

PHY 3140
HYDRODYNAMIQUE
PROBLÈMES: SÉRIE 2

Distribué le: 1 octobre 2025

Chapitres couverts: 5 et 6

Problème 21

On immerge dans un fluide immobile, incompressible, et de diffusivité thermique κ_1 une sphère métallique de rayon R et de diffusivité thermique κ_2 . Un gradient de température vertical est maintenu dans le fluide loin de la sphère (e.g., le fluide est contenu entre deux très grandes plaques horizontales maintenues à des températures fixes mais différentes). Calculez la distribution de température stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) qui s'établit éventuellement dans la sphère et le fluide.

Problème 22

Nous avons vu en classe que la contrainte d'isotropie permettait de réduire énormément le nombre de coefficients numériques impliqués dans la relation tensorielle linéaire entre le tenseur des stress visqueux τ_{ij} et le tenseur des déformations D_{ij} . Démontrez que dans le cadre d'une rotation de $\pi/2$ par rapport à l'axe z , il est possible de passer de

$$\begin{array}{cccccc} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{array}$$

à:

$$\begin{array}{cccccc} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{array}$$

Il sera utile de ne pas paniquer... et de commencer par établir les éléments de la matrice de rotation...

Problème 23

(Suite du précédent) Démontrez maintenant que la contrainte d'isotropie dans le cadre d'une rotation de $\pi/4$ par rapport à l'axe des z impose la relation:

$$C_{11} = C_{44} + C_{12}$$

Commencez par vous faire un petit dessin des axes originaux et après rotation, afin de pouvoir calculer correctement les éléments de la matrice de rotation, et attention aux signes “−” dans le calcul des cosinus...

Problème 24

Deux plaques infinies, toutes deux parallèles au plan xy , sont situées respectivement à des distances $z = +L$ et $z = -L$ de ce plan. La plaque à $z = +L$ se déplace à une vitesse u_0 dans la direction $\hat{\mathbf{x}}$, et celle à $z = -L$ se déplace à la même vitesse mais dans la direction $-\hat{\mathbf{x}}$. L'espace entre les plaques est rempli d'un fluide incompressible de densité ρ et de viscosité μ . La gravité peut être négligée.

- (1) Ecrivez les formes stationnaires ($\partial/\partial t = 0$) des équations du mouvement;
- (2) Démontrez que les composantes y et z de ces équations ne peuvent être satisfaites que par la solution triviale $u_y = 0$, $u_z = 0$.
- (3) Intégrez l'équation restante pour u_x et déterminez la forme du profil stationnaire de vitesse.

Problème 25

Une mince couche de fluide incompressible et visqueux s'écoule sur un plan incliné à un angle α par rapport à l'horizontale. Calculez la forme de l'écoulement dans la couche de fluide.

Problème 26

Variation sur le même thème: cette fois-ci ce sont **deux** minces couches superposées de fluides incompressibles et visqueux, de densités égales mais de viscosités cinétiques ν_1 et ν_2 différentes, qui s'écoulent en régime stationnaire sous l'influence de la gravité le long du plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. La couche de fluide adjacente au plan est d'épaisseur h_1 , et celle par dessus d'épaisseur h_2 .

- (a) Écrivez et justifiez physiquement les conditions limites sur $\mathbf{u}$ qui doivent être satisfaites (i) à la surface du plan; (ii) à l'interface entre les deux couches de fluide; (iii) à l'interface avec l'air.
- (b) Calculez le profil de vitesse de l'écoulement dans les deux couches de fluide.
- (c) En dépit de votre réponse en (a), vous devriez avoir trouvé en (b) que le profil de l'écoulement de la couche inférieure ne dépend pas de la viscosité du fluide dans la couche supérieure; comment expliquez-vous ceci physiquement?

Problème 27

Un fluide incompressible et visqueux remplit l'espace entre deux cylindres concentriques de rayons a et b ($b > a$) respectivement, tous deux de longueur L beaucoup, beaucoup plus grande que ces rayons et ouvert à leurs deux extrémités. L'axe des cylindres est orienté parallèlement à la gravité. Calculez la forme de l'écoulement stationnaire qui s'établit dans le cylindre, loin de ses extrémités.

Problème 28

Un fluide incompressible et visqueux remplit l'espace entre deux longs et désormais familiers cylindres co-axiaux de rayons a et b ($b > a$). Le cylindre intérieur est fixe, mais le cylindre extérieur tourne autour de son axe de symétrie à une vitesse angulaire ω_b . Calculez la forme de l'écoulement du fluide qui résulte de ce déplacement du cylindre intérieur, en régime stationnaire ($\partial/\partial t = 0$).

Problème 29

Vous avez déjà certainement remarqué comment il peut être difficile de décoller l'une de l'autre deux plaques entre lesquelles est prise en sandwich une mince couche de fluide. Ce problème vise à vous faire calculer la grandeur de cette force de suction. On considérera la variation suivante: un disque circulaire de rayon a est posé à plat sur un plan, et est séparé de ce dernier par une mince couche de fluide, incompressible et visqueux, d'épaisseur h . Une force F tire le disque vers le haut, causant une augmentation de l'épaisseur de la couche fluide; on a donc $h \rightarrow h(t)$ et $dh/dt > 0$.

Travaillant en coordonnées cylindriques (s, ϕ, z) , on supposera que F induit un écoulement axisymétrique dans la couche de fluide, i.e., de la forme:

$$\mathbf{u} = u_s(s, z, t)\hat{\mathbf{e}}_s + u_z(s, z, t)\hat{\mathbf{e}}_z$$

Si la couche est très mince, on peut montrer que la pression p ne dépend pas de z , que le terme $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ peut être négligé face à la force visqueuse, et que cette dernière peut s'approximer par:

$$\nu \nabla^2 \mathbf{u} \simeq \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2}$$

On peut aussi supposer que la nonstationarité est dominée par le mouvement du disque, et donc on peut poser $\partial \mathbf{u} / \partial t = 0$ dans les équations de Navier-Stokes. Prenant tout ceci pour acquis, la procédure à suivre est:

- (a) Intégrez la composante s des équations de Navier-Stokes;
 - (b) Substituez votre résultat pour u_s dans l'équation de la conservation de la masse
 - (c) Intégrez l'expression obtenue en (b) pour obtenir une relation entre u_z et le gradient radial de pression (attention aux singularités à $s = 0$!).
 - (d) Évaluez u_z à $z = h(t)$, et produisez ainsi une équation différentielle ordinaire pour p en fonction de dh/dt .
 - (e) Intégrez cette expression pour obtenir $p(s)$, en réfléchissant bien aux conditions limites.
 - (f) Déduisez de votre résultat en (e) la force exercée par le fluide sur le disque; montrez que cette force est très grande quand h est très petit.
 - (g) Quelle est la force requise pour soulever un disque de 15cm de diamètre à une vitesse de 0.02 mm par seconde, si la couche de fluide est de l'eau, et d'épaisseur initiale 0.02 mm? Quel masse (en kg) devriez-vous suspendre à une poulie simple pour produire une telle force?
-

Problème 30

Un fluide visqueux et incompressible est contenu entre deux très grandes plaques parallèles séparées d'une distance h . La plaque du fond est au repos, et elle du haut tourne autour d'un axe vertical perpendiculaire aux plaques, à vitesse angulaire Ω .

Le fluide étant visqueux, on peut s'attendre à ce que le mouvement de rotation de la plaque supérieure se transmette au fluide; et qu'après une phase transitoire, on pourrait possiblement produire un écoulement stationnaire de la forme

$$\mathbf{u} = u_\phi(s, z)\hat{\mathbf{e}}_\phi,$$

exprimé ici en coordonnées cylindriques (s, ϕ, z) , avec $\hat{\mathbf{e}}_z$ coïncidant avec l'axe de rotation de la plaque supérieure.

- Démontrez que dans la situation considérée ici, l'écoulement ci-dessus n'est *pas* une solution physiquement acceptable.
- Sans calculer une solution complète formelle, démontrez que votre résultat en (a) implique la présence d'un écoulement secondaire ayant des composantes dans les directions $\hat{\mathbf{e}}_s$ et $\hat{\mathbf{e}}_z$.
- Tracez à main levée les lignes d'écoulement de cet écoulement secondaire dans les environs de l'axe de rotation du système. Justifiez physiquement votre dessin (une demie page max).
- Toujours sans calculer une solution formelle, obtenez un *estimé* de la grandeur caractéristique de cet écoulement secondaire, en fonction des paramètres du problème (e.g., vitesse angulaire de la plaque supérieure, viscosité du fluide, etc.)

Problème 31

Ce problème vise à vous faire explorer le mécanisme de **lubrification**. On considère un cube d'arête $d = 1$ m de masse 10^3 kg, dont une face repose sur une surface plane horizontale, avec une très mince (épaisseur = 1 mm) couche d'huile (fluide incompressible de densité $\rho = 800$ kg m⁻³ et viscosité cinématique $\nu = 10^{-4}$ m² s⁻¹) séparant le cube de la plaque.

- Calculez la forme de l'écoulement induit dans la couche d'huile par un déplacement horizontal du bloc à vitesse constante v . Vous pouvez négliger les effets de bords, autrement dit vous pouvez supposer que l'écoulement dans la couche d'huile est purement horizontal.
- Calculez maintenant le stress visqueux à la base du bloc.
- Calculez la force horizontale (en Newton) devant être appliquée sur le bloc pour qu'il se déplace (horizontalement) à une vitesse constante $v = 0.1$ m s⁻¹; et aussi pour $v = 1$ m s⁻¹;
- Votre résultat en (c) semble suggérer que $\mathbf{F} \propto \mathbf{v}$ plutôt que notre bon vieux $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Expliquez en quelques lignes ce paradoxe (apparent).

Problème 32

Ce problème vise à vous faire explorer certaines propriétés et caractéristiques de l'écoulement de Stokes.

- Dans la solution de Stokes, l'écoulement est plan à vitesse constante $u_0\hat{\mathbf{e}}_z$ loin en amont et en aval. Donc, selon la logique introduite dans notre discussion des écoulements potentiels

au chapitre 3, aucune quantité de mouvement n'a été transférée du fluide à la sphère, et la force de trainée devrait être nulle; cependant elle ne l'est définitivement pas, comme on l'a démontré en classe. Comment expliquez vous ce paradoxe (apparent) ?

- (b) Calculez les composantes r et ϕ de la vorticité dans l'écoulement de Stokes, et portez les en graphiques (contours ou table de couleur) dans le plan $\phi = 0$. La production de vorticité est maximale où dans l'écoulement? Comment pouvez vous expliquer ceci en termes simples ?
- (c) La symétrie de l'écoulement par rapport à un plan horizontal bissectant la sphère suggère qu'il n'y a pas de force de portance produite ici; considérant vos résultats en (b), comment r conciliez-vous ceci avec le théorème de Zhukovskii (§3.5 es notes de cours) ?

Problème 33

Recalculez la solution de Blasius en suivant la procédure numérique introduite à la §6.10 des notes de cours. Ensuite, calculez la force de trainée (en Newton) exercée par l'eau ($\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$) s'écoulant à vitesse $u_0 = 1 \text{ m s}^{-1}$ de chaque coté d'une plaque carrée de taille $L = 1 \times 1 \text{ m}$, et d'épaisseur $h = 1 \text{ cm}$. Vous pouvez négliger les effets de bord. Détaillez bien toutes les étapes de votre raisonnement. L'approximation donnée par l'équation (6.152) se compare-t-elle bien à votre résultat ?