

PHY 3140
HYDRODYNAMIQUE
PROBLÈMES: SÉRIE 3

Distribué le: 10 novembre 2025

Chapitres couverts: 7 à 15

Problème 34

Considérons ce qui arrive à un courant marin, caractérisé par un état d'équilibre géostrophique, en contact avec le fond de l'océan, que nous supposons plat. Développez la théorie d'Ekman pour cette situation, et obtenez une solution décrivant l'écoulement dans la couche limite se formant près du fond. Réfléchissez bien aux conditions limites du problèmes, et à la manière dont elles diffèrent de celles considérées en classe (ce problème est beaucoup plus facile qu'il peut en avoir l'air à prime abord...).

Problème 35

Démontrez que pour un fluide inviscide mais compressible, l'équation de la vorticité prend la forme:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} + \frac{(\nabla \rho) \times (\nabla p)}{\rho^3} .$$

Problème 36

Calculez la forme de l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible produit par un anneau de vorticité de rayon R , le long d'un axe perpendiculaire à l'anneau et passant par son centre.

Problème 37

Nous avons vu en classe que l'écoulement stationnaire associé à une ligne (droite) de vorticité pouvait s'exprimer comme

$$\mathbf{u} = \frac{\Gamma}{2\pi s} \hat{\mathbf{e}}_\phi ,$$

où la circulation Γ est une mesure de l'intensité de la ligne de vorticité. Le but de ce problème est de vous faire calculer une solution pour l'écoulement non-stationnaire produit quand on "retire" (   $t = 0$) la ligne de vorticité du fluide ambiant (visqueux et incompressible). En d'autres mots, les conditions initiale et limites du problème sont, en coordonnées cylindriques $[s, \phi, z]$:

$$u_\phi(s, t = 0) = \frac{\Gamma}{2\pi s} ,$$

$$u_\phi(s = 0, t) = 0 ,$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} u_\phi(s, t) = \frac{\Gamma}{2\pi s} .$$

- (a) Obtenez la (les) équation(s) gouvernant l'évolution subséquente du fluide, après retrait de la ligne de vortacité à $t = 0$.
- (b) Utilisez la circulation Γ pour définir une version non-dimensionnelle (u^* disons) de la vitesse u_ϕ ; cherchez maintenant une nouvelle variable indépendante η (qui peut être fonction des variables spatiales et temporelles) telle que votre équation maitresse en (a) accepte une solution autosimilaire de la forme

$$u^* = F(\eta)$$

- (c) Déduisez-en l'équation différentielle que doit satisfaire $F(\eta)$, ainsi que les conditions limites correspondantes
- (d) Solutionnez l'équation en (c), réexprimez le résultat en termes des variables dimensionnelles de départ, et portez en graphique le profil de $u_\phi(s)$ pour différents $t > 0$
- (e) Interprétez l'évolution spatiotemporelle des profils $u_\phi(s, t)$ en terme de diffusion visqueuse.

Problème 38

Il s'agit ici de vous faire calculer l'évolution d'une configuration de quatre lignes de vortacité parallèles/antiparallèles les unes par rapport aux autres. Ceci revient à solutionner (numériquement) un système d'EDOs de la forme

$$\frac{d\mathbf{x}_k}{dt} = \sum_{j \neq k}^4 \mathbf{u}_j, \quad k = 1, \dots, 4$$

où $\mathbf{x}_k \equiv (x_k, y_k)$ est la position de la k -ième ligne de vortacité, et le membre de droite est la somme des contributions de la vitesse à (x_k, y_k) provenant des trois autres lignes de vortacité, telle que donnée par l'équation (8.6) des notes, avec la même grandeur Γ pour la circulation associée à chaque ligne. Vous avez donc un système de 8 EDOs à résoudre, mais c'est quelque chose que `odeint` dans Python (bibliothèque `scipy`) fait très bien.

- (a) En guise de validation de vos procédures numériques, commencez par calculer l'interaction de deux lignes de vortacité, parallèles ou antiparallèles, et vérifiez que le comportement en résultant est bien semblable à celui illustré à la Fig. 8.6 des notes de cours.
- (b) Maintenant passez à quatre lignes de vortacité, initialement positionnées aux 4 coins d'un carré. Calculez leur évolution spatiotemporelle pour les trois configurations suivantes:
 - (i) Les quatre lignes ont le même signe de Γ ,
 - (ii) Les quatre lignes ont des signe qui varient comme $(+, -, +, -)$ en faisant le tour du carré,
 - (iii) Les quatre lignes ont des signe qui varient comme $(+, +, -, -)$ en faisant le tour du carré.
- (c) Défi/exploration: pouvez vous trouver une formation initiale des 4 lignes telle que l'ensemble va s'autopropulser dans une direction stable ?

Problème 39

Reprenez le développement mathématique de la §9.2, cette fois avec une condition limite correspondant à un océan de profondeur finie, soit

$$u_z \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = -h.$$

(a) Vérifiez ainsi que la relation de dispersion prend maintenant la forme

$$\omega^2 = gk \tanh(kh).$$

(b) Démontrez que dans le régime de l'eau peu profonde ($kh \ll 1$), les trajectoires des éléments de fluide décrites lors du passage de la vague ont la forme d'ellipses très allongées dans la direction- x .

Problème 40

Considérons le régime de l'eau très profonde, et une vague de faible amplitude (dans le sens $\lambda \gg A$). Démontrez que la somme des énergies potentielle gravitationnelle et cinétique par unité de surface (horizontale) du fluide est égale à

$$W = \frac{1}{2} \rho g A^2.$$

Problème 41

On a vu comment à une interface entre deux fluides de densités différentes, il est possible de développer des ondes de surface (étudiées en grand détails au chapitre 9 dans le cadre d'une interface eau-air), où la gravité agit comme force de rappel. De telles ondes peuvent également se développer dans un fluide stratifié par la gravité, en absence d'une interface. Ce problème vise à vous faire calculer la relation de dispersion pour de telles ondes, dites "ondes internes" ou "ondes de gravité". Je vous fournis ci-dessous plusieurs étapes intermédiaires du calcul, donc respirez bien par le nez et ça devrait bien débouler...

Le point de départ de l'analyse n'est rien de plus compliqué que nos équations pour un fluide inviscide dans l'approximation de Boussinesq, en supposant toutefois que la densité peut varier en fonction de la position mais est conservée durant le déplacement d'un élément de fluide; Les écoulements océaniques sont une situation physique correspondant à cette situation à prime abord bizarre, en raison du gradient vertical de salinité qui existe habituellement dans les couches superficielles des océans. les équations à résoudre sont donc:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

Nous allons travailler en deux dimensions spatiales (x, z) , avec la direction z correspondant à la verticale. On écrira l'écoulement sous la forme $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{e}}_x + w\hat{\mathbf{e}}_z$.

(a) Linéarisez les équations ci-dessus, en supposant que l'état de référence est en équilibre hydrostatique dans la verticale (gravité constante ici), et aucune des quantités caractérisant cet

état de référence ne dépend de la coordonnée horizontale x ou du temps t ; e.g., on écrira $p = p_0(z) + p_1(x, z, t)$, etc. Démontrez que les équations linéarisées prennent la forme:

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} &= -\frac{\partial p_1}{\partial x} , \\ \rho_0 \frac{\partial w_1}{\partial t} &= -\frac{\partial p_1}{\partial z} - \rho_1 g , \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} &= 0 , \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + w_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial z} &= 0 .\end{aligned}$$

(b) Cherchons maintenant des solutions prenant la forme de variations harmoniques en x , i.e.,

$$w_1(x, z, t) = W_1(z)e^{i(kx - \omega t)} , \quad \rho_1(x, z, t) = R_1(z)e^{i(kx - \omega t)} , \quad \text{etc.}$$

Par substitution dans les équations linéarisées ci-dessus, montrez que celles-ci se réduisent à

$$\begin{aligned}\rho_0 \omega U_1 &= k P_1 , & i \rho_0 \omega W_1 &= \frac{dP_1}{dz} + R_1 g , \\ ik U_1 + \frac{dW_1}{dz} &= 0 , & -i \omega R_1 + W_1 \frac{d\rho_0}{dz} &= 0 .\end{aligned}$$

(c) Ces quatre EDOs peuvent être combinées en une seule, de la forme:

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial z^2} = \dots$$

Calculez moi ce mystérieux coté droit de cette équation !

(d) Spécialisons maintenant le problème à une stratification isotherme, où $\rho_0 \propto \exp(-z/H)$, H étant l'échelle de hauteur de la stratification; tous les coefficients de votre EDO obtenue en (c) devraient se retrouver indépendants de z , ce qui implique qu'elle accepte des solutions ondulatoires de la forme

$$W_1 \propto e^{z/2H} \times e^{i(kx + lz - \omega t)} ,$$

où l est le nombre d'onde vertical de la dépendance harmonique. Substituant cette expression dans votre ODE en (c), démontrez que ces ondes vont satisfaire à la relation de dispersion suivante:

$$\omega^2 = \frac{N^2 k^2}{k^2 + l^2} , \quad \text{avec} \quad N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} ,$$

dans la limite où la longueur d'onde de l'oscillation est beaucoup plus petite que la hauteur de colonne H .

e) Finalement, à partir de votre résultat en (d) déterminez pour quelles formes de profils de variation de $\rho_0(z)$ ces ondes sont amorties dans le temps.

Problème 42

Calculez la relation de dispersion pour une vague dans un bassin de profondeur finie, incluant les effets de la tension superficielle. Reconstituez ensuite une courbe de dispersion dans le genre de la Figure 10.7.

Problème 43

Une bulle d'eau savonneuse ($T = 0.025 \text{ N m}^{-1}$) a un rayon de $R = 2 \text{ cm}$, et une épaisseur de 0.2 mm .

- (a) Calculez la pression à l'intérieur de la couche d'eau savonneuse
- (b) Calculez la pression à l'intérieur de la bulle même.

Justifiez bien toutes vos approximations, le cas échéant.

Problème 44

Ce second petit problème, de type "intégration", débute avec la solution de Hagen-Poiseuille, pour l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible et visqueux dans un tuyau rectiligne de section circulaire (de rayon R), et se termine avec l'accident nucléaire de Fukushima, rien de moins! Il s'agit simplement d'y aller par étapes...

- (a) Démontrez que la solution de Poiseuille peut se réécrire sous la forme:

$$u_z(s) = 2\bar{u} \left(1 - \frac{s^2}{R^2} \right),$$

où $\bar{u}$ est la vitesse de l'écoulement moyennée sur la section du tuyau; exprimez $\bar{u}$ en fonction du différentiel de pression $[\nabla p]$ imposé d'un bout à l'autre du tuyau.

- (b) Supposons maintenant que le fluide s'écoulant dans le tuyau est à température $T(s, z)$ et que les parois du tuyau sont bien isolées thermalement parlant; on s'attend alors à ce qu'à un z donné, la température aux parois ne diffère que très peu de la température au centre du tuyau, et que la baisse de température ΔT de l'entrée du tuyau (fluide à température T_0) à sa sortie soit relativement faible, i.e., $\Delta T/T_0 \ll 1$. On peut alors approximer le profil de la température dans le tuyau par:

$$T(s, z) = T_0 - \Delta T \frac{z}{L} + f(s),$$

où L est la longueur du tuyau et $z = 0$ est au point d'entrée du fluide. Par substitution de cette expression dans l'équation du transport de la chaleur, montrez que la fonction $f(s)$ prend la forme:

$$f(s) = \frac{\bar{v} R^2 \Delta T}{2\kappa L} \left(\frac{3}{4} - \frac{s^2}{R^2} + \frac{s^4}{4R^4} \right),$$

où κ est le coefficient de diffusivité thermique.

- (c) À partir du résultat en (b), obtenez une expression pour le flux total de chaleur à travers les parois du tuyau, sur toute sa longueur et par unité de temps.
- (d) Calculez maintenant la quantité de chaleur Q transportée par le fluide à travers le tuyau par unité de temps, et montrez que le rapport de la quantité de chaleur perdue à travers les paroi sur Q est proportionnel à $\Delta T/T$. Vous pouvez supposer que κ et c_p sont indépendant de la température, et négliger la dilatation thermique.

- (e) L'écoulement Hagen-Poiseuille demeure laminaire jusqu'à un nombre de Reynolds critique $Re_c \simeq 2000$; montrez que la quantité de chaleur transportée par un tel écoulement, à la limite de l'instabilité, est donnée par

$$Q_{\max} \simeq \frac{\pi}{2} \rho \nu R Re_c c_p T_0 .$$

Nous avons maintenant tout en place pour passer à l'accident nucléaire à la centrale de Fukushima-Daiichi. Dans un réacteur nucléaire de ce type, de l'eau est pompée à travers le coeur du réacteur, et renvoyé vers un échangeur de chaleur pour chauffer un circuit secondaire d'eau qui propulsera éventuellement les turbines. En mode actif d'opération, $\simeq 500$ MegaWatt d'énergie thermique sont produits, et les pression et température internes dans le réacteur montent à $P_0 \simeq 10^7$ Pa et $T_0 \simeq 550$ K. Pour de l'eau ainsi surchauffée (qui, notons-le, demeure liquide à cette pression malgré la température très élevée), $\kappa \sim \nu \sim 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $c_p = 6000 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, et $\rho \sim 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. L'eau surchauffée sort du réacteur par devinez quoi, un grand nombre de tuyaux de section circulaire ($R = 1 \text{ cm}$) et de longueur $L = 10 \text{ m}$. Maintenant, avec toutes ces informations en main:

- (f) En supposant que l'écoulement est au nombre de Reynolds critique $Re_c = 2000$, estimez la vitesse moyenne $\bar{u}$. Ensuite calculez le nombre de tuyaux requis pour évacuer les 500 MW produit en mode normal de fonctionnement.

Les réacteurs de la centrale de Fukushima-Daiichi ont été immédiatement mis à l'arrêt au moment du tremblement de terre du 11 mars 2011. Cependant, même une fois les réactions de fission stoppées, environ 30MW d'énergie continue d'être libéré par la désintégration radioactive des produits de fission accumulés dans le réacteur, ce qui fait qu'une circulation de l'eau doit être maintenue pour évacuer cette chaleur. Et voilà le problème, l'arrivée du tsunami déclenchée par le tremblement de terre a inondé la centrale, causant une panne d'électricité et un arrêt des pompes. L'eau étant maintenant au repos, il ne restait plus que la conduction thermique dans l'eau au repos dans les tuyaux pour évacuer la chaleur du coeur du réacteur à travers les parois des tuyaux.

- (g) Étant donné vos résultats précédents (en particulier sur le nombre de tuyaux), calculez la quantité de chaleur pouvant être ainsi évacuée par conduction thermique par unité de temps. À ce stade vous pouvez supposer que la température à l'extérieur des tuyaux est de 300 K. Est-ce suffisant pour évacuer le 30MW produit par la désintégration radioactive résiduelle ?
- (h) Le coeur du réacteur contient $\sim 40 \text{ m}^3$ d'eau; calculez le taux d'augmentation de la température, en supposant que ce 30MW demeure constant dans le temps; calculez le temps requis pour atteindre 2800 K, la température à laquelle les barres de fuel nucléaire commenceront à fondre.

Problème 45

Maintenant on passe à l'analyse d'une simulation numérique 2D de la convection en régime Boussinesq, soit celle discutée à la §12.3.2, et plus spécifiquement la simulation à $Ra = 10^6$ illustrée à la Figure 12.6 (au centre). Vous devez tout d'abord aller chercher un fichier contenant les valeurs des vitesse et température à tous les points de maille, extraites à un temps spécifique dans la simulation; ce fichier, nommé "`sim141.txt`", est accessible de la page web du cours, dans la section "Exercices"; il contient 8192 lignes, une par point de maille, contenant chacune 5 nombres réels, correspondant aux quantités:

$$\{x, z, u_x, u_z, T\}$$

- Calculez la température moyennée horizontalement (direction- x) et portez en graphique cette quantité ($\bar{T}(z)$) versus la coordonnée verticale z ; vérifiez que cela ressemble bien à la courbe en vert sur la Figure 12.8.
- Une caractéristique définissant la convection thermique est la corrélation entre la vitesse verticale du fluide et la perturbation de température par rapport à la moyenne horizontale ($\Delta T(x, z) = T(x, z) - \bar{T}(z)$). Portez en graphique toutes vos valeurs de $\Delta T(x, z)$ versus $u_z(x, z)$. Observez-vous la corrélation attendue ?
- Répétez la procédure en (b), mais en corrélant maintenant ΔT avec u_x ; observez-vous ici une corrélation ? Pourquoi ?
- Calculez le flux convectif total (équ. (12.24) intégrée horizontalement) à chaque hauteur z , et portez le résultat en graphique en fonction de z . Comment expliquez-vous la forme du graphique ?

Problème 46

Ce problème vise à vous faire effectuer une analyse perturbative formelle, dans le cadre de l'instabilité de Rayleigh-Bénard. Vous travaillez ici dans le cadre de l'approximation de Boussinesq décrite au chapitre 12, telle qu'appliquée à l'expérience de convection thermique du type Bénard (mince couche de fluide sujette à un gradient vertical de température imposé extérieurement, voir §12.2 des notes). Nous avons vu dans les notes qu'une solution stationnaire et statique prend la forme:

$$\mathbf{u} = 0, \quad T(z) = T_B - \frac{z}{d}\Delta T,$$

où d est l'épaisseur de la couche de fluide, et $\Delta T = T_H - T_B (> 0)$ est la différence de température entre le haut et le bas.

- Linéarisez les équations de Boussinesq, utilisant le profil linéaire en T ci-dessus comme état de référence pour la température (i.e., $T_0(z)$). Vous devriez trouver que les équations de Navier-Stokes et de transport de la chaleur pour les quantités à l'ordre 1 prennent la forme:

$$\rho_o \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \rho_o \nu \nabla^2 \mathbf{u}_1 + \rho_1 \mathbf{g},$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + u_{z,1} \frac{dT_0}{dz} = \kappa \nabla^2 T_1.$$

- Prenez le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes linéarisée; utilisant le fait que $\rho_1 = -\alpha \rho T_1$ (version linéarisée de notre expression pour la dilatation thermique), démontrez que le résultat peut s'écrire sous la forme:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla \times \mathbf{u}_1 = -\alpha (\nabla T_1) \times \mathbf{g}.$$

- Prenez encore une fois le rotationnel du résultat en (b), et n'en retenez que la composante- z (en n'oubliant pas que $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{e}}_z$); éliminez T_1 de cette expression en utilisant l'équation

linéarisée du transport de la chaleur, pour ainsi obtenir l'équation différentielle ordinaire suivante pour la composante verticale de la vitesse du fluide:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \nabla^2\right) \nabla^2 u_{z,1} = -\alpha g \frac{dT_0}{dz} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u_{z,1} ,$$

- (d) Comme il n'y a pas ici de direction horizontale privilégiée, on peut chercher une solution par séparation de variable:

$$u_{z,1}(x, y, z, t) = W(z)f(x, y)e^{st} ,$$

où s est réel, et la partie horizontale doit satisfaire:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + a^2 f = 0 ,$$

a étant une constante reliée à l'échelle horizontale de la convection. Substituant ceci dans

l'EDP en (c), obtenez l'EDO suivante pour la partie verticale $W(z)$:

$$(\nu(D^2 - a^2) - s)(\kappa(D^2 - a^2) - s)(D^2 - a^2)W = \alpha g \frac{dT_0}{dz} a^2 W ,$$

avec $D \equiv d/dz$.

- (e) La condition limite sur $u_{z,1}$ à $z = 0$ et $z = d$ est $u_{z,1} = 0$; ceci suggère une dépendance verticale de la forme:

$$W(z) = \sin\left(\frac{n\pi z}{d}\right) , \quad n = 1, 2, 3...$$

Vérifiez que ceci produit la relation de dispersion:

$$(s + \nu b^2)(s + \kappa b^2)b^2 + \alpha g \frac{dT_0}{dz} a^2 = 0 , \quad b^2 = a^2 + \frac{n^2 \pi^2}{d^2} .$$

- (f) La relation de dispersion trouvée en (e) est quadratique en s ; trouvez-en les racines de la manière habituelle, et montrez qu'il n'existera une racine positive (i.e. perturbation croissant dans le temps) que si

$$\frac{\alpha g}{\nu \kappa} \left(-\frac{dT_0}{dz}\right) > \frac{1}{a^2} \left(a^2 + \frac{N^2 \pi^2}{d^2}\right)^3 .$$

(n'oublions pas que $dT_0/dz < 0$!).

- (g) On peut facilement montrer (faites le!) que par rapport à a et N , le membre de droite de l'inégalité ci-dessus sera minimisé par rapport à a et n pour les valeurs $a = \pi/(\sqrt{2}d)$ et $n = 1$. Montrez que ceci correspond à un nombre de Rayleigh critique

$$\text{Ra}_c = \frac{27\pi^4}{4} .$$

Bien que ce problème ait l'air plutôt capotant, je vous fournis assez de résultats intermédiaires pour le rendre faisable en un temps fini... en cas de découragement, rappelez-vous que Rayleigh a fait ça tout seul comme un grand, sans étapes intermédiaires fournies, il y a déjà plus d'un

siècle... La valeur de Ra_c trouvée ci-dessus ne se compare pas si mal à la valeur déterminée expérimentalement, $Ra_c = 1708$; la différence vient des conditions limites.

Problème 47

Considérons l'équation de Landau discutée au chapitre 12:

$$\frac{\partial |\mathbf{A}|^2}{\partial t} = 2\sigma |\mathbf{A}|^2 - \Lambda (|\mathbf{A}|^2)^2,$$

et sa solution:

$$|\mathbf{A}|^2 = |\mathbf{A}_0|^2 \left[\frac{\Lambda}{2\sigma} |\mathbf{A}_0|^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{2\sigma} |\mathbf{A}_0|^2 \right) e^{-2\sigma t} \right]^{-1},$$

où $|\mathbf{A}_0|^2$ est le module carré de l'amplitude (complexe) de la perturbation infinitésimale à $t = 0$, σ (> 0) le taux de croissance de la perturbation, et Λ une constante (voir section 13.2 des notes).

Il a été démontré dans les notes que si $\Lambda > 0$, cette équation accepte des solutions où l'amplitude $|\mathbf{A}|$ tend vers une constante dans la limite $t \rightarrow \infty$. Démontrez maintenant que dans la situation contraire, soit $\Lambda < 0$, l'amplitude diverge (i.e., $|\mathbf{A}| \rightarrow \infty$) en un temps fini.

Problème 48

Obtenez une équation d'évolution ($\partial/\partial t = \dots$) pour une composante du stress de Reynolds; démontrez que cette expression impliquera, au membre de droite, au moins un terme proportionnel à un tenseur du genre $\langle u_i u_j u_k \rangle$.

Problème 49

Nous nous sommes surtout concentré au chapitre 15 sur les propriétés des équations de Lorenz dans le régime chaotique. Le but de ce problème est de vous faire explorer la forme que prend la transition au chaos dans ce système d'équations. Pour ce faire vous devrez intégrer les équations de Lorenz numériquement selon la méthode décrite en classe, ou encore utiliser Maple, Mathematica, etc. Dans un cas comme dans l'autre, incluez des copies de vos routines numériques et/ou sessions Maple/Mathematica. Attention de ne pas prendre un pas de temps trop grand (imprécis) ou trop petit (sujet à accumulation des erreurs de troncations); quelque chose du genre $\Delta t = 0.01$ devrait être adéquat (dépendant de l'algorithme utilisé).

- Construisez une séquence de solutions ayant $P = 20$ et r croissant de 10 jusqu'à 30. Calculez chaque solution sur une période couvrant quelques centaines d'unités de temps adimensionnel.
- Pour chaque valeur de r , extrayez la valeur maximale des pics successifs dans la séquence temporelle pour la variable Z ; pour chaque valeur de r , vous avez maintenant une liste de $N(r)$ valeurs de Z , une pour chacune des N pics dans votre séquence temporelle pour une valeur de r donnée. Attention de bien laisser s'amortir le transient de commencer à extraire les pics.
- Portez en graphique ces valeurs en fonction de r ; l'ordonnée; pour chaque valeur de r , vous aurez N valeurs à ainsi porter en graphique, chacune comme un point individuel (ne reliez

pas les points entre eux avec un trait!). Le diagramme résultant s'appelle **diagramme de bifurcation**,

- (d) Identifiez sur votre diagramme de bifurcation (i) le régime chaotique; (ii) le régime unipériodique; (iii) le régime multipériodique. Combien de type de transition au chaos observez vous ici, quand r augmente ou diminue?

Problème 50

Il s'agit ici de vous faire reconstruire la forme de l'attracteur de Lorenz pour des valeurs de paramètres différentes de celles considérées en classe, et d'en examiner quantitativement certaines propriétés discutées brièvement en classe.

- paramètre p : utilisez une valeur égale à $2.2 + (\text{votre mois de naissance})/12$.
- paramètre r : utilisez une valeur égale à $r = p(p + 4)/(p - 2) + 0.25 + (\text{jour de naissance})/28$.

Vous pouvez intégrer les équations de Lorenz numériquement selon la méthode décrite en classe, ou encore utiliser Maple, Mathematica, Python/`odeint`, tc. Dans un cas comme dans l'autre, incluez des copies de vos routines numériques et/ou sessions Maple/Mathematica/Python (voir aussi commentaire sur le pas de temps, problème 49).

- Calculez une solution, et tracez-en les trajectoires correspondantes dans les plans XY , XZ et YZ .
- Calculez deux solutions différant par 10^{-5} dans une des trois variables du système, et déduisez-en la valeur de l'exposant de Lyapunov caractérisant le modèle pour vos valeurs des paramètres p et r .
- À partir de votre solution, calculez la fonction de distribution de probabilité de la durée des phases intermittentes; i.e., mesurez la durée des phases où X est positif (par exemple), et construisez la fonction $f(\tau)$ mesurant la fréquence statistique des phases intermittentes ayant une durée entre τ et $\tau + \Delta\tau$.

Et attention, j'ai en dossier vos codes permanents, dont je peux déduire vos mois et jour de naissance...