

PHY 3140
HYDRODYNAMIQUE
PROBLÈMES: SÉRIE 1

Distribué le: 23 janvier 2023

Chapitres couverts: 2, 3, 4

Problème 1

Calculez la force requise pour “décoller” les deux hémisphères des coquilles de von Guericke (voir Fig. 2.1 des Notes de cours), sachant que leur rayon était d’environ 35 centimètres. Aux fins de cet exercice, vous pouvez supposer que la pompe de von Guericke pouvait réduire la pression intérieure à 1 kPa. Détaillez bien toutes les étapes de votre raisonnement et de vos calculs.

Problème 2

Un contenant cylindrique contient un fluide incompressible de densité ρ . Le contenant et le fluide tournent à vitesse angulaire constante Ω autour d’un axe vertical coïncidant avec l’axe du contenant, et la gravité pointe verticalement vers le bas. En d’autres mots, dans un repère en rotation à vitesse angulaire Ω le fluide est au repos.

- (a) Suivant le genre de procédure utilisée à la section 2.3 des notes de cours, établissez une forme de l’équation de l’équilibre hydrostatique généralisée pour inclure les effets de la rotation.
 - (b) Utilisez la relation trouvée en (a) pour calculer la forme géométrique de la surface liquide-air. Explicitez bien toutes les étapes de votre raisonnement.
-

Problème 3

Le tuyau de sortie du cœur humain est l’aorte, d’un diamètre interne de 2.5cm. Le sang s’y écoule à une vitesse moyenne de 0.2 m s^{-1} . L’échange d’oxygène avec les tissus s’effectue à l’autre “extrémité” du système circulatoire, soit dans les capillaires. Ceux-ci ont un diamètre d’environ $6 \mu\text{m}$, et le sang s’y écoule à environ 1 mm s^{-1} .

- (a) Calculez le nombre de capillaires dans le corps humain
 - (b) Calculez le rapport des surface par unité de longueur entre l’aorte et l’ensemble des capillaires.
-

Problème 4

Un barrage ayant la forme illustrée à la Figure 1 (voir page suivante) sert —comme la plupart des barrages— à contenir un réservoir d’eau. Aux fins du calcul on supposera que le niveau d’eau dans le réservoir est donné par h , et que le réservoir a un fond plat et s’étend sur un kilomètre en amont du barrage. Les parois du barrage sont inclinées d’un angle α par rapport à la verticale

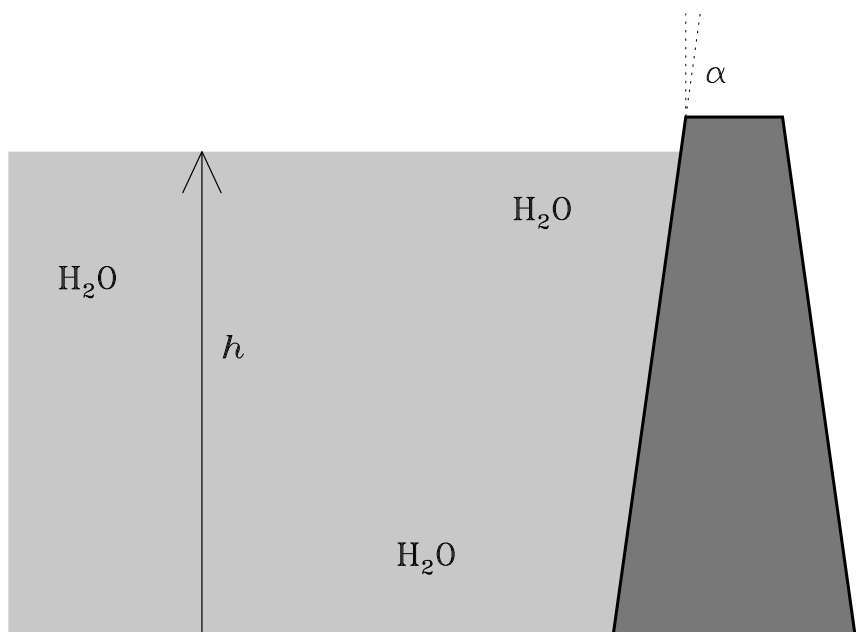


Figure 1: Un barrage idéalisé (Problème 4).

(voir la Figure). Calculez la force exercée sur le barrage par l'eau, en fonction du niveau d'eau h du réservoir.

Problème 5

Le but de ce problème est de **démontrer**, dans le contexte d'une situation de la vie de tous les jours, le principe d'Archimède; et donc ce principe ne peut **pas** être invoqué *a priori* pour sa solution!

Un pêcheur bien enveloppé, d'un poids de 100 kg, embarque dans une chaloupe attachée à un quai. La chaloupe a un fond plat de surface totale 3 m^2 , et le lac a une superficie de 1 km^2 .

- Calculez l'élévation du niveau du lac qui en résultera.
- De votre résultat en (b), déduisez le principe dit d'Archimède, soit qu'un corps de densité ρ et volume V plongé dans un fluide de densité ρ_F ($< \rho$) ressent une force donnée par

$$\mathbf{F}_A = (\rho - \rho_F)V\mathbf{g} ,$$

où $\mathbf{g}$ est l'accélération gravitationnelle. La densité de l'eau: $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$; et la pression atmosphérique: $p_A = 101.6 \text{ kPa}$. Détaillez bien toutes les étapes de votre raisonnement. Petit indice: l'équilibre hydrostatique vous sera très utile!

Problème 6

Le tube de Venturi est un gadget permettant de mesurer la vitesse d'un écoulement dans un tuyau. Le tube Venturiesque en question est caractérisé par une constriction, où la section du

Tube de Venturi

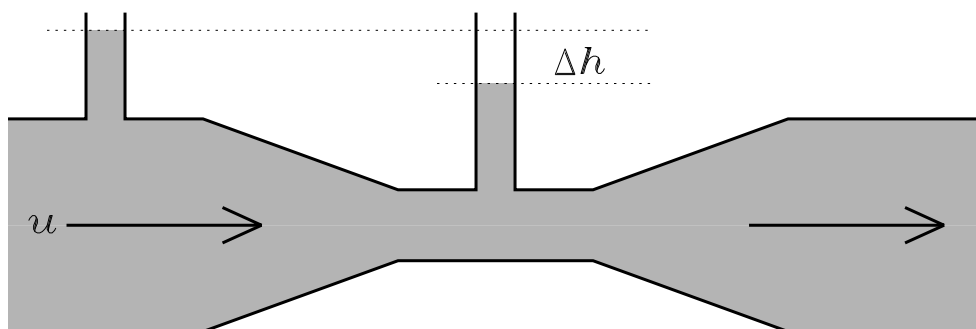


Figure 2: Le tube de Venturi (Problème 6).

tuyau passe de A_1 (disons) à A_2 ($< A_1$), et comporte deux petits tubes verticaux, ouvert vers le haut, dont un origine de la partie à plus faible section du tube (voir Figure 2). Considérons le cas d'un fluide incompressible et inviscide traversant le tube; à partir des dimensions du tube (sections A_1 , A_2 , diamètre des tubes verticaux, etc.), une mesure de la différence Δh dans la hauteur du fluide dans les deux tubes verticaux permet de calculer la vitesse u du fluide, en terme de quantités connues. Faites-le...

Problème 7

Obtenez une expression analytique décrivant la fonction potentielle associée à l'écoulement 2D d'un fluide parfait et incompressible autour d'un point de stagnation (Voir Figure 3A). Vous pouvez supposer comme condition limite que la vitesse verticale sur l'axe $x = 0$ est fixée à $-u_0 \hat{e}_y$ à $y = y_0$ ($\gg 1$). Calculez également la dépendance spatiale de la pression dans le plan de l'écoulement, en supposant que la pression tend vers une valeur constante p_0 à grand y .

Problème 8

Obtenez une expression analytique décrivant la fonction potentielle associée à l'écoulement 2D d'un fluide parfait et incompressible à l'intérieur d'un coin aigu d'ouverture angulaire α (voir Figure 3B). Calculez la grandeur de la vitesse à l'intérieur du coin aigu (intersection du trait pointillé et du solide en gris).

Problème 9

Un entonnoir conique d'ouverture angulaire α et de section A à sa partie la plus large est posé à l'envers sur une surface plane. On verse par l'ouverture de l'entonnoir un fluide de densité ρ jusqu'à ce que la partie conique de l'entonnoir sont remplies. Quel doit être la masse minimale M de l'entonnoir permettant de contenir le fluide (exprimée en fonction de ρ , α , etc.) ?

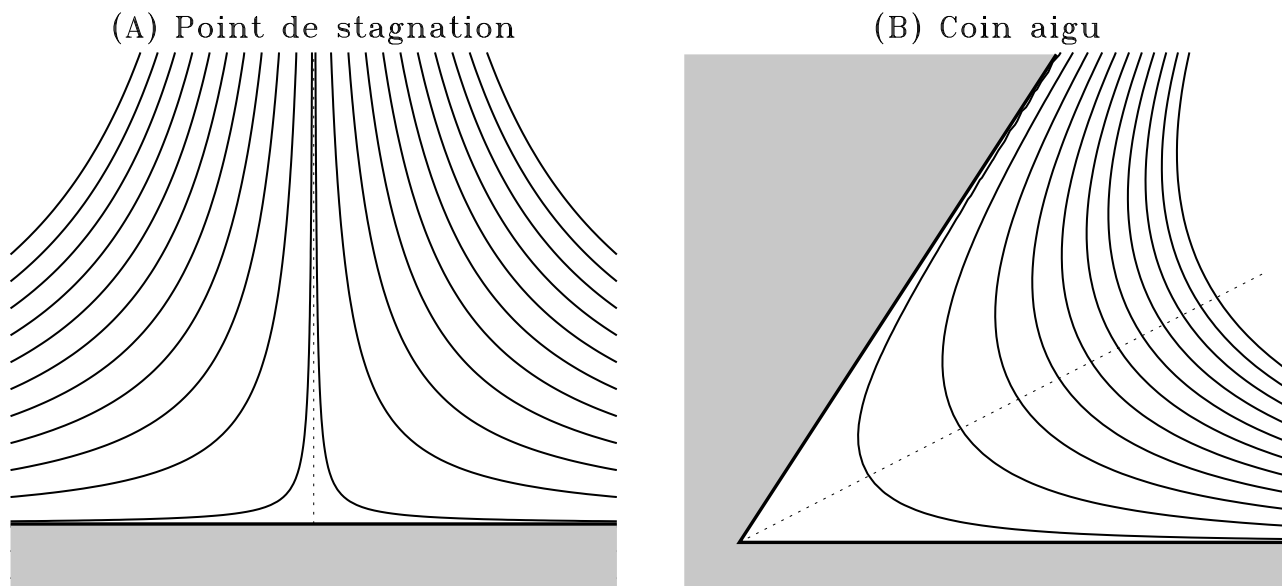


Figure 3: Lignes d'écoulement correspondant à deux écoulements potentiels dont vous devez déterminer les formes analytiques du potentiel (Problèmes 7 et 8).

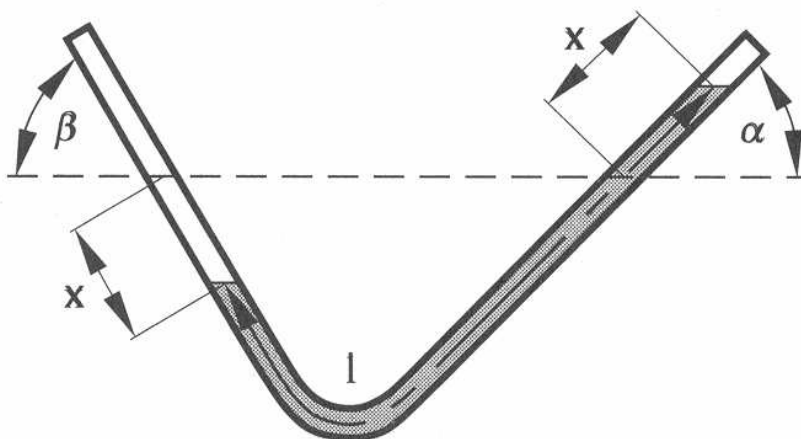


Figure 4: Colonne de fluide incompressible contenue dans un tube plié (problème 4).

Problème 10

On considère un tube mince plié et ouvert à ses deux extrémités, rempli d'un fluide inviscide et incompressible de densité ρ , avec la gravité pointant vers le bas (Figure 4).

- Démontrez que pour avoir une situation d'équilibre, le fluide doit arriver à la même hauteur à chaque bout du tube (ligne horizontale en tirets sur la Figure 4), et ce indépendamment des valeurs des angles α et β .
- On force mécaniquement (e.g., en soufflant) un déplacement du fluide sur une distance x le long du tube (voir Figure 4), et on relâche le système. Démontrez que la colonne de fluide

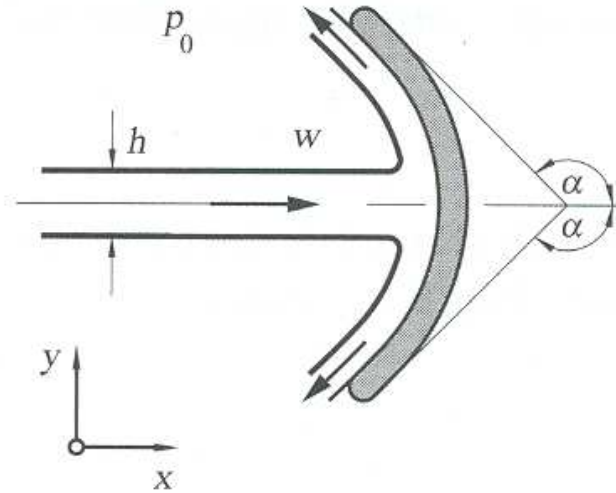


Figure 5: Impact d'un jet d'eau sur une plaque de forme conique (problème 11).

exécutera une oscillation harmonique, et calculez-en la fréquence.

Problème 11

Un jet d'eau ($\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$) sort d'un orifice rectangulaire et frappe en son centre une plaque courbée d'un angle $\alpha = 135^\circ$ dans le plan $[x, y]$ (voir Figure 5). La plaque n'est pas déformée dans la direction- z . La vitesse de sortie du jet est de 20 m s^{-1} , et le jet a une dimension de $h = 25 \text{ mm}$ verticalement. Calculez la force (en Newton) exercée par le jet sur la plaque en considérant que l'eau se comporte ici comme un fluide parfait (aucun processus dissipatifs).

Problème 12

Obtenez une solution décrivant un écoulement potentiel d'un fluide autour d'une sphère de rayon R , où l'écoulement est plan ($\mathbf{u} = u_0 \hat{\mathbf{e}}_x$) à grandes distances de la sphère (comme dans le cas du cylindre considéré dans les notes de cours). Choisissez judicieusement l'orientation de votre système de coordonnées.

Problème 13

Le but est ici de vous faire obtenir l'équation d'Euler (2.41) pour un fluide parfait en utilisant l'approche "équation de bilan" utilisée dans les notes de cours et en classe pour obtenir l'équation de continuité (2.31) et l'équation de conservation de l'énergie. La quantité équivalente au courant de masse de la section 2.5 est maintenant le courant de quantité de mouvement:

$$\boldsymbol{\pi} = \rho \mathbf{u} \mathbf{u} .$$

Attention, ici $\boldsymbol{\pi}$ est un tenseur, car au membre de droite il ne s'agit pas ici d'un produit scalaire, mais bien du produit extérieur du vecteur d'écoulement avec lui même. Ceci devient plus clair si on écrit l'expression ci-dessus en notation indicielle:

$$\pi_{ij} = \rho u_i u_j , \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Suivez la procédure de la section (2.5), en structurant votre bilan de la manière suivante; dans un volume Eulérien V délimité par une surface S ,

$$\frac{d}{dt}(\rho \mathbf{u} \text{ dans } V) = (\text{flux de } \rho \mathbf{u} \text{ à travers } S) + (\text{forces surfaciques}) + (\text{forces volumiques})$$

Réfléchissez bien à ce qui doit être inclus dans les forces surfaciques et volumiques.

Problème 14

Un récipient hémisphérique (rayon R) rempli d'un fluide incompressible est équipé d'un petit trou de surface A à sa base. Démontrez que le temps requis pour que le niveau de fluide passe de h_1 à h_2 est donné par

$$t = \frac{2\pi}{A\sqrt{2g}} \left[\frac{2}{3}R(h_1^{3/2} - h_2^{3/2}) - \frac{1}{5}(h_1^{5/2} - h_2^{5/2}) \right]$$

Problème 15

Considérons l'écoulement 2D d'un fluide parfait et incompressible, défini par les composantes suivantes:

$$\mathbf{u} = A(x\hat{\mathbf{e}}_x - y\hat{\mathbf{e}}_y)$$

où A est une constante, et la gravité peut encore une fois être négligée. Ceci décrit l'écoulement autour d'un point de stagnation situé à $(x, y) = (0, 0)$, limité par la présence d'une plaque plane placée à $y = 0$; ça devrait vous rappeler quelque chose...

- Démontrez que les isobares (surface où la pression est constante) ont la forme de cercles dans le plan xy , dont le centre coïncide avec le point de stagnation susmentionné.
- Soit un élément de fluide initialement positionné sur l'axe de symétrie, à $(x, y) = (0, 1)$; cet élément de fluide se déplacera donc verticalement vers le bas, le long de l'axe- y , vers le point de stagnation. Calculez le temps requis pour atteindre le point de stagnation.
- Soit maintenant *deux* éléments de fluide initialement situés à $(x, y) = (\pm\varepsilon, 1)$, avec $\varepsilon \ll 1$. Démontrez que la distance entre ces deux éléments de fluide augmente exponentiellement au cours de leur passage près du point de stagnation.

Problème 16

Il s'agit ici de calculer un modèle de la couronne solaire, que nous considérerons comme un fluide fait d'Hydrogène complètement ionisé, se comportant comme un gaz parfait. Nous supposons de plus que la couronne possède une symétrie sphérique, qu'elle est en état d'équilibre hydrostatique, que la masse du gaz coronal ne contribue pas à la gravité (i.e, on écrit $\mathbf{g} = -GM_\odot/r^2 \hat{\mathbf{e}}_r$, où $M_\odot$ est la masse du soleil), et qu'une relation polytropique existe entre la pression et la densité, soit $p \propto \rho^\alpha$, avec $1 \leq \alpha \leq 5/3$.

- A partir de l'équation d'Euler incluant la gravité, obtenez une équation différentielle en r décrivant la variation radiale de la densité

- (b) Intégrez l'ODE obtenue en (a) et obtenez des expressions analytiques décrivant les profils $p(r)/p_0$, $T(r)/T_0$ et $\rho(r)/\rho_0$, où les quantités affublées d'un indice "0" représentent des valeurs (connues) à la base de la couronne.
- (c) Tracez un graphique de $p(r)/p_0$ en fonction de r , pour des valeurs de $\alpha = 1.05, 1.1, 1.15, 1.2$, et 1.5. Que concluez-vous de ces résultats?
- (d) Sachant que la base de la couronne solaire est à une température de $T_0 = 1.5 \times 10^6$ K et densité $\rho_0 = 10^{-19}$ kg cm⁻³, et que la masse et le rayon du soleil sont de $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$ kg et 6.96×10^8 m, calculez la pression asymptotique ($r \rightarrow \infty$) en fonction de α . Sachant que la pression du milieu interstellaire est de $p_\infty \sim 10^{-13}$ Pa, et que le profil de température de la couronne semble le mieux reproduit avec $\alpha = 1.1$, qu'en concluez-vous quant à l'équilibre hydrostatique de la couronne solaire?

Problème 17

Considérons un tube de Pitot, utilisé pour mesurer les vitesses d'écoulement d'un fluide *compressible*. En supposant un écoulement subsonique et adiabatique, obtenez une relation entre la vitesse de l'écoulement et la pression mesurée dans le tube. Il serait judicieux de suivre la logique générale utilisée au cours dans le cadre de l'étude du tube de Pitot pour un fluide incompressible...

Problème 18

Démontrez que la vitesse maximale d'éjection des gaz dans une tuyère de Laval est $\sqrt{3}c_s$, et ce indépendamment de la forme de la tuyère.

Problème 19

Ce problème vise à vous faire jongler un peu avec les équations fluides linéarisées, et à vous faire approfondir le comportement des ondes sonores.

- (a) Effectuez la linéarisation de l'équation (4.21) et montrer que cela conduit bien aux éqs. (4.22)–(4.23).
- (b) Manipulez les équations linéarisées à l'ordre 1 (4.17), (4.18) et (4.23) de manière à obtenir une équation d'onde pour la perturbation en pression p_1 , plutôt qu'en vitesse (u_1).
- (c) Plutôt que de construire une équation d'onde par manipulation algébrique, substituez directement l'onde plane (4.29) dans les équations linéarisées à l'ordre 1 (4.24)–(4.25). Ceci résultera en un système de deux équations algébriques pour k et ω ; montrez que la solution de ce système correspond bien à (4.29).
- (d) Vérifiez que pour un état de référence au repos ($u_0 = 0$) et à pression (p_0) et densité (ρ_0) constantes, mais maintenant isotherme, la linéarisation conduit bien encore à une équation d'onde, mais avec la vitesse de l'onde donnée par l'éq. (3.41).

Problème 20

Ce problème vise à vous faire explorer la structure verticale de l'atmosphère terrestre.

- (a) Complétez les étapes mathématiques manquantes pour passer de l'équation (4.70) à (4.74) dans les Notes de cours.

- (b) Calculez p/p_0 pour les modèles d'atmosphère isotherme et adiabatique à l'altitude du Puy du Dôme (1465 m).
 - (c) Il s'agit maintenant de comparer le profil de l'atmosphère adiabatique à celui observé. Partez en exploration sur la toile et trouvez vous les données numériques de l'atmosphère dite standard. Ensuite, ajustez la valeur de l'indice adiabatique γ (dans l'intervalle $1 \leq \gamma \leq 5/3$) de manière à produire le meilleur ajustement aux données dans la troposphère (altitude ≤ 10 km). Comment pensez vous pouvoir expliquer les différences résiduelles entre meilleur modèle et les données ?
 - (d) Sous un nuage cumulus, un vent vertical de quelques dizaines de mètres par seconde peut être produit. Estimez le niveau de perturbation de l'équilibre hydrostatique produit par un tel déplacement d'air. Vous pouvez considérer que la base du cumulus est à une altitude de 1000 m.
-