PHY 3140
HYDRODYNAMIQUE
PROBLÈMES: SÉRIE 3

Distribué le: 8 novembre 2024
Chapitres couverts: 7 à 15

Problème 34

Considérons ce qui arrive à un courant marin, caractérisé par un état d'équilibre géostrophique, en contact avec le fond de l'océan, que nous supposerons plat. Développez la théorie d'Ekman pour cette situation, et obtenez une solution décrivant l'écoulement dans la couche limite se formant près du fond. Réfléchissez bien aux conditions limites du problèmes, et à la manière dont elles diffèrent de celles considérées en classe (ce problème est beaucoup plus facile qu'il peut en avoir l'air à prime abord...).

Problème 35

Démontrez que pour un fluide inviscide mais compressible, l'équation de la vorticité prend la forme:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot\nabla\right)\mathbf{u} + \frac{(\nabla\rho)\times(\nabla p)}{\rho^3} \ .$$

Problème 36

Calculez la forme de l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible produit par un anneau de vorticité de rayon R, le long d'un axe perpendiculaire à l'anneau et passant par son centre.

Problème 37

Nous avons vu en classe que l'écoulement stationnaire associé à une ligne (droite) de vorticité pouvait s'exprimer comme

$$\mathbf{u} = \frac{\Gamma}{2\pi s}\hat{\mathbf{e}}_\phi \ ,$$

où la circulation Γ est une mesure de l'intensité de la ligne de vorticité. Le but de ce problème est de vous faire calculer une solution pour l'écoulement non-stationnaire produit quand on "retire" (à $t = 0$) la ligne de vorticité du fluide ambiant (visqueux et incompressible). En d'autres mots, les conditions initiale et limites du problème sont, en coordonnées cylindriques $[s, \phi, z]$:

$$u_\phi(s, t = 0) = \frac{\Gamma}{2\pi s} \ ,$$

$$u_\phi(s = 0, t) = 0 \ ,$$

$$\lim_{s\to\infty} u_\phi(s, t) = \frac{\Gamma}{2\pi s} \ .$$

(a) Obtenez la (les) équation(s) gouvernant l'évolution subséquente du fluide, après retrait de la ligne de vorticité à $t = 0$.
(b) Utilisez la circulation Γ pour définir une version non-dimensionnelle (u^* disons) de la vitesse u_ϕ; cherchez maintenant une nouvelle variable indépendante η (qui peut être fonction des variables spatiales et temporelles) telle que votre équation maitresse en (a) accepte une solution autosimilaire de la forme

$$u^* = F(\eta)$$

(c) Déduisez-en l'équation différentielle que doit satisfaire $F(\eta)$, ainsi que les conditions limites correspondantes
(d) Solutionnez l'équation en (c), réexprimez le résultat en termes des variables dimensionnelles de départ, et portez en graphique le profil de $u_\phi(s)$ pour différents $t > 0$
(e) Interprétez l'évolution spatiotemporelle des profils $u_\phi(s, t)$ en terme de diffusion visqueuse.

Problème 38

Reprenez le développement mathématique de la §9.2, cette fois avec une condition limite correspondant à un océan de profondeur finie, soit

$$u_z \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \ , \qquad z = -h \ .$$

(a) Vérifiez ainsi que la relation de dispersion prend maintenant la forme

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \ .$$

(b) Démontrez que dans le régime de l'eau peu profonde ($kh \ll 1$), les trajectoires des éléments de fluide décrites lors du passage de la vague ont la forme d'ellipses très allongées dans la direction-x.

Problème 39

On a vu comment à une interface entre deux fluides de densités différentes, il est possible de développer des ondes de surface (étudiées en grand détails au chapitre 9 dans le cadre d'une interface eau-air), où la gravité agit comme force de rappel. De telles ondes peuvent également se développer dans un fluide stratifié par la gravité, en absence d'une interface. Ce problème vise à vous faire calculer la relation de dispersion pour de telles ondes, dites "ondes internes" ou "ondes de gravité". Je vous fournis ci-dessous plusieurs étapes intermédiaires du calcul, donc respirez bien par le nez et ça devrait bien débouler...

Le point de départ de l'analyse n'est rien de plus compliqué que nos équations pour un fluide inviscide dans l'approximation de Boussinesq, en supposant toutefois que la densité peut varier en fonction de la position mais est conservée durant le déplacement d'un élément de fluide; Les écoulements océaniques sont une situation physique correspondant à cette situation à prime abord bizarre, en raison du gradient vertical de salinité qui existe habituellement dans les les couches superficielles des océans. les équations à résoudre sont donc:

$$\rho \frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \ , \qquad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \ , \qquad \frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0 \ .$$

Nous allons travailler en deux dimensions spatiales (x, z), avec la direction z correspondant à la verticale. On écrira l'écoulement sous la forme $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{e}}_x + w\hat{\mathbf{e}}_z$.

(a) Linéarisez les équations ci-dessus, en supposant que l'état de référence est en équilibre hydrostatique dans la verticale (gravité constante ici), et aucune des quantités caractérisant cet état de référence ne dépend de la coordonnée horizontale x ou du temps t ; e.g., on écrira $p = p_0(z) + p_1(x, z, t)$, etc. Démontrez que les équations linéarisées prennent la forme:

$$\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} \ ,$$

$$\rho_0 \frac{\partial w_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial z} - \rho_1 g \ ,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + w_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0 \ .$$

(b) Cherchons maintenant des solutions prenant la forme de variations harmoniques en x, i.e.,

$$w_1(x, z, t) = W_1(z)\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)} \ , \qquad \rho_1(x, z, t) = R_1(z)\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)} \ , \qquad \text{etc.}$$

Par substitution dans les équations linéarisées ci-dessus, montrez que celles-ci se réduisent à

$$\rho_0 \omega U_1 = k P_1 \ , \qquad i\rho_0 \omega W_1 = \frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}z} + R_1 g \ ,$$

$$ikU_1 + \frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}z} = 0 \ , \qquad -i\omega R_1 + W_1 \frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}z} = 0 \ .$$

(c) Ces quatre EDOs peuvent être combinées en un seule, de la forme:

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial z^2} = \qquad \ldots$$

Calculez moi ce mystérieux coté droit de cette équation !

(d) Spécialisons maintenant le problème à une stratification isotherme, où $\rho_0 \propto \exp(-z/H)$, H étant l'échelle de hauteur de la stratification; tous les coefficients de votre EDO obtenue en (c) devraient se retrouver indépendant de z, ce qui implique qu'elle accepte des solutions ondulatoires de la forme

$$W_1 \propto \mathrm{e}^{z/2H} \times \mathrm{e}^{i(kx+lz-\omega t)} \ ,$$

où l est le nombre d'onde vertical de la dépendance harmonique. Substituant cette expression dans votre ODE en (c), démontrez que ces ondes vont satisfaire à la relation de dispersion suivante:

$$\omega^2 = \frac{N^2 k^2}{k^2 + l^2} \ , \qquad \text{avec} \qquad N^2 = -\frac{g}{\rho_0}\frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}z} \ ,$$

dans la limite où la longueur d'onde de l'oscillation est beaucoup plus petite que la hauteur de colonne H.

e) Finalement, à partir de votre résultat en (d) déterminez pour quelles formes de profils de variation de $\rho_0(z)$ ces ondes sont amorties dans le temps.

Problème 40

Calculez la relation de dispersion pour une vague dans un bassin de profondeur finie, incluant les effets de la tension superficielle. Reconstruisez ensuite une courbe de dispersion dans le genre de la Figure 10.7.

Problème 41

On considère un cylindre de fluide incompressible de longueur L et section a ($\sqrt{a} \ll L$), qui se perle en N gouttelettes sphériques de rayon R.

(a) Démontrez que ce processus de perlage réduit l'énergie potentielle associée à la tension superficielle.
(b) Déterminez la valeur de N (un entier) pour laquelle cette énergie sera minimale.

Vous pouvez négliger dans vos calculs la contribution des deux surfaces planes aux extrémités du cylindre.

Problème 42

Une bulle d'eau savonneuse ($T = 0.025\,\mathrm{N\ m^{-1}}$) a un rayon de $R = 2\,\mathrm{cm}$, et une épaisseur de 0.2mm.

(a) Calculez la pression à l'intérieur de la couche d'eau savonneuse
(b) Calculez la pression à l'intérieur de la bulle même.

Justifiez bien toutes vos approximations, le cas échéant.

Problème 43

Ce problème de type "intégration" vise à vous faire apprivoiser le concept de dilatation thermique d'un fluide, dans le cadre d'une question très d'actualité. L'IPCC (Intergovernmental Panel on Climate Change) a produit plusieurs scenarii de réchauffement global, celui jugé le plus probable dans l'état actuel des choses prédisant une augmentation de la température terrestre moyenne de 5 C d'ici l'an 2100.

En supposant que l'ensemble des océans se réchauffe également de 5 degrés Celsius, calculez l'augmentation du niveau de la mer associé à la dilatation thermique de l'eau de mer. Vous pouvez considérer les océans comme un basin de profondeur uniforme de 5 km, avec un profil initial de température tel que tabulé à l'appendice C.2. N'oubliez pas que le coefficient de dilatation thermique de l'eau dépend de la température (voir Tableau C.2.1). Vous pouvez négliger la dépendance de ce coefficient sur la pression.

(a) Établissez tout d'abord une relation décrivant la variation volumique d'un élément de fluide $\mathrm{d}V$ d'eau de mer, en fonction d'un changement de température $\mathrm{d}T$;
(b) Déduisez-en une intégrale décrivant la variation du niveau de la mer;

(c) Solutionnez (numériquement) cette intégrale dans le cas d'un réchauffement $\Delta T = 5°\text{C}$ uniforme dans tout l'océan. De combien s'élèvera le niveau des océans?
(d) Quelles sont, d'après vous, les hypothèses de travail les plus douteuses dans votre calcul?

Problème 44

Ce second petit problème, de type "intégration", débute avec la solution de Hagen-Poiseuille, pour l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible et visqueux dans un tuyau rectiligne de section circulaire (de rayon R), et se termine avec l'accident nucléaire de Fukushima, rien de moins! Il s'agit simplement d'y aller par étapes...

(a) Démontrez que la solution de Poiseuille peut se réécrire sous la forme:

$$u_z(s) = 2\bar{u}\left(1 - \frac{s^2}{R^2}\right) ,$$

où $\bar{u}$ est la vitesse de l'écoulement moyennée sur la section du tuyau; exprimez $\bar{u}$ en fonction du différentiel de pression $[\nabla p]$ imposé d'un bout à l'autre du tuyau.

(b) Supposons maintenant que le fluide s'écoulant dans le tuyau est à température $T(s, z)$ et que les parois du tuyau sont bien isolées thermalement parlant; on s'attend alors à ce qu'à un z donné, la température aux parois ne diffère que très peu de la température au centre du tuyau, et que la baisse de température ΔT de l'entrée du tuyau (fluide à température T_0) à sa sortie soit relativement faible, i.e., $\Delta T/T_0 \ll 1$. On peut alors approximer le profil de la température dans le tuyau par:

$$T(s, z) = T_0 - \Delta T \frac{z}{L} + f(s) ,$$

où L est la longueur du tuyau et $z = 0$ est au point d'entrée du fluide. Par substitution de cette expression dans l'équation du transport de la chaleur, montrez que la fonction $f(s)$ prend la forme:

$$f(s) = \frac{\bar{v}R^2 \Delta T}{2\kappa L}\left(\frac{3}{4} - \frac{s^2}{R^2} + \frac{s^4}{4R^4}\right) ,$$

où κ est le coefficient de diffusivité thermique.

(c) À partir du résultat en (b), obtenez une expression pour le flux total de chaleur à travers les parois du tuyau, sur toute sa longueur et par unité de temps.

(d) Calculez maintenant la quantité de chaleur Q transportée par le fluide à travers le tuyau par unité de temps, et montrez que le rapport de la quantité de chaleur perdue à travers les paroi sur Q est proportionnel à $\Delta T/T$. Vous pouvez supposer que κ et c_p sont indépendant de la température, et négliger la dilatation thermique.

(e) L'écoulement Hagen-Poiseuille demeure laminaire jusqu'à un nombre de Reynolds critique $\text{Re}_c \simeq 2000$; montrez que la quantité de chaleur transportée par un tel écoulement, à la limite de l'instabilité, est donnée par

$$Q_{\max} \simeq \frac{\pi}{2}\rho\nu R \text{Re}_c c_p T_0 .$$

Nous avons maintenant tout en place pour passer à l'accident nucléaire à la centrale de Fukushima-Daiichi. Dans un réacteur nucléaire de ce type, de l'eau est pompée à travers le coeur du réacteur, et renvoyé vers un échangeur de chaleur pour chauffer un circuit secondaire d'eau qui propulsera éventuellement les turbines. En mode actif d'opération, $\simeq$ 500 MegaWatt dénergie thermique sont produits, et les pression et température internes dans le réacteur montent à $P_0 \simeq 10^7$ Pa et $T_0 \simeq 550$ K. Pour de l'eau ainsi surchauffée (qui, notons-le, demeure liquide à cette pression malgré la température très élevée), $\kappa \sim \nu \sim 10^{-7}\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1}$, $c_p = 6000\,\mathrm{J\ kg}^{-1}\,\mathrm{K}^{-1}$, et $\rho \sim 10^3$ km m^{-3}. L'eau surchauffée sort du réacteur par devinez quoi, un grand nombre de tuyaux de section circulaire ($R = 1$ cm) et de longueur $L = 10$ m. Maintenant, avec toutes ces informations en main:

(f) En supposant que l'écoulement est au nombre de Reynolds critique $\mathrm{Re}_c = 2000$, estimez la vitesse moyenne $\bar{u}$. Ensuite calculez le nombre de tuyaux requis pour évacuer les 500 MW produit en mode normal de fonctionnement.

Les réacteurs de la centrale de Fukushimai-Daiichi ont été immédiatement mis à l'arrêt au moment du tremblement de terre du 11 mars 2011. Cependant, même une fois les réactions de fission stoppées, environ 30MW d'énergie continue d'être libéré par la désintégration radioactive des produits de fission accumulés dans le réacteur, ce qui fait qu'une circulation de l'eau doit être maintenue pour évacuer cette chaleur. Et voilà le problème, l'arrivée du tsunami déclenchée par le tremblement de terre a inondé la centrale, causant une panne d'électricité et un arrêt des pompes. L'eau étant maintenant au repos, il ne restait plus que la conduction thermique dans l'eau au repos dans les tuyaux pour évacuer la chaleur du coeur du réacteur à travers les parois des tuyaux.

(g) Étant donné vos résultats précédents (en particulier sur le nombre de tuyaux), calculez la quantité de chaleur pouvant être ainsi évacuée par conduction thermique par unité de temps. À ce stade vous pouvez supposer que la température à l'extérieur des tuyaux est de 300 K. Est-ce suffisant pour évacuer le 30MW produit par la désintégration radioactive résiduelle ?

(h) Le coeur du réacteur contient $\sim 40\,\mathrm{m}^3$ d'eau; calculez le taux d'augmentation de la température, en supposant que ce 30MW demeure constant dans le temps; calculez le temps requis pour atteindre 2800 K, la température à laquelle les barres de fuel nucléaire commenceront à fondre.

Problème 45

Maintenant on passe à l'analyse d'une simulation numérique 2D de la convection en régime Boussinesq, soit celle discutée à la §12.3.2, et plus spécifiquement la simulation à Ra$= 10^6$ illustrée à la Figure 12.6 (au centre). Vous devez tout d'abord aller chercher un fichier contenant les valeurs des vitesse et température à tous les points de maille, extraites à un temps spécifique dans la simulation; ce fichier, nommé "`sim141.txt`", est accessible de la page web du cours, dans la section "Exercices"; il contient 8192 lignes, une par point de maille, contenant chacune 5 nombres réels, correspondant aux quantités:

$$\{x, z, u_x, u_z, T\}$$

(a) Calculez la température moyennée horizontalement (direction-x) et portez en graphique cette quantité ($\bar{T}(z)$) versus la coordonnée verticale z; vérifiez que celà ressemble bien à la courbe en vert sur la Figure 12.8.

(b) Une caractéristique définissant la convection thermique est la corrélation entre la vitesse verticale du fluide et la perturbation de température par rapport à la moyenne horizontale

($\Delta T(x,z) = T(x,z) - \bar{T}(z)$). Portez en graphique toutes vos valeurs de $\Delta T(x,z)$ versus $u_z(x,z)$. Observez-vous la corrélation attendue ?

(c) Répétez la procédure en (b), mais en corrélant maintenant ΔT avec u_x; observez-vous ici une corrélation ? Pourquoi ?

(d) Calculez le flux convectif total (éq. (12.24) intégrée horizontalement) à chaque hauteur z, et portez le résultat en graphique en fonction de z. Comment expliquez-vous la forme du graphique ?

Problème 46

Il s'agit ici d'examiner certaines propriétés statistiques de la convection en régime turbulent, plus spécifiquement dans le cadre de la simulation de convection thermique au bas de la Figure 12.6. Vous devez encore une fois aller chercher sur la page web du cours, section "Exercices", un fichier de données nommé "`ts113.txt`". Ce fichier contient 3 colonnes de chiffres, chaque colonne correspondant à une séquence temporelle (2000 pas de temps) de la vitesse verticale u_z à une position (x,z) spécifique dans la simulation (les positions exactes importent peu pour ce qui suit). Dans le cadre des analyses décrites ci-dessous, vous ne devrez utiliser que les derniers 1000 pas de temps de ces séquences, afin que vos résultats ne soient pas influencés par le transient initial associé à la mise en branle de la convection.

(a) Commencez par calculer la fonction de densité de probabilité (PDF; i.e., l'histogramme!) des valeurs de u_z pour les 1000 derniers pas de temps dans chacune de vos trois séquences. Ces PDFs sont-elles Gaussiennes ? Comment pourriez vous les caractériser ?

(b) Calculez les transformées de Fourier (ou FFT) des derniers 1000 pas de temps dans chacune de vos trois séquences temporelles de u_z, et construisez leurs spectres. Ces spectres montrent-ils un intervalle inertiel, i.e., un intervalle en fréquence où le spectre est représentable par une loi de puissance ? Si oui, quel en est la pente logarithmique ?

(c) Allez maintenant chercher le fichier `ts141.txt`", qui contient aussi trois séquences temporelles de u_z, mais cette fois pour la simulation à Ra$= 10^6$ (Fig 12.6, au centre). Calculez les spectres de ces séquences, utilisant encore une fois seulement les derniers 1000 pas de temps. Comparez et contrastez ces spectres à ceux obtenus en (b). Comment expliquez-vous la forme très différente de ces nouveaux spectres ?

Problème 47

Considérons l'équation de Landau discutée au chapitre 12:

$$\frac{\partial |\mathbf{A}|^2}{\partial t} = 2\sigma |\mathbf{A}|^2 - \Lambda(|\mathbf{A}|^2)^2 \ ,$$

et sa solution:

$$|\mathbf{A}|^2 = |\mathbf{A_0}|^2 \left[\frac{\Lambda}{2\sigma} |\mathbf{A_0}|^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{2\sigma} |\mathbf{A_0}|^2 \right) e^{-2\sigma t} \right]^{-1} \ ,$$

où $|\mathbf{A_0}|^2$ est le module carré de l'amplitude (complexe) de la perturbation infinitésimale à $t = 0$, σ (> 0) le taux de croissance de la perturbation, et Λ une constante (voir section 13.2 des notes).

Il a été démontré dans les notes que si $\Lambda > 0$, cette équation accepte des solutions où l'amplitude $|\mathbf{A}|$ tend vers une constante dans la limite $t \to \infty$. Démontrez maintenant que dans la situation contraire, soit $\Lambda < 0$, l'amplitude diverge (i.e., $|\mathbf{A}| \to \infty$) en un temps fini.

Problème 48

Il s'agit ici de vous faire approfondir un aspect important de l'approche statistique à la turbulence, soit l'énergétique de la composante fluctuante de l'écoulement. La procédure de moyenne spatiale, indiquée ici par des $\langle\rangle$, est la même que décrite en classe dans notre dérivation des stress de Reynolds. Vous pouvez encore une fois supposer que l'écoulement est incompressible, et donc que les fluctuations de vitesse vont satisfaire à la relation $\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0$ obtenue en classe.

(a) A partir des équations de Navier-Stokes écrites en notation indicielle, obtenez la relation suivante caractérisant l'évolution de la valeur moyenne des $\langle (u_i')^2 \rangle$:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \langle (u_i')^2 \rangle}{\partial t} + \frac{1}{2} u_j \frac{\partial \langle (u_i')^2 \rangle}{\partial x_j} = - \langle u_i' u_j' \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j} \langle (u_i')^2 u_j' \rangle - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i} \langle p' u_i' \rangle + \nu \left\langle u_i' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle$$

(b) Donnez une interprétation physique à chaque terme dans l'équation ci-dessus. Y a-t-il un (ou plusieurs) terme(s) de type "source" au coté droit?

Problème 49

Le but est ici de vous faire examiner la stabilité des solutions stationnaires aux équations de Lorenz considérées au chapitre 15. Il s'agira d'effectuer une analyse par linéarisation de ces équations. Ceci implique les étapes suivantes:

(a) Introduisez des perturbations du type $X + \delta X$, etc., et obtenez les formes linéarisées des équations de Lorenz aux ordres zéro et un.

(b) Écrivez maintenant $\delta X = x_0 \exp(st)$, etc, où $s = \sigma + i\omega$; substituez ceci dans les équations à l'ordre un et obtenez un système de trois équations algébriques pour les amplitudes x_0, y_0 et z_0.

(c) Obtenez maintenant la relation de dispersion suivante, caractérisant la stabilité de la première solution stationnaire discutée dans les notes ($X = Y = Z = 0$), et démontrez qu'une de ses trois racines est caractérisée par $\sigma > 0$ quand $r > 1$.

$$(s + 1)[s^2 + s(P + 1) - P(r - 1)] = 0 \ .$$

(d) Examinez maintenant de la même manière la stabilité d'une des secondes solutions stationnaires. Démontrez que la relation de dispersion est comme suit,

$$s^3 + s^2(P + 2) + s(P + r) + 2P(r - 1) = 0 \ .$$

(e) Démontrez finalement que cette seconde relation de dispersion conduit à un critère de stabilité impliquant une valeur critique de r donnée par $r_c = P(P + 4)/(P - 2)$. N'oubliez pas que la seconde classe de solutions stationnaires n'existe que pour $r > 1$.

Problème 50

Nous nous sommes surtout concentré au chapitre 15 sur les propriétés des équations de Lorenz dans le régime chaotique. Le but de ce problème est de vous faire explorer la forme que prend la transition au chaos dans ce système d'équations. Pour ce faire vous devrez intégrer les équations de Lorenz numériquement selon la méthode décrite en classe, ou encore utiliser Maple, Mathematica, etc. Dans un cas comme dans l'autre, incluez des copies de vos routines numériques et/ou sessions Maple/Mathematica. Attention de ne pas prendre un pas de temps trop grand (imprécis) ou trop petit (sujet à accumulation des erreurs de troncations); quelquechose du genre $\Delta t = 0.01$ devrait être adéquat (dépendant de l'algorithme utilisé).

(a) Construisez une séquence de solutions ayant $P = 20$ et r croissant de 10 jusqu'à 30. Calculez chaque solution sur une période couvrant quelques centaines d'unités de temps adimensionnel.
(b) Pour chaque valeur de r, extrayez la valeur maximale des pics successifs dans la séquence temporelle pour la variable Z; pour chaque valeur de r, vous avez maintenant une liste de $N(r)$ valeurs de Z, une pour chacune des N pics dans votre séquence temporelle pour une valeur de r donnée. Attention de bien laisser s'amortir le transient initial dû à votre choix (arbitraire) de condition initiale, avant de commencer à extraire les pics.
(c) Portez en graphique ces valeurs en fonction de r; c.-à-d., faites un graphique ou r est l'abcisse et Z l'ordonnée; pour chaque valeur de r, vous aurez N valeurs à ainsi porter en graphique, chacune comme un point individuel (ne reliez pas les points entre eux avec un trait!). Le diagramme résultant s'appelle **diagramme de bifurcation**,
(d) Identifiez sur votre diagramme de bifurcation (i) le régime chaotique; (ii) le régime unipériodique; (iii) le régime multipériodique. Combien de type de transition au chaos observez vous ici, quand r augmente ou diminue?