

PHY 3140
HYDRODYNAMIQUE
PROBLÈMES: SÉRIE 3

Distribué le: 20 novembre 2019

Chapitres couverts: 8 à 14

Problème 36

Démontrez que pour un fluide inviscide mais compressible, l'équation de la vorticité prend la forme:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} + \frac{(\nabla \rho) \times (\nabla p)}{\rho^3} .$$

Problème 37

Calculez la forme de l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible produit par un anneau de vorticité de rayon R , le long d'un axe perpendiculaire à l'anneau et passant par son centre.

Problème 38

Nous avons vu en classe que l'écoulement stationnaire associé à une ligne (droite) de vorticité pouvait s'exprimer comme

$$\mathbf{u} = \frac{\Gamma}{2\pi s} \hat{\mathbf{e}}_\phi ,$$

où la circulation Γ est une mesure de l'intensité de la ligne de vorticité. Le but de ce problème est de vous faire calculer une solution pour l'écoulement non-stationnaire produit quand on "retire" (   $t = 0$) la ligne de vorticité du fluide ambiant (visqueux et incompressible). En d'autres mots, les conditions initiale et limites du problème sont, en coordonnées cylindriques $[s, \phi, z]$:

$$u_\phi(s, t = 0) = \frac{\Gamma}{2\pi s} ,$$

$$u_\phi(s = 0, t) = 0 ,$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} u_\phi(s, t) = \frac{\Gamma}{2\pi s} .$$

- (a) Obtenez la (les)   quation(s) gouvernant l'évolution subséquente du fluide, après retrait de la ligne de vorticité à $t = 0$.
- (b) Utilisez la circulation Γ pour définir une version non-dimensionnelle (u^* disons) de la vitesse u_ϕ ; cherchez maintenant une nouvelle variable indépendante η (qui peut être fonction des variables spatiales et temporelles) telle que votre équation maitresse en (a) accepte une solution autosimilaire de la forme

$$u^* = F(\eta)$$

- (c) Déduisez-en l'équation différentielle que doit satisfaire $F(\eta)$, ainsi que les conditions limites correspondantes
- (d) Solutionnez l'équation en (c), réexprimez le résultat en termes des variables dimensionnelles de départ, et portez en graphique le profil de $u_\phi(s)$ pour différents $t > 0$
- (e) Interprétez l'évolution spatiotemporelle des profils $u_\phi(s, t)$ en terme de diffusion visqueuse.

Problème 39

Reprenez le développement mathématique de la §9.2, cette fois avec une condition limite correspondant à un océan de profondeur finie, soit

$$u_z \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = -h.$$

- (a) Vérifiez ainsi que la relation de dispersion prend maintenant la forme

$$\omega^2 = gk \tanh(kh).$$

- (b) Démontrez que dans le régime de l'eau peu profonde ($kh \ll 1$), les trajectoires des éléments de fluide décrites lors du passage de la vague ont la forme d'ellipses très allongées dans la direction- x .

Problème 40

On a vu comment à une interface entre deux fluides de densités différentes, il est possible de développer des ondes de surface (étudiées en grand détails au chapitre 9 dans le cadre d'une interface eau-air), où la gravité agit comme force de rappel. De telles ondes peuvent également se développer dans un fluide stratifié par la gravité, en absence d'une interface. Ce problème vise à vous faire calculer la relation de dispersion pour de telles ondes, dites "ondes internes" ou "ondes de gravité". Je vous fournis ci-dessous plusieurs étapes intermédiaires du calcul, donc respirez bien par le nez et ça devrait bien débouler...

Le point de départ de l'analyse n'est rien de plus compliqué que nos équations pour un fluide inviscide dans l'approximation de Boussinesq, en supposant toutefois que la densité peut varier en fonction de la position mais est conservée durant le déplacement d'un élément de fluide; Les écoulements océaniques sont une situation physique correspondant à cette situation à prime abord bizarre, en raison du gradient vertical de salinité qui existe habituellement dans les couches superficielles des océans. les équations à résoudre sont donc:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

Nous allons travailler en deux dimensions spatiales (x, z) , avec la direction z correspondant à la verticale. On écrira l'écoulement sous la forme $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{e}}_x + w\hat{\mathbf{e}}_z$.

- (a) Linéarisez les équations ci-dessus, en supposant que l'état de référence est en équilibre hydrostatique dans la verticale (gravité constante ici), et aucune des quantités caractérisant cet état de référence ne dépend de la coordonnée horizontale x ou du temps t ; e.g., on écrira $p = p_0(z) + p_1(x, z, t)$, etc. Démontrez que les équations linéarisées prennent la forme:

$$\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x},$$

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial w_1}{\partial t} &= -\frac{\partial p_1}{\partial z} - \rho_1 g , \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} &= 0 , \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + w_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial z} &= 0 .\end{aligned}$$

(b) Cherchons maintenant des solutions prenant la forme de variations harmoniques en x , i.e.,

$$w_1(x, z, t) = W_1(z)e^{i(kx - \omega t)} , \quad \rho_1(x, z, t) = R_1(z)e^{i(kx - \omega t)} , \quad \text{etc.}$$

Par substitution dans les équations linéarisées ci-dessus, montrez que celles-ci se réduisent à

$$\begin{aligned}\rho_0 \omega U_1 &= k P_1 , \quad i \rho_0 \omega W_1 = \frac{dp_1}{dz} + R_1 g , \\ ik U_1 + \frac{dW_1}{dz} &= 0 , \quad -i \omega R_1 + W_1 \frac{d\rho_0}{dz} = 0 .\end{aligned}$$

(c) Ces quatre EDOs peuvent être combinées en une seule, de la forme:

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial z^2} = \dots$$

Calculez moi ce mystérieux coté droit de cette équation !

(d) Spécialisons maintenant le problème à une stratification isotherme, où $\rho_0 \propto \exp(-z/H)$, H étant l'échelle de hauteur de la stratification; tous les coefficients de votre EDO obtenue en (c) devraient se retrouver indépendants de z , ce qui implique qu'elle accepte des solutions ondulatoires de la forme

$$W_1 \propto e^{z/2H} \times e^{i(kx + lz - \omega t)} ,$$

où l est le nombre d'onde vertical de la dépendance harmonique. Substituant cette expression dans votre ODE en (c), démontrez que ces ondes vont satisfaire à la relation de dispersion suivante:

$$\omega^2 = \frac{N^2 k^2}{k^2 + l^2} , \quad \text{avec} \quad N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} ,$$

dans la limite où la longueur d'onde de l'oscillation est beaucoup plus petite que la hauteur de colonne H .

e) Finalement, à partir de votre résultat en (d) déterminez pour quelles formes de profils de variation de $\rho_0(z)$ ces ondes sont amorties dans le temps.

Problème 41

Considérons les quatre écoulements discutés en classe dans le cadre de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz (voir Figure 3.1). Il s'agit ici d'écoulements unidirectionnels ($\mathbf{u} = u_x \hat{\mathbf{x}}$) d'un fluide incompressible et inviscide entre deux très grandes plaques parallèles.

(a) Calculez les valeurs des constantes d'écoulement u_2 , u_3 et u_4 en terme de u_1 de manière à ce que le débit de fluide soit la même pour les quatre écoulements.

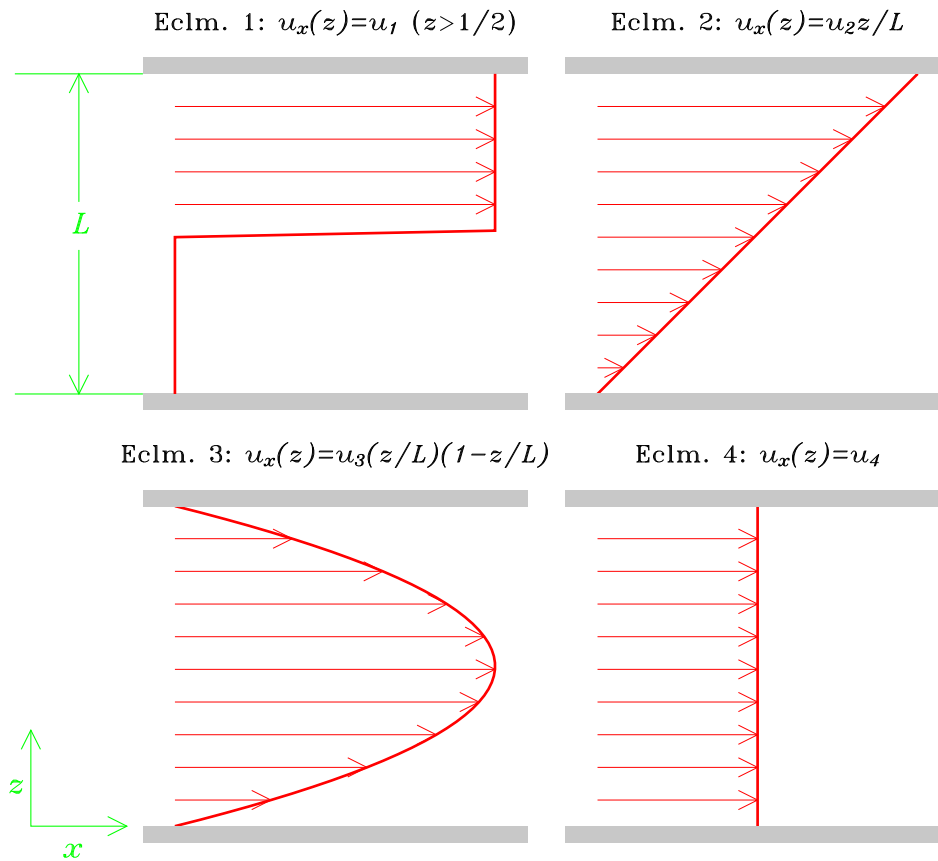


Figure 3.1: Quatre écoulements unidirectionnels entre deux très grandes plaques parallèles (Problème 41).

- (b) Calculez l'énergie par unité de masse du fluide dans chacun des quatre écoulements, et vérifiez que cette quantité est minimale pour l'écoulement 4.

Problème 42

Ce problème vise à vous faire apprivoiser le concept de dilatation thermique d'un fluide, dans le cadre d'une question très d'actualité. L'IPCC (Intergovernmental Panel on Climate Change) a produit plusieurs scénarii de réchauffement global, celui jugé le plus probable dans l'état actuel des choses prédisant une augmentation de la température terrestre moyenne de 5 C d'ici l'an 2100.

En supposant que l'ensemble des océans se réchauffe également de 5 degrés Celsius, calculez l'augmentation du niveau de la mer associé à la dilatation thermique de l'eau de mer. Vous pouvez considérer les océans comme un bassin de profondeur uniforme de 5 km, avec un profil initial de température tel que tabulé à l'appendice C.2. N'oubliez pas que le coefficient de dilatation thermique de l'eau dépend de la température (voir Tableau C.2.1). Vous pouvez négliger la dépendance de ce coefficient sur la pression.

- Établissez tout d'abord une relation décrivant la variation volumique d'un élément de fluide dV d'eau de mer, en fonction d'un changement de température dT ;
- Déduisez-en une intégrale décrivant la variation du niveau de la mer;

- (c) Solutionnez (numériquement) cette intégrale dans le cas d'un réchauffement $\Delta T = 5^\circ\text{C}$ uniforme dans tout l'océan. De combien s'élèvera le niveau des océans?
 - (d) Quelles sont, d'après vous, les hypothèses de travail les plus douteuses dans votre calcul?
-

Problème 43

Ce problème vise à vous faire approfondir certains aspects “théoriques” de la convection Rayleigh-Bénard en régime Boussinesq.

- (a) Commencez par démontrer que dans l'approximation de Boussinesq, l'éq. (11.9) découle bien de l'équation de Navier-Stokes sous utilisation de l'éq. (11.2). Détaillez bien les diverses approximations que cette dérivation exige.
 - (b) Montrez maintenant que la substitution des variables adimensionnelles définies par les équations (11.11)—(11.16) dans les équations (11.6)—(11.10) conduit bien aux équations (11.17)—(11.21).
 - (b) Démontrez que l'équation (11.23) suit bien de (11.22) dans l'approximation de Boussinesq.
-

Problème 44

Maintenant on passe aux choses sérieuses, soit une analyse d'une simulation numérique 2D de la convection en régime Boussinesq, soit celle discutée à la §11.3.2, et plus spécifiquement la simulation à $\text{Ra} = 10^6$ illustrée à la Figure 11.5 (au centre). Vous devez tout d'abord aller chercher un fichier contenant les valeurs des vitesse et température à tous les points de maille, extraites à un temps spécifique dans la simulation; ce fichier, nommé “`sim141.txt`”, est accessible de la page web du cours, dans la section “Exercices”; il contient 8192 lignes, une par point de maille, contenant chacune 5 nombres réels, correspondant aux quantités:

$$\{x, z, u_x, u_z, T\}$$

- (a) Calculez la température moyennée horizontalement (direction- x) et portez en graphique cette quantité ($\bar{T}(z)$) versus la coordonnée verticale z ; vérifiez que cela ressemble bien à la courbe en vert sur la Figure 11.7.
 - (b) Une caractéristique définissant la convection thermique est la corrélation entre la vitesse verticale du fluide et la perturbation de température par rapport à la moyenne horizontale ($\Delta T(x, z) = T(x, z) - \bar{T}(z)$). Portez en graphique toutes vos valeurs de $\Delta T(x, z)$ versus $u_z(x, z)$. Observez-vous la corrélation attendue ?
 - (c) Répétez la procédure en (b), mais en corrélant maintenant ΔT avec u_x ; observez-vous ici une corrélation ? Pourquoi ?
 - (d) Calculez le flux convectif total (eq. (11.24) intégrée horizontalement) à chaque hauteur z , et portez le résultat en graphique en fonction de z . Comment expliquez-vous la forme du graphique ?
-

Problème 45

Il s'agit ici d'examiner certaines propriétés statistiques de la convection en régime turbulent, plus spécifiquement dans le cadre de la simulation de convection thermique au bas de la Figure

11.5. Vous devez encore une fois aller chercher sur la page web du cours, section “Exercices”, un fichier de données nommé “**ts113.txt**”. Ce fichier contient 3 colonnes de chiffres, chaque colonne correspondant à une séquence temporelle (2000 pas de temps) de la vitesse verticale u_z à une position (x, z) spécifique dans la simulation (les positions exactes importent peu pour ce qui suit). Dans le cadre des analyses décrites ci-dessous, vous ne devrez utiliser que les derniers 1000 pas de temps de ces séquences, afin que vos résultats ne soient pas influencés par le transient initial associé à la mise en branle de la convection.

- Commencez par calculer la fonction de densité de probabilité (PDF; i.e., l’histogramme!) des valeurs de u_z pour les 1000 derniers pas de temps dans chacune de vos trois séquences. Ces PDFs sont-elles Gaussiennes ? Comment pourriez vous les caractériser ?
- Calculez les transformées de Fourier (ou FFT) des derniers 1000 pas de temps dans chacune de vos trois séquences temporelles de u_z , et construisez leurs spectres. Ces spectres montrent-ils un intervalle inertiel, i.e., un intervalle en fréquence où le spectre est représentable par une loi de puissance ? Si oui, quel en est la pente logarithmique ?
- Allez maintenant chercher le fichier **ts141.txt**, qui contient aussi trois séquences temporelles de u_z , mais cette fois pour la simulation à $Ra = 10^6$ (Fig 11.5, au centre). Calculez les spectres de ces séquences, utilisant encore une fois seulement les derniers 1000 pas de temps. Comparez et contrastez ces spectres à ceux obtenus en (b). Comment expliquez-vous la forme très différente de ces nouveaux spectres ?

Problème 46

Ce problème vise à vous faire effectuer une analyse perturbative formelle, dans le cadre de l’instabilité de Rayleigh-Bénard. Vous travaillez ici dans le cadre de l’approximation de Boussinesq décrite au chapitre 12, telle qu’appliquée à l’expérience de convection thermique du type Bénard (mince couche de fluide sujette à un gradient vertical de température imposé extérieurement, voir §12.2 des notes). Nous avons vu dans les notes qu’une solution stationnaire et statique prend la forme:

$$\mathbf{u} = 0, \quad T(z) = T_B - \frac{z}{d} \Delta T,$$

où d est l’épaisseur de la couche de fluide, et $\Delta T = T_H - T_B (> 0)$ est la différence de température entre le haut et le bas.

- Linéarisez les équations de Boussinesq, utilisant le profil linéaire en T ci-dessus comme état de référence pour la température (i.e., $T_0(z)$). Vous devriez trouver que les équations de Navier-Stokes et de transport de la chaleur pour les quantités à l’ordre 1 prennent la forme:

$$\rho_o \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \rho_o \nu \nabla^2 \mathbf{u}_1 + \rho_1 \mathbf{g},$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + u_{z,1} \frac{dT_0}{dz} = \kappa \nabla^2 T_1.$$

- Prenez le rotationnel de l’équation de Navier-Stokes linéarisée; utilisant le fait que $\rho_1 = -\alpha \rho T_1$ (version linéarisée de notre expression pour la dilatation thermique), démontrez que le résultat peut s’écrire sous la forme:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla \times \mathbf{u}_1 = -\alpha (\nabla T_1) \times \mathbf{g}.$$

- (c) Prenez encore une fois le rotationnel du résultat en (b), et n'en retenez que la composante- z (en n'oubliant pas que $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{e}}_z$); éliminez T_1 de cette expression en utilisant l'équation linéarisée du transport de la chaleur, pour ainsi obtenir l'équation différentielle ordinaire suivante pour la composante verticale de la vitesse du fluide:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \nabla^2\right) \nabla^2 u_{z,1} = -\alpha g \frac{dT_0}{dz} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u_{z,1} ,$$

- (d) Comme il n'y a pas ici de direction horizontale privilégiée, on peut chercher une solution par séparation de variable:

$$u_{z,1}(x, y, z, t) = W(z) f(x, y) e^{st} ,$$

où s est réel, et la partie horizontale doit satisfaire:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + a^2 f = 0 ,$$

a étant une constante reliée à l'échelle horizontale de la convection. Substituant ceci dans

l'EDP en (c), obtenez l'EDO suivante pour la partie verticale $W(z)$:

$$(\nu(D^2 - a^2) - s) (\kappa(D^2 - a^2) - s) (D^2 - a^2) W = \alpha g \frac{dT_0}{dz} a^2 W ,$$

avec $D \equiv d/dz$.

- (e) La condition limite sur $u_{z,1}$ à $z = 0$ et $z = d$ est $u_{z,1} = 0$; ceci suggère une dépendance verticale de la forme:

$$W(z) = \sin\left(\frac{n\pi z}{d}\right) , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Vérifiez que ceci produit la relation de dispersion:

$$(s + \nu b^2)(s + \kappa b^2)b^2 + \alpha g \frac{dT_0}{dz} a^2 = 0 , \quad b^2 = a^2 + \frac{n^2 \pi^2}{d^2} .$$

- (f) La relation de dispersion trouvée en (e) est quadratique en s ; trouvez-en les racines de la manière habituelle, et montrez qu'il n'existera une racine positive (i.e. perturbation croissant dans le temps) que si

$$\frac{\alpha g}{\nu \kappa} \left(-\frac{dT_0}{dz}\right) > \frac{1}{a^2} \left(a^2 + \frac{N^2 \pi^2}{d^2}\right)^3 .$$

(n'oublions pas que $dT_0/dz < 0$!).

- (g) On peut facilement montrer (faites le!) que par rapport à a et N , le membre de droite de l'inégalité ci-dessus sera minimisé par rapport à a et n pour les valeurs $a = \pi/(\sqrt{2}d)$ et $n = 1$. Montrez que ceci correspond à un nombre de Rayleigh critique

$$\text{Ra}_c = \frac{27\pi^4}{4} .$$

Bien que ce problème ait l'air plutôt capotant, je vous fournis assez de résultats intermédiaires pour le rendre faisable en un temps fini... en cas de découragement, rappelez-vous que Rayleigh a fait ça tout seul comme un grand, sans étapes intermédiaires fournies, il y a déjà plus d'un siècle... La valeur de Ra_c trouvée ci-dessus ne se compare pas si mal à la valeur déterminée expérimentalement, $Ra_c = 1708$; la différence vient des conditions limites.

Problème 47

Considérons l'équation de Landau discutée au chapitre 12:

$$\frac{\partial |\mathbf{A}|^2}{\partial t} = 2\sigma |\mathbf{A}|^2 - \Lambda (|\mathbf{A}|^2)^2,$$

et sa solution:

$$|\mathbf{A}|^2 = |\mathbf{A}_0|^2 \left[\frac{\Lambda}{2\sigma} |\mathbf{A}_0|^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{2\sigma} |\mathbf{A}_0|^2 \right) e^{-2\sigma t} \right]^{-1},$$

où $|\mathbf{A}_0|^2$ est le module carré de l'amplitude (complexe) de la perturbation infinitésimale à $t = 0$, σ (> 0) le taux de croissance de la perturbation, et Λ une constante (voir section 13.2 des notes).

Il a été démontré dans les notes que si $\Lambda > 0$, cette équation accepte des solutions où l'amplitude $|\mathbf{A}|$ tend vers une constante dans la limite $t \rightarrow \infty$. Démontrez maintenant que dans la situation contraire, soit $\Lambda < 0$, l'amplitude diverge (i.e., $|\mathbf{A}| \rightarrow \infty$) en un temps fini.

Problème 48

Il s'agit ici de vous faire approfondir un aspect important de l'approche statistique à la turbulence, soit l'énergétique de la composante fluctuante de l'écoulement. La procédure de moyenne spatiale, indiquée ici par des $\langle \rangle$, est la même que décrite en classe dans notre dérivation des stress de Reynolds. Vous pouvez encore une fois supposer que l'écoulement est incompressible, et donc que les fluctuations de vitesse vont satisfaire à la relation $\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0$ obtenue en classe.

- (a) A partir des équations de Navier-Stokes écrites en notation indicielle, obtenez la relation suivante caractérisant l'évolution de la valeur moyenne des $\langle (u'_i)^2 \rangle$:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \langle (u'_i)^2 \rangle}{\partial t} + \frac{1}{2} u_j \frac{\partial \langle (u'_i)^2 \rangle}{\partial x_j} = - \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \langle (u'_i)^2 u'_j \rangle - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle p' u'_i \rangle + \nu \left\langle u'_i \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle$$

- (b) Donnez une interprétation physique à chaque terme dans l'équation ci-dessus. Y a-t-il un (ou plusieurs) terme(s) de type "source" au coté droit?

Problème 49

Obtenez une équation d'évolution ($\partial/\partial t = \dots$) pour une composante du stress de Reynolds; démontrez que cette expression impliquera, au membre de droite, au moins un terme proportionnel à un tenseur du genre $\langle u_i u_j u_k \rangle$.

Problème 50

Nous nous sommes surtout concentré au chapitre 14 sur les propriétés des équations de Lorenz dans le régime chaotique. Le but de ce problème est de vous faire explorer la forme que prend la transition au chaos dans ce système d'équations. Pour ce faire vous devrez intégrer les équations de Lorenz numériquement selon la méthode décrite en classe, ou encore utiliser Maple, Mathematica, etc. Dans un cas comme dans l'autre, incluez des copies de vos routines numériques et/ou sessions Maple/Mathematica. Attention de ne pas prendre un pas de temps trop grand (imprécis) ou trop petit (sujet à accumulation des erreurs de troncations); quelque chose du genre $\Delta t = 0.01$ devrait être adéquat (dépendant de l'algorithme utilisé).

- (a) Construisez une séquence de solutions ayant $P = 20$ et r croissant de 10 jusqu'à 30. Calculez chaque solution sur une période couvrant quelques centaines d'unités de temps adimensionnel.
 - (b) Pour chaque valeur de r , extrayez la valeur maximale des pics successifs dans la séquence temporelle pour la variable Z ; pour chaque valeur de r , vous avez maintenant une liste de $N(r)$ valeurs de Z , une pour chacune des N pics dans votre séquence temporelle pour une valeur de r donnée. Attention de bien laisser s'amortir le transient initial dû à votre choix (arbitraire) de condition initiale, avant de commencer à extraire les pics.
 - (c) Portez en graphique ces valeurs en fonction de r ; c.-à-d., faites un graphique où r est l'abscisse et Z l'ordonnée; pour chaque valeur de r , vous aurez N valeurs à ainsi porter en graphique, chacune comme un point individuel (ne reliez pas les points entre eux avec un trait!). Le diagramme résultant s'appelle **diagramme de bifurcation**,
 - (d) Identifiez sur votre diagramme de bifurcation (i) le régime chaotique; (ii) le régime unipériodique; (iii) le régime multipériodique. Combien de type de transition au chaos observez vous ici, quand r augmente ou diminue?
-