PHY 3070
RELATIVITÉ 2
EXAMEN FINAL

Professeur: Paul Charbonneau
Date de l'examen: 21 au 22 avril 2026
Durée de l'examen: 24 heures

Examen à livre ouvert, toutes ressources permises, sauf ressources humaines autre que votre propre personne personnelle (et méfiez-vous particulièrement de ce que vous trouvez sur l'internet, particulièrement quand ça tombe sur la cosmologie ou les trous noirs!). Si vous allez chercher des informations sur l'internet, incluez en annexe tous les URLs pertinents et/ou transcription des échanges avec ChatGPT (ou tout autre AI), sinon ça devient du plagiat! En apposant votre signature ci-dessous, vous vous engagez sur l'honneur à respecter à la fois l'esprit et la lettre de cette directive. Remettez-moi un scan de la première page de ce questionnaire signé ici avec vos solutions.

Votre signature:

L'examen doit m'être remis en version pdf via Studium, le mercredi 22 avril avant 8:00am. Il peut évidemment m'être remis plus tôt si vous le préférez.

Un examen de 24 heures allège la pression temporelle associée à un examen classique. Par conséquent, je m'attends à des copies d'examen écrites de manière lisible, au propre, et détaillant posément la logique suivie, les approximations utilisées, etc. **Scans lisibles SVP !**

Bonne Chance! (...même si ce n'est pas vraiment une question de chance...)

Question 1 [35 points; cosmologie au choix, verbatim]

Remettez le problème 38 (univers statique d'Einstein) **ou** 41 (constante cosmologique et âge de l'Univers) de la série 3 d'exercices.

Question 2 [50 points; variation en q sur des thèmes connus]

Ce problème vise à vous faire explorer diverses propriétés d'un trou noir de type Schwarzschild, mais électriquement chargé, yé ! Ceci implique solutionner la même équation du champ (sans constante cosmologique) que dans le cas Schwarzschild traité au chapitre 8 des notes de cours, mais en ajoutant au membre de droite la contribution du tenseur de stress-énergie électromagnétique:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu} + T^{\rm em}_{\mu\nu}) \ , \tag{1}$$

avec

$$T^{\mu\nu,{\rm em}} = \frac{1}{4\pi}\left[F^{\mu}_{\ \gamma}F^{\nu\gamma} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}(F_{\alpha\gamma}F^{\alpha\gamma})\right] \ , \tag{2}$$

où $F^{\nu\gamma}$ est le tenseur électromagnétique (donnée ici en représentation contravariante). On suppose que la charge q est entièrement contenue dans une masse M concentrée à $r=0$, ce qui préserve la symétrie sphérique. En analogie au cas Schwarzschild ($q = 0$) on peut alors encore exprimer l'intervalle comme:

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{e}^{2\Phi(r)}\mathrm{d}t^2 + \mathrm{e}^{2\Lambda(r)}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2) \ . \tag{3}$$

Le champ électrique d'une charge ponctuelle q au repos correspond à la composante tr du tenseur élecromagnétique, qui de manière générale est donné par

$$E_r \equiv F^{tr} = \frac{q}{r^2\sqrt{-g_{tt}g_{rr}}} \ . \tag{4}$$

Remarquez qu'en espace-temps Minskowskien, on retrouve bien $E_r \propto q/r^2$. Tous les autres éléments du tenseur $F^{\mu\nu}$ sont nuls dans cette situation. Attention ici, la charge q est mesurée en unités géométriques, donc en mètres, comme la masse !

(a) La première étape est de calculer les composantes $T^{\rm em}_{tt}$ et $T^{\rm em}_{rr}$ du tenseur de stress-énergie électromagnétique en représentation covariante. Il ne s'agit que de substituer (4) dans (2)... mais avec développement des sommations implicites et plusieurs manoeuvres de hausse/descente d'indices à l'aide du tenseur métrique sous la forme donnée par l'équation (3). Votre solutionnaire doit me détailler clairement ces manoeuvres.

(b) Assemblez maintenant les composantes tt et rr de l'équation du champ d'Oncle Albert dans sa version augmentée donnée par l'équation (1) ci-dessus. Il s'agit ici de suivre la procédure de la section 8.1 des notes de cours (Équation 8.9 et tout ce qui suit), en supposant dès le départ une pression nulle, $p = 0$, pour simplifier un peu. Attention, les composantes du tenseur d'Einstein calculées dans le cas de la métrique de Schwarzschild n'ont pas changé et peuvent être directement utilisées ici, vous n'avez pas à les recalculer ! Comme votre métrique doit se réduire à Schwarzschild dans le cas limite $q \to 0$, vous pouvez aussi invoquer (et utiliser) l'équation (8.13) et son interprétation physique. Si tout se passe bien, vous devriez arriver à la forme finale suivante pour la métrique:

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2) \ . \tag{5}$$

(c) Déterminez la position de l'horizon, et comment celle-ci varie en fonction du rapport q/M. Y a-t-il toujours un (ou plusieurs?) horizon(s) ici ? La singularité centrale peut-elle devenir une "singularité nue" au delà d'un certain rapport q/M "critique" ? Justifiez bien vos raisonnement et explications.

(d) On a vu que dans la métrique de Schwarzschild, il est impossible de demeurer au repos sous l'horizon ($r \leq 2M$). Est-ce encore le cas pour notre trou noir chargé électriquement? Justifiez bien votre raisonnement, et (au besoin) n'hésitez pas à l'illustrer à l'aide d'un cas spécifique, e.g., $q/M = 1$.

(e) Calculez la quadriforce requise pour garder notre joyeux duo Buck et Anne (et leur navette) au repos à distance $r = 4M$ d'un trou noir ayant $q/M = 1$. Détaillez bien votre raisonnement.

(f) On a vu en classe que dans la métrique de Schwarzschild, il existait une orbite photonique circulaire instable $r = 3M$. Existe-t-il de telles orbites ici, et si oui combien ? Pour chacune, comment varie leur position en fonction du rapport q/M ? Ces orbites photoniques sont-elles stables ou instables ? Avant de commencer respirez bien par le nez et allez relire la section 4.3.6 des notes de cours, au besoin.

(g) BONUS : Croyez vous qu'un trou noir portant une charge électrique nette substantielle puisse se former "naturellement" ? Justifiez brièvement (1/2 page gros max) votre réponse.

Question 3 [15 points; enfin du nouveau!]

Nous avons discuté en classe de l'émission d'ondes gravitationnelles produites par la coalescence de deux trous noirs orbitant autour de leur centre de masse respectif. La Figure 1 à la page suivante est une visualisation réaliste (i.e., calculée selon la relativité générale) de cette situation, quelques instants avant leur coalescence. Expliquez un maximum de caractéristiques de cette image, selon la matière couverte en classe. Pas de calculs formels requis, mais schémas et autres petits dessins fortement encouragés !

Le Professeur:

Le Répondant:

La Directrice: Nicole St-Louis

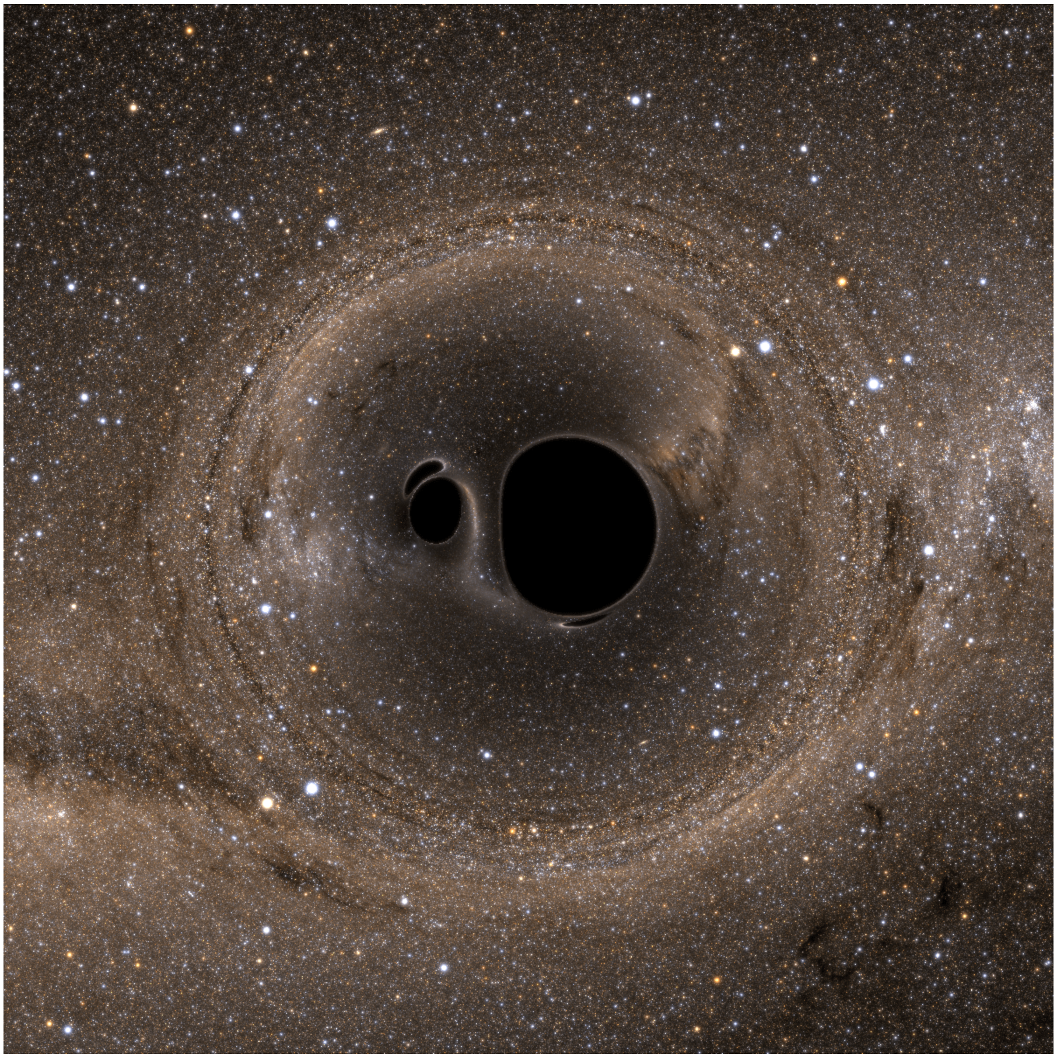

Figure 1: Visualisation réaliste (i.e., calculée selon la relativité générale) de deux trous noirs en rotation l'un autour de l'autre, peu de temps avant leur coalescence (Question 3).