$ et nous sommes finalement dans le régime dynamo, où un faible champ initial est amplifié exponentiellement dans le temps.

Si on recalcule des séquences semblables pour des valeurs différentes de C_Ω , on réalise que l’entrée dans le régime dynamo ($\sigma > 0$) est déterminée par la grandeur du produit des deux nombres dynamo C_α et C_Ω :

$$D \equiv C_\alpha \times C_\Omega = \frac{\alpha_e \Omega_e R^3}{\eta_e^2}. \quad (5.70)$$

La valeur de D à laquelle $\sigma = 0$ correspond au *nombre dynamo critique*, qu’on dénotera D_{crit} . On donc retrouve ici un comportement semblable à celui caractérisant les ondes dynamos en géométrie cartésienne étudiées à la §5.5.2. Les modes ayant $\sigma < 0$ sont dits *sous-critiques*, et ceux ayant $\sigma > 0$ *supercritiques*.

Pour ce modèle minimal avec $\alpha \propto \cos\theta$, les taux de croissance dépendent peu de la symétrie équatoriale. Le premier mode à atteindre la criticalité est celui ayant un C_α négatif, pour $D_{\text{crit}} = -0.9 \times 10^5$, suivi de près ($D_{\text{crit}} = 1.1 \times 10^5$) par la séquence aux C_α positifs. La fréquence d’oscillation de ces modes critiques est $\omega \simeq 300$, correspondant à une période de ~ 6 yr, soit moins d’un facteur quatre de la période du cycle magnétique solaire; pas mal pour un premier essai! Il faut cependant garder en tête qu’on a une bonne marge de manoeuvre dans la spécification de η_e et C_α , et en plus il n’y a aucune raison particulière pour laquelle la dynamo solaire devrait opérer exactement au niveau critique.

La Figure 5.16 montre un demi-cycle d’une solution représentative de la séquence $C_\alpha > 0$, sous la forme de quatre instantanés du champ toroidal (dégradé de couleurs) et poloidal (lignes) dans un quadrant méridien, l’axe de rotation étant orienté verticalement ici⁴. Chaque image est séparée de la suivante par un intervalle de phase $\varphi = \pi/3$, donc la (D) est morphologiquement identique à la (A) sauf pour l’inversion des polarités magnétiques des composantes toroidale et poloidale. Dans de telles solutions linéaires, l’amplitude absolue du champ magnétique n’est pas contrainte, mais le rapport des amplitudes poloidale/toroidale l’est, et varie $\propto |C_\alpha/C_\Omega|$ pour les modes n’étant pas trop supercritiques.

La composante magnétique toroidale atteint son amplitude maximale à la base de la zone convective, ce qui n’est guère surprenant considérant que le cisaillement radial y est maximal (voir les éqs. (5.62)–(5.63) et la Fig. 5.14). Sa disparition rapide —ainsi que celle de la composante poloidale— en descendant sous la zone convective est un effet de profondeur de peau. De manière générale, un champ magnétique inversant sa polarité à une fréquence ω ne peut pénétrer un conducteur que sur une profondeur $\ell = \sqrt{2\eta_c/\omega}$, avec η_c correspondant ici à la diffusivité magnétique dans le coeur radiatif. Ayant supposé $\eta_e = 5 \times 10^7 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, on a donc ici $\eta_c = \eta_e \Delta\eta = 5 \times 10^6 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. Une fréquence adimensionnelle $\omega \simeq 300$ correspond à $3 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$, ce qui conduit à $\ell/R \simeq 0.026$, ce qui est bel et bien cohérent avec ce qu’on observe dans les solutions de la Fig. 5.16.

Un examen attentif de la Figure 5.16A→D révèle également que les systèmes de flux magnétique poloidal et toroidal se développant à la base de la zone convective apparaissent

⁴Une animation de cette solution, et de sa cousine ayant $C_\alpha = -5$, sont disponibles sur la page web du cours.

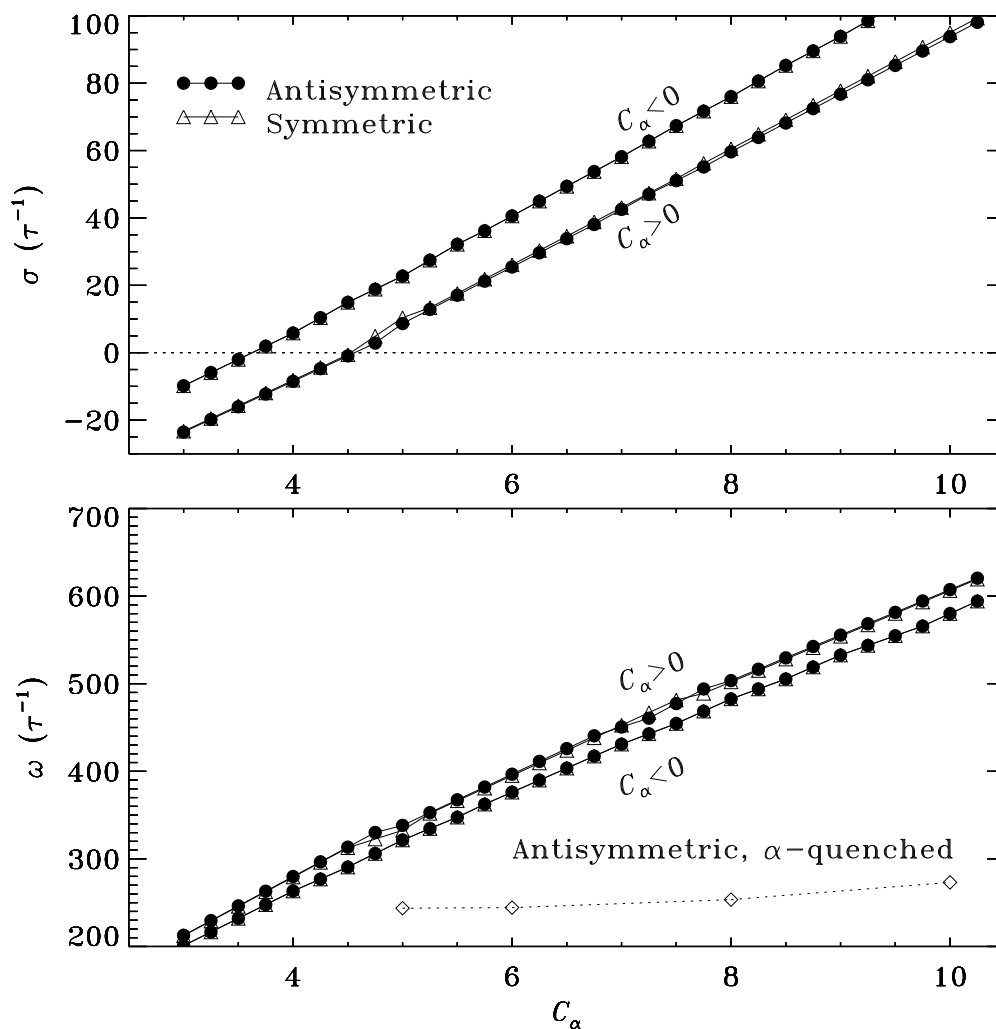


Figure 5.15: Variations du taux de croissance σ (en haut) et de la fréquence ω (en bas) en fonction de $|C_\alpha|$, pour une séquence de solutions dynamo obtenues dans le cadre d'un modèle $\alpha\Omega$ minimal utilisant une rotation différentielle de type solaire et un $\alpha \propto \cos\theta$. Les Figures présentent des résultats pour quatre séquences distinctes, définies pour des nombres dynamos C_α soit positifs, soit négatifs, et avec parité équatoriale imposée soit antisymétrique (cercles), soit symétrique (triangles). Les modes ayant $\sigma < 0$ sont évanescents, tandis que les modes ayant $\sigma > 0$ ont une amplitude croissant exponentiellement dans le temps. Ici les nombres dynamos critiques sont $D_{\text{crit}} = -0.9 \times 10^5$ et $D_{\text{crit}} = 1.1 \times 10^5$, et dépendent peu de la symétrie équatoriale. Les losanges sur la partie (B) indiquent la fréquence dynamo dans la version nonlinéaire de ce modèle $\alpha\Omega$ minimal, introduite plus loin à la §5.6.3.

BaseCZ $\alpha \sim \cos\theta$ $C_\alpha = +5$ $C_\Omega = 25000$ $Rm = 0$

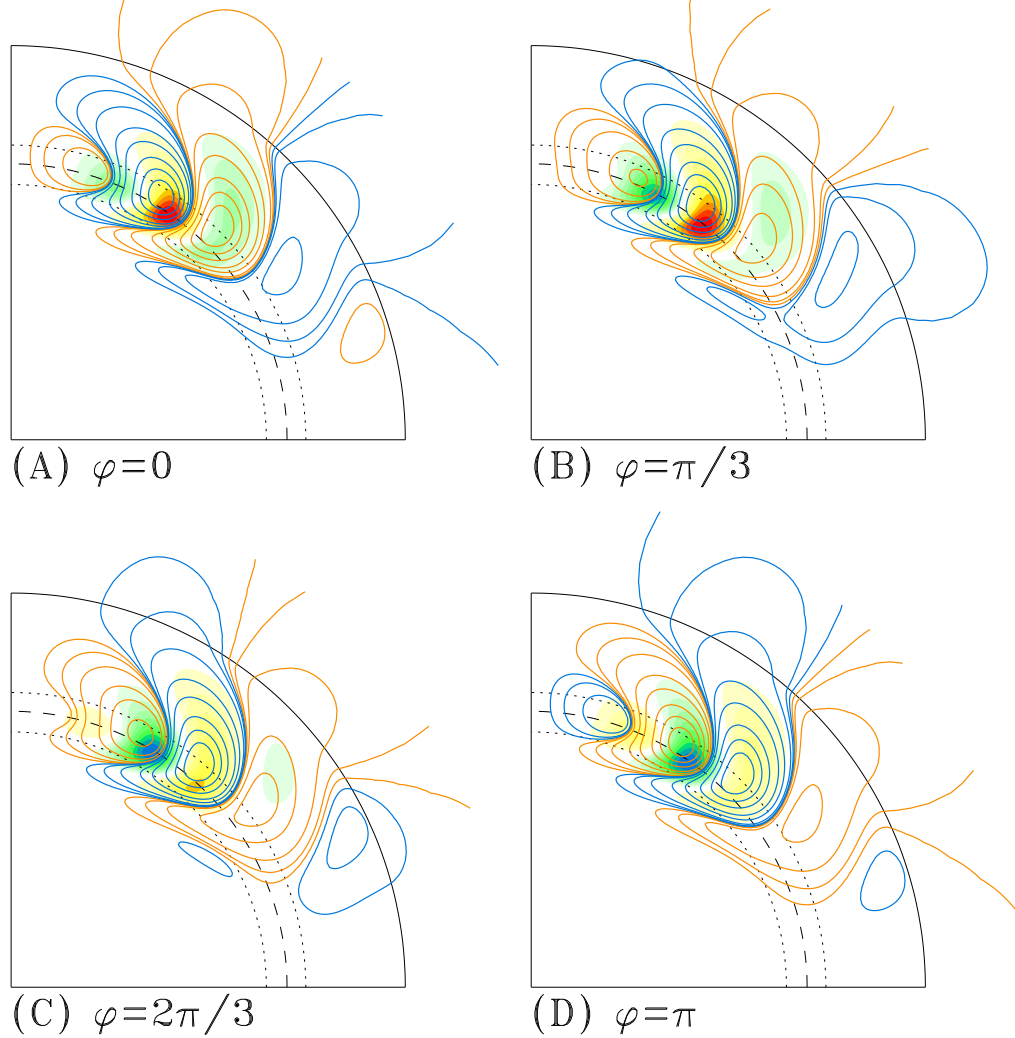


Figure 5.16: Quatre “instantanés” de notre solution $\alpha\Omega$ linéaire minimale, avec les valeurs de paramètres $C_\Omega = 25000$, $\eta_e/\eta_c = 10$, $\eta_e = 5 \times 10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, et $C_\alpha = +5$, cette dernière valeur correspondant à une solution légèrement supercritique (cf. Fig. 5.15). La composante toroidale est représentée par le dégradé de couleur, allant du vert au bleu pour $B < 0$, et du jaune au rouge pour $B > 0$, normalisé à l’amplitude maximale et intervalles $\Delta B = 0.2$. Les lignes de champs y sont superposées, colorées en bleu pour celles orientées dans le sens horaire, et orange pour antihoraire. L’arc de cercle en tirets indique la base de la zone convective à $r_c/R = 0.7$, et les pointillés l’étendue radiale de la tachocline. Ces quatre instantanés couvrent un demi-cycle magnétique, (D) se retrouvant donc identique à (A) mise à part l’inversion de la polarité magnétique.

aux hautes-latitudes, pour ensuite migrer dans la direction équatoriale tout en s'amplifiant, avant de disparaître aux mi-latitudes à la fin de chaque demi-cycle magnétique. Ocazou vous ne l'auriez pas déjà deviné, ce qu'on observe ici est l'équivalent en symétrie sphérique des ondes dynamos étudiés à la section §5.5.2 en géométrie cartésienne semi-infinie, avec un cisaillement et α tous les deux constants. De manière générale, les ondes dynamos se propagent dans une direction \mathbf{s} donnée par

$$\mathbf{s} = \alpha \nabla \Omega \times \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (5.71)$$

i.e., le long des isocontours de vitesse angulaire, dans une direction contrôlée par le signe de l'effet α . Ce résultat est connu sous le nom de *règle de Parker–Yoshimura*. Ici, avec $\partial\Omega/\partial r$ négatif aux hautes latitudes dans la tachocline, un effet- α positif conduit bel et bien à une propagation vers l'équateur pour $\alpha > 0$.

5.6.2 Nonlinéarités et suppression de l'effet- α

Autant dans notre traitement local des ondes dynamos à la §5.5.2 que de celui des modes globaux en symétrie sphérique ci-dessus, la dynamo se comporte comme une “instabilité” qui, lorsqu'elle est excitée ($\sigma > 0$), conduit à une croissance exponentielle (cyclique) du champ magnétique.

De toute évidence, une telle croissance ne peut se poursuivre indéfiniment. La force de Lorentz croîtra également exponentiellement, en fait au double du taux de croissance du champ puisqu'elle est quadratique en \mathbf{B} . Cette force tendra à s'opposer aux écoulements inductifs, à toutes les échelles spatiales simplifiées. Dans le contexte des dynamos $\alpha\Omega$ en champs moyens, on peut considérer deux classes de rétroaction magnétique:

1. Réduction de la rotation différentielle;
2. Modification des vitesses turbulentes, conduisant à une réduction de l'effet- α (et possiblement aussi de la diffusivité turbulente).

Observationnellement, la rotation différentielle solaire ne varie que très peu, soit 2–3%, entre les phases minimale et maximale du cycle magnétique. C'est pourquoi il est souvent supposé que la saturation de la dynamo passe par une réduction de l'effet- α par la force de Lorentz. Demeurant dans l'esprit de l'électrodynamique en champs moyens, il n'est pas question de solutionner formellement cette rétroaction magnétique sur les petites échelles. Il est plutôt d'usage d'introduire de manière *ad hoc* une dépendance directe de α sur B qui “marche”, dans le sens que l'effet- α meurt une fois que le champ magnétique devient “suffisamment intense”. Ce dernier qualificatif est habituellement quantifié par le plasma- β introduit à la §3.4, soit le rapport des densités d'énergie magnétique et cinétique dans l'écoulement. Le *champ d'équipartition* (B_{eq}) est défini par l'égalité entre ces deux contributions énergétiques:

$$\frac{B_{\text{eq}}^2}{2\mu_0} = \frac{\rho u_t^2}{2} \rightarrow B_{\text{eq}} = u_t \sqrt{\mu_0 \rho}. \quad (5.72)$$

À la base de la zone convective solaire on a $B_{\text{eq}} \sim 1$ T, chutant à ~ 0.1 T sous la photosphère. Il est devenu d'usage d'incorporer cet effet sur la grandeur de α (et parfois aussi β) directement dans l'équation pour le champ toroidal moyen B , en écrivant:

$$\alpha \rightarrow \alpha(B) = \frac{\alpha_0}{1 + (B/B_{\text{eq}})^2}. \quad (5.73)$$

Ce genre de paramétrisation algébrique s'appelle le “quenching- α ”. Clairement, une telle expression forcera $\alpha \rightarrow 0$ lorsque $B \gg B_{\text{eq}}$, et on s'attend donc à ce que le champ B croisse jusqu'à ce que le facteur $1 + (B/B_{\text{eq}})^2$ réduise le nombre dynamo effectif à sa valeur critique du régime linéaire, ou pas loin.

Il va sans dire que tout ceci est une sursimplification extrême de la rétroaction du champ magnétique sur la turbulence convective en régime magnétohydrodynamique. Pour être très

franc, c'est surtout son usage très répandu dans la modélisation des dynamos astrophysiques qui motive son choix aux fins pédagogiques de ce qui suit!

Des approches mieux motivées physiquement ont été proposées, basées notamment sur la conservation de l'hélicité magnétique (voir §2.9). Le champ aux grandes échelles étant hélical, son amplification n'est possible que si une hélicité de signe opposée est produite aux petites échelles spatiales. C'est le taux de dissipation de cette dernière qui se retrouve à réguler le taux d'amplification du champ aux grandes échelles. Ceci conduit à une équation d'évolution pour α (i.e., $\partial\alpha/\partial t = \dots$), qui doit alors être solutionnée conjointement aux équations dynamos en champs moyens. On parle alors de *quenching dynamique* de α . La forme exacte que doit prendre le membre de droite de l'équation pour α demeure cependant sujette à de vigoureux débats chez les spécialistes du sujet. Les intéressé(e)s trouveront quelques références dans la bibliographie en fin de chapitre.

5.6.3 Solutions dynamos $\alpha\Omega$ avec α -Quenching

Avec le quenching- α inclus dans le terme source poloidal, les équations dynamo $\alpha\Omega$ deviennent nonlinéaires et il est alors préférable de les solutionner sous la forme d'un problème aux conditions initiales, où un faible champ magnétique (dans le sens $B \ll B_{\text{eq}}$) et de forme arbitraire est utilisé pour l'initialisation. Tout le reste demeure identique aux solutions linéaires considérées précédemment: conditions limites, effet- α en $\cos\theta$, $C_\Omega = 2.5 \times 10^4$ et on choisit $C_\alpha \geq 5$ afin de se retrouver dans la région supercritique du régime linéaire (voir la Figure 5.15). Comme initialement \mathbf{B} est de très faible amplitude, une croissance exponentielle caractérise les phases initiales de l'évolution. Ceci est illustré à la Fig. 5.17, montrant des séquences temporelles de l'énergie magnétique totale dans le domaine de simulation (voir l'éq. (2.40)), pour une série de simulations avec des valeurs croissantes de $D = C_\Omega \times C_\alpha$. Éventuellement, B approche B_{eq} dans les régions où opère l'effet- α , ce qui freine la croissance exponentielle et conduit finalement à une saturation du champ magnétique, et donc de l'énergie y étant associée. Le quenching- α a donc bel et bien l'effet anticipé. Il faut remarquer comment l'énergie magnétique en régime saturé augmente avec le nombre dynamo D , ce qui est intuitivement satisfaisant puisque les solutions à plus grands D sont caractérisées par des termes inductifs plus puissants. Comme on s'attend à ce que α augmente avec le taux de rotation (viz. 5.33), qualitativement parlant cette tendance est également en accord avec les observations stellaires brièvement résumées à la §5.1.3.

La variation de la fréquence d'oscillation de ces solutions en fonction du nombre dynamo C_α est portée en graphique à la Fig. 5.15B (losanges). Contrairement aux solutions linéaires, ici la fréquence n'augmente que très faiblement quand C_α augmente. Ces fréquences se retrouvent en fait légèrement inférieures (par ~ 10 –15%) à la fréquence d'oscillation du mode critique du régime linéaire. Cependant, morphologiquement parlant ces solutions dynamos sont pratiquement indistingables des modes linéaires, dont la Fig. 5.16 est prototypique. La période magnétique est ici $P_{\text{cyc}}/\tau \simeq 0.027$, soit 9 yr pour notre valeur de $\eta_e = 5 \times 10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Nous sommes maintenant pas loin d'un facteur deux du cycle solaire observé, ce qui n'est pas mal du tout!

En terme d'analogues au cycle solaire, ces solutions dynamos souffrent de quelques problèmes, dont un particulièrement évident: les champs magnétiques internes sont concentrés à des latitudes beaucoup trop élevées (voir Fig. 5.16). C'est là une conséquence directe de la dépendance en $\cos\theta$ de l'effet- α . Il est donc possible de régler notre problème en concentrant l'effet- α à plus basses latitudes. Cette stratégie n'est pas aussi ad hoc qu'elle pourrait sembler l'être; certaines simulations numériques MHD du genre de celles considérées plus loin (§5.8) indiquent en effet qu'en régime de rotation rapide (dans le sens $\text{Ro} \lesssim 0.25$), la latitude où l'effet- α est maximal se déplace bel et bien vers les plus basses latitudes. Allons-y donc alors, pour voir, avec une dépendance latitudinale $\propto \sin^2\theta \cos\theta$ pour l'effet- α .

La Figure 5.18 montre trois solutions dynamos $\alpha\Omega$ avec quenching- α , cette fois sous la forme de diagrammes latitude-temps du champ toroidal à l'interface coeur-enveloppe ($r/R = 0.7$ ici). Si les tubes de flux magnétiques à l'origine des taches solaires se forment là où le champ est le plus

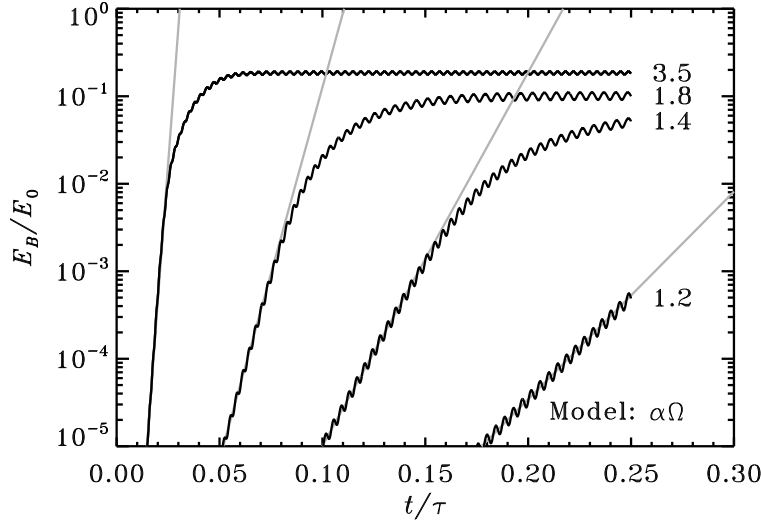


Figure 5.17: Séquences temporelles de l'énergie magnétique pour une série de solutions dynamo $\alpha\Omega$ incluant le quenching- α tel que donné par l'éq. (5.73). Chaque courbe correspond à une valeur différente du nombre dynamo $D = C_\Omega \times C_\alpha$ normalisé par sa valeur critique, tel qu'indiqué. Les droites grises marquent la phase de croissance exponentielle caractérisant le régime linéaire ($B \ll B_{\text{eq}}$); on voit bien que le taux de croissance augmente quand D/D_{crit} augmente lui aussi (cf. Fig. 5.15).

intense, et si l'ascension de ces tubes à travers la zone convective se fait radialement, alors ces diagrammes sont les équivalents du diagramme papillon des taches. Sur de tels diagrammes, la propagation latitudinale des ondes dynamos se traduit par une inclinaison des isocontours de B par rapport à la verticale. Ces trois solutions ont toutes $|C_\alpha| = 10$, $\Delta\eta = 0.1$, et $\eta_e = 5 \times 10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, et l'antisymétrie équatoriale a été imposée via la condition limite.

La première solution, présentée à la Figure 5.18A, est encore une fois notre solution minimale de la Fig. 5.16, avec un effet- α variant en $\cos\theta$. Les deux autres utilisent un effet- α variant en $\sin^2\theta \cos\theta$, et parviennent ainsi à produire deux branches dynamos, la première puisant comme auparavant dans le cisaillement radial négatif aux hautes latitudes de la tachocline, et la seconde dans le cisaillement radial positif présent dans la région équatoriale de la tachocline. Comme l'effet α ne change pas de signe dans un hémisphère donné, ces deux branches migrent dans des directions latitudinales opposées, en accord avec la règle de propagation de Parker–Yoshimura. Les seconde et troisième solutions sur la Fig. 5.18 ne diffèrent que par le signe de C_α , d'où les propagations en sens opposés.

La co-existence de deux branches dynamos ayant des fréquences d'oscillation distinctes en régime nonlinéaire est une caractéristique remarquable, et peut conduire à une modulation à long terme de l'amplitude de chaque mode, semblable à un battement, comme on l'observe sur la solution de la Fig. 5.18C. Ce genre de modulation n'est habituellement pas attendue dans des modèles où la seule nonlinéarité limitant l'amplitude du cycle est le quenching- α algébrique (l'éq. (5.73)). On remarquera que cette modulation est absente dans la solution à $C_\alpha < 0$, où les deux branches originent toutes les deux des mi-latitudes, et donc se resynchronisent au début de chaque demi-cycle magnétique (cf. Fig. 5.18B). Ceci est un exemple de deux modes dynamos interagissant l'un avec l'autre, conséquence du profil spatial plutôt complexe de la rotation différentielle solaire.

La solution de la Fig. 5.18B montre une belle branche équatoriale, associée à un cycle magnétique de période $P_{\text{cyc}} \simeq 16 \text{ yr}$, ce qui commence à s'approcher pas mal de notre "cible"

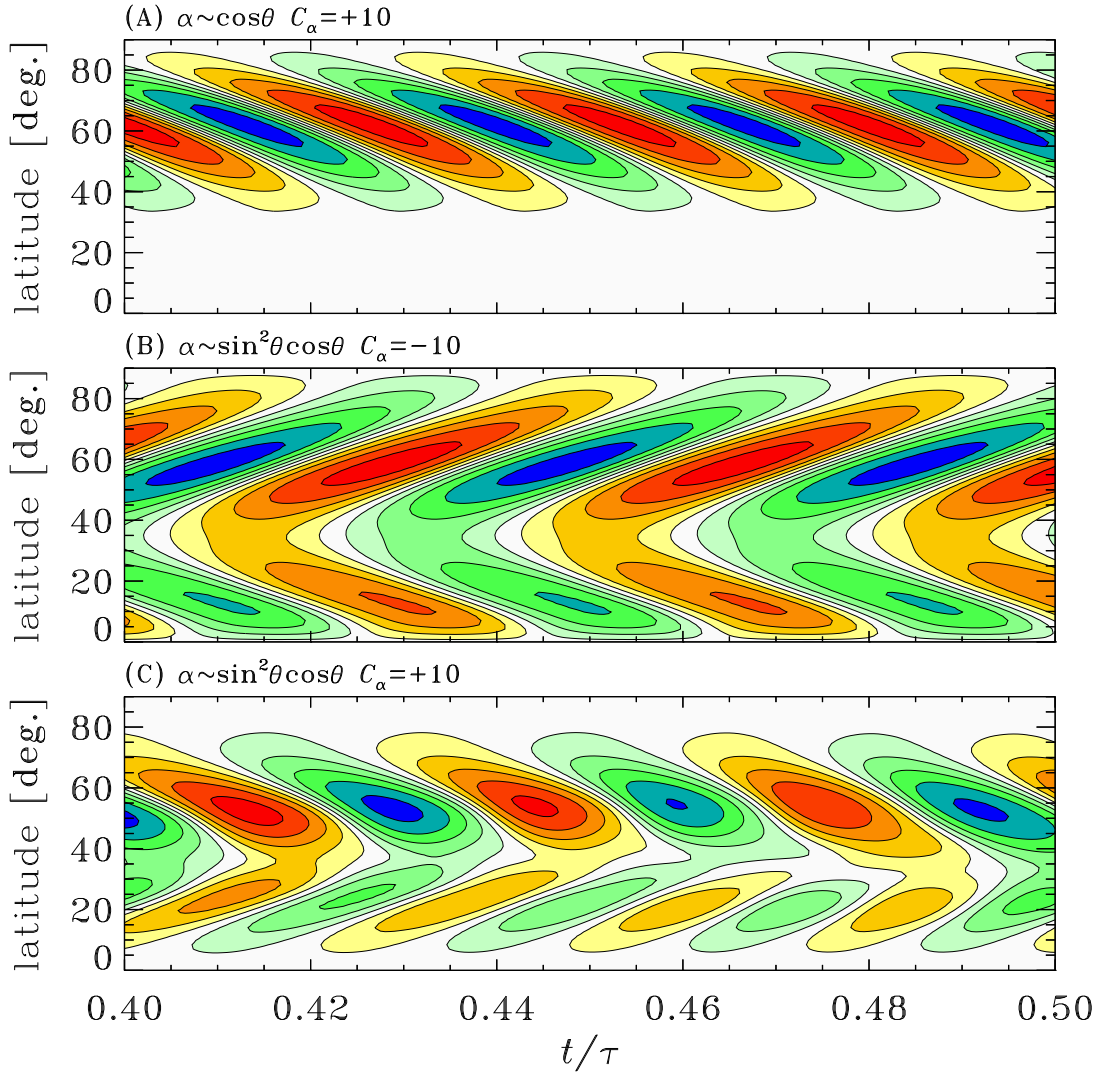


Figure 5.18: Diagrammes temps-latitude (“papillon”) de la composante magnétique toroidale pour une sélection de solutions $\alpha\Omega$ incorporant le quenching- α . Les diagrammes sont construits à une profondeur $r/R = 0.7$ correspondant à la base de l’enveloppe convective. Les isocontours sont normalisés à la valeur maximale, et tracés à intervalles de $\Delta B/\max(B) = 0.2$, le dégradé jaune—rouge (vert—bleu) correspondant aux valeurs $B > 0$ (< 0). L’effet- α a une dépendance latitudinale en $\cos\theta$ pour la solution du haut, et $\sin^2\theta \cos\theta$ pour les deux autres. Les autres composantes du modèle sont les mêmes que sur la Fig. 5.16. On notera la présence de deux cycles distincts dans la solution en C, leurs périodes différant par environ 25%.

de 22 ans. Cependant, il n'existe aucun équivalent dans le diagramme papillon à la forte branche se propageant vers le pôle qui caractérise également cette solution. On peut évidemment s'en débarrasser en forçant l'effet- α à zéro aux latitudes dépassant $\sim 40^\circ$, mais ce n'est pas très satisfaisant comme approche, même dans le cadre d'une modélisation impliquant autant de paramètres et prescriptions ad hoc. Il existe d'autres options.

5.6.4 Trois variations sur un thème

Comme on l'a vu brièvement à la §1.5 (Figure 1.8 et texte y référant), une circulation fluide dans le plan méridien est une composante dynamique incontournable d'une zone convective en rotation. L'écoulement vers les pôles à $\sim 15 \text{ m s}^{-1}$ observé au niveau de la photosphère dans le soleil doit être couplé à un écoulement vers l'équateur plus profondément, afin d'assurer la conservation de la masse. Un tel écoulement peut transporter le champ magnétique produit par la dynamo — c'est l'effet des termes $\propto \mathbf{u}_p \cdot \nabla$ dans les eqs. (5.53)–(5.54), et donc, pour un écoulement profond vers l'équateur suffisamment rapide, peut contrer la Loi de propagation de Parker–Yoshimura et produire une propagation équatoriale du champ profond quel que soit le signe de l'effet- α . À basses vitesses, l'effet de l'écoulement méridien est d'induire une forme de décalage Doppler dans la fréquence de l'onde dynamo; la transition à un régime purement advectif où l'écoulement latitudinal entraîne simplement le champ magnétique, se produit lorsque la vitesse de l'écoulement méridien devient comparable à la vitesse de phase de l'onde dynamo. Une fois ce régime atteint, la période du cycle magnétique devient contrôlée par le temps de retournement de l'écoulement méridien. Ce genre de dynamo a hérité de l'acronyme “FTD”, pour “flux transport dynamo”. La composante toroidale est toujours produite par cisaillement rotationnel de la composante poloidale, et cette dernière par l'effet- α agissant sur la composante toroidale; mais l'évolution spatiotemporelle du champ magnétique aux grandes échelles est dominée par l'écoulement méridien, donc le temps de retournement devient le principal facteur contrôlant la période du cycle magnétique

Les modèles dynamos du cycle solaire basés sur l'effet- α ne sont certainement pas les seuls “sur le marché”, ni même les premiers. On a déjà vu à la §5.1.2 que les paires bipolaires de taches tendent à émerger avec une inclinaison nette par rapport à la direction Est–Ouest. A cette inclinaison s'associe un moment dipolaire net qui, si on peut aller y puiser, peut contribuer au dipôle de surface. Ce mécanisme a été proposé il y a maintenant plus d'un demi-siècle par l'équipe papa+fiston de Harold et Horace Babcock, et représente un processus de conversion du champ toroidal (interne) en un moment dipolaire (photosphérique). Agissant en parallèle au cisaillement du dipôle par la rotation différentielle, on a là en principe les ingrédients requis pour produire une dynamo cyclique. Ces dynamos sont maintenant connues sous l'appellation “Babcock–Leighton”. En pratique, à l'heure actuelle la majorité des modèles du cycle solaire basés sur le mécanisme de Babcock–Leighton solutionnent les équations dynamo $\alpha\Omega$ incluant un écoulement méridien, en ajoutant au membre de droite de l'éq. (5.53) un terme pseudo-effet- α , concentré en surface plutôt que dans la zone convective. La propagation équatoriale du champ interne est assurée par l'écoulement méridien profond. À ce niveau général de complexité, ce type de modèle reproduit le mieux les caractéristiques observées du cycle solaire. De surcroît, le mécanisme de Babcock–Leighton est bel et bien observé à la surface du soleil, et donc beaucoup mieux contraint que l'effet- α . La bibliographie en fin de chapitre inclut quelques points d'entrée vers la très volumineuse littérature sur ce genre de modèle dynamo du cycle solaire.

Plusieurs instabilités hydro- ou magnétohydrodynamiques peuvent, sous l'influence de la force de Coriolis, développer des structures fluides hélicales qui peuvent agir qualitativement comme l'effet- α et produire une composante magnétique poloidale aux grandes échelles spatiales. Couplé au cisaillement par la rotation différentielle, on peut encore une fois construire des modèles dynamos applicables au soleil et étoiles de type solaire. Plusieurs modèles de ce genre ont été proposés au fil des années, et la bibliographie en fin de chapitre inclut quelques références représentatives. Comme dans le cas des dynamos de type Babcock–Leighton, dans la quasi-totalité des cas les calculs d'instabilités servent à guider la construction d'un terme source poloidal ayant la gueule générale d'un effet- α , et la forme $\alpha\Omega$ des équations dynamos

cinématiques et axisymétriques est solutionnée comme auparavant, et incluant toujours une contribution turbulente à la diffusivité nette, due à la convection.

5.7 La dynamo en tant qu’instabilité

La rétroaction nonlinéaire du champ magnétique sur les écoulements inductifs peut se manifester d’une myriade de manières, selon la nature des mécanismes inductifs incorporés dans un modèle dynamo donné. Bien que les impacts de ces diverses formes de nonlinéarités puissent conduire à une vaste gammes de comportements, certains de ceux-ci sont génériques et ne dépendent pas du détail de la nonlinéarité. Cette section en discute quelques-uns.

5.7.1 Nonlinéarité et bifurcation

Le comportement observé à la Fig. 5.17 est typique des dynamos —solaire, stellaire ou galactique— opérant en régime faiblement supercritique, dans le sens que le nombre dynamo ne dépasse pas de beaucoup sa valeur critique, quelle que soit la nature exacte de la rétroaction nonlinéaire stabilisant l’amplitude magnétique. Dans situation où $D/D_{\text{crit}} > 1$ tout champ magnétique initial, même extrêmement faible (mais sans être strictement nul partout dans le domaine) est amplifié exponentiellement dans le temps, saturant éventuellement à une amplitude dont la valeur croît avec D ; tandis que pour une situation sous-critique ($D/D_{\text{crit}} < 1$), le champ magnétique décroît exponentiellement à zéro, même pour un champ magnétique initial très intense. La dynamo se comporte donc comme une *instabilité*: La solution triviale $\mathbf{B} = 0$ est toujours une solution valide à l’équation d’induction (2.9), mais au delà de D_{crit} cette solution devient instable par rapport à toute perturbation magnétique introduite dans le système.

Du point de vue mathématique, plus précisément la théorie des systèmes dynamiques, l’activation de l’effet dynamo se manifeste par la perte de stabilité d’une solution de type point fixe au profit d’un cycle limite, via une *bifurcation de Hopf*. Ceci est illustré schématiquement sur la Figure 5.19A, qui présente un *diagramme de bifurcation*, du genre qui pourrait être construit “expérimentalement” à partir d’une séquence de solutions dynamo où D/D_{crit} augmente, comme sur la Fig. 5.17. Le trait épais représente une mesure de l’amplitude magnétique saturée, portée en graphique en fonction du nombre dynamo D normalisé par sa valeur critique D_{crit} pour un modèle donné. À gauche du point de bifurcation (ici à $D/D_{\text{crit}} = 1$) on a $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{B}| = 0$, mais quand on entre dans le régime $D/D_{\text{crit}} > 1$ l’amplitude saturée augmente d’abord très rapidement avec D/D_{crit} , mais par la suite de plus en plus graduellement quand l’on avance dans le régime supercritique. Retournez voir la Fig. 5.17 et saisissez bien la correspondance. La transition vers une amplitude magnétique finie via une bifurcation de Hopf est généralement considéré une caractéristique générique des dynamos solaire/stellaires. Les références listées en bibliographie en fin de chapitre devraient pouvoir tenir occupé(e)s ceux et celles intéressé(e) à ce genre de trucs.

Certains mécanismes dynamo de régénération d’un champ magnétique sont sujet à un seuil inférieur d’opération sur l’intensité magnétique. C’est le cas, par exemple, du mécanisme de Babcock-Leighton mentionné à la §5.6.4. La présence d’un tel seuil conduit à un diagramme de bifurcation du genre de celui représenté, toujours schématiquement, à la Fig. 5.19B. Ici, même si $D/D_{\text{crit}} > 1$, la condition initiale doit se trouver à l’intérieur du *bassin d’attraction* (région en gris sur la Fig. 5.19B) pour que la croissance exponentielle vers le cycle limite se produise. Toute condition initiale plaçant le système à l’extérieur de ce bassin d’attraction décroît exponentiellement vers le point fixe $\mathbf{B} = 0$. Contrairement à la situation en (A), ici au nombre dynamo critique l’amplitude magnétique “saute” de manière formellement discontinue à une amplitude finie. De telles dynamos ne sont pas auto-excitées, dans le sens qu’elles ne peuvent pas amplifier un champ magnétique initial d’arbitrairement faible amplitude.

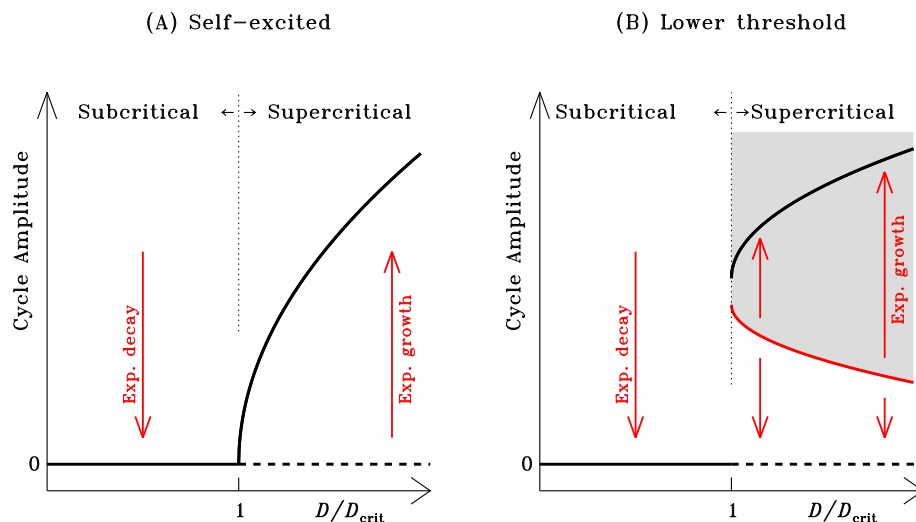


Figure 5.19: Représentation schématique d’une bifurcation de Hopf vers une amplitude magnétique nonlinéairement saturée au delà de la première bifurcation au nombre dynamo critique. En (A), une bifurcation classique, appropriée aux dynamos auto-excitées comme les modèles de type $\alpha\Omega$ considérés précédemment. Le trait noir représente la variation de l’amplitude magnétique saturée en fonction du nombre dynamo D , ici normalisé à sa valeur critique D_{crit} . En (B), une bifurcation caractérisant une dynamo dont le fonctionnement est sujet à un seuil inférieur en \mathbf{B} . Dans une telle situation, une solution d’amplitude magnétique finie ne peut être atteinte qu’à partir d’un bassin d’attraction (ici en gris) d’étendue finie en \mathbf{B} , et ce même dans le régime supercritique $D/D_{\text{crit}} > 1$.

5.7.2 Intermittence

La distinction entre les deux types de bifurcations illustrées à la Figure 5.19 a d’importantes conséquences au niveau la réponse de la dynamo à toute source de fluctuation interne, en particulier pour le déclenchement des phases dites “Grand Minima”, où l’activité magnétique est fortement réduite en amplitude (viz. le Minimum de Maunder sur la Fig. 5.1). Comme l’illustre (toujours schématiquement) la Fig. 5.20A, Une fluctuation dans l’efficacité du processus inductif, quelle que soit son origine physique, peut pousser le système sous la première bifurcation de Hopf, conduisant à la décroissance exponentielle du champ magnétique résiduel. Dans les dynamos qui ne sont pas auto-excitées, les fluctuations d’origine stochastique peuvent aussi pousser une solution dynamo hors de son bassin d’attraction, conduisant encore une fois à une décroissance exponentielle vers la solution triviale $\mathbf{B} = 0$ même si $D/D_{\text{crit}} > 1$ (voir Fig. 5.20B). On doit alors invoquer un autre mécanisme inductif pour permettre au système de regagner dans le bassin d’attraction. Encore une fois, voir les références en fin de chapitre pour plus de détails (en particulier, la §7.3 de mon article de revue de 2020 dans LRSP, si je peux me permettre une petite auto-plogue rendu ici... ce ne sera pas la dernière...).

5.8 Simulations magnétohydrodynamiques globales

Tous les modèles dynamos de type “champ moyen” décrits et discutés précédemment introduisent beaucoup de simplifications physiques et géométriques, et laissent beaucoup d’arbitraire dans la spécification de diverses quantités clef, comme l’effet- α et la diffusivité turbulente. Une autre option est de se retrousser les manches et solutionner le problème dans toute sa complexité physique; bref, effectuer une simulation numérique magnétohydrodynamique de la convection

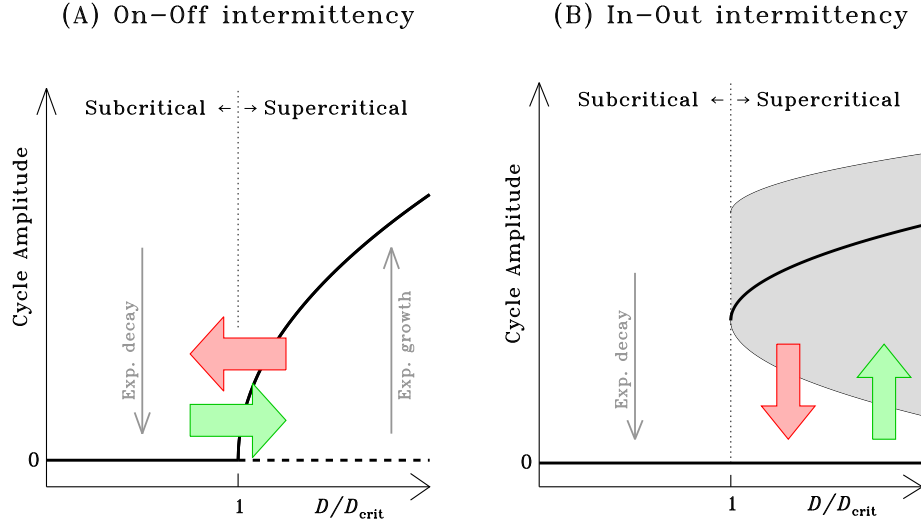


Figure 5.20: Représentation schématique des mécanismes d’intermittence dits “on-off” (en A) et “in-out” (en B) près de la première bifurcation. En (B), la zone grise indique le bassin d’attraction de la solution d’amplitude finie. Toute condition initiale située à l’extérieur de ce bassin décroît exponentiellement à zéro, et ce même si $D > D_{\text{crit}}$.

thermique d’un fluide électriquement conducteur dans une coquille de fluide stratifiée par la gravité et en rotation. Mathématiquement, le problème est décrit par le système d’équations aux dérivées partielles suivant:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) = 0, \quad (5.74)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\varrho} \nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \mathbf{g} + \frac{1}{\mu_0 \varrho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \frac{1}{\varrho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (5.75)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = (\gamma - 1)e \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\varrho} [\nabla \cdot ((\chi + \chi_r) \nabla T) + \phi_u + \phi_B], \quad (5.76)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B}). \quad (5.77)$$

Rappelons qu’ici ϱ est la densité du fluide, e son énergie interne, p la pression, $\boldsymbol{\tau}$ le tenseur des stress visqueux, χ and χ_r sont les coefficients de conductivités thermique et radiative, ϕ_u et ϕ_B sont les fonctions de dissipation visqueuse et Ohmique, et tout le reste est comme d’habitude. Il s’agit ici de nos équations fluides habituelles, avec l’ajout de la force de Lorentz et de la dissipation Ohmique aux membres de droite (5.75) et (5.76), respectivement. Dans le contexte des simulations globales du soleil et des étoiles, il est d’usage de solutionner le problème dans un repère en rotation; la force centrifuge est absorbée dans le gradient de pression, ne laissant que la force de Coriolis comme terme supplémentaire au membre de droite de (5.75). On doit de plus introduire une équation d’état, habituellement celle d’un gaz parfait, et assurer de bien respecter la contrainte $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. La convection est forcée soit par un flux de chaleur imposé aux frontières, soit par un terme de forçage volumétrique correspondant à la divergence non-nulle du flux radiatif, la source d’énergie ultime de la convection dans ce contexte.

La plupart des simulations MHD globales publiées à date utilisent l’approximation dite *anélastique*, dans le cadre de laquelle toutes les variations temporelles de la densité sont négligées, sauf pour celles provenant de la dilatation thermique; autrement dit, l’essentielle force de flottaison demeure active, mais les ondes sonores (et MHD lente et rapide) sont éliminées. Notons

également que dans le cadre de cette approximation, l'éq. (5.74) est remplacée par $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$. Malgré ces approximations, le problème demeure très exigeant du point de vue numérique, principalement en raison du spectre extrêmement large d'échelles temporelles et spatiales s'y développant, conséquence du régime fortement turbulent de la convection solaire/stellaire, caractérisé par des nombres de Reynolds $Re \simeq R_m \simeq 10^{8-10}$.

Débutant il y a maintenant plus de 30 ans avec les premières simulations MHD effectués par Peter Gilman et Gary Glatzmaier, bon nombre de ces simulations ont été développées au fil des ans. La bibliographie en fin de chapitre en offre une sélection. Même cette (relativement) courte liste englobe des simulations basées sur une variété d'approches algorithmes, traitement des petites échelles, conditions limites, méthodes de forçage thermique, taux de rotation, etc. Bien que toutes, chacune à sa façon, opèrent dans le régime $Ro < 1$ (dominance de la rotation), aucune n'approche du régime dissipatif attendu dans les intérieures stellaires: les simulations à plus hautes résolution spatiale atteignent quelques 10^3 au niveau des nombres de Reynolds visqueux et magnétique, encore 6 ordres de grandeurs sous les valeurs attendues. Néanmoins, ces simulations capturent d'une manière physiquement correcte les interactions fluide-champ magnétique à toutes les échelles spatiales et temporelles capturées par la discrétisation; ce que même les modèles en champ moyen les plus poussés ne font absolument pas.

Bien qu'il ne soit pas dans mes habitudes de me pêter les bretelles, je me permet de le faire ici: c'est au département de physique de l'UdeM où ont été produites les premières simulations de ce genre parvenant à générer un champ magnétique aux grandes échelles inversant sa polarité selon un cycle régulier, d'une manière très similaire à bien des points de vues de ce qui est observé sur le soleil. Le reste de cette section décrit une de ces simulations, en guise d'exemple; plus spécifiquement, la simulation EULAG-MHD baptisée "millenium" (voir références dans la bibliographie en fin de chapitre).

5.8.1 Écoulements et champs magnétiques aux grandes échelles

Un grand nombre de simulations hydrodynamiques et magnétohydrodynamiques globales, semblables à EULAG-MHD/millenium, ont permis d'établir certaines tendances robustes par rapport aux écoulements (surtout) et champ magnétiques (à un degré moindre) se développant aux grandes échelles spatiales dans des configurations de type "soleil". Un paramètre-clé s'avère être le nombre de Rossby Ro (voir §1.5.5). Quand ce dernier est sous $Ro \simeq 0.5$, la rotation est de type dit "solaire", dans le sens que la vitesse angulaire décroît de l'équateur vers les pôles, comme sur la Fig. 1.8A; mais si $Ro \gtrsim 1$, on se retrouve avec un profil dit "anti-solaire", avec l'équateur tournant plus lentement que les plus hautes latitudes, comme sur la la Fig. 1.8B. Avec $Ro \sim 0.1-0.3$ dans le gros de sa zone convective, le soleil se retrouve donc dans le régime de dominance rotationnelle (force de Coriolis plus importante que le terme inertiel dans l'équation du mouvement, viz. la §1.4)... mais à peine! La quasi-totalité de ces simulations produit des profils de rotation différentielle interne caractérisés par un très haut degré d'alignement des isocontours de vitesse angulaire avec l'axe de rotation, conséquence du théorème de Taylor-Proudman (voir éq. (1.106) et discussion s'y rattachant). Les champs magnétiques, même lorsque dominées par les petites échelles spatiales, contribuent de manière importante à la dynamique zonale, et près de $Ro \sim 0.5$ peuvent faire basculer le profil de rotation différentielle d'anti-solaire à solaire.

Au niveau des champs magnétiques aux grandes échelles, et surtout de leur évolution temporelle, on observe cependant une plus grande diversité, avec très peu de simulations parvenant à générer des inversions de polarité régulières et bien synchronisées entre les hémisphères. Les simulations EULAG-MHD demeurent presque uniques à ce niveau.

5.8.2 Inversions cycliques de la polarité magnétique

La Figure 5.21 présente un aperçu de la structure et évolution du champ magnétique aux grandes échelles dans la simulation millenium. Le diagramme en (A) est une projection Mollweide de la composante toroidale du champ magnétique extraite à une profondeur $r/R = 0.718$,

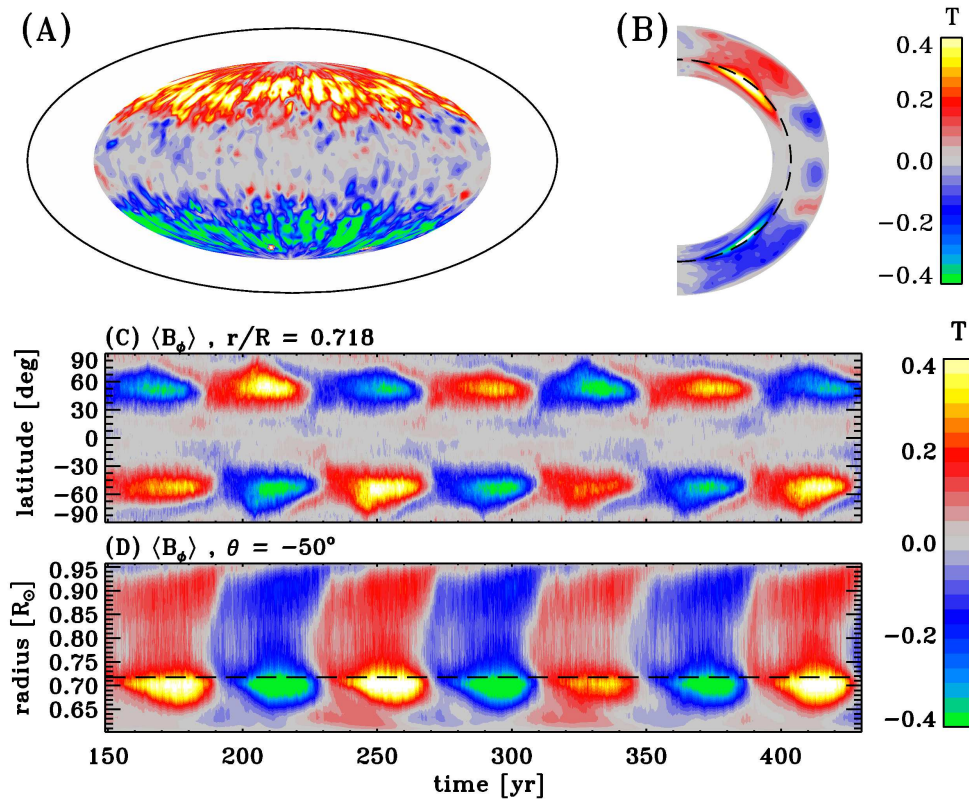


Figure 5.21: Cycles magnétiques dans la simulation MHD globale “millennium”, effectuée à l’aide du code EULAG-MHD. La partie (A) montre un instantané du champ toroidal à la profondeur $r/R_{\odot} = 0.718$, vu en projection Mollweide; la partie (B) montre un instantané de la moyenne zonale de la composante toroidale dans le plan méridien, au même pas de temps qu’en (A). (C) et (D) sont des diagrammes temps-latitude et temps-rayon de la moyenne zonale de la composante toroidale, à $r/R = 0.718$ et latitude -50 degrés, respectivement. Les lignes en tirets en (B) et (D) indiquent la position de la base de la zone convective. Cette simulation tourne au taux solaire, mais est sous-lumineuse en comparaison au soleil. Une version animée est disponible sur la page web du cours.

correspondant à l’interface entre la zone convective et le fluide convectivement stable sous-jacent. Le diagramme en (B) montre la moyenne zonale de cette même composante toroidale, cette fois dans un plan méridien. Ces deux diagrammes sont construits à partir d’un instantané (un pas de temps) de la simulation. En (C) et (D) cette même moyenne zonale du champ magnétique toroidal est présentée sous la forme de diagramme temps-latitude et temps-rayon, tous deux couvrant cette fois 300 années de simulation. Le diagramme temps-latitude en (C) est construit encore une fois à l’interface entre la zone convective et la couche de fluide stable, tandis que le diagramme temps-rayon est construit à mi-latitude, là où la composante toroidale atteint son amplitude maximale (voir le diagramme en B).

Les inversions de polarités du champ magnétique aux grandes échelles spatiales (ici axysymétriques) sont ici très régulières, bien synchronisées entre les hémisphères, et conservent une parité équatoriale antisymétrique, comme dans le cas du soleil. Par contre la période de ce cycle ($\simeq 80$ yr) est trop longue de près d’un facteur 4. Des simulations plus récentes effectuées avec EULAG-MHD (voir références en fin de chapitre) ont réussi à diminuer cette période à $\simeq 25$ yr, ce qui est quasi-solaire... mais au prix d’une désynchronisation excessive des hémisphères; travail toujours en cours!

On voit bien sur la Fig. 5.21B and D que le champ magnétique aux grandes échelles s’accumule aux mi-latitudes à la base de la zone convective, atteignant en fait son maximum dans le haut de la couche de fluide convectivement stable. Ceci est dû à la fois au pompage turbulent vers le bas dans la zone convective (on y reviendra sous peu), et aussi au fait que la turbulence dans la zone convective accélère la dissipation du champ magnétique aux grandes échelles. Le champ à la base de la zone convective atteint des valeurs substantielles de ~ 1 T, une bonne fraction de l’équipartition (viz. eq. 5.72). On retrouve des champs d’intensité semblable, ou même encore plus grande, dans d’autres simulations MHD globales, certaines parvenant même à produire des structures commençant à ressembler à des tubes de flux magnétique, ultimement à l’origine des taches solaires⁵.

Si les tubes de flux produisant (éventuellement) des taches solaires, originent de la base de la zone convective, et si leur taux de formation est proportionnel à l’intensité du champ magnétique profond, et si les tubes de flux émergent radialement à travers la zone convective⁶, alors le diagramme temps-latitude de la Figure 5.21C devient l’équivalent, dans cette simulation, du diagramme papillon des taches solaires. Ici l’activité est concentrée à trop hautes latitudes, et ne montrent pas la propagation vers l’équateur au cours du cycle qui caractérise le diagramme papillon des taches (voir Figure 5.3).

La simulation millenium produit également une composante dipolaire très bien alignées à l’axe de rotation, inversant également sa polarité; cette inversion se fait cependant en phase avec la composante toroidale interne, tandis que les observations du soleil suggèrent une différence de phase de $\pi/2$.

5.8.3 Fluctuations du cycle magnétique

Il est très clair, sur examen de la Fig. 5.21C et D, que le cycle magnétique se développant dans cette simulation n’est pas strictement périodique, et montre des variations substantielles au niveau de l’amplitude du champ magnétique interne d’un demi-cycle au suivant. Le pont vers les observations des taches (viz. Fig. 5.1) peut se faire via la construction d’un “proxy”, par intégration de la composante toroidale du champ magnétique dans une mince coquille chevauchant la base de la zone convective⁷; ce choix est dicté par le fait que c’est là où on s’attend à la formation des tubes de flux qui émergeront ultimement sous la forme de paires de taches solaires. Si formation des tubes est proportionnelle au flux magnétique local, alors la séquence temporelle de ce proxy devient l’équivalent de la séquence temporelle du nombre de taches solaires.

La Figure 5.22 montre les séquences temporelles de ce proxy, pour la simulation complète en (A) et divisé par hémisphère en (B). Les deux histogrammes en (C) et (D) montrent les distributions des amplitudes des cycles dans chaque hémisphère. L’étendue temporelle est ici de 1600 ans, couvrant 40 cycles, soit l’ensemble de la simulation “millenium”. On constate une grande variabilité dans les amplitudes des cycles successifs, qui n’est pas sans rappeler celle des cycles observés dans le nombre de taches solaires. Certains cycles montrent des asymétries hémisphériques substantielles, plus marquées que dans le cas du soleil. Les distributions des amplitudes des cycles montrent également une tendance à la bimodalité. Il n’en demeure pas moins que le cycle demeure très stable durant toute l’étendue de la simulation, avec une demie-période de 40.5 ± 1.5 yr ici. De plus, les inversions de polarité demeurent bien synchronisées dans les deux hémisphères, même pour les cycles où une différence marquée est observée dans les amplitudes Nord et Sud. Ici le délai Nord-Sud ne dépasse pas 5 ans, soit à peine 12% de la (demie-)période du cycle. C’est là une synchronisation hémisphérique meilleure que celle observée pour le cycle solaire.

⁵Voir l’article de Nelson et al. (2013) cité en bibliographie en fin de chapitre.

⁶Tous ces “si” peuvent paraître très arbitraires et contraignants, mais les simulations de la déstabilisation et ascension des tubes de flux magnétique confirment leur validité, en première approximation.

⁷Voir l’article Passos & Charbonneau (2014) cité en bibliographie pour plus de détails sur la définition et justification de ce proxy.

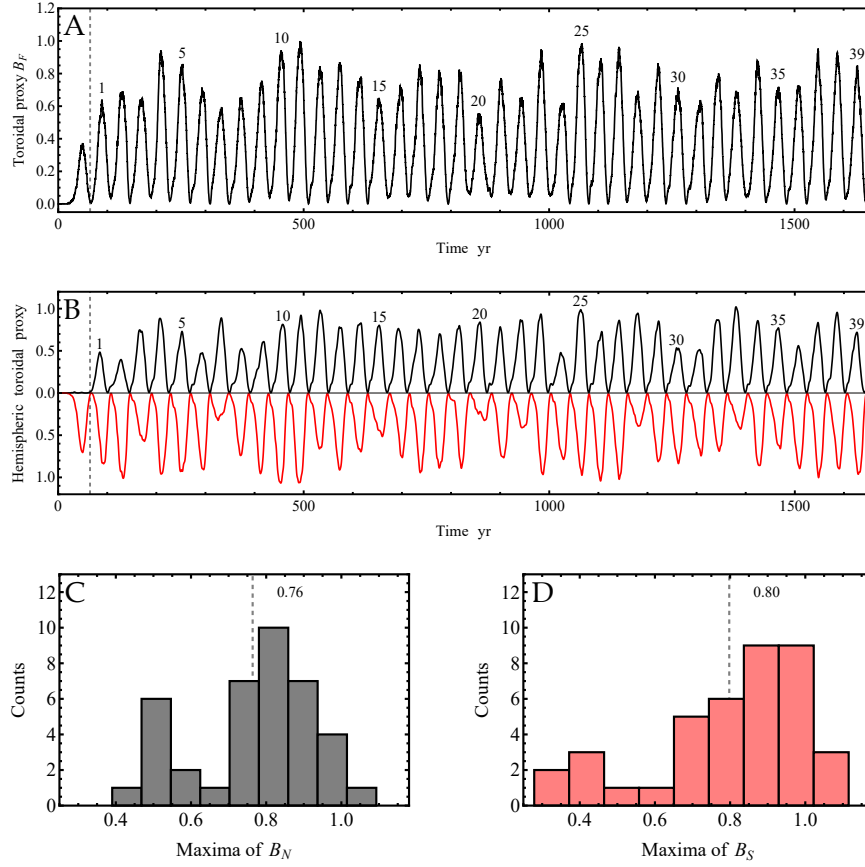


Figure 5.22: Cycles d'activité magnétique sur l'étendue complète de la simulation millenium de la Fig. 5.21. (A) Séquence temporelle normalisée d'un proxy équivalent au nombre de taches solaires; (B) Identique en (A) mais divisé selon les hémisphères, avec des valeurs négatives utilisées pour l'hémisphère sud (en rouge); (C) et (D) montrent les distributions des amplitudes des cycles mesurées dans chaque hémisphère. Adapté des Figures 3, 8 et 10 dans Passos & Charbonneau, *Astron. Ap.*, **568**, A113 (2014).

5.8.4 Rétroaction magnétique sur la rotation différentielle

Considérant que le champ magnétique atteint ~ 1 T à la base de la zone convective au maxima du cycle dans la simulation millenium, on peut s'attendre à un impact de la force de Lorentz magnétique sur les écoulements inductifs, en particulier sur la rotation différentielle. L'emphase sur la rotation différentielle vient du fait qu'une variation cyclique est détectée par héliosimologie; son amplitude est plutôt faible, soit quelques % de la fréquence angulaire moyennée sur un cycle d'activité, mais sa période d'oscillation coïncide parfaitement avec celle du cycle magnétique, ne laissant aucun doute que ce dernier est son moteur.

Il s'avère que cette rétroaction magnétique n'est pas uniquement causée par la force de Lorentz associée à l'oscillation de la composante aux grandes échelles du champ magnétique. Ceci est illustré à la Figure 5.23, toujours pour la simulation millenium. L'idée est de reformuler la composante- ϕ de l'équation du mouvement sous forme conservative:

$$\varrho r \sin \theta \frac{\partial \langle u_\phi \rangle}{\partial t} = \nabla \cdot \left\{ r \sin \theta \left[\underbrace{\frac{1}{\mu_0} \langle B_\phi \rangle \langle \mathbf{B} \rangle}_{\text{MT}} + \underbrace{\langle b'_\phi \mathbf{b}' \rangle}_{\text{MS}} \right] \right\} \quad (5.78)$$

$$- \varrho \left(\underbrace{\langle \langle U_\phi \rangle + \Omega r \sin \theta \rangle \langle \mathbf{u} \rangle}_{\text{MC}} + \underbrace{\langle u'_\phi \mathbf{u}' \rangle}_{\text{RS}} \right) \quad (5.79)$$

où l'écoulement total \mathbf{u} et le champ magnétique \mathbf{B} ont été séparés en leurs composantes axisymétriques (grandes échelles) et non-axisymétriques (petites échelles): $\mathbf{U} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}'$, and $\mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{b}'$, et les crochets “ $\langle \rangle$ ” indiquent une moyenne zonale. Le membre de droite est écrit sous la forme de la divergence d'un flux de moment cinétique, pour lequel on peut identifier quatre contributions: la force de Lorentz associée au champ aux grandes échelles (MT), la force magnétique associée aux champ aux petites échelles (MS pour “stress de Maxwell”), le transport de moment cinétique par la circulation méridienne (MC), et les stress de Reynolds (RS).

La Figure 5.23 montre les flux radiaux globaux (et A et B) de moment cinétiques associés à chacune de ces contributions intégré sur des coquilles sphériques de rayon r croissant, ainsi que les flux latitudinaux globaux (en C et D) obtenus en intégrant les même quatre termes cette fois sur des surface coniques d'ouverture angulaire θ dont l'axe coïncide avec l'axe de symétrie/rotation. La colonne de gauche correspond à des moyennes temporelles centrées sur un minimum du cycle magnétique, tandis qu'à droite les moyennes sont centrées sur un maximum.

La Figure 5.23 montre bien que les profils radiaux et latitudinaux des flux de moment cinétique sont plutôt complexes, mais livrent néanmoins un message des plus clair: bien que le couple magnétique associé au champ magnétique aux grandes échelles (en rouge, et étiqueté MT) varie de manière importante entre les phases minimale et maximale du cycle magnétique, comme on s'y attendrait, les autres contributions varient tout autant, et à un niveau comparable de surcroît. Dans cette simulation, l'impact du magnétisme sur la dynamique zonale se fait sentir à tous les niveau, incluant les contributions à prime abord purement hydrodynamiques, comme les stress de Reynolds (RS, en bleu) ou le transport par la circulation méridienne (MC, en vert). Il résulte de ces variations une *oscillation torsionnelle* du profil de rotation différentielle d'amplitude et phase semblable à celle détectée dans le soleil par héliosismologie⁸. On retrouve également une signature claire du cycle magnétique dans la luminosité flux convective, et cette variation se retrouve en phase avec le cycle magnétique, comme on l'observe sur le soleil⁹.

5.8.5 Analyse via l'électrodynamique des champs moyens

L'appareillage mathématique de l'électrodynamique des champs moyens, introduit précédemment à la §5.4.1, peut être utilisée pour *interpréter physiquement* les sorties des simulations numériques MHD, en particulier au niveau de l'identification des processus inductifs et de leurs importances relatives. Une approche particulièrement simple consiste à calculer d'abord, par moyenne zonale de \mathbf{u} et \mathbf{B} , la partie “moyenne” des écoulement ($\langle \mathbf{u} \rangle$) et du champ magnétique ($\langle \mathbf{B} \rangle$), et ensuite définir les petites échelles selon

$$\mathbf{b}'(r, \theta, \phi, t) = \mathbf{B}(r, \theta, \phi, t) - \langle \mathbf{B} \rangle(r, \theta, t) , \quad \mathbf{u}'(r, \theta, \phi, t) = \mathbf{U}(r, \theta, \phi, t) - \langle \mathbf{u} \rangle(r, \theta, t) . \quad (5.80)$$

La force électromotrice turbulente $\boldsymbol{\xi}$ peut alors être calculée explicitement via l'éq. (5.22). Connaissant maintenant $\boldsymbol{\xi}(r, \theta, t)$ et $\langle \mathbf{B} \rangle(r, \theta, t)$ (et ses dérivées spatiales), on peut alors effectuer en chaque point (r, θ) du plan méridien une minimisation des moindres carrés entre la séquence temporelle de $\boldsymbol{\xi}$ et celles de $\langle \mathbf{B} \rangle$ et ses dérivées, pour en extraire les valeurs des composantes correspondantes des tenseurs $\boldsymbol{\alpha}(r, \theta)$ et $\boldsymbol{\beta}(r, \theta)$.

Cette approche est celle retenue pour produire les résultats présentés sur la Figure 5.24. Les diagrammes A–C illustrent, dans le plan méridien, les éléments diagonaux du tenseur $\boldsymbol{\alpha}$; E–F montrent les composantes r et θ de la vitesse de pompage turbulent (associées à la partie antisymétrique du tenseur- $\boldsymbol{\alpha}$ via l'éq. (5.34), on s'en souvient n'est-de-pas...?), tandis que F

⁸Voir l'article par Beaudoin et al. (2013) cité en bibliographie pour plus de détails sur ces oscillations torsionnelles.

⁹Voir les articles par Cossette et al. (2013, 2018) cités en bibliographie pour plus de détails sur cette modulation cyclique du transport convectif de l'énergie.

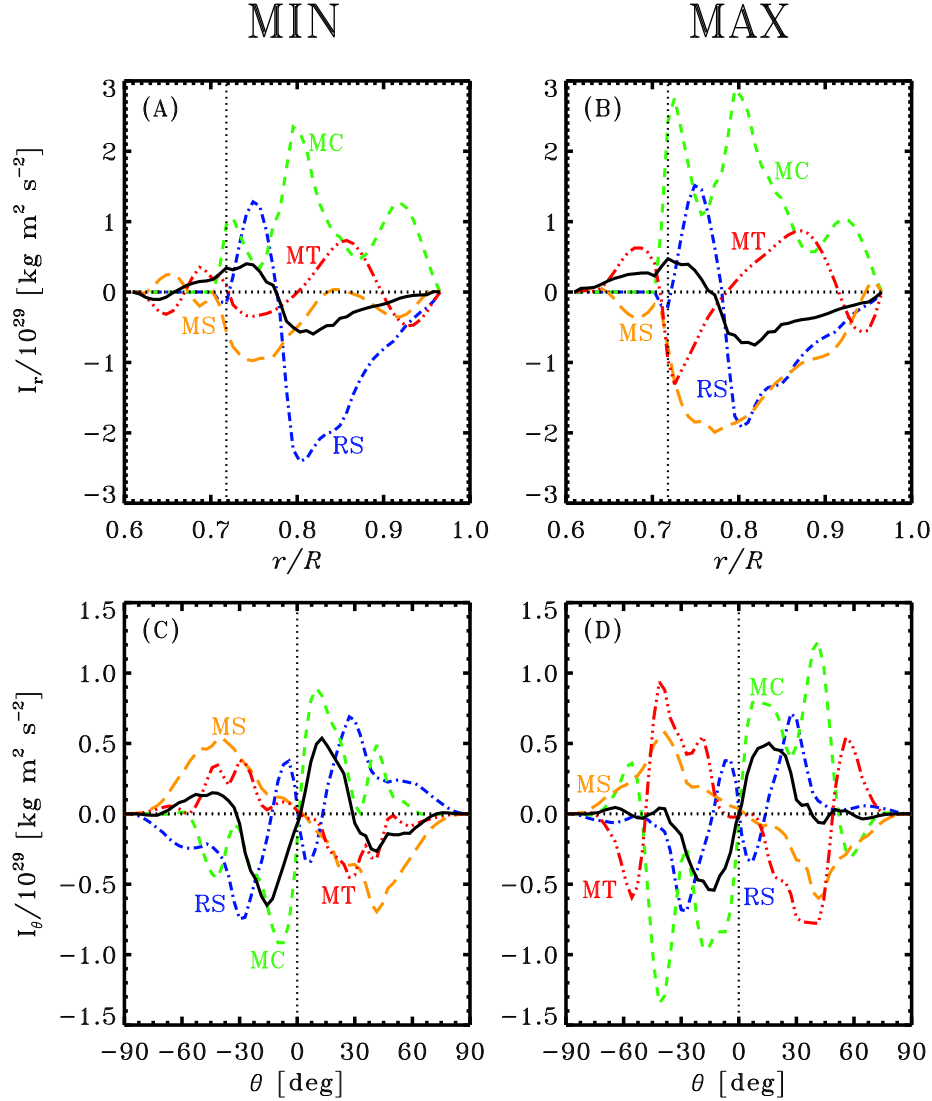


Figure 5.23: Variation des flux de moment cinétiques entre les phases minimale (à gauche) et maximale (à droite) du cycle magnétique dans la simulation EULAG-MHD/millennium de la Fig. 5.21. Les diverses courbes correspondent aux quatre contributions au flux de moment cinétique au membre de droite de l'éq. (5.78), soit: les stress de Reynolds (RS, en bleu), le transport par la circulation méridienne (MC, en vert), les stress de Maxwell (MS, en orange), et la force de Lorentz de la composante aux grandes échelles du champ magnétique (MT, en rouge). La rangée du haut montre les flux globaux radiaux (termes radiaux intégrés sur des coquilles sphériques), et la rangée du bas les flux globaux latitudinaux (intégrés sur des cônes). Les traits noirs montrent la somme des quatres contributions. Le trait pointillé vertical indique la base de la zone convective. Adapté de l'article par Beaudoin et al., *Solar Phys.*, **282**, 335–360 (2013).

présente la partie isotrope (diagonale moyenne) du tenseur β . La simulation MHD utilisée est toujours “millennium”. D’autres méthodes existent pour estimer les composantes de ces tenseurs, et ont été appliquées à diverses simulations conceptuellement semblables à celle considérée ici. On note certaines divergences, mais aussi plusieurs similarités, entre les résultats de ces analyses. Parmi les similarités, notons les suivantes:

1. Le tenseur- α est “plein”, dans le sens que ses composantes hors-diagonales sont du même ordre que ses composantes diagonales.
2. Les composantes souvent dominantes, atteignant quelques dizaines de mètres par seconde, sont en premier lieu α_{rr} , avec $\alpha_{\phi\phi}$ bon second.
3. Les composantes $\alpha_{\phi\phi}$ et $\alpha_{\theta\theta}$ sont positives (négatives) dans l’hémisphère Nord (Sud), sauf près de la base de la zone convective, où elles changent de signe.
4. La composante radiale du pompage turbulent est négative dans la zone convective, loin de ses frontières supérieures et inférieures.
5. La composante latitudinale du pompage turbulent est significative, atteignant quelques m s^{-1} aux latitudes basses et moyenne dans le gros de la zone convective.
6. La partie isotrope de la diffusivité turbulente β est très élevée, allant de quelques $10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ sur la Fig. 5.24F, jusqu’à 100 fois plus dans certaines simulation plus lumineuses.

Un des exercices de la troisième série vous fera comparer les prédictions de la théorie SOCA (voir §5.4) aux résultats de la Figure 5.24.

Il est également possible de tester l’idée du quenching de l’effet- α en subdivisant la simulation en blocs disjoints regroupant d’un coté les phases minimales du cycle magnétique, de l’autre les phases maximales, et en extraire séparément le tenseur α . On mesure bien une réduction de l’effet- α quand le champ magnétique moyen est plus intense, mais cette réduction n’est pas particulièrement bien capturée par l’éq. (5.73) introduite de manière si *ad hoc* à la §5.6.2¹⁰.

5.8.6 Du soleil aux étoiles

Depuis maintenant quatre décennies, les observations de cycles stellaires brièvement discutées à la §5.1.3 ont été interprétées à toutes les sauces imaginables dans le contexte des modèles dynamos en champ moyen. Contrairement au cas solaire, ici on ne connaît pas la rotation différentielle interne ou la circulation méridienne, donc même en utilisant un modèle calibré sur le soleil comme point de départ on se retrouve forcé de spécifier, *a priori* comment varient ces écoulements (et l’effet- α , diffusivité turbulente, etc.) quand la rotation et la luminosité de l’étoile changent. Avec autant de liberté (en termes de fonctions et paramètres ajustables), on peut évidemment reproduire les observations, mais en bout de ligne on n’en apprend pas grand chose de physiquement solide.

Les simulations MHD du genre de celles décrites à la §5.8 ont l’immense avantage de produire à la fois les écoulements et les champs magnétiques de manière physiquement cohérente. Le défi est de parvenir à produire une séquence de simulations générant des cycles magnétiques réguliers sur une plage relativement large de vitesses de rotation et de luminosités. Encore une fois —s’cusez je repars sur le pétage de bretelles— c’est à l’UdeM que la première séquence de ce genre a été produite, et tout récemment en plus¹¹.

La Figure 5.25 présente un récapitulatif synthétique de la dynamo aux grandes échelles dans simulations. Ou y porte en graphique le rapport entre l’énergie cinétique de la rotation différentielle versus l’énergie cinétique totale (typiquement dominée par la turbulente convective), en fonction du nombre de Rossby. Chaque point correspond à une simulation individuelle,

¹⁰Voir l’article par Simard et al. (2016) cité en bibliographie pour plus de détail sur cette analyse, et ses conclusions.

¹¹Il s’agit principalement du fruit du dur labeur d’un ex-postdoc, Antoine Strugarek, et d’un ex-étudiant au doctorat, Patrice Beaudoin.

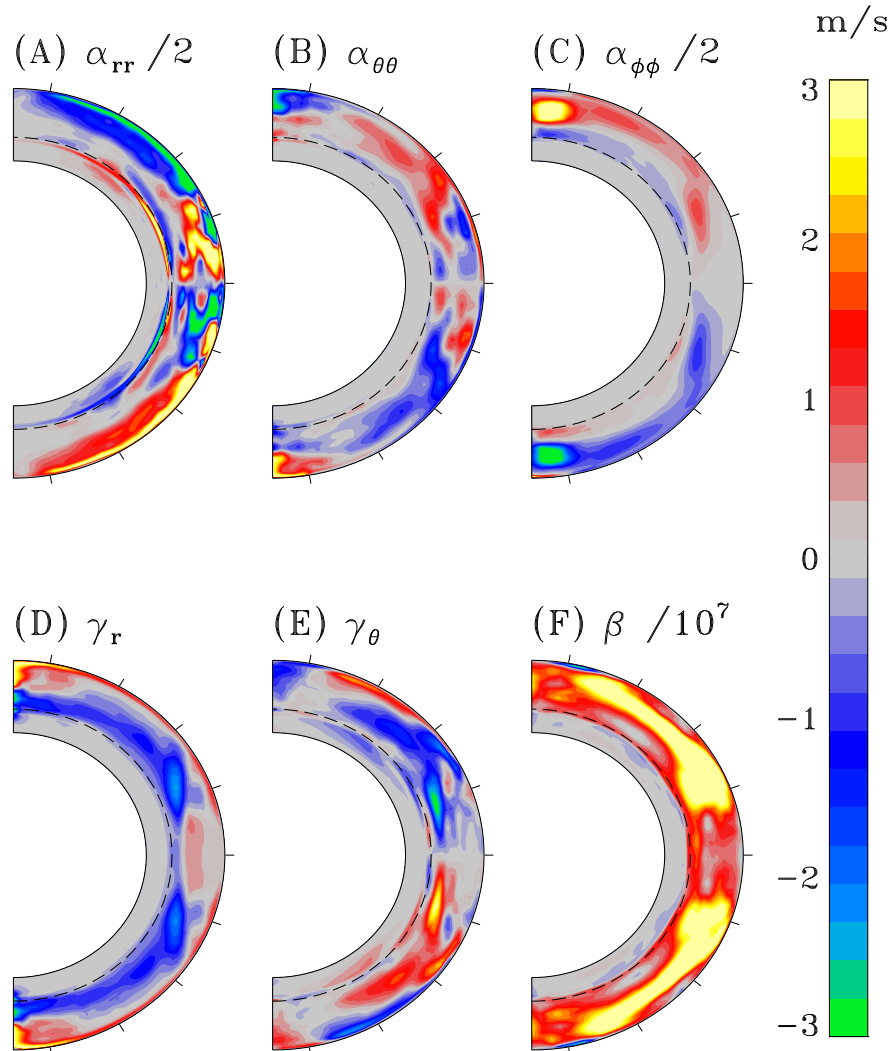


Figure 5.24: Une sélection de quelques composantes des tenseurs α et β , extrait de la simulation EULAG-MHD “millenium”. (A) α_{rr} ; (B) $\alpha_{\theta\theta}$; (C) $\alpha_{\phi\phi}$; (D) vitesse radiale du pompage turbulent γ_r ; (E) vitesse latitudinale du pompage turbulent γ_θ ; (F) partie isotrope du tenseur β , en unités de $10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Dans tous les cas l’extraction des composantes des tenseurs est effectuée indépendamment dans chaque hémisphère, le haut degré de symétrie équatoriale évident ici étant une caractéristique véritable de cette simulation. Adapté des Figures 2 et 4 de Simard et al., *Adv. Sp. Res.*, **58**, 1522–1537 (2016).

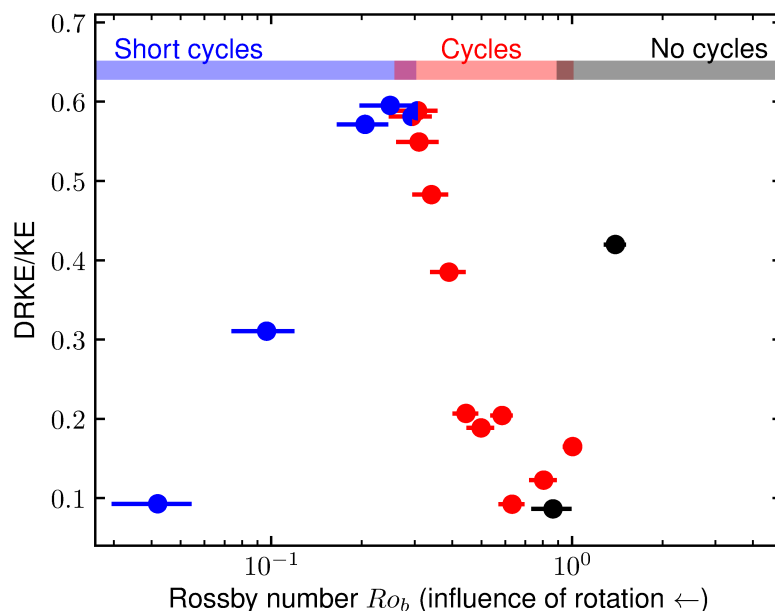


Figure 5.25: Diagramme récapitulatif montrant les variations de la dynamo aux grandes échelles dans une séquence de simulations EULAG-MHD couvrant une plage de valeurs de taux de rotation et luminosités. Les simulations produisant des cycles de type “solaire” (point rouges), caractérisées par des périodes d’ordre décadales, se limitent ici à un intervalle relativement restreint en nombres de Rossby (voir texte). Reproduction de la Figure 2 dans Strugarek et al., *Astrophys. J.*, **863**, id35 (2018).

et est coloré selon le type d’action dynamo aux grandes échelles s’y développant: en bleu, des cycles magnétiques de courte période (quelques années), produits dans la moitié supérieure de la zone convective; en rouge, des cycles de type “solaire”, originant de la moitié inférieure de la zone convective; en noir, les simulations produisant des champs stationnaires aux grandes échelles, i.e., n’inversant pas leur polarité magnétique. Deux simulations à $Ro \simeq 0.3$ montrent à la fois un cycle court et un cycle décadal de type solaire (le soleil aussi!).

Bien que des simulations —et analyses— supplémentaires soient requises pour mieux quantifier ce qui déclenche les transitions d’un type de dynamo à une autre, il est déjà clair d’après la Fig. 5.25 que la rotation différentielle y joue un rôle majeur.

Un aspect particulièrement intéressant des cycles de type solaire (en rouge sur la Fig. 5.25) est la manière dont la période de leur cycle (P_{cyc}) varie en fonction de la période de rotation de la simulation (P_{rot}) et du nombre de Rossby. La relation suivante offre un excellent fit pour ce sous-ensemble de simulations:

$$\frac{P_{cyc}}{P_{rot}} \propto Ro^{-1.6 \pm 0.14} . \quad (5.81)$$

C’est une tendance inverse à celle traditionnellement établie sur la base de modèles dynamos en champ moyen, où on s’attend à ce que ce rapport *augmente* avec le nombre de Rossby. La différence reflète le caractère fondamentalement nonlinéaire du mécanisme dynamo agissant dans ces simulations MHD. Il s’avère de surcroît que la relation ci-dessus, lorsqu’appliquée aux observations d’étoiles de type solaire (viz. la Fig. 5.6), ramène le soleil sur la même “branche” d’activité que les étoiles¹².

¹²Pour plus de détails sur cette nouvelle interprétation des observations —anciennes et récentes— voir l’article par Strugarek et al. (2017) cité en bibliographie.

Table 5.1: Propriétés physiques d’un disque galactique générique

Quantité	Symbole/définition	Valeur numérique [SI]	Commentaire
Rayon du disque	R	10 kpc	spirale “typique”
Épaisseur du disque	h	0.4 kpc	spirale “typique”
Densité de particules	n	10^6 m^{-3}	$10^3\text{--}10^9$
Température	T	10^4 K	$10\text{--}10^6$
Champ magnétique	B	$3 \times 10^{-9} \text{ T}$	bras spiraux
Rotation à mi-rayon	$u_\phi = s\Omega$	200 km s^{-1}	spirale “typique”
Vitesse turbulente	u_T	10 km s^{-1}	mesurée
Longueur turbulente	λ	0.1 kpc	bulle de supernovae
temps de corrélation	τ_c	10^6 yr	Δt supernovae
Diffusivité microscopique	η	$10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	pour $T = 10^4 \text{ K}$
Diffusivité turbulente	$\beta = u_T \lambda$	$10^{22} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	longueur de mélange
Effet- α	$\alpha = \lambda^2 \Omega / h$	10^3 m s^{-1}	bulle de supernovae
Temps de dissipation	$\tau = h^2 / \beta$	$5 \times 10^8 \text{ yr}$	$\sim 5\%$ age galactique
Nombre de Reynolds	$R_m = u_T \ell / \beta$	10^3	pour turbulence
Nombre de Rossby	$Ro = u_T / \ell \Omega$	4	pour turbulence

5.9 Dynamos galactiques

Pour clore ce chapitre nous passons à la seconde classe d’objets astrophysiques où la présence d’un effet dynamo apparait essentielle pour expliquer les champs magnétiques observés: les galaxies¹³ (cf. Fig. 5.10).

5.9.1 Le disque galactique

En plus d’un changement de géométrie de la sphère à un disque (relativement) mince, le passage d’une dynamo stellaire à une dynamo agissant dans un disque galactique représente un changement d’échelle spatiale des plus substantiel: de $\sim 10^9 \text{ m}$ pour un rayon stellaire à $\sim 10 \text{ kpc} \simeq 3 \times 10^{20} \text{ m}$, soit 11 ordres de grandeurs. C’est en fait ce drastique changement d’échelle qui assure que même avec des densités particulières de $\sim 10^3 \text{ m}^{-3}$ dans l’environnement solaire de la Voie Lactée, l’approximation fluide magnétohydrodynamique tient toujours, même si le concept d’un plasma collisionnel peut paraître farfelu à prime abord.

La fraction d’ionisation dans le milieu interstellaire galactique varie entre 30% et 100%, conséquence de l’ionisation par la radiation provenant des étoiles massives et de l’impact des rayons cosmiques. Les mesures d’élargissement Doppler indiquent également que le disque galactique est dans un état turbulent, conséquence des explosions supernovae et des vents rapides produit par les étoiles massives. Les vitesses mesurées sont de quelques 10 km s^{-1} et demeurent cohérentes sur des échelles $\sim 0.1 \text{ kpc}$. On y mesure également un champ magnétique de quelques nanoTesla, soit en équilibre et au delà vis-à-vis la turbulence. Le Tableau 5.1 récapitule ces valeurs caractéristiques, ainsi que quelques nombres adimensionnels d’intérêt, pour le disque d’une galaxie spirale “typique”. Il ne faut pas perdre de vue que ces valeurs peuvent varier facilement par quelques ordres de grandeur entre les bras spiraux et le milieu inter-bras du disque. La chose critique à noter dans ce Tableau est que le temps de dissipation Ohmique est passablement plus court que l’âge du disque galactique; la présence d’un effet dynamo est donc requise pour expliquer l’existence des champs magnétiques galactiques, même d’amplitudes dans le nanoTesla. Le nombre de Reynolds $\sim 10^3$ nous porte à anticiper que l’induction par les écoulements peut opérer même en présence de la diffusion turbulente; et le nombre de Rossby

¹³Cette section est très fortement inspirée d’un article de revue d’Anvar Shukurov (U. Newcastle), grand expert parmi les experts de la modélisation dynamo des champs magnétiques galactiques; la référence complète est donnée dans la bibliographie en fin de chapitre.

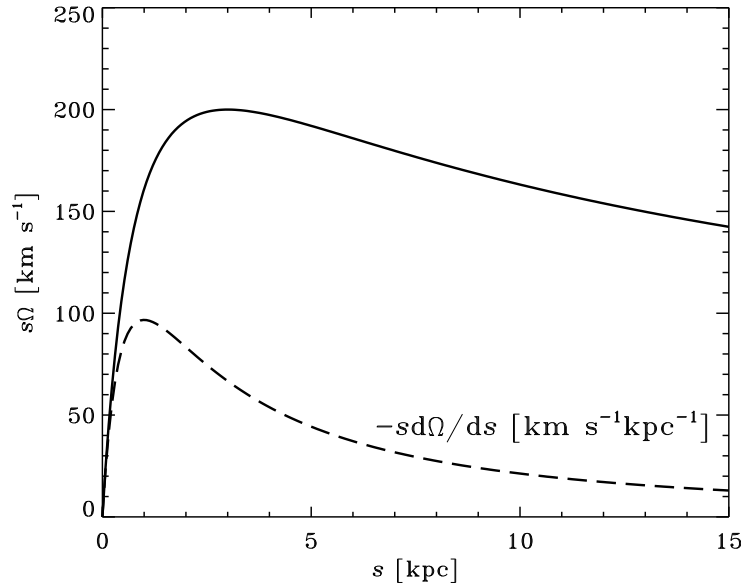


Figure 5.26: Profil de rotation galactique de Schmidt (éq. (5.82)), avec valeurs de paramètres $U_0 = 200 \text{ km s}^{-1}$, $n = 1$, et $s_0 = 5 \text{ kpc}$. Le trait plein trace la variation radiale de la vitesse zonale $u_\phi(s) = s\Omega(s)$ en fonction du rayon cylindrique s dans le plan du disque galactique, et le trait en tiret montre le taux de cisaillement rotationnel $G = s\partial\Omega/\partial s$ correspondant. Entre 5 et 15 kpc, ce taux ne varie que très peu.

~ 1 estimé aux échelles turbulentes suggère que la turbulence se développera de manière cyclonique. On retrouve déjà ici les deux éléments-clés de nos dynamos solaires/stellaires; et le rapport $\lambda/D \ll 1$ suggère une séparation d'échelles raisonnable entre les écoulements et le champ magnétique moyen d'une part, et la turbulence de l'autre; c'est un bon départ...

5.9.2 Modèles dynamos pour le disque galactique

Il s'agit maintenant de construire un modèle dynamo en champs moyens opérant dans un disque galactique. Comme dans le cas des dynamos solaire/stellaire, le cisaillement rotationnel est un ingrédient d'importance majeure. Heureusement, de bonnes mesures de la rotation existent pour un grand nombre de galaxies. Le *profil de Schmidt* décrit une courbe de rotation générique applicable aux galaxies spirales (non-barrées); travaillant en coordonnées cylindriques (s, ϕ, z) :

$$s\Omega(s) = U_0 \left(\frac{s}{s_0} \right) \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{s}{s_0} \right)^n \right]^{-3/2n}, \quad (5.82)$$

avec $n = 0.7-1$, $s_0 \sim 3 - 20 \text{ kpc}$, et $U_0 \sim 200 \text{ km s}^{-1}$. La Figure 5.26 en montre un exemple spécifique pour $n = 1$ et $s_0 = 5 \text{ kpc}$. Cette paramétrisation prédit une lente décroissance de la vitesse zonale pour $s \gg s_0$, contrairement aux observations radios qui indiquent que cette vitesse tend vers une constante dans la plupart des galaxies —indicateur de ce fameux problème de la “masse manquante”. Cependant, dans les régions du disque s'étendant à quelques s_0 , là où on soupçonne que la dynamo opère, le profil de Schmidt offre une représentation très raisonnable des observations. Un cisaillement rotationnel substantiel est associé à ce profil, comme le montre le trait en tiret.

Dans un disque mince (épaisseur h) en rotation à vitesse angulaire Ω et où la turbulence est produite par des bulles en expansion, de rayon caractéristique λ et déformées par la force

de Coriolis, une expression approximative et d'usage courant pour le coefficient α est:

$$\alpha \sim \frac{\lambda^2 \Omega}{h} . \quad (5.83)$$

Pour le disque de la Voie Lactée à l'orbite du système solaire ($s \simeq 8.5$ kpc), ceci conduit à $\alpha \sim 0.5 \text{ km s}^{-1}$.

Il s'agit maintenant d'écrire les équations dynamos en champ moyens, exprimées sous leur forme $\alpha\Omega$ en coordonnées cylindriques (s, ϕ, z) pour un champ moyen axisymétrique ($\partial/\partial\phi \equiv 0$). On écrit donc:

$$\mathbf{u}(s) = s\Omega(s)\hat{\mathbf{e}}_\phi , \quad (5.84)$$

$$\mathbf{B}(s, z, t) = B_s(s, z, t)\hat{\mathbf{e}}_s + B_\phi(s, z, t)\hat{\mathbf{e}}_\phi + B_z(s, z, t)\hat{\mathbf{e}}_z , \quad (5.85)$$

Il s'agit maintenant de substituer ces expressions dans notre équation dynamo en champs moyens (5.39) incorporant la forme diagonale pour les tenseurs α et β . De plus, sous l'approximation du disque mince (épaisseur h), on supposera que les gradients verticaux dominent les gradients horizontaux ($\partial/\partial z \gg \partial/\partial s$) pour toutes les variables du problème. Sous ces conditions, et omettant les “ $\langle \rangle$ ” pour alléger la notation, les composantes de l'éq. (5.39) se réduisent à:

$$\frac{\partial B_s}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}(\alpha B_\phi) + \beta \frac{\partial^2 B_s}{\partial z^2} , \quad (5.86)$$

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial t} = s \frac{\partial \Omega}{\partial s} B_s + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha B_s) + \beta \frac{\partial^2 B_\phi}{\partial z^2} , \quad (5.87)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} , \quad (5.88)$$

où l'on a retenu que la contribution turbulente β à la diffusivité magnétique totale. On passe maintenant à la forme adimensionnelle en exprimant toutes les longueurs en terme de l'épaisseur h du disque, et le temps en unités du temps de diffusion h^2/β :

$$\frac{\partial B_s}{\partial t} = -C_\alpha \frac{\partial}{\partial z}(\alpha B_\phi) + \frac{\partial^2 B_s}{\partial z^2} , \quad (5.89)$$

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial t} = C_\Omega G(s) B_s + C_\alpha \frac{\partial}{\partial z}(\alpha B_s) + \frac{\partial^2 B_\phi}{\partial z^2} , \quad (5.90)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} , \quad (5.91)$$

où deux nombres dynamos on fait leur apparition, équivalents directs des éqs. (5.55)–(5.56):

$$C_\alpha = \frac{\alpha_0 h}{\beta} , \quad C_\Omega = \frac{G_0 h^2}{\beta} , \quad (5.92)$$

avec G_0 (unités: s^{-1}) une mesure du taux de cisaillement, maintenant décrit par la fonction adimensionnelle:

$$G(s) = s \frac{\partial \Omega}{\partial s} . \quad (5.93)$$

Si on évalue maintenant les grandeurs de ces nombres dynamos à partir des quantités physiques listées au Tableau 5.1, on trouve $C_\alpha \simeq 0.6$ et $C_\Omega \simeq -15$, ce qui justifie l'usage de l'approximation $\alpha\Omega$.

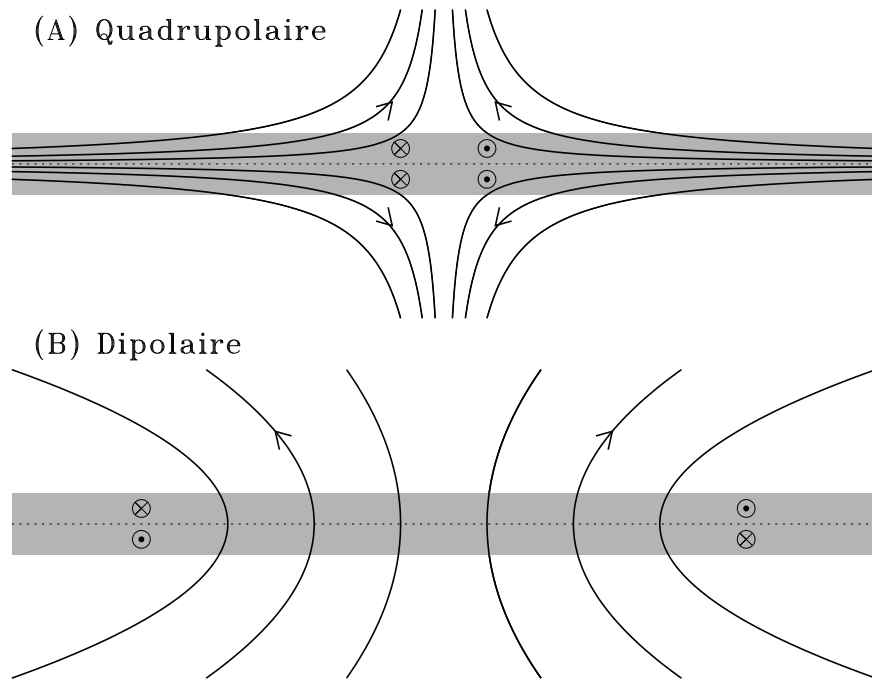


Figure 5.27: Représentation schématique des solutions dynamo linéaires résultant de la solution des éqs. (5.86)—(5.88) sous symétrie quadrupolaire (en A) ou dipolaire (B) dans un disque mince (en gris). Les “ \odot ” et “ \otimes ” indiquent l’orientation du champ toroidal. La forme exacte de la configuration magnétique à l’extérieur du disque dépend de manière assez sensible des conditions physiques supposées dans le halo galactique.

En ajoutant à tout ça des conditions limites appropriées, il est possible de solutionner numériquement les éqs. (5.89)—(5.91) dans un plan $[s, z]$ d'un disque mince. La Figure 5.27 illustre schématiquement le genre de solutions que l'on peut obtenir sous l'hypothèse de (A) symétrie ou (B) antisymétrie par rapport au plan équatorial du disque. Dans un tel disque, la composante toroidale a deux extrema dans la direction verticale, ce qui tend à favoriser la dissipation par rapport à la composante quadrupolaire, ou un seul extremum en B_ϕ est présent dans la verticale; ceci conduit (typiquement) à des taux de croissance (en régime linéaire) sensiblement plus élevés pour le mode quadrupolaire.

5.9.3 Analyse locale

On considérera ici une solution analytique locale obtenue dans le cadre de l'approximation dite "no- z ". On présuppose une configuration globale de type quadrupolaire comme sur la Fig. 5.27A, et on se limite au plan équatorial, d'où $B_z = 0$; c'est une configuration "magnétogéométrique" semblable à celle du modèle de Weber-Davis! Ça sent déjà la spirale... bon mais revenons à cette analyse locale; on introduit les approximations supplémentaires suivantes:

1. $C_\alpha \ll C_\Omega$: ceci nous permet de faire sauter le terme proportionnel à α au membre de droite de l'éq. (5.90), conduisant à un modèle dynamo de type $\alpha\Omega$;
2. Cisaillement rotationnel constant, dans le sens que $G(s) \equiv -1$, ce qui est certainement approprié pour une analyse locale, mais est en fait tolérable dans le cas du profil de rotation de Schmidt pour $s > s_0$ (voir Fig. 5.26);
3. Les dérivées verticales sont approximées selon $\partial/\partial z \rightarrow 1/h$ et $\partial^2/\partial z^2 \rightarrow -1/h^2$, un peu comme si on supposait $\mathbf{B} \propto \cos(z/h)$.
4. Les composantes du champ magnétique ne dépendent plus du rayon cylindrique s ;
5. L'équation (5.91) pour B_z est carrément évacuée du problème, kintoué...

Revenant (temporairement) à la forme dimensionnelle, la variété $\alpha\Omega$ des éqs. (5.86)—(5.87) avec $G(s)$ constant s'écrit comme:

$$\frac{\partial B_s}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}(\alpha B_\phi) + \beta \frac{\partial^2 B_s}{\partial z^2}, \quad (5.94)$$

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial t} = G B_s + \beta \frac{\partial^2 B_\phi}{\partial z^2}. \quad (5.95)$$

Le problème étant linéaire en \mathbf{B} et maintenant décrit par des ODE à coefficients constants, on cherche des solutions sous la forme:

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 \exp(\lambda t), \quad (5.96)$$

avec λ un réel. Substituant cette expression dans les éqs. (5.94)—(5.95) et remplaçant les dérivées verticales par $1/h$ conduit à:

$$\left(\lambda + \frac{\beta}{h^2}\right) B_{0s} + \frac{\alpha}{h} B_{0\phi} = 0, \quad (5.97)$$

$$-G B_{0s} + \left(\lambda + \frac{\beta}{h^2}\right) B_{0\phi} = 0. \quad (5.98)$$

Ce système de deux équations à deux inconnues acceptera une solution non-triviale si son déterminant est nul:

$$\begin{vmatrix} \lambda + \beta/h^2 & \alpha/h \\ -G & \lambda + \beta/h^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (5.99)$$

ce qui conduit à la relation de dispersion:

$$\lambda = \frac{\beta}{h^2}(-1 + \sqrt{-D}). \quad (5.100)$$

où $D = G\alpha h^2/\beta^2 \equiv C_\alpha \times C_\Omega$, comme auparavant. Clairement, on aura une solution croissant exponentiellement dans le temps si $D < -1$. Le nombre dynamo critique est donc ici $D_{\text{crit}} = -1$. Une fois λ connu on peut calculer le rapport $B_{0s}/B_{0\phi}$:

$$\frac{B_{0s}}{B_{0\phi}} = -\sqrt{\frac{\alpha}{-Gh}} = -\sqrt{\frac{C_\alpha}{|C_\Omega|}} \quad (5.101)$$

Ceci donne l'angle d'enroulement p (le "pitch angle") de la spirale magnétique par rapport à la direction radiale dans le plan du disque:

$$p = \text{atan}\left(\frac{B_{0s}}{B_{0\phi}}\right) \simeq -15^\circ \quad (5.102)$$

pour $C_\alpha = 0.6$ et pour $C_\Omega = -15$, comme auparavant. Cette valeur se compare relativement bien à l'angle d'enroulement mesuré dans les bras de galaxies spirales (non-barrées), bien qu'un peu sous la moyenne des valeurs mesurées.

Bibliographie:

La littérature sur les diverses mesures du champ magnétique solaire est très volumineuse, et inclut plusieurs excellents articles de revue. Un de mes préférés est:

Solanki, S., Inhester, B., and Schüssler, M., *Rep. Prog. Phys.*, **69**, 563-668 (2006).

Les articles originaux de Hale méritent toujours d'être lus; les deux principaux sont:

Hale, G.E., *Astrophys. J.*, **28**, 315-343 (1908),

Hale, G.E., Ellerman, F., Nicholson, S.B., and Joy, A.H., *Astrophys. J.*, **49**, 153-178 (1919).

L'article de revue suivant offre un bon point d'entrée sur la modélisation de l'ascension des tubes de flux magnétique toroidaux comme source des groupes bipolaires de taches:

Fan, Y., *Liv. Rev. Sol. Phys.*, **18** (2021),

<https://doi.org/10.1007/s41116-021-00031-2>

Côté théorème anti-dynamos, voir

Cowling, T.G., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **94**, 39-48 (1933),

Bullard, E.C., & Gellman, H., *Phil. Trans. R. Soc. London A*, **247**, 213-278 (1954),

Zeldovich, Ya. B., *J. Exp. and Theoretical Physics*, **31**, 154 (1956),

Zeldovich, Ya. B., & Ruzmaikin, A.A., *J. Exp. and Theoretical Physics*, **78**, 980 (1980),

ainsi que les pages 113-ff et 538-ff, respectivement, des ouvrages de Moffatt et Parker cités plus bas. L'électrodynamique en champs moyens est un édifice mathématico-physique dont les bases ont été posées il y a déjà longtemps par

Parker, E.N., *Astrophys. J.*, **122**, 293-314 (1955),

Braginskii, S.I., *Sov. Phys. JETP*, **20**, 726; 1462 (1964),

Steenbeck, M., & Krause, F., *Astr. Nach.*, **291**, 49-84 (1969),

mais les trois ouvrages suivants sont préférables pour ceux/celles désirant approfondir le sujet:

Moffatt, H.K. 1978, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids*, (Cambridge: Cambridge Univ. Press),

Parker, E.N. 1979, *Cosmical Magnetic Fields*, (Oxford: Clarendon Press), ch. 18,

Krause, F., & Rädler, K.-H. 1980, *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory*, (Oxford: Pergamon Press).

Les trois articles de revue suivants offrent conjointement un bon survol des modèles dynamos du cycle solaire, les deux premiers traitant également de ceux basés sur le mécanisme de Babcock-Leighton et/ou les instabilités hydro- et magnétohydrodynamiques, et le dernier incluant une discussion détaillée du quenching dynamique de α :

Charbonneau, P., *Liv. Rev. Sol. Phys.*, **17**(4) (2020),
<https://doi.org/10.1007/s41116-020-00025-6>
 Ossendrijver, M. A. J. H., *Astron. Astrophys. Rev.*, **11**, 287-367 (2003).
 Brandenburg, A., & Subramanian, K., *Phys. Rep.* **417**, 1-209 (2005).

Sur les nonlinéarités et bifurcations, voir la §X.Y de mon article de revue ci-dessus; et sur intermittence dans les modèles dynamos du cycle solaire, voir la §X.Y du même article. Également à ne pas rater:

Tobias, S.M., Weiss, N.O., & Kirk, V., *Month. Not. Roy. Astro. Soc.*, **273**, 1150-1166 (2016).
 Weiss, N.O., & Tobias, S.M., *Month. Not. Roy. Astro. Soc.*, **456**, 2654-2661 (2016).

Les résultats et analyses des simulations EULAG-MHD du cycle solaire décrites à la §5.8 sont documentés en plus grand détails dans les publications suivantes:

Ghizaru, M., Charbonneau, P., & Smolarkiewicz, P.K., *Astrophys. J. Lett.*, **715**, L133-137 (2010).
 Racine, É., Charbonneau, P., Ghizaru, M., Bouchat, A., & Smolarkiewicz, P.K., *Astrophys. J.*, **735**, id46 (2011).
 Beaudoin, P., Charbonneau, P., Racine, E., & Smolarkiewicz, P.K., *Solar Phys.*, **282**, 335-360 (2013).
 Passos, D., & Charbonneau, P., *Astron. Ap.*, **568**, A113 (2014).
 Simard, C., Charbonneau, P., & Dubé, C., *Adv. Space Res.*, **58**, 1522-1547 (2016).
 Cossette, J.-F., Charbonneau, P., Smolarkiewicz, P.K., & Rast, M.P., *Astrophys. J.*, **841**, id65 (2017).
 Strugarek, A., Beaudoin, P., Charbonneau, P., & Brun, A.S., *Astrophys. J.*, **863**, id35 (2018).

Et voici une pas-si-petite sélection d'autres publications notables (c'est le moins qu'on puisse dire!) dans ce domaine:

Brun, A.S., Miesch, M.S., & Toomre, J., *Astrophys. J.*, **614**, 1073-1098 (2004),
 Masada, Y., Yamada, K., & Kageyama, A., *Astrophys. J.*, **778**, id11 (2013),
 Nelson, N.J., Brown, B.P., Brun, A.S., Miesch, M.S., & Toomre, J., *Astrophys. J.*, **762**, id73 (2013),
 Fan, Y., & Fang, F., *Astrophys. J.*, **789**, id35 (2014),
 Augustson, K., Brun, A.S., Miesch, M.S., & Toomre, J., *Astrophys. J.*, **809**, id119 (2015),
 Simitev, R., Kosovichev, A.G., & Busse, F.H., *Astrophys. J.*, **810**, id80 (2015),
 Guerrero, G., Smolarkiewicz, P.K., de Gouveia Dal Pino, E.M., Kosovichev, A.G., & Mansour, N.N., *Astrophys. J.*, **819**, id106 (2016).
 Brun, A.S., Strugarek, A., Noraz, Q., Perri, B., Varela, J., Augustson, K., Charbonneau, P., & Toomre, J., *Astrophys. J.*, **926**, id21 (2022),
 Hotta, H., & Kusano, K., & Shimada, R., *Astrophys. J.*, **933**, id199 (2022).

Au niveau des observations de l'activité magnétique stellaire et de leurs interprétations dynamos, commencer avec le monumental article de revue suivant:

Brun, A.S., & Browning, M.K., *Liv. Rev. Sol. Phys.*, **14** (2017),
<https://link.springer.com/article/10.1007/s41116-017-0007-8>,

mais voir aussi:

- Baliunas, S.L., *et al.* 1995, *Astrophys. J.*, **438**, 269–287 (1995),
Hall, J.C., Lockwood, G.W., & Skiff, B.A., *Astron. J.*, **133**, 862–881 (2007)
Böhm-Vitense, E., *Astrophys. J.*, **657**, 486–493 (2007),
Saar, S.H., & Brandenburg, A., *Astrophys. J.*, **524**, 295–310 (1999),
Strugarek, A., Beaudoin, P., Charbonneau, P., Brun, A.S., & do Nascimento, J.-D., *Science*,
357, 185–187 (2017),
Reiners, A., Shulyak, D., Käpylä, et 16 co-auteurs, *Astron. Ap.*, **662**, A41 (2022).

Sur les aspects observationnels des champs magnétiques galactiques, voir

- Beck, R., *Scholarpedia*, **2**(8), 2411
http://www.scholarpedia.org/articles/Galactic_magnetic_fields.

La section 5.9 est basée en bonne partie sur l'article de revue suivant:

- Shukurov, A., *Introduction to galactic dynamo*, dans *Mathematical aspects of natural dynamos*, EDP Press; <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0411739>.

L'approximation “no- z ” est due à

- Subramanian, K., & Mestel, L., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **265**, 649 (1993).

Côté dynamos galactiques en général, je recommande les deux articles de revue suivants:

- Beck, R., Brandenburg, A., Moss, D., Shukurov, A., & Sokoloff, D., *Ann. Rev. Astron. Ap.*,
34, 155 (1996),
Kulsrud, R.M., & Zweibel, E.G., *Rep. Prog. Phys.*, **71**, 046901 (2008).

Enfin, les deux articles suivants donnent une bonne idée de l'état actuel des stocks en modélisation des dynamos dans les disques galactiques, incluant nonlinéarités et non-axisymétrie (voir aussi les références s'y trouvant):

- Chamandy, L., & Shukurov, A., Subramanian, K., & Stoker, K., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **443**, 1867 (2014).
Chamandy, L., & Taylor, A.R., *Astrophys. J.*, **808**, 28 (2015).

Appendice A

Identités et théorèmes du calcul vectoriel

A.1 Identités vectorielles

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

$$\nabla \times \nabla f = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{A} + f(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \times \mathbf{A} + f(\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A}\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

A.2 Le théorème du gradient

Pour toute paire de points \mathbf{a} , \mathbf{b} dans un espace où est défini une fonction scalaire f dont les dérivées spatiales sont continues au moins jusqu'au premier degré,

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla f) \cdot d\boldsymbol{\ell} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}),$$

indépendamment du chemin d'intégration choisi entre \mathbf{a} et \mathbf{b} .

A.3 Le théorème de la divergence

Pour tout champ vectoriel \mathbf{A} dont les dérivées spatiales des composantes scalaires sont continues au moins jusqu'au premier degré,

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS ,$$

où la surface S englobe le volume.

A.4 Le théorème de Stokes

Pour tout champ vectoriel \mathbf{A} dont les dérivées spatiales des composantes scalaires sont continues au moins jusqu'au premier degré,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_\gamma \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} ,$$

où le contour γ délimite le bord de la surface S , et l'orientation de la normale $\hat{\mathbf{n}}$ est définie par le sens de l'intégrale de ligne sur γ via la règle de la main droite.

A.5 Les identités de Green

Pour toute paire de fonctions ϕ et ψ définies dans un volume V englobé par une surface S et dont les dérivées sont continues au moins jusqu'au second degré,

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dV = \oint_S \phi (\nabla \psi) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS ,$$

et

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \oint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS .$$

Ces expressions sont appelées respectivement première et seconde identités de Green, la seconde étant souvent rebaptisée théorème de Green.

Appendice B

Systèmes de coordonnées et équations fluides

Cet Annexe est adapté en partie de l'Annexe B de l'ouvrage de Jean-Louis Tassoul intitulé *Theory of Rotating Stars* (Princeton University Press, 1978), avec bon nombre d'additions, incluant l'équation d'induction magnétohydrodynamique, les expressions pour les opérateurs $\mathbf{u} \cdot \nabla$ et ∇^2 agissant sur un champ vectoriel, et la forme développée de la divergence d'un tenseur de rang deux. On notera également, aux sections B.1.4 et B.2.4, que les quantités entre parenthèses carrées correspondent aux composantes du tenseur des déformation $D_{jk} = (1/2)(\partial_j u_k + \partial_k u_j)$.

B.1 Coordonnées cylindriques (s, ϕ, z)

B.1.1 Conversion aux coordonnées Cartésiennes

$$x = s \cos \phi, \quad y = s \sin \phi, \quad s = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \text{atan}(y/x), \quad z = z.$$

$$\hat{\mathbf{e}}_x = \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_s - \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad \hat{\mathbf{e}}_y = \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_s + \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_\phi,$$

$$\hat{\mathbf{e}}_s = \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_x + \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_y, \quad \hat{\mathbf{e}}_\phi = -\sin \phi \hat{\mathbf{e}}_x + \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_y, \quad \hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{e}}_z.$$

B.1.2 Éléments infinitésimaux

$$d\mathbf{l} = ds \hat{\mathbf{e}}_s + s d\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi + dz \hat{\mathbf{e}}_z$$

$$dV = s ds d\phi dz$$

B.1.3 Opérateurs

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{u_\phi}{s} \frac{\partial}{\partial \phi} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial s} \hat{\mathbf{e}}_s + \frac{1}{s} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \left(\mathbf{u} \cdot \nabla A_s - \frac{u_\phi A_\phi}{s} \right) \hat{\mathbf{e}}_s + \left(\mathbf{u} \cdot \nabla A_\phi + \frac{u_\phi A_s}{s} \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi + (\mathbf{u} \cdot \nabla A_z) \hat{\mathbf{e}}_z$$

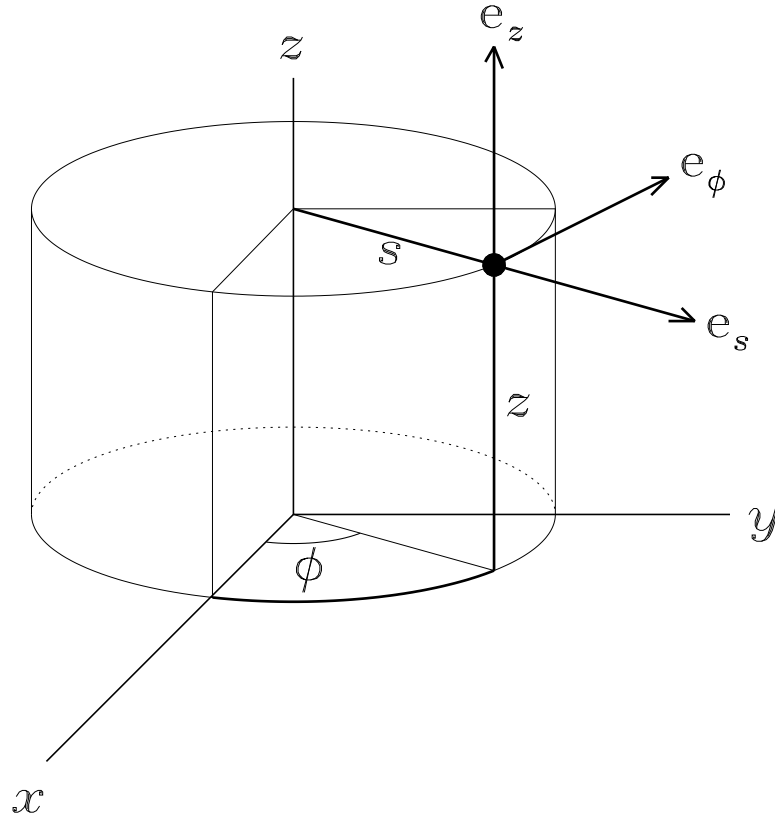


Figure B.1: Définition géométrique du système de coordonnées cylindriques. L'étendue des coordonnées est $s \in [0, \infty]$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $z \in [-\infty, \infty]$. Le rayon cylindrique s est mesurée perpendiculairement à l'axe- x Cartésien. Le point zéro de l'angle azimutal ϕ est sur l'axe- x Cartésien. L'axe- z est identique à celui du système Cartésien. La triade unitaire est orientée de manière telle que $\hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{e}}_s \times \hat{\mathbf{e}}_\phi$.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s A_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{1}{s} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{e}}_s \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_s}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial s} \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{1}{s} \left(\frac{\partial (s A_\phi)}{\partial s} - \frac{\partial A_s}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{e}}_z \\ \nabla^2 &= \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \nabla^2 \mathbf{A} &= \left(\nabla^2 A_s - \frac{A_s}{s^2} - \frac{2}{s^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{e}}_s \\ &\quad + \left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{s^2} + \frac{2}{s^2} \frac{\partial A_s}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi + (\nabla^2 A_z) \hat{\mathbf{e}}_z \end{aligned}$$

B.1.4 La divergence d'un tenseur symétrique d'ordre deux

$$\begin{aligned} [\nabla \cdot \mathbf{T}]_s &= \frac{1}{s} \frac{\partial(sT_{ss})}{\partial s} + \frac{1}{s} \frac{\partial T_{\phi s}}{\partial \phi} + \frac{\partial T_{zs}}{\partial z} - \frac{T_{\phi\phi}}{s} \\ [\nabla \cdot \mathbf{T}]_\phi &= \frac{1}{s} \frac{\partial(sT_{s\phi})}{\partial s} + \frac{1}{s} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial T_{z\phi}}{\partial z} + \frac{T_{\phi s}}{s} \\ [\nabla \cdot \mathbf{T}]_z &= \frac{1}{s} \frac{\partial(sT_{sz})}{\partial s} + \frac{1}{s} \frac{\partial T_{\phi z}}{\partial \phi} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{aligned}$$

B.1.5 Composantes du tenseur des stress visqueux

$$\begin{aligned} \tau_{ss} &= 2\mu \left[\frac{\partial u_s}{\partial s} \right] + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \tau_{\phi\phi} &= 2\mu \left[\frac{1}{s} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_s}{s} \right] + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \tau_{zz} &= 2\mu \left[\frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \tau_{s\phi} = \tau_{\phi s} &= 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial u_s}{\partial \phi} + s \frac{\partial}{\partial s} \frac{u_\phi}{s} \right) \right] \\ \tau_{\phi z} = \tau_{z\phi} &= 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial z} + \frac{1}{s} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} \right) \right] \\ \tau_{zs} = \tau_{sz} &= 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial z} \right) \right] \end{aligned}$$

B.1.6 Équations du mouvement

$$\begin{aligned} \varrho \left(\frac{Du_s}{Dt} - \frac{u_\phi^2}{s} \right) &= -\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{B_z}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_s}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial s} \right) \\ &\quad - \frac{B_\phi}{\mu_0 s} \left(\frac{\partial(sB_\phi)}{\partial s} - \frac{\partial B_s}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s\tau_{ss}) + \frac{1}{s} \frac{\partial \tau_{s\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \tau_{sz}}{\partial z} - \frac{\tau_{\phi\phi}}{s} \\ \varrho \left(\frac{Du_\phi}{Dt} + \frac{u_\phi u_s}{s} \right) &= -\frac{\varrho}{s} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} - \frac{1}{s} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{B_s}{\mu_0 s} \left(\frac{\partial(sB_\phi)}{\partial s} - \frac{\partial B_s}{\partial \phi} \right) \\ &\quad - \frac{B_z}{\mu_0} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right) + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s\tau_{\phi s}) + \frac{1}{s} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \tau_{\phi z}}{\partial z} + \frac{\tau_{s\phi}}{s} \\ \varrho \frac{Du_z}{Dt} &= -\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{B_\phi}{\mu_0} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right) \\ &\quad - \frac{B_s}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_s}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial s} \right) + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s\tau_{zs}) + \frac{1}{s} \frac{\partial \tau_{z\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{aligned}$$

B.1.7 Conservation de l'énergie

$$\varrho T \frac{Ds}{Dt} = \Phi_\nu + \Phi_\eta + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left[\chi^s \frac{\partial T}{\partial s} \right] + \frac{1}{s^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\chi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\chi \frac{\partial T}{\partial z} \right]$$

$$\Phi_\nu = 2\mu(D_{ss}^2 + D_{\phi\phi}^2 + D_{zz}^2 + 2D_{s\phi}^2 + 2D_{\phi z}^2 + 2D_{zs}^2) + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu\right)(\nabla \cdot \mathbf{u})^2$$

$$\Phi_\eta = \frac{\eta}{\mu_0} \left[\left(\frac{1}{s} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial B_s}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{s^2} \left(\frac{\partial(sB_\phi)}{\partial s} - \frac{\partial B_s}{\partial \phi} \right)^2 \right]$$

B.1.8 L'équation d'induction MHD

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_s}{\partial t} &= \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \phi} (u_s B_\phi - u_\phi B_s) - \frac{\partial}{\partial z} (u_z B_s - u_s B_z) \\ &\quad - \frac{1}{s^2} \frac{\partial \eta}{\partial \phi} \left(\frac{\partial(sB_\phi)}{\partial s} - \frac{\partial B_s}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial z} \left(\frac{\partial B_s}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial s} \right) \\ &\quad + \eta \left(\nabla^2 B_s - \frac{B_s}{s^2} - \frac{2}{s^2} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} \right) \\ \frac{\partial B_\phi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} (u_\phi B_z - u_z B_\phi) - \frac{\partial}{\partial s} (u_s B_\phi - u_\phi B_s) \\ &\quad - \frac{\partial \eta}{\partial z} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right) + \frac{1}{s} \frac{\partial \eta}{\partial s} \left(\frac{\partial(sB_\phi)}{\partial s} - \frac{\partial B_s}{\partial \phi} \right) \\ &\quad + \eta \left(\nabla^2 B_\phi - \frac{B_\phi}{s^2} + \frac{2}{s^2} \frac{\partial B_s}{\partial \phi} \right) \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} &= \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s u_z B_s - s u_s B_z) - \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \phi} (u_\phi B_z - u_z B_\phi) \\ &\quad - \frac{\partial \eta}{\partial s} \left(\frac{\partial B_s}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial s} \right) + \frac{1}{s} \frac{\partial \eta}{\partial \phi} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right) + \eta (\nabla^2 B_z) \end{aligned}$$

B.2 Coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

B.2.1 Conversion aux coordonnées Cartésiennes

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta.$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \text{atan}(\sqrt{x^2 + y^2}/z), \quad \phi = \text{atan}(y/x).$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_x &= \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_r + \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_\phi, \\ \hat{\mathbf{e}}_y &= \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_r + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_\theta + \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_\phi, \\ \hat{\mathbf{e}}_z &= \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r - \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta. \\ \hat{\mathbf{e}}_r &= \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_x + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_y + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_z, \\ \hat{\mathbf{e}}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_x + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_y - \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_z, \\ \hat{\mathbf{e}}_\phi &= -\sin \phi \hat{\mathbf{e}}_x + \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_y. \end{aligned}$$

B.2.2 Éléments infinitésimaux

$$d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{e}}_r + r d\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + r \sin \theta d\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

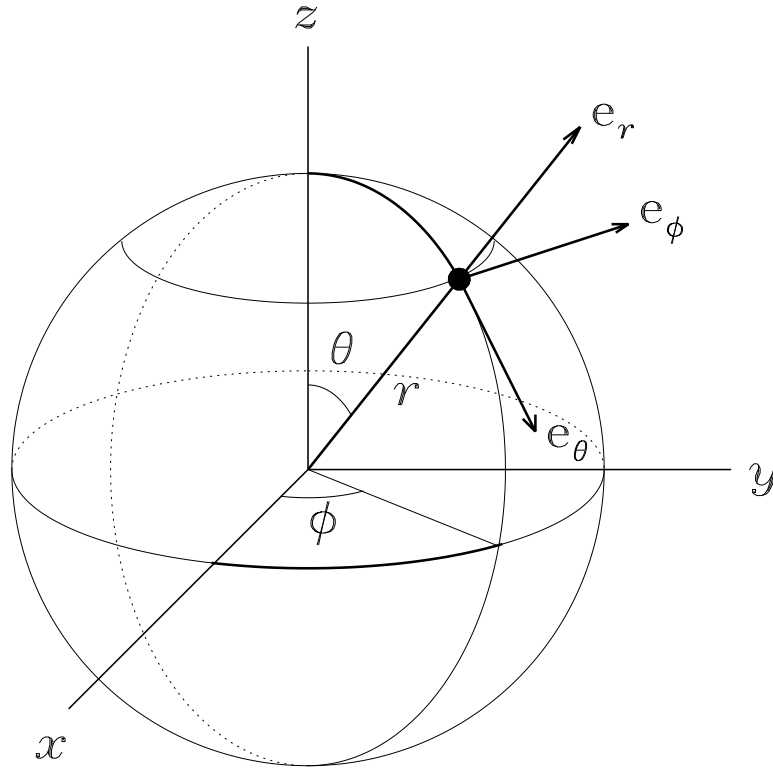


Figure B.2: Définition géométrique du système de coordonnées sphériques polaires. L'étendue des coordonnées est $r \in [0, \infty]$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$. Le point zéro de l'angle azimutal ϕ est sur l'axe- x Cartésien, et le point zéro de l'angle polaire θ (parfois appelé colatitude) est sur l'axe- z . La triade unitaire est orientée de manière telle que $\hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_\theta \times \hat{\mathbf{e}}_\phi$. Notons que dans le système de coordonnées géographiques, *longitude* $\equiv \phi$, mais *latitude* $\equiv \pi/2 - \theta$.

B.2.3 Opérateurs

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \\
 \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi \\
 (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A} &= \left(\mathbf{u} \cdot \nabla A_r - \frac{u_\theta A_\theta}{r} - \frac{u_\phi A_\phi}{r} \right) \hat{\mathbf{e}}_r \\
 &+ \left(\mathbf{u} \cdot \nabla A_\theta - \frac{u_\phi A_\phi}{r} \cot \theta + \frac{u_\theta A_r}{r} \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta \\
 &+ \left(\mathbf{u} \cdot \nabla A_\phi + \frac{u_\phi A_r}{r} + \frac{u_\theta A_\theta}{r} \cot \theta \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi \\
 \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\
 \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (A_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{e}}_r \\
 &+ \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (A_\phi r \sin \theta)}{\partial r} \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \\
\nabla^2 \mathbf{A} &= \left(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\theta \sin \theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{e}}_r \\
&+ \left(\nabla^2 A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta \\
&+ \left(\nabla^2 A_\phi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi
\end{aligned}$$

B.2.4 La divergence d'un tenseur symétrique d'ordre deux

$$\begin{aligned}
[\nabla \cdot \mathbf{T}]_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 T_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(T_{\theta r} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\phi r}}{\partial \phi} - \frac{T_{\theta\theta} + T_{\phi\phi}}{r} \\
[\nabla \cdot \mathbf{T}]_\theta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 T_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(T_{\theta\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\phi\theta}}{\partial \phi} + \frac{T_{\theta r}}{r} - \frac{T_{\phi\phi} \cot \theta}{r} \\
[\nabla \cdot \mathbf{T}]_\phi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 T_{r\phi})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(T_{\theta\phi} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{\phi r}}{r} + \frac{T_{\phi\theta} \cot \theta}{r}
\end{aligned}$$

B.2.5 Composantes du tenseur des stress visqueux

$$\begin{aligned}
\tau_{rr} &= 2\mu \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} \right] + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \\
\tau_{\theta\theta} &= 2\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right] + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \\
\tau_{\phi\phi} &= 2\mu \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} \right] + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \\
\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} &= 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \frac{u_\theta}{r} \right) \right] \\
\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} &= 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{u_\phi}{\sin \theta} \right) \right] \\
\tau_{\phi r} = \tau_{r\phi} &= 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \frac{u_\phi}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \right) \right]
\end{aligned}$$

B.2.6 Équations du mouvement

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{Du_r}{Dt} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r} \right) &= -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r} \\
&+ \frac{B_\phi}{\mu_0 r \sin \theta} \left(\frac{\partial B_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (B_\phi r \sin \theta) \right) - \frac{B_\theta}{\mu_0 r} \left(\frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) \\
&+ \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta} \sin \theta) + \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} \right] - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varrho \left(\frac{Du_\theta}{Dt} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) &= -\frac{\varrho}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\
&+ \frac{B_r}{\mu_0 r} \left(\frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) - \frac{B_\phi}{\mu_0 r \sin \theta} \left(\frac{\partial(B_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial \phi} \right) \\
&+ \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{\theta r}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta \theta} \sin \theta) + \frac{\partial \tau_{\theta \phi}}{\partial \phi} \right] + \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\tau_{\phi\phi} \cot \theta}{r} \\
\varrho \left(\frac{Du_\phi}{Dt} + \frac{u_r u_\phi}{r} + \frac{u_\theta u_\phi \cot \theta}{r} \right) &= -\frac{\varrho}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} \\
&+ \frac{B_\theta}{\mu_0 r \sin \theta} \left(\frac{\partial(B_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial \phi} \right) - \frac{B_r}{\mu_0 r \sin \theta} \left(\frac{\partial B_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(B_\phi r \sin \theta)}{\partial r} \right) \\
&+ \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{\phi r}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\phi \theta} \sin \theta) + \frac{\partial \tau_{\phi \phi}}{\partial \phi} \right] + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + \frac{\tau_{\theta\phi} \cot \theta}{r}
\end{aligned}$$

B.2.7 Conservation de l'énergie

$$\begin{aligned}
\varrho T \frac{Ds}{Dt} &= \Phi_\nu + \Phi_\eta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\chi r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right] \\
&+ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\chi \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\chi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right] \\
\Phi_\nu &= 2\mu (D_{rr}^2 + D_{\theta\theta}^2 + D_{\phi\phi}^2 + 2D_{r\theta}^2 + 2D_{\theta\phi}^2 + 2D_{\phi r}^2) + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu \right) (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \\
\Phi_\eta &= \frac{\eta}{\mu_0 r^2 \sin^2 \theta} \left[\left(\frac{\partial(B_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial \phi} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial B_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(B_\phi r \sin \theta)}{\partial r} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

B.2.8 L'équation d'induction MHD

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_r}{\partial t} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta (u_r B_\theta - u_\theta B_r)) - \frac{\partial}{\partial \phi} (u_\phi B_r - u_r B_\phi) \right] \\
&- \frac{1}{r^2} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \left(\frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \eta}{\partial \phi} \left(\frac{\partial B_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(B_\phi r \sin \theta)}{\partial r} \right) \\
&+ \eta \left(\nabla^2 B_r - \frac{2B_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(B_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} \right) \\
\frac{\partial B_\theta}{\partial t} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (u_\theta B_\phi - u_\phi B_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r B_\theta - r u_\theta B_r) \\
&- \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \eta}{\partial \phi} \left(\frac{\partial(B_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} \left(\frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) \\
&+ \eta \left(\nabla^2 B_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} - \frac{B_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_\phi}{\partial t} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (ru_\phi B_r - ru_r B_\phi) - \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta B_\phi - u_\phi B_\theta) \right] \\
&- \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \eta}{\partial r} \left(\frac{\partial B_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (B_\phi r \sin \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \left(\frac{\partial (B_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial \phi} \right) \\
&+ \eta \left(\nabla^2 B_\phi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial B_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial B_\theta}{\partial \phi} - \frac{B_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right)
\end{aligned}$$

Bibliographie:

Si vous voulez vraiment en savoir plus sur tout ça, voir:

P.M. Morse et H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill (1953): Chap. 1

G.K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press (1967):

Appendix 2

Arfken, G., *Mathematical Methods for Physicists*, 2nd ed., Academic Press (1970): chap. 2.

ou, en version plus concise, l'Annexe A.2 de l'ouvrage de Goedbloed & Poedts cité en bibliographie au chapitre 2.

Appendice C

Le théorème de Zeldovich

Cet annexe présente une preuve du théorème anti-dynamo dit de Zeldovich (Ya. B. Zeldovich, 1914–87). Ce théorème disqualifie les écoulements plans, stationnaires et incompressibles, de la forme générale (en coordonnées cartésiennes):

$$\mathbf{u}_2(x, y, z) = u_x(x, y, z)\hat{\mathbf{e}}_x + u_y(x, y, z)\hat{\mathbf{e}}_y \quad (\text{C.1})$$

dans un volume V aux frontières ∂V duquel on a $\mathbf{B} = 0$. Aucune restriction n'est imposée au champ magnétique, qui peut dépendre des trois coordonnées spatiales et du temps. Cependant, vu la forme de l'écoulement, il sera pratique de considérer séparément la composante z du champ magnétique, $B_z(x, y, z, t)$, de ses composantes dans le plan $[x, y]$ (dénotées ci-après \mathbf{B}_2). Il est facile de montrer que pour une diffusivité magnétique constante, la composante z de l'équation d'induction se réduit ici à:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right) B_z = \eta \nabla^2 B_z \quad (\text{C.2})$$

Le membre de gauche de cette expression est une dérivée Lagrangienne qui décrit la variation de B_z dans un élément de fluide transporté par l'écoulement. En multipliant cette expression par B_z , puis en intégrant sur V et sous utilisation judicieuse de la première identité de Green (voir Annexe A), on arrive à:

$$\frac{1}{2} \int_V \frac{DB_z^2}{Dt} dV = \eta \int_{\partial V} B_z (\nabla B_z) \cdot \mathbf{n} dS - \eta \int_V (\nabla B_z)^2 dV . \quad (\text{C.3})$$

La première intégrale au membre de droite est nulle puisque nous avons supposé $\mathbf{B} = 0$ sur ∂V ; la seconde intégrale est positive, donc B_z ne peut que décroître sur l'échelle de temps dissipative associée à η .

Passons maintenant au champ \mathbf{B}_2 dans le plan $[x, y]$. La forme la plus générale d'un tel champ vectoriel s'exprime en terme de la somme d'une composante solénoïdale et d'une composante potentielle:

$$\mathbf{B}_2(x, y, z, t) = \nabla \times (A\hat{\mathbf{e}}_z) + \nabla\Phi , \quad (\text{C.4})$$

où le potentiel vecteur A et potentiel scalaire en général dépendent du temps et des coordonnées x et y , mais pas de z . La contrainte $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ implique alors:

$$\nabla_2^2 \Phi = -\frac{\partial B_z}{\partial z} , \quad (\text{C.5})$$

où $\nabla_2^2 \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ est l'opérateur Laplacien en 2D dans le plan $[x, y]$. De toute évidence, une fois que B_z a disparu sous l'influence de la dissipation Ohmique, soit après un temps significativement plus long que le temps de dissipation τ_η , Φ devient une simple solution de l'équation de Laplace $\nabla_2^2 \Phi = 0$.

Et voici la partie moins évidente de la manoeuvre; tout d'abord, on substitue l'éq. (C.4) dans l'équation d'induction, et on prend ensuite le rotationnel du résultat. Ceci fera disparaître tous

les termes impliquant $\nabla\Phi$ sauf un, puisque $\nabla \times \nabla\Phi = 0$ par identité vectorielle. De plus, puisque \mathbf{u}_2 et $A\hat{\mathbf{e}}_z$ sont orthogonaux par construction, on a aussi $\mathbf{u}_2 \times \nabla \times (A\hat{\mathbf{e}}_z) = -(\mathbf{u}_2 \cdot \nabla)(A\hat{\mathbf{e}}_z)$. Comme les dérivées spatiales et temporelle commutent ici, une légère dose d'algèbre vectorielle permet de réexprimer les termes survivants sous la forme:

$$\nabla \times \nabla \times \left[\frac{\partial(A\hat{\mathbf{e}}_z)}{\partial t} + \mathbf{u}_2 \cdot \nabla(A\hat{\mathbf{e}}_z) - \eta \nabla_2^2(A\hat{\mathbf{e}}_z) - \mathbf{u}_2 \times \nabla\Phi \right] = 0, \quad (\text{C.6})$$

avec $\nabla \cdot (A\hat{\mathbf{e}}_z) = 0$ comme choix de jauge. De manière générale, une telle expression ne sera satisfaite que si l'expression entre parenthèses carrées est en soi nulle, i.e.,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) A = \eta \nabla_2^2 A + (\mathbf{u}_2 \times \nabla\Phi) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (\text{C.7})$$

Cette expression est identique à celle obtenue précédemment pour B_z , à l'exception du terme source $\mathbf{u}_2 \times \nabla\Phi$. Mais on vient justement de démontrer que pour $t \gg \tau_\eta$, $\nabla_2^2\Phi \rightarrow 0$. De plus, \mathbf{B} est nul sur ∂V donc la seule solution stationnaire possible à une équation de Laplace est de la forme $\Phi = \text{constante}$; donc $\nabla\Phi = 0$ et le terme source disparaît dans la limite $t \gg \tau_\eta$. À partir de ce moment là, l'éq. (C.7) devient identique à (C.2), pour laquelle nous avons déjà démontré l'inévitabilité de la dominance à long terme de la dissipation Ohmique. On en conclut qu'un écoulement plan ne peut soutenir inductivement quelque champ magnétique que ce soit (2D, 3D, non-stationnaire, etc.) face à la dissipation Ohmique.

La logique générale de ce théorème est en fait la même que pour le théorème de Cowling discuté à la §5.3, qui disqualifie les écoulements axisymétrique comme inducteur de champ magnétique axisymétrique. Dans le cas du théorème de Cowling, le potentiel vecteur A souffre du même problème que B_z ci-dessus: une absence de terme source, impliquant une inexorable dissipation, suite à quoi la composante B perd alors son terme source et ne peut donc subséquemment que se dissiper elle aussi.