PHY 3140
HYDRODYNAMIQUE
EXAMEN FINAL

Professeur: Paul Charbonneau
Date de l'examen: 14 au 15 décembre 2024
Durée de l'examen: 24 heures

Examen à livre ouvert, toutes ressources permises, sauf ressources humaines autre que votre propre personne personnelle (donnez les références pour toute source externe, et méfiez-vous toujours de ce que vous trouvez sur l'internet; si vous utilisez ChatGPT &co, incluez des transcriptions de vos échanges, en indiquant clairement ce qui vient de l'AI et ce qui vient de vous. En apposant votre signature ci-dessous, vous indiquez que vous avez lu et compris ces directives, et que vous vous engagez à en respecter à la fois l'esprit et la lettre. Remettez-moi un scan de la première page de ce questionnaire signé ici avec vos solutions.

Votre signature:

L'examen doit m'être remis en version pdf sur Studium le dimanche 15 décembre avant 09:00 (9am). Il peut également m'être remis plus tôt si vous le préférez.

Un examen de 24 heures allège la pression temporelle associée à un examen classique. Par conséquent, je m'attend à des copies d'examen écrites de manière lisible, au propre, et scannée de manière lisible. Vos solutions doivent toujours détailler posément la logique suivie, les approximations utilisées, etc.

Bonne Chance! (...même si ce n'est pas vraiment une question de chance...)

CHOISISSEZ UNE QUESTION PARMI LES DEUX CI-DESSOUS

Question 1 [30 points; Problème 33, texto]

Recalculez la solution de Blasius en suivant la procédure numérique introduite à la §6.10 des notes de cours. Ensuite, calculez la force de trainée (en Newton) exercée par l'eau ($\nu = 10^{-6}\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1}$) s'écoulant à vitesse $u_0 = 1\,\mathrm{m}\ \mathrm{s}^{-1}$ de chaque coté d'une plaque carrée de taille $L = 1 \times 1$m, et d'épaisseur $h = 1$cm. Vous pouvez négliger les effets de bord. Détaillez bien toutes les étapes de votre raisonnement. L'approximation donnée par l'équation (6.151) se compare-t-elle bien à votre résultat ?

Question 2 [30 points; Problème 49, texto]

Le but est ici de vous faire examiner la stabilité des solutions stationnaires aux équations de Lorenz considérées au chapitre 15. Il s'agira d'effectuer une analyse par linéarisation de ces équations. Ceci implique les étapes suivantes:

(a) Introduisez des perturbations du type $X + \delta X$, etc., et obtenez les formes linéarisées des équations de Lorenz aux ordres zéro et un.

(b) Écrivez maintenant $\delta X = x_0 \exp(st)$, etc, où $s = \sigma + i\omega$; substituez ceci dans les équations à l'ordre un et obtenez un système de trois équations algébriques pour les amplitudes x_0, y_0 et z_0.

(c) Obtenez maintenant la relation de dispersion suivante, caractérisant la stabilité de la première solution stationnaire discutée dans les notes ($X = Y = Z = 0$), et démontrez qu'une de ses trois racines est caractérisée par $\sigma > 0$ quand $r > 1$.

$$(s+1)[s^2 + s(P+1) - P(r-1)] = 0 \ .$$

(d) Examinez maintenant de la même manière la stabilité d'une des secondes solutions stationnaires. Démontrez que la relation de dispersion est comme suit,

$$s^3 + s^2(P+2) + s(P+r) + 2P(r-1) = 0 \ .$$

(e) Démontrez finalement que cette seconde relation de dispersion conduit à un critère de stabilité impliquant une valeur critique de r donnée par $r_c = P(P+4)/(P-2)$. N'oubliez pas que la seconde classe de solutions stationnaires n'existe que pour $r > 1$.

LES DEUX QUESTIONS QUI SUIVENT SONT OBLIGATOIRES

Question 3 [40 points; du nouveau!]

Ce problème de type "intégration" vous fera passer de la solution de Stokes à la contamination d'une nappe aquifère, rien de moins !

On s'intéresse ici à l'écoulement d'un fluide (visqueux et incompressible) à travers un **milieu granulaire**, spécifiquement du sable compacté. Pour un tel milieu on définit le **coefficient de porosité** (p) comme le rapport entre le volume de "vide" entre les grains de sable en contact, et le volume total, grains+vide. La porosité est donc une quantité adimensionnelle.

(a) On commence par considérer l'écoulement de l'eau à travers un volume V de sable compacté, caractérisé par un coefficient de porosité p. Démontrez/argumentez que si la vitesse d'écoulement du fluide entre les grains est u_0, la vitesse moyenne q de l'écoulement qui transporterait le même débit volumique (unités: $\mathrm{m^3\,s^{-1}}$) en l'absence de sable est donnée par

$$q = p\, u_0 \ .$$

Explicitez bien votre raisonnement. La quantité q est appelée **vitesse de percolation**.

(b) Toujours en anticipation de la suite, écrivez les composantes pertinentes de l'équation de Navier-Stokes pour un fluide visqueux et incompressible s'écoulant en régime stationnaire dans un long tube cylindrique ouvert à ses deux bouts, et orienté verticalement (i.e., parallèlement à la gravité). Justifiez bien vos approximations. Donnez une interprétation physique à chaque terme non-nul dans votre/vos équation(s).

(c) Maintenant on imagine que le tube, bouché pour l'instant à sa base, est d'abord rempli d'un sable fin bien compacté (porosité $p = 0.25$), en ensuite rempli d'eau jusqu'à saturation, i.e.

tous les interstices entre les grains de sable sont remplis de fluide. Un grillage fin au bas du tube retient le sable dans le tube, mais laisse passer l'eau quand le tube est débouché à sa base. Notre solution de Stokes (§6.9 des notes de cours) nous donne la force exercée par un fluide visqueux s'écoulant autour d'une sphère de rayon R; par action-réaction (Vive Newton!), c'est également, à un signe près, la force que la sphère exerce sur le fluide. En supposant que la solution de Stokes demeure approximativement valide pour un ensemble de N sphère en contact, la force totale exercée sur un fluide s'écoulant à vitesse u_0 entre les grains mais en moyenne dans la direction $-\hat{\mathbf{e}}_x$ serait alors donnée par:

$$\mathbf{F} = N \times (6\pi\rho\nu R\, u_0)\hat{\mathbf{e}}_z$$

Dans une telle situation, cette force visqueuse (volumique) dominera sur le stress visqueux (surfacique) le long des parois du tube. Négligeant ce stress surfacique aux parois, montrez que la vitesse moyenne (le q du (a) ci-dessus) de l'écoulement dans le tube est donnée par une expression de la forme

$$q = \frac{\kappa g}{\nu}$$

où le **coefficient de perméabilité** κ (unités: m^2) ne dépend que des propriété du milieu granulaire, soit la porosité et le rayon des sphères/grains. Établissez la forme mathématique de cette relation $\kappa(p, R) = ...$ et calculez la vitesse moyenne d'écoulement du fluide pour des sphères de rayon $R = 0.1\,\mathrm{mm}$ et une porosité $p = 0.36$ (la porosité minimale pour un assemblage de sphères de rayons identiques).

(d) À $t = 0$ l'eau commence à s'écouler à la sortie du tube, qu'on supposera maintenant de longueur $L = 1\,\mathrm{m}$ et de rayon $a = 10^{-2}\,\mathrm{m}$. Approximant chaque grain de sable par une sphère de rayon $R = 0.1\,\mathrm{mm}$, calculez le temps requis pour que le tube se vide de son eau. (Si vous n'êtes pas parvenu, en (c), à exprimer κ en fonction de p et R, utilisez une valeur $\kappa = 10^{-9}\,\mathrm{m}^2$ ici et pour la suite.)

(e) On considère maintenant le déversement d'un contaminant soluble sur un sol sablonneux déjà saturé en eau. Une petite nappe aquifère se trouve à 20 mètre sous la surface. Estimez le temps requis pour que le contaminant atteigne la nappe aquifère (1) par diffusion du contaminant dans l'eau présente dans le sol, et (2) par percolation. La diffusion de notre contaminant dans l'eau est caractérisée par un coefficient de diffusion $D = 10^{-9}\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1}$. Lequel des processus de transport domine ici ?

(f) Les mesures expérimentales du coefficient de perméabilité d'un sable compacté de porosité $p = 0.25$ donnent $\kappa \simeq 10^{-12}\,\mathrm{m}^2$. Ceci est plus petit par **presque trois ordres de grandeur** que ce vous devriez avoir trouvé en (c); Cela change-t-il votre conclusion en (e) ? Quelles sont, selon vous, les approximations introduites en (c) qui sont responsables de ce substantiel écart théorie vs la réalité ? (1 page au grand max).

Question 4 [30 points; direction la cuisine!]

Pour cette expérience vous aurez besoin (1) d'un chaudron, (2) d'une grosse cuillère, et de grains de quelque chose de densité légèrement supérieure à celle de l'eau; par exemple des feuilles de thé émiettées, ou encore des des grains de riz. Ensuite,

(a) Remplissez le chaudron aux trois quart avec de l'eau, et brassez l'eau avec la cuillère en un mouvement circulaire. Ce brassage circulaire devrait être suffisamment vigoureux pour déformer de manière notable la surface eau-air en la forme parabolique que vous connaissez maintenant si bien. Arrêtez de brasser, et mesurez le temps requis pour que l'eau revienne au repos. Comparez ceci à un estimé du temps de dissipation visqueuse, vu les dimensions de votre chaudron. Que concluez vous de cette comparaison ?

(b) Maintenant déposez votre thé/riz (ou autre) dans le chaudron, et faites couler dans le fond du chaudron. Les quantités devraient être telles que les feuilles de thé ou grains de riz (ou autre) ne devraient couvrir qu'une petite superficie du fond du chaudron, genre pas plus de $/simeq$25%.

(c) Avec la cuillère, brassez vigoureusement l'eau de manière à disperser le thé ou le riz, et sans attendre, poursuivez en brassant circulairement dans le sens horaire le long des cotés du chaudron. Comme en (a), votre brassage de devrait être assez vigoureux pour déformer l'interface eau-air.

(d) Cessez le brassage circulaire, et observez bien ce qui arrive au thé/riz à mesure que le mouvement circulaire de l'eau ralentit. Décrivez moi ça.

(e) Reprenez les étapes (c)–(d), mais cette fois brassez circulairement dans le sens antihoraire. Constatez vous une différence dans le comportement du thé/riz par rapport à première version de la manip ?

Il s'agit donc d'expliquer tout ça à l'aide des notions hydrodynamiques vues en cours. Comme pour les autres expériences dans la cuisine, développements mathématiques permis mais non-essentiels. Visez max 1–2 pages de texte, + diagrammes et/ou photos de l'expérience même, etc.

Le Professeur:

Le Répondant:

La Directrice: