

PHY 3140
HYDRODYNAMIQUE
PROBLÈMES: SÉRIE 1

Distribué le: 17 septembre 2025

Chapitres couverts: 2, 3, 4

Problème 1

Calculez la force requise pour “décoller” les deux hémisphères des coquilles de von Guericke (voir Fig. 2.1 des Notes de cours), sachant que leur rayon était d’environ 35 centimètres. Aux fins de cet exercice, vous pouvez supposer que la pompe de von Guericke pouvait réduire la pression intérieure à 1 kPa. Détaillez bien toutes les étapes de votre raisonnement et de vos calculs.

Problème 2

Un contenant cylindrique contient un fluide incompressible de densité ρ . Le contenant et le fluide tournent à vitesse angulaire constante Ω autour d’un axe vertical coïncidant avec l’axe du contenant, et la gravité pointe verticalement vers le bas. En d’autres mots, dans un repère en rotation à vitesse angulaire Ω le fluide est au repos.

- (a) Suivant le genre de procédure utilisée à la section 2.3 des notes de cours, établissez une forme de l’équation de l’équilibre hydrostatique généralisée pour inclure les effets de la rotation.
- (b) Utilisez la relation trouvée en (a) pour calculer la forme géométrique de la surface liquide-air. Songez bien aux conditions limites devant être satisfaites, et explicitez toutes les étapes de votre raisonnement.

Problème 3

Le tuyau de sortie du cœur humain est l’aorte, d’un diamètre interne de 2.5cm. Le sang s’y écoule à une vitesse moyenne de 0.2 m s^{-1} . L’échange d’oxygène avec les tissus s’effectue à l’autre “extrémité” du système circulatoire, soit dans les capillaires. Ceux-ci ont un diamètre d’environ $6 \mu\text{m}$, et le sang s’y écoule à environ 1 mm s^{-1} .

- (a) Calculez le nombre de capillaires dans le corps humain
 - (b) Calculez le rapport des surface par unité de longueur entre (1) l’aorte et (2) l’ensemble des capillaires.
-

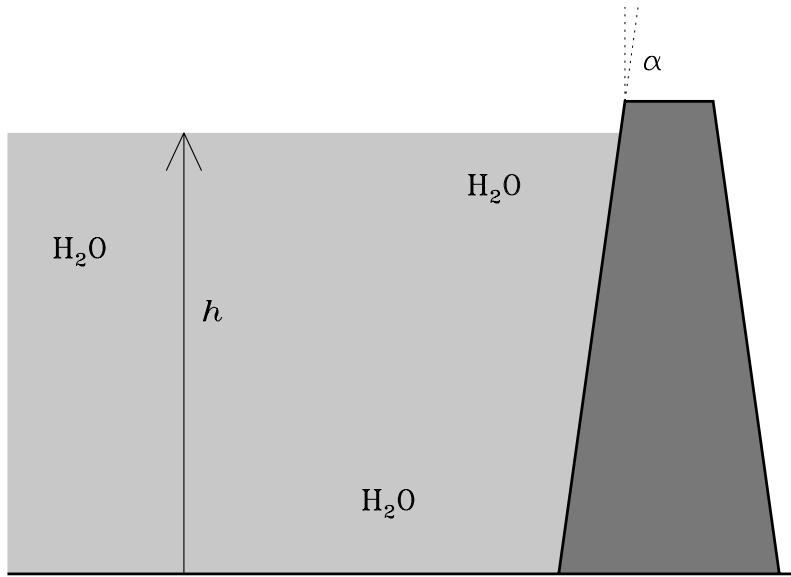


Figure 1: Un barrage idéalisé (Problème 4).

Problème 4

Un barrage ayant la forme illustrée à la Figure 1 (voir ci-dessus) sert —comme la plupart des barrages— à contenir un réservoir d’eau. Aux fins du calcul on supposera que le niveau d’eau dans le réservoir est donné par h , et que le réservoir a un fond plat et s’étend sur un kilomètre en amont du barrage. Les parois du barrage sont inclinées d’un angle α par rapport à la verticale (voir la Figure). Calculez la force exercée sur le barrage par l’eau, en fonction du niveau d’eau h du réservoir.

Problème 5

Le but de ce problème est de **démontrer**, dans le contexte d’une situation de la vie de tous les jours, le principe d’Archimède; et donc ce principe ne peut **pas** être invoqué *a priori* pour sa solution!

Un pêcheur bien enveloppé, d’un poids de 100 kg, embarque dans une chaloupe attachée à un quai. La chaloupe a un fond plat de surface totale 3 m^2 , et le lac a une superficie de 1 km^2 .

- Calculez l’élévation du niveau du lac qui en résultera.
- De votre résultat en (b), déduisez le principe dit d’Archimède, soit qu’un corps de densité ρ et volume V plongé dans un fluide de densité ρ_F ressent une force donnée par

$$\mathbf{F}_A = (\rho - \rho_F)V\mathbf{g} ,$$

où $\mathbf{g}$ est l’accélération gravitationnelle.

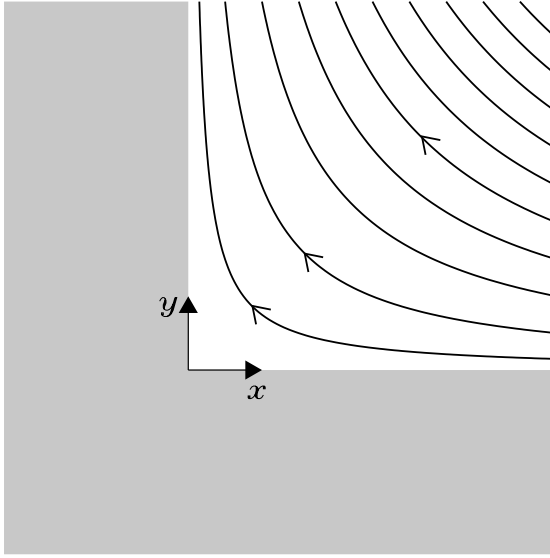


Figure 2: Lignes d'écoulement décrivant un fluide arrivant de la droite et dévié vers le haut par un coin à 90 degrés (problème 6).

- (c) Notre pêcheur attrappe un gigantesque brochet de 10kg, et parvient à le remonter et le balancer dans sa chaloupe. Calculez de combien va changer le niveau du lac suite à cette manoeuvre.

La densité de l'eau: $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$; et la pression atmosphérique: $p_A = 101.6 \text{ kPa}$. Détaillez bien toutes les étapes de votre raisonnement. Petit indice: l'équilibre hydrostatique vous sera utile!

Problème 6

Considérons l'écoulement stationnaire en deux dimensions spatiales, illustré sur la Figure 2, et décrit en coordonnées cartésiennes par:

$$\mathbf{u}(x, y) = -u_0 x \hat{\mathbf{e}}_x + u_0 y \hat{\mathbf{e}}_y, \quad y > 0, \quad x > \infty.$$

- Cet écoulement est-il incompressible ? Justifiez bien votre réponse.
- Cet écoulement est-il irrotationnel ? Justifiez bien votre réponse.
- Ce fluide est-il visqueux ? Justifiez bien votre réponse.
- Calculez la forme des isobares (contours de pression constante) dans cet écoulement.
- Calculez la pression à $(x, y) = (0, 0)$, sachant que la pression est égale à 1 kiloPascal à $(x, y) = (L, 0)$
- Dans quelle direction est orientée la force nette qu'exerce le fluide sur l'objet en gris contenant l'écoulement sur la Figure 2 ? Justifiez bien votre réponse, calcul complet optionnel.

Tube de Venturi

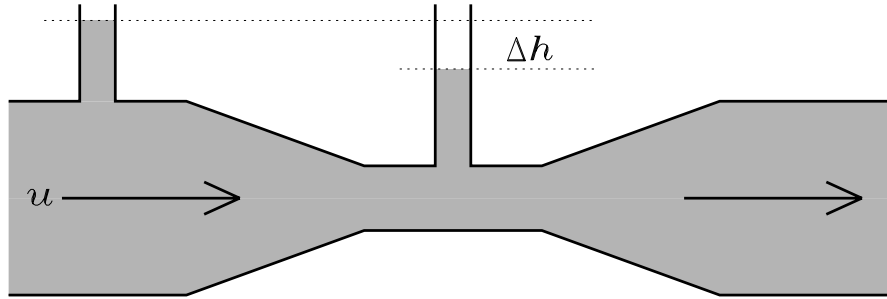


Figure 3: Le tube de Venturi (Problème 7).

Problème 7

Le tube de Venturi est un gadget permettant de mesurer la vitesse d'un écoulement dans un tuyau. Le tube Venturiesque en question est caractérisé par une constriction, où la section du tuyau passe de A_1 (disons) à A_2 ($< A_1$), et comporte deux petits tubes verticaux, ouvert vers le haut, dont un origine de la partie à plus faible section du tube (voir Figure 3). Considérons le cas d'un fluide incompressible et inviscide traversant le tube; à partir des dimensions du tube (sections A_1 , A_2 , diamètre des tubes verticaux, etc.), une mesure de la différence Δh dans la hauteur du fluide dans les deux tubes verticaux permet de calculer la vitesse u du fluide, en terme de quantités connues. Faites-le...

Problème 8

Obtenez une expression analytique décrivant la fonction potentielle associée à l'écoulement 2D d'un fluide parfait et incompressible autour d'un point de stagnation (Voir Figure 4A). Vous pouvez supposer comme condition limite que la vitesse verticale sur l'axe $x = 0$ est fixée à $-u_0 \hat{e}_y$ à $y = y_0$ ($\gg 1$).

Problème 9

Obtenez une expression analytique décrivant la fonction potentielle associée à l'écoulement 2D d'un fluide parfait et incompressible à l'intérieur d'un coin aigu d'ouverture angulaire α (voir Figure 4B). Calculez la grandeur de la vitesse à l'intérieur du coin aigu (intersection du trait pointillé et du solide en gris).

Problème 10

On insère verticalement un bout d'un très long tuyau cylindrique (diamètre $D = 2$ cm) dans un grand contenant également cylindrique (diamètre $D = 30$ cm), rempli d'eau à une hauteur de 20 cm. On branche à l'autre bout une très puissante pompe pouvant extraire tout l'air du tuyau, et donc y faire le vide.

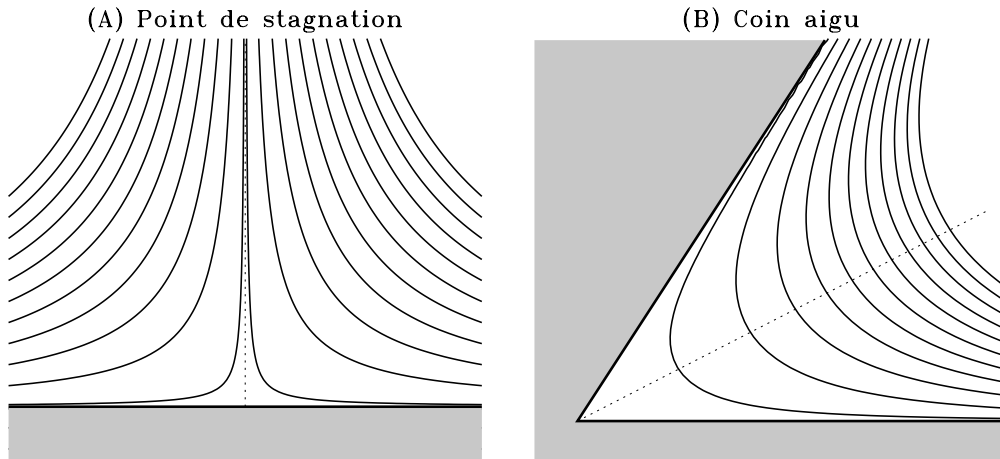


Figure 4: Lignes d'écoulement correspondant à deux écoulements potentiels dont vous devez déterminer les formes analytiques du potentiel (Problèmes 8 et 9).

- Calculez la hauteur maximale à laquelle la pompe pourra élever la colonne d'eau. Explicitiez bien toutes les étapes de votre raisonnement.
- De combien variera la hauteur du fluide dans le grand contenant une fois que l'état stationnaire en (a) est atteint ?
- En pratique, il est toujours possible de bâtir des systèmes de pompage qui réussissent à pomper plus haut que cette hauteur maximale théorique. Essayer d'en imaginer un; pas besoin de développements mathématiques ici, juste un peu de réflexion, et une description écrite ou un petit dessin en une demie-page au max.

Quelques grandeurs physiques possiblement utiles: densité de l'eau: 1 g cm^{-3} ; densité de l'air à TPN: $1.2 \times 10^{-3} \text{ g cm}^{-3}$; pression atmosphérique standard à altitude zéro: $p_A = 101.3 \text{ kiloPascal}$ ($1 \text{ Pascal} = 1 \text{ N m}^{-2}$); accélération gravitationnelle: $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$.

Problème 11

Un entonnoir conique d'ouverture angulaire α et de section A à sa partie la plus large est posé à l'envers sur une surface plane. On verse par l'ouverture de l'entonnoir un fluide de densité ρ jusqu'à ce que la partie conique de l'entonnoir soit remplie. Quel doit être la masse minimale M de l'entonnoir permettant de contenir le fluide (exprimée en fonction de ρ , α , etc.) ?

Problème 12

On considère un tube mince plié et ouvert à ses deux extrémités, rempli d'un fluide inviscide et incompressible de densité ρ , avec la gravité pointant vers le bas (Figure 5).

- Démontrez que pour avoir une situation d'équilibre, le fluide doit arriver à la même hauteur à chaque bout du tube (ligne horizontale en tirets sur la Figure 5), et ce indépendamment des valeurs des angles α et β .

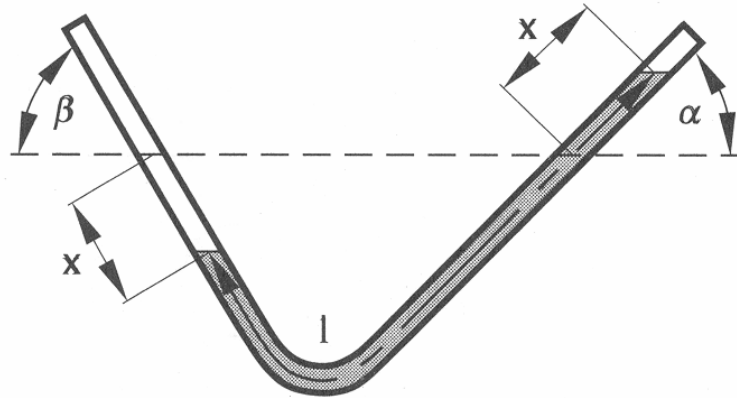


Figure 5: Colonne de fluide incompressible contenue dans un tube plié (problème 12).

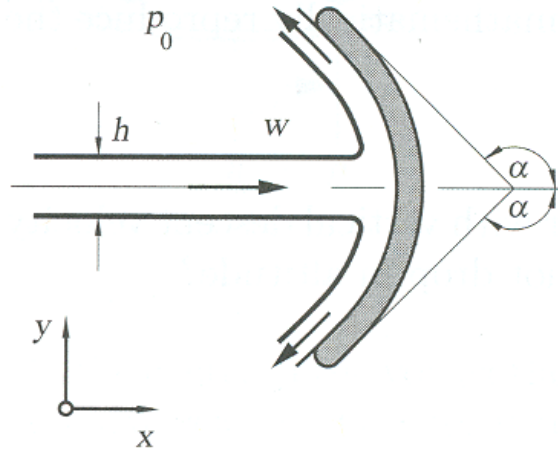


Figure 6: Impact d'un jet d'eau sur une plaque de forme conique (problème 13).

- (b) On force mécaniquement (e.g., en soufflant) un déplacement du fluide sur une distance x le long du tube (voir Figure 5), et on relâche le système. Démontrez que la colonne de fluide exécutera une oscillation harmonique, et calculez-en la fréquence.

Problème 13

Un jet d'eau ($\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, incompressible) sort d'un orifice rectangulaire et frappe en son centre une plaque courbée d'un angle $\alpha = 135^\circ$ dans le plan $[x, y]$ (voir Figure 6). La plaque n'est pas déformée dans la direction- z . La vitesse de sortie du jet est de 20 m s^{-1} , et le jet a une dimension de $h = 25 \text{ mm}$ verticalement. Calculez la force (en Newton) exercée par le jet sur la plaque en considérant que l'eau se comporte ici comme un fluide parfait (aucun processus dissipatifs).

Problème 14

Obtenez une solution décrivant un écoulement potentiel d'un fluide autour d'une sphère de rayon R , où l'écoulement est plan ($\mathbf{u} = u_0 \hat{\mathbf{e}}_x$) à grandes distances de la sphère (comme dans le cas du cylindre considéré dans les notes de cours). Choisissez judicieusement l'orientation de votre système de coordonnées.

Problème 15

Le but est ici de vous faire obtenir l'équation d'Euler (2.45) pour un fluide parfait en utilisant l'approche "équation de bilan" utilisée dans les notes de cours et en classe pour obtenir l'équation de continuité (2.34). La quantité équivalente au courant de masse de la section 2.6 est maintenant le courant de quantité de mouvement:

$$\boldsymbol{\pi} = \rho \mathbf{u} \mathbf{u} .$$

Attention, ici $\boldsymbol{\pi}$ est un tenseur, car au membre de droite il ne s'agit pas ici d'un produit scalaire, mais bien du produit extérieur du vecteur d'écoulement avec lui même. Ceci devient plus clair si on écrit l'expression ci-dessus en notation indicielle:

$$\pi_{ij} = \rho u_i u_j , \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Suivez la procédure de la section 2.6, en structurant votre bilan de la manière suivante; dans un volume Eulérien V délimité par une surface S ,

$$\frac{d}{dt}(\rho \mathbf{u} \text{ dans } V) = (\text{flux de } \rho \mathbf{u} \text{ a travers } S) + (\text{forces surfaciques}) + (\text{forces volumiques})$$

Réfléchissez bien à ce qui doit être inclus dans les forces surfaciques et volumiques. Voir l'Annexe B des notes de cours pour une identité utile pour développer la divergence d'un tenseur.

Problème 16

Un récipient hémisphérique (rayon R) rempli d'un fluide incompressible est équipé d'un petit trou de surface A à sa base. Démontrez que le temps requis pour que le niveau de fluide passe de h_1 à h_2 est donné par

$$t = \frac{2\pi}{A\sqrt{2g}} \left[\frac{2}{3}R(h_1^{3/2} - h_2^{3/2}) - \frac{1}{5}(h_1^{5/2} - h_2^{5/2}) \right]$$

Problème 17

Deux contenants cylindriques de section identique S sont reliés entre leurs bases par un petit tuyau de section a . Les deux contenants sont remplis à hauteurs inégales (h_1, h_2) du même fluide inviscide et incompressible (densité ρ); voir Figure 7 pour une représentation schématique de ce système.

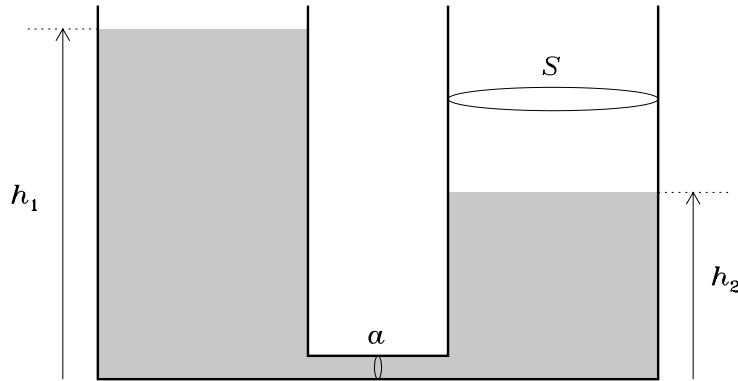


Figure 7: Deux contenants cylindriques remplis à hauteurs inégales d'un fluide inviscide et incompressible de densité ρ , et reliés entre leurs bases par un petit tuyau (problème 17). S est la section (m^2) des contenants, a (m^2 , et $\ll S$) la section du tuyau, h_1 et h_2 les hauteurs initiales du fluide dans chaque contenant.

- (a) Dans la situation de la Figure 7 ($h_1 > h_2$), calculez la vitesse du fluide dans le tuyau reliant les deux contenants, en régime stationnaire. La section du tuyau étant très petite, vous pouvez supposer que la vitesse du fluide à l'intérieur des contenants même est négligeable.
- (b) Construisez une équation différentielle ordinaire décrivant la variation temporelle de la différence de hauteur ($h_1 - h_2$) du fluide entre les deux contenants
- (c) Calculez le temps requis pour atteindre l'état d'équilibre

Problème 18

Il s'agit ici de vous faire calculer numériquement la forme d'un écoulement potentiel 2D autour d'une plaque inclinée à 45 degrés par rapport à un écoulement plan à grande distance (voir Figure 8), un peu comme le cas du cylindre traité en classe. Afin de simplifier le traitement de la condition à appliquer au niveau de la plaque, il sera préférable de solutionner le problème en fonction d'une fonction d'écoulement (plutôt qu'un potentiel):

$$\nabla^2 \Psi(x, y) = 0 ,$$

sujet aux conditions limites aux bords gauche (x_1), droit (x_2) inférieur (y_1), et supérieur (y_2) du domaine:

$$\Psi(x_1, y) = \Psi(x_2, y) = y , \quad \Psi(x, y_1) = y_1 , \quad \Psi(x, y_2) = y_2 .$$

Comme la périphérie de la plaque doit être une ligne d'écoulement, et en vertu de la symétrie et conditions limites du problème, aux bords de la plaque on doit poser:

$$\Psi(x, y) = 0 , \quad (x, y) \in \text{plaque} .$$

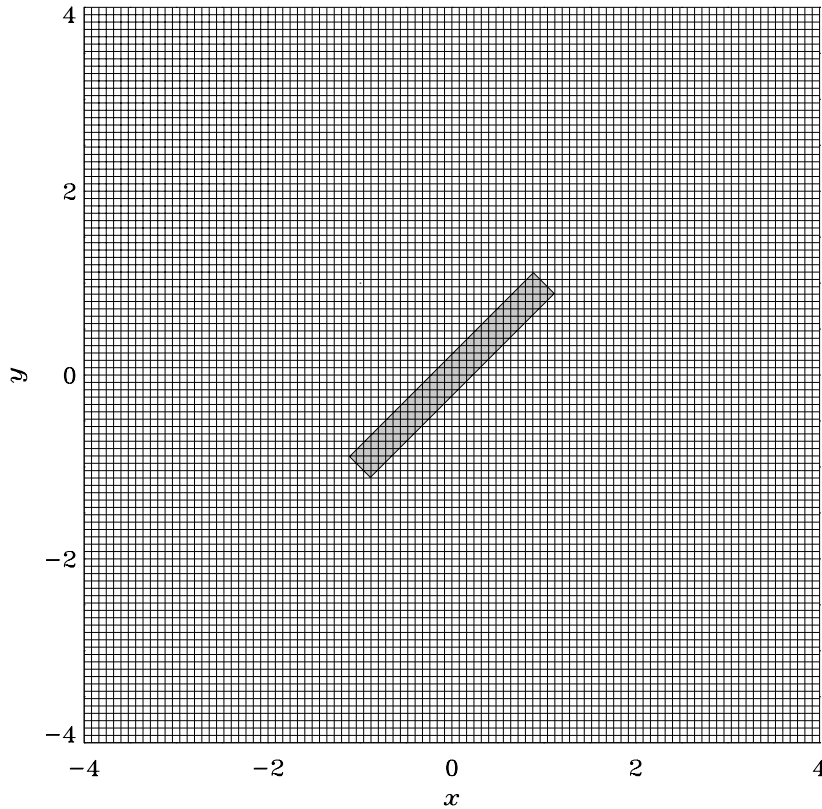


Figure 8: Maillage et géométrie pour le calcul numérique d’un écoulement potentiel autour d’une plaque inclinée (Problème 18). Discrétisation spatiale $N_x = N_y = 101 \times 101$ ici. L’écoulement est supposé horizontal à très grandes distances de la plaque.

L’idée est d’utiliser l’algorithme de relaxation décrit à l’annexe E.4 afin de solution numériquement l’équation de Laplace ci-dessus, en vertu de ses conditions limites. Seuls les noeuds intérieurs (i.e., excluant les frontières du domaine) sont sujets à ce processus de relaxation. Comme condition initiale au processus de relaxation, utilisez un écoulement purement horizontal, soit:

$$\Psi(x, y) = y .$$

Le “truc” numérique consiste à réinitialiser, à la fin de chaque itération du processus de relaxation, la valeur de Ψ à tous les points de mailles situés dans la plaque ou sur sa périphérie à une valeur $\Psi = 0$, ce qui assurera le maintien de la condition limite aux interfaces plaque-fluide. Autre truc pour visualiser vos résultats: pour un écoulement 2D de ce genre, les lignes d’écoulement correspondent aux contours $\Psi = \text{constante}$. Travaillez avec un maillage $N_x = N_y = 101$ couvrant un domaine $x \in [-4, 4]$, $y \in [-4, 4]$ et assurez vous bien d’intégrer assez longtemps pour que $\Psi(x, y)$ ait bien convergé. Pour avoir une idée générale de ce que la solution doit avoir l’air, voir la Figure 3 dans *An Album of Fluid Motion*.

Connaissant $\Psi(x, y)$ —et donc $u_x(x, y)$ et $u_y(x, y)$, par différences finies centrées (voir annexe E.1), calculez maintenant le profil de pression $p(x, y)$. L’écoulement exerce-t-il une force nette sur

la plaque? Un moment de force ?

Problème 19

Considérons un tube de Pitot, utilisé pour mesurer les vitesses d'écoulement d'un fluide *compressible*. En supposant un écoulement subsonique et adiabatique, obtenez une relation entre la vitesse de l'écoulement et la pression mesurée dans le tube. Il serait judicieux de suivre la logique générale utilisée au cours dans le cadre de l'étude du tube de Pitot pour un fluide incompressible...

Problème 20

Ce problème vise à vous faire explorer la structure verticale de l'atmosphère terrestre.

- (a) Complétez les étapes mathématiques manquantes pour passer de l'équation (4.70) à (4.74) dans les Notes de cours.
- (b) Calculez p/p_0 pour les modèles d'atmosphère isotherme et adiabatique à l'altitude du Puy du Dôme (1465 m).
- (c) Il s'agit maintenant de comparer le profil de l'atmosphère adiabatique à celui observé. Partez en exploration sur la toile et trouvez vous les données numériques de l'atmosphère dite standard. Ensuite, ajustez la valeur de l'indice adiabatique γ (dans l'intervalle $1 \leq \gamma \leq 5/3$) de manière à produire le meilleur ajustement aux données dans la troposphère (altitude ≤ 10 km). Comment pensez vous pouvoir expliquer les différences résiduelles entre meilleur modèle et les données ?
- (d) Sous un nuage cumulus, un vent vertical ascendant peut être produit, atteignant quelques dizaines de mètres par seconde à la base du nuage. Estimez le niveau de perturbation de l'équilibre hydrostatique produit par un tel déplacement d'air. Vous pouvez considérer que la base du cumulus est à une altitude de 1000 m.