PHY 3140
HYDRODYNAMIQUE
PROBLÈMES: SÉRIE 2

Distribué le: 8 octobre 2024
Chapitres couverts: 5 et 6

Problème 21

Une tige métallique de longueur L et isolée sur toute sa longueur est constituée d'un matériau de diffusivité thermique κ sur sa première moitié ($0 \leq x \leq L/2$, disons), et d'un matériau différent, de diffusivité thermique 3κ, sur la seconde moitié. La température à $x = 0$ est maintenue à T_1, et à T_2 ($> T_1$) à $x = L$. Calculez le profil d'équilibre $T(x)$ le long de la tige, en fonction de κ, L, T_1 et T_2.

Problème 22

On immerge dans un fluide immobile, incompressible, et de diffusivité thermique κ_1 une sphère métallique de rayon R et de diffusivité thermique κ_2. Un gradient de température vertical est maintenu dans le fluide loin de la sphère (e.g., le fluide est contenu entre deux très grandes plaques horizontales maintenues à des températures fixes mais différentes). Calculez la distribution de température stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) qui s'établit éventuellement dans la sphère et le fluide.

Problème 23

Nous avons vu en classe que la contrainte d'isotropie permettait de réduire énormément le nombre de coefficients numériques impliqués dans la relation tensorielle linéaire entre le tenseur des stress visqueux τ_{ij} et le tenseur des déformations D_{ij}. Démontrez que dans le cadre d'une rotation de $\pi/2$ par rapport à l'axe z, il est possible de passer de

$$\begin{matrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{matrix}$$

à:

$$\begin{matrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{matrix}$$

Il sera utile de ne pas paniquer... et de commencer par établir les éléments de la matrice de rotation...

Problème 24

(Suite du précédent) Démontrez maintenant que la contrainte d'isotropie dans le cadre d'une rotation de $\pi/4$ par rapport à l'axe des z impose la relation:

$$C_{11} = C_{44} + C_{12}$$

Commencez par vous faire un petit dessin des axes originaux et après rotation, afin de pouvoir calculer correctement les éléments de la matrice de rotation, et attention aux signes "$-$" dans le calcul des cosinus...

Problème 25

Un fluide incompressible et visqueux s'écoule sous l'influence de la gravité entre deux très grandes plaques parallèles immobiles, orientés verticalement et séparées par une distance d beaucoup plus petite que leur taille. Calculez la forme de l'écoulement en régime stationnaire ($\partial/\partial t = 0$). Comment caractériseriez-vous la dynamique de l'écoulement en une phrase?

Problème 26

Une mince couche de fluide incompressible et visqueux s'écoule sur un plan incliné à un angle α par rapport à l'horizontale. Calculez la forme de l'écoulement dans la couche de fluide.

Problème 27

Variation sur le même thème: cette fois-ci ce sont **deux** minces couches superposées de fluides incompressibles et visqueux, de densités égales mais de viscosités cinétiques ν_1 et ν_2 différentes, qui s'écoulent en régime stationnaire sous l'influence de la gravité le long du plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. La couche de fluide adjacente au plan est d'épaisseur h_1, et celle par dessus d'épaisseur h_2.

(a) Écrivez et justifiez physiquement les conditions limites sur $\mathbf{u}$ qui doivent être satisfaites (i) à la surface du plan; (ii) à l'interface entre les deux couches de fluide; (iii) à l'interface avec l'air.
(b) Calculez le profil de vitesse de l'écoulement dans les deux couches de fluide.
(c) En dépit de votre réponse en (a), vous devriez avoir trouvé en (b) que le profil de l'écoulement de la couche inférieure de dépend pas de la viscosité du fluide dans la couche supérieure; comment expliquez vous ceci physiquement?

Problème 28

Un fluide très, très visqueux remplit l'espace entre deux cylindres concentriques de rayons a et b ($> a$) respectivement, tous deux de longueur L beaucoup, beaucoup plus grande que ces rayons. Le cylindre intérieur se déplace à une vitesse u_0 le long de son axe de symétrie, tandis que le cylindre extérieur est fixe. Calculez la forme de l'écoulement du fluide qui résulte de ce déplacement du cylindre intérieur, en régime stationnaire ($\partial/\partial t = 0$).

Problème 29

Un fluide incompressible et visqueux remplit l'espace entre deux longs et désormais familiers cylindres co-axiaux de rayons a et b ($> a$). Le cylindre extérieur est fixe, mais le cylindre intérieur tourne autour de son axe de symétrie à une vitesse angulaire ω_a. Calculez la forme de l'écoulement du fluide qui résulte de ce déplacement du cylindre intérieur, en régime stationnaire ($\partial/\partial t = 0$).

Problème 30

Une grosse éruption volcanique peut injecter dans la basse stratosphère des milliard de tonnes de particules fines (diamètre $\sim \mu$m). Ces particules dispersent, réfléchissent et/ou absorbent la radiation solaire incidente, tout en n'affectant pas (ou très peu) le passage de la radiation infrarouge émise par la troposphère vers l'espace. Elles peuvent aussi servir de sites de nucléation pour la vapeur d'eau, et donc favoriser la formation de nuages en hautes altitudes, ce qui augmentent l'albédo de l'atmosphère. L'effet net est une réduction de l'irradiance solaire au sol, et donc une baisse de la température troposphérique, qui peut perdurer tant que ces particules ne se sont pas déposées au sol sous l'influence de la gravité. C'est ainsi que l'éruption du Krakatoa en 1883, qu'on estime avoir injecté $\sim 10^{12}$ kg de particules fines dans la stratosphère, a produit une baisse de 1–2° C de la température terrestre moyenne, ayant perduré quelques années. Le but de ce problème est de vous faire quantifier ce "quelques"!

(a) Partant de la force de trainée calculée pour la solution de Stokes, montrez qu'une particule de rayon a et densité $\rho = 2000\,\text{kg m}^{-3}$ chutant dans l'atmosphère (densité de l'air $\rho_a = 1$ kg m^{-3}, viscosité cinématique $\nu = 10^{-5}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-1}$) atteindra une vitesse constante de chute V donnée par

$$V \simeq \frac{2ga^2}{9\nu}\left(\frac{\rho}{\rho_a}\right) .$$

C'est la **vitesse de sédimentation**. Justifiez bien votre raisonnement, et vos approximations, s'il y a lieu.

(b) Estimez le nombre de Reynolds associé à ce mouvement, en fonction de a. La contrainte Re$\ll 1$, essentielle à la solution de Stokes, impose quelle contrainte quant à la taille des particules pouvant être modélisées ainsi ?

(c) La structure verticale de la stratosphère est telle que les vents y sont prédominamment horizontaux; calculez le temps pris par une particule de rayon a pour chuter d'une altitude de 20 km à 8 km (le haut de la troposphère). Évaluez ce temps pour des particules de rayons 1, 3 et 10 μm.

(e) Il existe une limite inférieure à la taille des particules sous laquelle notre modèle va flancher, et cela n'a rien à voir avec la contrainte calculée en (b). Essayez de me l'identifier.

(f) Comme on l'a vu au chapitre 4, la densité et la température de l'atmosphère décroissent avec l'altitude; les valeurs de densité et viscosité introduites en (a) caractérisent la basse troposphère. Estimez l'erreur que pourrait causer ces décroissances sur vos temps de chute calculés en (c).

En guise de conclusion à tout ceci, sachez que certains huluberlus ont suggéré de disperser délibérément dans la basse stratosphère des particules fines, de manière à augmenter l'albédo effectif de la Terre, comme le font les cendres volcaniques, afin de contrer le réchauffement global dû à l'augmentation du CO_2 atmosphérique produite par le brûlage des combustibles d'origine fossile. Une bonne compréhension des sources d'erreurs et limites d'un modèle simple, comme celui développé dans le cadre de ce problème, est essentielle pour apprécier la faisabilité —et les dangers— de ce genre d'ingénierie climatique !

Problème 31

Un fluide visqueux et incompressible est contenu entre deux très grandes plaques parallèles séparées d'une distance h. La plaque du fond est au repos, et elle du haut tourne autour d'un axe vertical perpendiculaire aux plaques, à vitesse angulaire Ω.

Le fluide étant visqueux, on peut s'attendre à ce que le mouvement de rotation de la plaque supérieure se transmette au fluide; et qu'après une phase transitoire, on pourrait possiblement produire un écoulement stationnaire de la forme

$$\mathbf{u} = u_\phi(s,z)\hat{\mathbf{e}}_\phi \ ,$$

exprimé ici en coordonnées cylindriques (s,ϕ,z), avec $\hat{\mathbf{e}}_z$ coincidant avec l'axe de rotation de la plaque supérieure.

(a) Démontrez que dans la situation considérée ici, l'écoulement ci-dessus n'est *pas* une solution physiquement acceptable.
(b) Sans calculer une solution complète formelle, démontrez que votre résultat en (a) implique la présence d'un écoulement secondaire ayant des composantes dans les directions $\hat{\mathbf{e}}_s$ et $\hat{\mathbf{e}}_z$.
(c) Tracez à main levée les lignes d'écoulement de cet écoulement secondaire dans les environs de l'axe de rotation du système. Justifiez physiquement votre dessin (une demie page max).
(d) Toujours sans calculer une solution formelle, obtenez un *estimé* de la grandeur caractéristique de cet écoulement secondaire, en fonction des paramètres du problème (e.g., vitesse angulaire de la plaque supérieure, viscosité du fluide, etc.)

Problème 32

Ce problème vise à vous faire explorer le mécanisme de **lubrification**. On considère un cube d'arête $d = 1\,\mathrm{m}$ de masse $10^3\,\mathrm{kg}$, dont une face repose sur une surface plane horizontale, avec une très mince (épaisseur $= 1\,\mathrm{mm}$) couche d'huile (fluide incompressible de densité $\rho = 800\,\mathrm{kg\ m^{-3}}$ et viscosité cinématique $\nu = 10^{-4}\ \mathrm{m^2\,s^{-1}}$) séparant le cube de la plaque.

(a) Calculez la forme de l'écoulement induit dans la couche d'huile par un déplacement horizontal du bloc à vitesse constante v. Vous pouvez négliger les effets de bords, autrement dit vous pouvez supposer que l'écoulement dans la couche d'huile est purement horizontal.

(b) Calculez maintenant le stress visqueux à la base du bloc.

(c) Calculez la force horizontale (en Newton) devant être appliquée sur le bloc pour qu'il se déplace (horizontalement) à une vitesse constante $v = 1\,\mathrm{m\ s^{-1}}$; et aussi pour $v = 1\,\mathrm{m\ s^{-1}}$;

(d) Votre résultat en (c) semble suggérer que $\mathbf{F} \propto \mathbf{v}$ plutôt que notre bon vieux $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Expliquez en quelques lignes ce paradoxe (apparent).

Problème 33

Recalculez la solution de Blasius en suivant la procédure numérique introduite à la §6.10 des notes de cours. Ensuite, calculez la force de trainée (en Newton) exercée par l'eau ($\nu = 10^{-6}\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1}$) s'écoulant à vitesse $u_0 = 1\,\mathrm{m\ s}^{-1}$ de chaque coté d'une plaque carrée de taille $L = 1 \times 1\mathrm{m}$, et d'épaisseur $h = 1\mathrm{cm}$. Vous pouvez négliger les effets de bord. Détaillez bien toutes les étapes de votre raisonnement. L'approximation donnée par l'équation (6.151) se compare-t-elle bien à votre résultat ?
