

PHY 3070
RELATIVITÉ 2
EXAMEN FINAL

Professeur: Paul Charbonneau

Date de l'examen: 22 au 23 avril 2025

Durée de l'examen: 24 heures

Examen à livre ouvert, toutes ressources permises, sauf ressources humaines autre que votre propre personne personnelle (et méfiez-vous particulièrement de ce que vous trouvez sur l'internet, particulièrement quand ça tombe sur la cosmologie ou les trous noirs!). En apposant votre signature ci-dessous, vous vous engagez sur l'honneur à respecter à la fois l'esprit et la lettre de cette directive. Remettez-moi un scan de la première page de ce questionnaire signé ici avec vos solutions.

Votre signature:

L'examen doit m'être remis en version pdf via Studium, le mercredi 23 avril avant 9:00am. Il peut évidemment m'être remis plus tôt si vous le préférez.

Un examen de 24 heures allège la pression temporelle associée à un examen classique. Par conséquent, je m'attends à des copies d'examen écrites de manière lisible, au propre, et détaillant posément la logique suivie, les approximations utilisées, etc. **Scans lisibles SVP !**

Bonne Chance! (...même si ce n'est pas vraiment une question de chance...)

Question 1 [40 points; problème 45, verbatim]

Ce problème vise à vous faire explorer le mécanisme de formation présumément le plus commun pour un trou noir de masse stellaire. Plus précisément, je vous guide dans la construction d'un modèle (simplifié) de structure interne d'une étoile basé sur la relativité générale.

Il sera payant de commencer par repasser sur la Section 8.1 des notes de cours. L'approche suivie ici est identique, sauf qu'on introduit des profils de densité $\rho(r)$ et de pression $p(r)$ à l'intérieur de notre "étoile" de rayon R . La symétrie sphérique demeure, donc les équations (8.8)–(8.10) dans les notes de cours tiennent toujours la route.

L'introduction de deux nouvelles fonctions $\rho(r)$ et $p(r)$ indique qu'on aura besoin de deux équations supplémentaires pour définir le modèle. La première, introduite en (e) ci-dessous, sera une équation d'état particulièrement simple: densité constante. Pour la seconde, on pourrait utiliser la composante $\theta\theta$ des équations du champ de tonton Albert, mais il s'avère plus pratique d'utiliser notre contrainte de conservation de l'énergie-impulsion:

$$\frac{DT^{\mu\nu}}{Dx^\nu} = 0 \quad (2.1)$$

(revoir Section 5.2.5 des notes de cours, au besoin).

- (a) Montrez que pour une situation statique (la distribution de masse ne varie pas avec le temps), et une métrique à symétrie sphérique de la forme générale donnée par l'éq. (8.8) des notes de cours, la contrainte de normalisation de la quadrivitesse impose:

$$u_\mu = (e^\Phi, 0, 0, 0)$$

et que les composantes de $T^{\mu\nu}$ sont alors bien données par les Éqs. (8.11) dans les notes de cours.

- (b) Démontrez que dans cette situation, la composante rr de l'équation du champ d'Einstein conduit à

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r[r - 2m(r)]} , \quad (5.2)$$

où

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r')(r')^2 dr' ,$$

comme dans le cas de la métrique de Schwarzschild, avant que l'on laisse le rayon R de l'étoile tendre vers zéro.

- (c) Démontrez que vu la symétrie sphérique de la métrique —et de $\rho(r)$ et $p(r)$ —, la seule composante non triviale de (5.1) ci-dessus est la composante $\mu \equiv r$, et que cette composante conduit à:

$$(\rho + p) \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{dp}{dr}$$

- (d) Combinez vos résultats en (b) et (c) pour obtenir une version relativiste de l'équation de l'équilibre hydrostatique:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)[m(r) + 4\pi r^3 p]}{r[r - 2m(r)]} ;$$

c'est la très fameuse équation de Tolman-Oppenheimer-Volkoff.

- (e) Approximons maintenant notre “étoile” comme une sphère de densité constante ρ_* et de rayon R , à l'extérieur de laquelle $\rho = p = 0$; on peut montrer (exercice de haute voltige en intégration, avec décomposition par fractions partielles, changements de variables, etc.) que la solution de l'équation de Tolman-Oppenheimer-Volkoff prend alors la forme:

$$p(r) = \rho_* \left[\frac{R(R - 2M)^{1/2} - (R^3 - 2Mr^2)^{1/2}}{(R^3 - 2Mr^2)^{1/2} - 3R(R - 2M)^{1/2}} \right] .$$

Portez ce résultat en graphique pour $R = 1$ et $M = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ et 0.5 .

- (f) Sur la base de vos résultats en (d), montrez qu'il existe une masse limite $M_{\max}$ qui peut être “compressée” dans une sphère de densité constante et rayon R . Exprimez cette masse limite en fonction de R .
- (g) Maintenant, montrez à partir de (5.2) ci-dessus que la composante tt de la métrique prend la forme

$$g_{tt}(r) = - \left(\frac{3}{2} \left(1 - \frac{2M}{R} \right)^{1/2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3} \right)^{1/2} \right)^2 , \quad r < R .$$

Utilisez ce résultat pour expliquer pourquoi l'équilibre hydrostatique devient impossible quand la masse M dépasse la masse limite trouvée en (f).

- (h) Et pour terminer, petit exercice de conversion des unités géométriques aux unités physiques. Pour une étoile de rayon R à la masse critique déterminée en (f), calculez la densité critique

correspondante en unités physiques (kg m^{-3}). Quel objet physique connu a une densité de cet ordre ?

Ce problème a l'air impressionnant à prime abord, mais je vous donne suffisamment de résultats intermédiaires pour vous guider dans la démarche. En particulier, vous pouvez faire les parties (e)–(h) même si vous n'avez pas pu compléter une ou plusieurs des parties précédentes. Donc, pas de panique, et respirez par le nez !

Question 2 [45 points; variation sur des thèmes connus]

Ce problème vise à vous faire explorer quantitativement les trajectoires d'objets massifs (comme l'*Endurance...*) autour et/ou à travers un trou de ver. Le point de départ est la métrique de trou de ver déjà utilisée à répétition dans quelques exercices des première et troisième séries:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (r^2 + b^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.1)$$

avec $b = 1$ dans tout ce qui suit. On considérera ici des orbites contenues dans le plan équatorial du trou de ver.

- (a) Commencez par démontrer qu'une orbite lancée dans le plan équatorial demeurera dans le plan équatorial.
- (b) Faisant bon usage de nos invariants habituels, démontrez que les orbites équatoriales doivent satisfaire à une relation du type suivant:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V_{\text{eff}}(r), \quad (2.2)$$

et obtenez la forme de ce fameux potentiel effectif $V_{\text{eff}}(r)$ en fonction des autres paramètres du problème.

- (c) Il s'agit maintenant de “lancer” des navettes à une vitesse β ($\equiv V/c$) possiblement relativiste, le long de trajectoires initialement rectilignes ayant des paramètres d'impact croissants; un peu dans le genre de la Figure 1 du TP-3 (voir la page web du cours pour l'énoncé de ce TP, au besoin). Votre prochaine tâche est donc de modifier le code Python de la Figure 4.5 des notes de cours, afin de traiter la métrique ci-dessus plutôt que celle de notre teuton moustachu préféré. En coordonnées cartésiennes avec le centre du trou de ver à la position $(x, y) = (0, 0)$, placez votre navette à $x(t = 0) = 20$, et $y(t = 0)$ allant de 0.1 à 2.0 en incréments de 0.1. La formulation de la condition initiale pour u^r et u^ϕ est le noeud du problème; voici quelques indices:
 - (i) Il existe une relation assez directe entre β et un des invariants de trajectoire.
 - (ii) Le rapport u^r/u^ϕ est entièrement fixé par la position initiale (r_0, ϕ_0) dans le plan équatorial.
 - (iii) À partir de (i)–(ii), il est possible d'établir une relation exprimant $u^r(t = 0)$ en fonction de β et ϕ_0 .
 - (iv) L'équation (2.2) ci-dessus permet d'exprimer le second invariant de trajectoire en fonction de quantités maintenant connues après les étapes (i)–(iii).

Posant $\beta = 0.1$ comme vitesse horizontale initiale, produisez un équivalent de la Figure 1 du TP-3, et identifiez les trajectoires qui traversent le trou de ver, et celle qui ne font que le contourner.



Figure 1: Visualisation réaliste (i.e., calculée selon la relativité générale) d'un trou de ver, vu d'une distance passablement plus grande que le "rayon" b de son "goulot".

- (d) Passez maintenant à une vitesse initiale plus élevée, soit un substantiel $\beta = 0.5$ (la moitié de la vitesse de la lumière!). Recalculez vos trajectoires pour les mêmes positions initiales. Discutez et expliquez les similarités et différences entre vos résultats à $\beta = 0.1$ et $\beta = 0.5$.
- (e) Sur la base de vos calculs de trajectoires, déterminez la section efficace de capture, i.e., l'aire de la surface sphérique dans le plan du ciel vers laquelle des trajectoires initialement rectilignes traverseront le trou de ver.
- (f) La Figure 1 est une visualisation réaliste d'un trou de ver, tirée bien sûr du film *Interstellar*. Où est le plan équatorial sur une telle image ?
- (g) BONUS #1: Sans calculer le tenseur de Riemann, vos calculs permettent d'estimer les effets de marée ressentis par l'*Endurance* lors de la traversée du trou de ver sur une trajectoire non-radiale. Expliquez/estimez, en quelques phrases (+2.5 points).
- (h) BONUS #2: Déterminez (i) la plus grande déviation angulaire possible pour une trajectoire ne traversant pas le trou de ver, et (ii) traversant le trou de ver. Obtenez/estimez les valeurs des paramètres d'impact correspondants (+2.5 points).

Question 3 [15 points; du nouveau!]

Buck vient de terminer la lecture du livre *The Science of Interstellar*, par Kip Thorne. Pendant qu'Anne cherche frénétiquement son DVD *The Martian* pour leur traditionnelle soirée cinéma+popcorn, Buck fait remarquer que comme *Gargantua* est supposé être un trou noir en rotation très rapide, avec J/M très près de l'unité, l'astronaute Cooper aurait déjà du se faire spaghettifier **latéralement** (plutôt que radialement) avant de traverser l'horizon, à cause de la dérive azimuthale de l'espace-temps. Anne n'est pas d'accord.

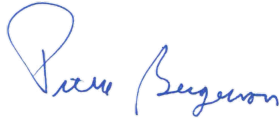
Complétez leur discussion jusqu'à consensus, en deux pages de texte au maximum. Calculs et/ou petits dessins permis, mais non-obligatoires. Si vous allez chercher des informations sur

l'internet, incluez en annexe tous les URLs pertinents et/ou transcription des échanges avec ChatGPT (ou tout autre AI), sinon ça devient du plagiat!

Le Professeur:



Le Répondant:



La Directrice:

