

PHY 3140
HYDRODYNAMIQUE
PROBLÈMES: SÉRIE 1

Distribué le: 13 septembre 2019

Chapitres couverts: 2, 3, 4

Problème 1

Calculez la force requise pour “décoller” les deux hémisphères des coquilles de von Guericke (voir Fig. 2.1 des Notes de cours), sachant que leur rayon était d’environ 35 centimètres. Aux fins de cet exercice, vous pouvez supposer que la pompe de von Guericke pouvait réduire la pression intérieure à 1 kPa. Détaillez bien toutes les étapes de votre raisonnement et de vos calculs.

Problème 2

Un contenant cylindrique contient un fluide incompressible de densité ρ . Le contenant et le fluide tournent à vitesse angulaire constante Ω autour d’un axe vertical coïncidant avec l’axe du contenant, et la gravité pointe verticalement vers le bas. En d’autres mots, dans un repère en rotation à vitesse angulaire Ω le fluide est au repos.

- (a) Suivant le genre de procédure utilisée à la section 2.4 des notes de cours, établissez une forme de l’équation de l’équilibre hydrostatique généralisée pour inclure les effets de la rotation.
 - (b) Utilisez la relation trouvée en (a) pour calculer la forme géométrique de la surface liquide-air. Explicitez bien toutes les étapes de votre raisonnement.
-

Problème 3

Un barrage ayant la forme illustrée à la Figure 1 (voir page suivante) sert —comme la plupart des barrages— à contenir un réservoir d’eau. Aux fins du calcul on supposera que le niveau d’eau dans le réservoir est donné par h , et que le réservoir a un fond plat et s’étend sur un kilomètre en amont du barrage. Les parois du barrage sont inclinées d’un angle α par rapport à la verticale (voir la Figure). Calculez la force exercée sur le barrage par l’eau, en fonction du niveau d’eau h du réservoir.

Problème 4

Un filet d’eau s’écoulant d’un robinet a une forme du genre de celle représentée sur la Figure 2. On mesure les diamètres (d_1, d_2) du filet d’eau à deux hauteurs différentes (z_1, z_2).

- (a) À partir de ces mesures, calculez le débit du robinet (litre s^{-1}) en fonction de z_1, z_2 et d_1, d_2 .
- (b) Armé d’un chronomètre, il est possible de déterminer l’accélération gravitationnelle à l’aide de ce système; comment?

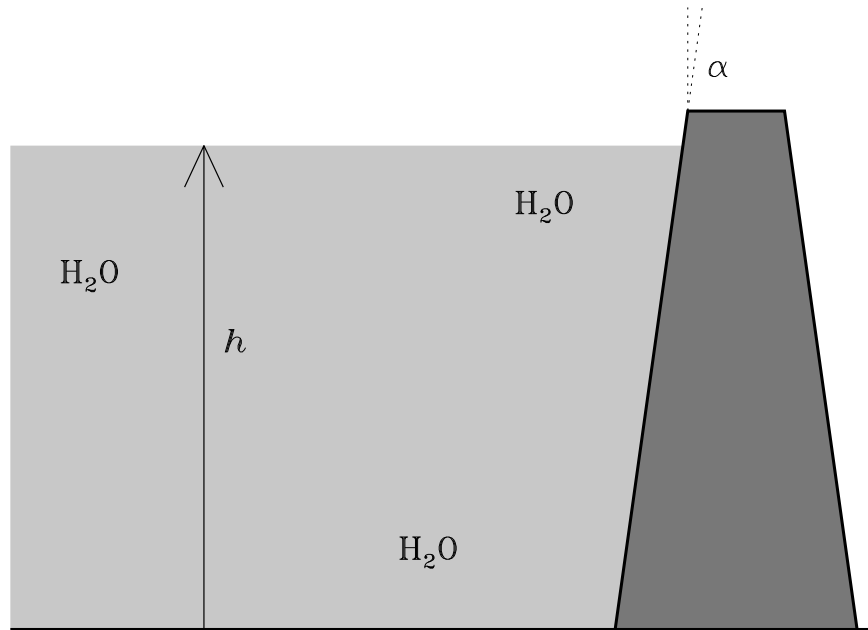


Figure 1: Un barrage idéalisé (Problème 3).

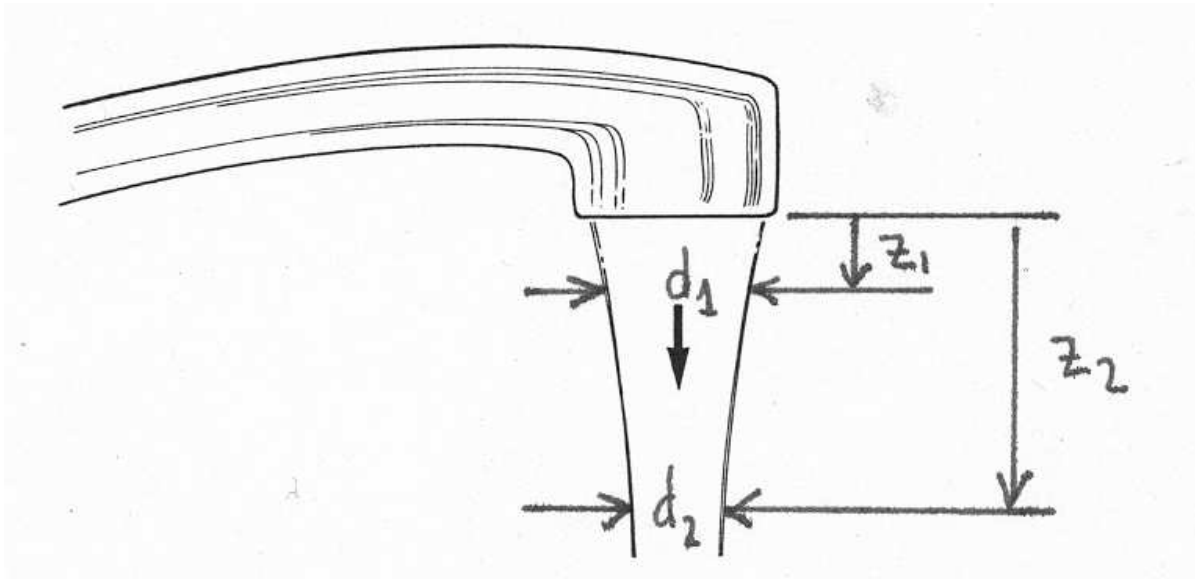


Figure 2: Filet d'eau s'écoulant d'un robinet (Problème 4).

Problème 5

Obtenez une expression analytique décrivant la fonction potentielle associée à l'écoulement 2D d'un fluide parfait et incompressible autour d'un point de stagnation (Voir Figure 3). Vous pouvez supposer comme condition limite que la vitesse verticale sur l'axe $x = 0$ est fixée à $-u_0 \hat{e}_y$ à $y = y_0$ ($\gg 1$). Calculez également la dépendance spatiale de la pression dans le plan de l'écoulement, en supposant que la pression tend vers une valeur constante p_0 à grand y .

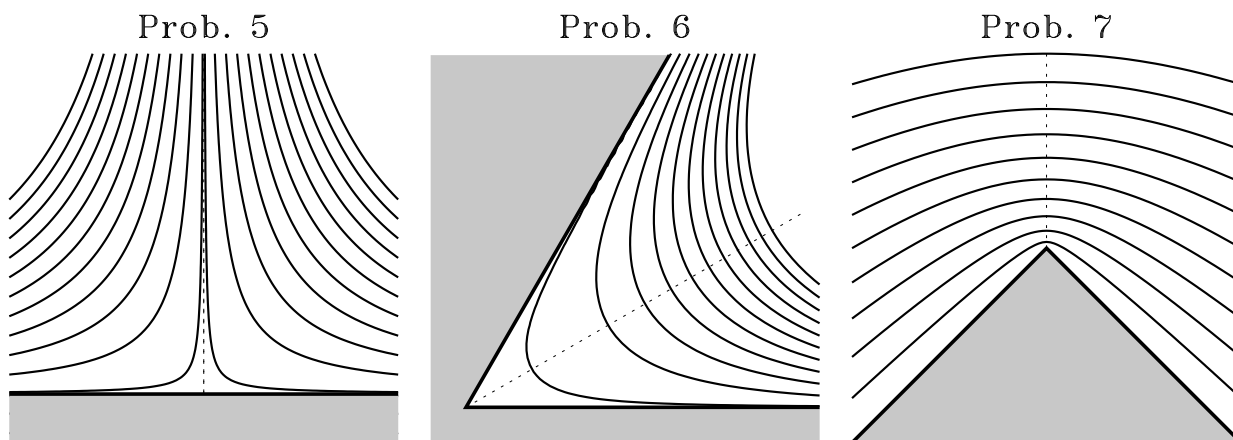


Figure 3: Lignes d'écoulement correspondant à trois écoulement potentiels dont vous devez déterminer les formes analytiques du potentiel (Problèmes 5, 6 et 7).

Problème 6

Obtenez une expression analytique décrivant la fonction potentielle associée à l'écoulement 2D d'un fluide parfait et incompressible à l'intérieur d'un coin aigu d'ouverture angulaire α (voir Figure 3). Calculez la grandeur de la vitesse à l'intérieur du coin aigu (intersection du trait pointillé et du solide en gris).

Problème 7

Obtenez une expression analytique décrivant la fonction potentielle associée à l'écoulement 2D d'un fluide parfait et incompressible à l'extérieur d'un coin aigu d'ouverture angulaire α (voir Figure 3). Calculez la grandeur de la vitesse à la pointe du coin aigu (intersection du trait pointillé et du solide en gris).

Problème 8

Un entonnoir conique d'ouverture angulaire α et de section A à sa partie la plus large est posé à l'envers sur une surface plane. On verse par l'ouverture de l'entonnoir un fluide de densité ρ jusqu'à ce que la partie conique de l'entonnoir soit remplie. Quel doit être la masse minimale M de l'entonnoir permettant de contenir le fluide (exprimée en fonction de ρ , α , etc.) ?

Problème 9

On considère un tube mince plié et ouvert à ses deux extrémités, rempli d'un fluide inviscide et incompressible de densité ρ , avec la gravité pointant vers le bas (Figure 4).

- Démontrez que pour avoir une situation d'équilibre, le fluide doit arriver à la même hauteur à chaque bout du tube (ligne horizontale en tirets sur la Figure 4), et ce indépendamment des valeurs des angles α et β .
- On force mécaniquement (e.g., en soufflant) un déplacement du fluide sur une distance x le long du tube (voir Figure 4), et on relâche le système. Démontrez que la colonne de fluide exécutera une oscillation harmonique, et calculez-en la fréquence.

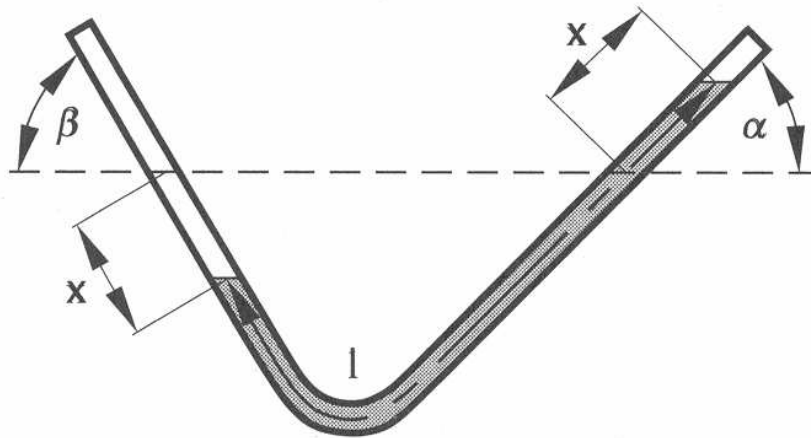


Figure 4: Colonne de fluide incompressible contenue dans un tube plié (problème 9).

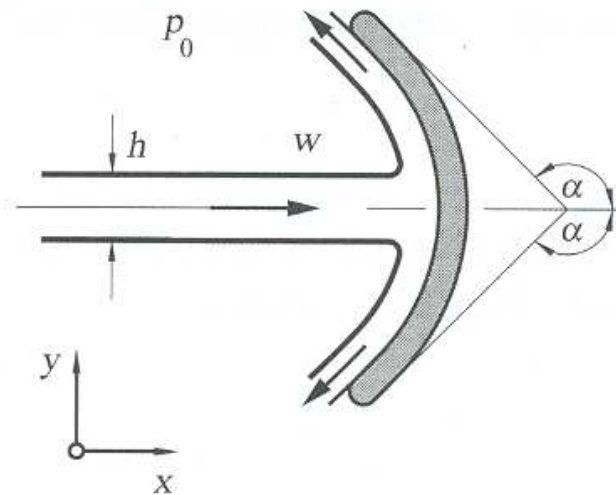


Figure 5: Impact d'un jet d'eau sur une plaque de forme conique (problème 10).

Problème 10

Un jet d'eau ($\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$) sort d'un orifice rectangulaire et frappe en son centre une plaque courbée d'un angle $\alpha = 135^\circ$ dans le plan $[x, y]$ (voir Figure 5). La plaque n'est pas déformée dans la direction- z . La vitesse de sortie du jet est de 20 m s^{-1} , et le jet a une dimension de $h = 25 \text{ mm}$ verticalement, et $b = 20 \text{ mm}$ perpendiculairement au diagramme. Calculez la force (en Newton) exercée par le jet sur la plaque en considérant que l'eau se comporte ici comme un fluide parfait.

Problème 11

Obtenez une solution décrivant un écoulement potentiel d'un fluide autour d'une sphère de rayon R , où l'écoulement est plan ($\mathbf{u} = u_0 \hat{\mathbf{e}}_x$) à grandes distances de la sphère (comme dans le cas

du cylindre considéré dans les notes de cours). Choisissez judicieusement l'orientation de votre système de coordonnées.

Problème 12

Le but est ici de vous faire obtenir l'équation d'Euler (2.42) pour un fluide parfait en utilisant l'approche "équation de bilan" utilisée dans les notes de cours et en classe pour obtenir l'équation de continuité (2.31) et l'équation de conservation de l'énergie. La quantité équivalente au courant de masse de la section 2.5 est maintenant le courant de quantité de mouvement:

$$\boldsymbol{\pi} = \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} .$$

Attention, ici $\boldsymbol{\pi}$ est un tenseur, car au membre de droite il ne s'agit pas ici d'un produit scalaire, mais bien du produit extérieur (indiqué par le symbole " $\otimes$ ") du vecteur d'écoulement avec lui-même. Ceci devient (peut-être) plus clair si on écrit l'expression ci-dessus en notation indicelle:

$$\pi_{ij} = \rho u_i u_j , \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Suivez la procédure de la section (2.5), en structurant votre bilan de la manière suivante; dans un volume Eulérien V délimité par une surface S ,

$$\frac{d}{dt}(\rho \mathbf{u} \text{ dans } V) = (\text{flux de } \rho \mathbf{u} \text{ à travers } S) + (\text{forces surfaciques}) + (\text{forces volumiques})$$

Réfléchissez bien à ce qui doit être inclus dans les forces surfaciques et volumiques.

Problème 13

Un récipient hémisphérique (rayon R) rempli d'un fluide incompressible est équipé d'un petit trou de surface A à sa base. Démontrez que le temps requis pour que le niveau de fluide passe de h_1 à h_2 est donné par

$$t = \frac{2\pi}{A\sqrt{2g}} \left[\frac{2}{3}R(h_1^{3/2} - h_2^{3/2}) - \frac{1}{5}(h_1^{5/2} - h_2^{5/2}) \right]$$

Problème 14

Considérons l'écoulement 2D d'un fluide parfait et incompressible, défini par les composantes suivantes:

$$\mathbf{u} = A(x\hat{\mathbf{e}}_x - y\hat{\mathbf{e}}_y)$$

où A est une constante, et la gravité peut encore une fois être négligée. Ceci décrit l'écoulement autour d'un point de stagnation situé à $(x, y) = (0, 0)$, limité par la présence d'une plaque plane placée à $y = 0$; ça devrait vous rappeler quelque chose...

- (a) Démontrez que les isobares (surface où la pression est constante) ont la forme de cercles dans le plan xy , dont le centre coïncide avec le point de stagnation susmentionné.

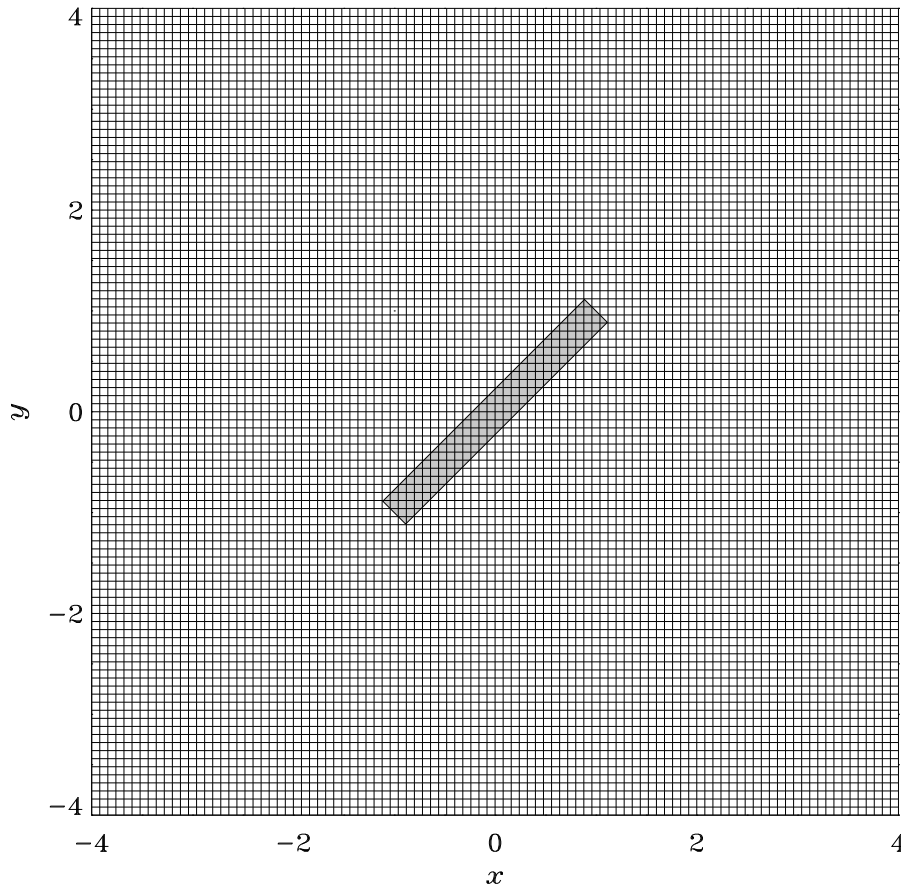


Figure 6: Maillage et géométrie pour le calcul numérique d'un écoulement potentiel autour d'une plaque inclinée (Problème 15). Discrétisation spatiale $N_x = N_y = 101 \times 101$ ici. L'écoulement est supposé horizontal à très grandes distances de la plaque.

- (b) Soit un élément de fluide initialement positionné sur l'axe de symétrie, à $(x, y) = (0, 1)$; cet élément de fluide se déplacera donc verticalement vers le bas, le long de l'axe- y , vers le point de stagnation. Calculez le temps requis pour atteindre le point de stagnation.
- (c) Soit maintenant *deux* éléments de fluide initialement situés à $(x, y) = (\pm\varepsilon, 1)$, avec $\varepsilon \ll 1$. Démontrez que la distance entre ces deux éléments de fluide augmente exponentiellement au cours de leur passage près du point de stagnation.

Problème 15

Il s'agit ici de vous faire calculer numériquement la forme d'un écoulement potentiel 2D autour d'une plaque inclinée à 45 degrés par rapport à un écoulement plan à grande distance (voir Figure 6), un peu comme le cas du cylindre traité en classe. Afin de simplifier le traitement de la condition à appliquer au niveau de la plaque, il sera préférable de solutionner le problème en fonction d'une fonction d'écoulement (plutôt qu'un potentiel):

$$\nabla^2 \Psi(x, y) = 0 ,$$

sujet aux conditions limites aux bords gauche (x_1), droit (x_2) inférieur (y_1), et supérieur (y_2) du domaine:

$$\Psi(x_1, y) = \Psi(x_2, y) = y, \quad \Psi(x, y_1) = y_1, \quad \Psi(x, y_2) = y_2.$$

Comme la périphérie de la plaque doit être une ligne d'écoulement, et en vertu de la symétrie et conditions limites du problème, aux bords de la plaque on doit poser:

$$\Psi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \text{plaque}.$$

L'idée est d'utiliser l'algorithme de relaxation décrit à l'annexe E.4 afin de solution numériquement l'équation de Laplace ci-dessus, en vertu de ses conditions limites. Seuls les noeuds intérieurs (i.e., excluant les frontières du domaine) sont sujets à ce processus de relaxation. Comme condition initiale au processus de relaxation, utilisez un écoulement purement horizontal, soit:

$$\Psi(x, y) = y.$$

Le “truc” numérique consiste à réinitialiser, à la fin de chaque itération du processus de relaxation, la valeur de Ψ à tous les points de mailles situés dans la plaque ou sur sa périphérie à une valeur $\Psi = 0$, ce qui assurera le maintien de la condition limite aux interfaces plaque-fluide. Autre truc pour visualiser vos résultats: pour un écoulement 2D de ce genre, les lignes d'écoulement correspondent aux contours $\Psi = \text{constante}$. Travaillez avec un maillage $N_x = N_y = 101$ couvrant un domaine $x \in [-4, 4]$, $y \in [-4, 4]$ et assurez vous bien d'itérer assez longtemps pour que $\Psi(x, y)$ ait bien convergé. Pour avoir une idée générale de ce que la solution doit avoir l'air, voir la Figure 3 dans *An Album of Fluid Motion*.

Connaissant $\Psi(x, y)$ —et donc $u_x(x, y)$ et $u_y(x, y)$, par différences finies centrées (voir annexe E.1), calculez maintenant le profil de pression $p(x, y)$. L'écoulement exerce-t-il une force nette sur la plaque? Un couple de torsion?

Problème 16

Il s'agit ici de calculer un modèle de la couronne solaire, que nous considérerons comme un fluide fait d'Hydrogène complètement ionisé, se comportant comme un gaz parfait. Nous supposons de plus que la couronne possède une symétrie sphérique, qu'elle est en état d'équilibre hydrostatique, que la masse du gaz coronal ne contribue pas à la gravité (i.e, on écrit $\mathbf{g} = -GM_\odot/r^2 \hat{\mathbf{e}}_r$, où $M_\odot$ est la masse du soleil), et qu'une relation polytropique existe entre la pression et la densité, soit $p \propto \rho^\alpha$, avec $1 \leq \alpha \leq 5/3$.

- A partir de l'équation d'Euler incluant la gravité, obtenez une équation différentielle en r décrivant la variation radiale de la densité
- Intégrez l'ODE obtenue en (a) et obtenez des expressions analytiques décrivant les profils $p(r)/p_0$, $T(r)/T_0$ et $\rho(r)/\rho_0$, où les quantités affublées d'un indice “0” représentent des valeurs (connues) à la base de la couronne.
- Tracez un graphique de $p(r)/p_0$ en fonction de r , pour des valeurs de $\alpha = 1.05, 1.1, 1.15, 1.2$, et 1.5. Que concluez-vous de ces résultats?
- Sachant que la base de la couronne solaire est à une température de $T_0 = 1.5 \times 10^6$ K et densité $\rho_0 = 10^{-12}$ kg m⁻³, et que la masse et le rayon du soleil sont de $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$ kg et 6.96×10^8 m, calculez la pression asymptotique ($r \rightarrow \infty$) en fonction de α . Sachant que

la pression du milieu interstellaire est de $p_\infty \sim 10^{-13}$ Pa, et que le profil de température de la couronne semble le mieux reproduit avec $\alpha = 1.1$, qu'en concluez-vous quant à l'équilibre hydrostatique de la couronne solaire?

Problème 17

Considérons un tube de Pitot, utilisé pour mesurer les vitesses d'écoulement d'un fluide *compressible*. En supposant un écoulement subsonique et adiabatique, obtenez une relation entre la vitesse de l'écoulement et la pression mesurée dans le tube. Il serait judicieux de suivre la logique générale utilisée au cours dans le cadre de l'étude du tube de Pitot pour un fluide incompressible...

Problème 18

Démontrez que la vitesse maximale d'éjection des gaz dans une tuyère de Laval est $\sqrt{3}c_s$, et ce indépendamment de la forme de la tuyère.

Problème 19

Ce problème vise à vous faire jongler un peu avec les équations fluides compressibles linéarisées, et à vous faire approfondir le comportement des ondes sonores.

- Effectuez la linéarisation de l'équation (4.21) et montrez que cela conduit bien aux éqs. (4.22)–(4.23).
- Manipuler les équations linéarisées à l'ordre 1 (4.17), (4.18) et (4.23) de manière à obtenir une équation d'onde pour la perturbation en pression p_1 , plutôt qu'en vitesse (u_1).
- Répéter l'analyse à l'ordre 1, mais cette fois pour un état de référence (ordre 0) correspondant à un écoulement à vitesse constante dans la direction x . En quoi votre solution en onde plane diffère-t-elle de celle obtenue à la §4.1?

Problème 20

Ce problème vise à vous faire explorer la structure verticale de l'atmosphère terrestre

- Complétez les étapes mathématiques manquantes pour passer de l'équation (4.70) à (4.74) dans les Notes de cours.
- Calculez p/p_0 pour les modèles d'atmosphère isotherme et adiabatique à l'altitude du Puy de Dôme (1465 m). La différence vous semble-t-elle détectable à l'aide d'un baromètre?
- Il s'agit maintenant de comparer le profil de l'atmosphère adiabatique à celui observé. Partez en exploration sur la toile et trouvez vous les données numériques de l'atmosphère dite standard. Ensuite, ajustez la valeur de l'indice adiabatique γ dans l'éq. (4.74) de manière à produire le meilleur ajustement aux données dans la troposphère (altitude ≤ 10 km). Comment pensez vous pouvoir expliquer les différences résiduelles entre votre meilleur modèle et les données ?
- Sous un nuage cumulus, un vent vertical de quelques dizaines de mètres par seconde peut être produit. Estimez le niveau de perturbation de l'équilibre hydrostatique produit par un tel déplacement d'air. Vous pouvez considérer que la base du cumulus est à une altitude de 1000 m.