PHY 3070
RELATIVITÉ 2
PROBLÈMES: SÉRIE 3

Distribué le: 17 mars 2025
Chapitres couverts: 6 à 8

Problème 34

Ce problème vise à vous faire explorer quantitativement la déviation de la lumière par un trou de ver, à laquelle vous avez peut-être déjà réfléchi dans le cadre de l'expérience 2. Le point de départ est la métrique de trou de ver déjà utilisée dans quelques exercices de la première série:

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + (r^2 + A^2)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2)$$

Notez que le paramètre contrôlant la "largeur" du goulot du trou de ver est ici dénoté "A", afin d'éviter toute malencontreuse confusion avec le paramètre d'impact (b) qui fera son apparition dans pas long... On se limitera ici à des trajectoires contenues dans le plan équatorial.

(a) Dans le contexte de trajectoires lumineuses décrites par un paramètre affin σ que vous pouvez définir à votre guise, démontrez qu'une trajectoire photonique peut être décrite par

$$\frac{1}{b^2} = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 + W_{\mathrm{eff}}(r) \ ,$$

avec b correspondant au paramètre d'impact. Calculez la forme du potentiel effectif $W_{\mathrm{eff}}(r)$. Détaillez bien toutes les étapes de votre raisonnement et de votre démarche.

(b) Il existe une orbite photonique circulaire dans cette métrique. À quel rayon est-elle située ? Cette orbite est-elle stable ou instable ?

(c) Calculez la longueur physique (i.e., la circonférence) de l'orbite circulaire identifiée en (b).

(d) Modifiez le code Python du TP4 pour calculer des trajectoires de photons approchant le trou de ver le long de trajectoires parallèles à très grande distances (dans le style de la Fig. 1 dans l'énoncé du TP4). Posez $A = 2$ dans la métrique ci-dessus, et utilisez comme condition initiale des paramètres d'impact à grandes distances $b = [0., 0.3, 0.6, 0.9, 1.2, ..., 3.0]$ (i.e., incréments de 0.3 en b). Produisez un équivalent de la Fig. 1 du TP4.

(e) Identifiez lesquelles de vos trajectoires traversent de l'autre coté du trou ver, et lesquelles demeurent dans notre région de l'Univers. Comme toujours, justifiez bien votre raisonnement!

Problème 35

Travaillant dans le contexte de la métrique de Robertson-Walker-Friedmann, démontrez que la trajectoire d'un observateur comobile (coordonnées spatiales fixes) satisfait trivialement (i.e., $0 = 0$) l'équation géodésique, quelle que soit la courbure ($k = 0$ ou ± 1).

Problème 36

Encore un peu de jonglerie tensorielle:

(a) Suivant la procédure générale introduite dans les Notes de cours pour le calcul de la composante R_{00} du tenseur de Ricci dans la métrique de Robertson-Walker-Friedmann, calculez les composantes R_{11} et R_{22} de ce même tenseur.

(b) ...et la suite logique: calculez les composantes G_{11} et G_{22} du tenseur d'Einstein.

(c) Reprenez le calcul en (b), mais cette fois en utilisant le protocole décrit à l'annexe A des Notes de cours; pas mal plus rapide n'est-ce-pas !

Problème 37

On considère un Univers de courbure positive tel que décrit par la métrique de Robertson-Walker-Friedmann avec $k = +1$, avec matière non-relativiste et sans radiation, et incluant une densité d'énergie du vide associée à une constante cosmologique $\Lambda \neq 0$.

(a) Démontrez que pour une valeur donnée de Λ, il existe une valeur de la densité ρ pour laquelle le facteur d'échelle demeure constant dans le temps. C'est l'Univers statique d'Einstein!

(b) Comment l'existence de Λ affecte-t-elle le volume de cet Univers ?

(c) Calculez l'évolution temporelle du facteur d'échelle $a(t)$ si la densité diffère très légèrement de la valeur trouvée en (a) (soit plus grande, soit plus petite). Qu'en concluez vous par rapport à la stabilité de l'Univers d'Einstein ?

Cet Univers statique d'Einstein a été caractérisé par son illustre auteur comme la plus grande gaffe de sa vie...

Problème 38

On avait montré, dans notre étude des modèles cosmologiques basés sur la métrique Robertson-Walker-Friedmann avec $k \neq 0$, que sous la définition $a_{\max} = 8\pi\rho_0 a_0^3/3$ notre première équation de Friedmann prenait la forme:

$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{a_{\max}}{a} \mp 1 \ , \qquad k \pm 1 \ .$$

(a) Le cas $k = +1$: montrez que le changement de variable

$$a(\eta) = a_{\max} \sin^2(\eta/2)$$

conduit bien aux équations (7.69)–(7.70) des notes de cours.

(b) Le cas $k = -1$: montrez que le changement de variable

$$a(\eta) = a_{\max} \sinh^2(\eta/2)$$

conduit bien aux équations (7.74)–(7.75) des notes de cours.

Problème 39

Les observations astronomiques permettent d'évaluer les densités de masse (baryonique visible) et de radiation à l'époque actuelle aux valeurs:

$$\rho(t_0) = 10^{-31}\,\mathrm{g\,cm^{-3}} ,$$

$$\rho_r(t_0) = 10^{-34}\,\mathrm{g\,cm^{-3}} ,$$

(a) Calculez le facteur d'échelle pour lequel $\rho = \rho_r$.

(b) Sachant que la température actuelle caractérisant la densité de radiation cosmologique est de 2.275 K, quelle était la température à l'époque où $\rho = \rho_r$?

(c) Dans le cadre de l'Univers plat d'Einstein-de-Sitter ($k = p = \Lambda = 0$), combien de temps après le Big Bang ce stade évolutif a-t-il été atteint ?

Problème 40

On considère une séquence de modèles cosmologiques pour des Univers plats ($k = 0$) sans radiation et à la densité critique ($\Omega_R = 0$, $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1.0$).

(a) Calculez une séquence de modèles avec Ω_Λ allant de zéro à 1 (tout en respectant $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$), coincidant tous à $(t, a) = (1, 1)$, un peu comme sur la Figure 7.10 des Notes de cours.

(b) Portez en graphique l'âge de l'Univers (en milliard d'années) versus Ω_Λ;

(c) Allez chercher sur l'internet (ou ailleurs) l'âge de la plus vieille étoile connue;

(d) Quelle contrainte vos résultats en (a)–(c) posent-ils sur la magnitude de la constante cosmologique (en unités physiques SVP!) si l'Univers est bel et bien plat ? Selon vous, quelles sont les principales sources d'incertitude dans un tel calcul ?

Problème 41

Travaillant dans la métrique de Schwarzschild, calculez la quadriforce requise pour garder Buck (et sa navette) au repos à une distance $d = M$ (en unités géométriques) de l'horizon d'un trou noir de masse $10^6\,M_\odot$, où $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$ kg.

Problème 42

Considérons un observateur chûtant radialement dans un trou noir de Schwarzschild à partir d'une position $r_0 \gg 2M$.

(a) Démontrez que l'intervalle de temps propre $\Delta\tau$ requis pour chuter de la position r_0 jusqu'à la singularité centrale est donné par:

$$\Delta\tau = \frac{\pi}{2\sqrt{2M}} r_0^{3/2}$$

(b) Démontrez que l'intervalle de temps propre $\delta\tau$ requis pour passer de l'horizon ($r = 2M$) à la singularité centrale est donné par

$$\frac{\delta\tau}{M} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{r_0}{M}\right)^{3/2} \arctan\left(\sqrt{\frac{2M}{r_0 - 2M}}\right) - \frac{\sqrt{r_0(r_0 - 2M)}}{M}$$

(c) Démontrez que même avec une puissance de propulsion illimitée pour tenter de freiner la chûte, l'intervalle de temps propre maximal requis pour passer de l'horizon à la singularité centrale est donné par:

$$\Delta\tau = \pi M \ .$$

Problème 43

Ce petit problème vise à vous faire explorer (quantitativement) un (autre) phénomène très particulier associé à la chute dans un trou noir (à la Schwarzschild, i.e., sans rotation):

Si deux observateurs franchissent l'horizon d'un trou noir et chutent vers la singularité à $r = 0$, celui/celle activant les propulseurs de sa fusée pour se ralentir atteindra $r = 0$ *avant* son comparse se laissant tomber en chute libre.

L'explication habituelle est qu'un observateur en chute libre se déplace le long d'une géodésique, et qu'une géodésique maximise le temps propre entre deux points; donc, n'importe quelle déviation par rapport à la trajectoire géodésique (causée, par exemple, par une accélération propre induite par les propulseurs d'une fusée), ne peut que conduire à une trajectoire couvrant un plus petit intervalle de temps propre que la chute libre, et ce quelle que soit la grandeur ou orientation de cette accélération. Ça semble coulé-dans-le-béton comme argument, mais le problème est en fait plein de petites subtilités que vous aurez la joie de découvrir au fil de ce problème...

Votre première étape est de lire attentivement l'article intitulé *No Way Back: Maximizing Survival Time Below the Schwarzschild Event Horizon*, par Geraint Lewis et Juliana Kwan, disponible sur la page web du cours. Ensuite;

(a) Démontrez que l'introduction d'une nouvelle variable temporelle $q = v - r$ dans la métrique d'Eddington-Finkelstein donnée par l'éq. (8.35) des Notes de cours, conduit bien à la métrique décrite par l'équation (2) de l'article de Lewis & Kwan (avec notre $q \equiv$ leur t).

(b) Démontrez que les équations (14), (15) et (2) de l'article suivent bien de (7), (8), (9) et (13), moyennant "...a little algebra...".

En présence d'une force extérieure (moteur de la fusée) produisant une (quadri)accélération de norme constante a, l'équation géodésique devient

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\tau} = a^\mu \ .$$

Pour une trajectoire radiale, seules les composantes r et t doivent être considérées.

(c) Développez ces deux composantes de l'équation géodésique incluant une accélération, avec les membres de droite donnés par les équations (14) et (15) de l'article. Attention, Lewis

& Kwan vous ont déjà calculé tous les coefficients de connexion requis, pas besoin de les recalculer!

(d) Introduisez deux nouvelles variables secondaires vous permettant d'exprimer vos deux équations différentielles d'ordre deux sous la forme d'un système de quatre équations différentielles d'ordre 1. Retournez lire la section 4.3.5 des Notes de cours au besoin.

(e) Modifiez le code Runge-Kutta de la Figure 4.4 pour solutionner le système de quatre équations différentielles couplées obtenues en (d), toujours pour une trajectoire purement radiale. Attention, comme l'indiquent Lewis & Kwan, en présence d'une force extérieure la quantité e n'est plus une constante, mais varie en fonction du temps selon l'éq. (13) de leur article.

(f) Obtenez des solutions numériques au problème de la chute depuis l'horizon pour des accélérations de norme $a = 0$, 0.5, 1.0, 2.0 et 5.0. Utilisez une condition initiale ($\tau = 0$) où vos Bucks sont au repos à $r/M = 2.000001$ (pourquoi pas de $r/M = 2$ exactement?). Comment varie l'intervalle de temps propre requis pour passer de l'horizon à $r = 0$ en fonction de a ? Le Buck en chute libre vit-il vraiment plus longtemps que ses clones en mode freinage ?

(g) Finalement, reprenez le calcul en (f), mais cette fois en partant de la position $r/M = 3.0$, et en appliquant la déccélération constante seulement une fois sous $r/M = 2.0$; vos Bucks sont donc tous en chute libre de $r/M = 3$ à $r/M = 2$. Vous devriez obtenir quelque chose de semblable à la moitié gauche de la Figure 2 de l'article de Lewis & Kwan. Et donc, est-ce vraiment le cas que la trajectoire en chute libre maximise **toujours** le temps propre entre deux points? La réponse est oui, mais comment pouvez vous alors réconcilier vos résultats en (f) et (g) sur cette question ?

ATTENTION:

- Une condition initiale au repos ($u^r = 0$) implique que la quantité $e^2 + g_{tt}$ sous la racine carrée dans le dénominateur de l'expression (14) de l'article sera très près de zéro car les deux termes sont presque identiques (et $g_{tt} < 0$ si $r/M > 2$); pour éviter que les erreurs de troncation ne conduisent à des racines carrées d'un nombre très petit mais négatif, un truc numérique simple est de remplacer l'argument de la racine carrée par $e^2 + g_{tt} + \epsilon$, avec $\epsilon = 10^{-7}$ ou dans le genre. Le seul impact physique (mineur) sera retrouvera dans l'évaluation des premier 1–3 pas de temps, et n'aura pas d'influence significative sur votre résultat final.

- Assurez vous d'utiliser une tolérance de 10^{-6} (ou moins) dans votre algorithme Runge-Kutta à pas adaptif, le problème devenant numériquement coriace à l'approche de $r = 0$.

Problème 44

Il s'agit ici de reprendre la dérivation de la métrique de Schwarzschild (débutant à l'éq. (8.8) des Notes de cours), mais en incluant cette fois la constante cosmologique dans l'équation du champ d'Einstein, soit sa forme donnée par l'éq. (5.106). Suggestion: remplacez le Λ dans (8.7) par un lambda minuscule ("λ") pour éviter toute malencontreuse confusion avec la constante cosmologique Λ dans (5.106) !

(a) Obtenez les équivalents des équations (8.12) et (8.17);

(b) Montrez à partir des expression en (a) que la forme modifiée de la métrique de Schwarzschild est alors:

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)\ ,$$

Problème 45

Ce problème vise à vous faire explorer le mécanisme de formation présumément le plus commun pour un trou noir de masse stellaire. Plus précisément, je vous guide dans la construction d'un modèle (simplifié) de structure interne d'une étoile (très) massive basé sur la relativité générale.

Il sera payant de commencer par repasser attentivement sur la Section 8.1 des notes de cours. L'approche suivie ici est essentiellement identique, sauf qu'on introduit des profils de densité $\rho(r)$ et de pression $p(r)$ à l'intérieur de notre “étoile” de rayon R. La symétrie sphérique demeure, donc les équations (8.8)–(8.10) dans les notes de cours tiennent toujours la route; pas besoin de recalculer les composantes du tenseur d'Einstein, yé !

L'introduction de deux nouvelles fonctions $\rho(r)$ et $p(r)$ indique qu'on aura besoin de deux équations supplémentaire pour définir le modèle. La première, introduite en (e) ci-dessous, sera une équation d'état particulièrement simple: densité constante. Pour la seconde, on pourrait utiliser la composante $\theta\theta$ des équations du champ de tonton Albert, mais il s'avère plus pratique d'utiliser notre contrainte de conservation de l'énergie-impulsion:

$$\frac{\mathrm{D}T^{\mu\nu}}{\mathrm{D}x^\nu} = 0 \qquad (A)$$

(revoir Section 5.2.5 des notes de cours, au besoin).

(a) Montrez que pour une situation statique (la distribution de masse ne varie pas avec le temps), et une métrique à symétrie sphérique de la forme générale donnée par l'éq. (8.8) des notes de cours, la contrainte de normalisation de la quadrivitesse impose:

$$u_\mu = (e^\Phi, 0, 0, 0)$$

et que les composantes de $T^{\mu\nu}$ sont:

$$T_{tt} = \mathrm{e}^{2\Phi}\rho(r)\ , \qquad T_{rr} = \mathrm{e}^{2\Lambda}p(r)\ , \qquad T_{\theta\theta} = r^2 p(r)\ , \qquad T_{\phi\phi} = r^2\sin^2\theta p(r)\ .$$

(b) Démontrez que dans cette situation, la composante rr de l'équation du champ d'Einstein conduit à

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r[r - 2m(r)]}\ , \qquad (B)$$

où

$$m(r) = 4\pi\int_0^r \rho(r')(r')^2\mathrm{d}r'\ ,$$

comme dans le cas de la métrique de Schwarzschild, avant que l'on concentre toute la masse à $r = 0$.

(c) Démontrez que vu la symétrie sphérique de la métrique —et de $\rho(r)$ et $p(r)$—, la seule composante non triviale de (A) ci-dessus est la composante $\mu \equiv r$, et que cette composante conduit à:

$$(\rho + p)\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$$

(d) Combinez vos résultats en (b) et (c) pour obtenir une version relativiste de l'équation de l'équilibre hydrostatique:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{(\rho + p)[m(r) + 4\pi r^3 p]}{r[r - 2m(r)]} \;;$$

c'est la très fameuse équation de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. L'équilibre hydrostatique requiert que la pression augmente quand on plonge vers le centre de l'étoile, de manière à ce que le négatif de son gradient, pointant vers l'extérieur, puisse équilibrer la force gravitationnelle agissant sur un élément de masse, pointant vers le centre.

(e) Approximons maintenant notre "étoile" comme une sphère de densité constante ρ_* et de rayon R, à l'extérieur de laquelle $\rho = p = 0$; on peut montrez (exercice de haute voltige en intégration, avec décomposition par fractions partielles, changements de variable, etc) que la solution de l'équation de Tolman-Oppenheimer-Volkoff prend alors la forme:

$$p(r) = \rho_* \left[\frac{R(R - 2M)^{1/2} - (R^3 - 2Mr^2)^{1/2}}{(R^3 - 2Mr^2)^{1/2} - 3R(R - 2M)^{1/2}}\right] \;.$$

Portez ce résultat en graphique pour $R = 1$ et $M = 0.1$, 0.2, 0.3, 0.4 et 0.5 (unités géométriques!).

(f) Sur la base de vos résultats en (e), démontrez qu'il existe une masse limite M_{max} qui peut être "compressée" dans une sphère de densité constante et rayon R. Exprimez cette masse limite en fonction de R.

(g) Maintenant, montrez à partir de (b) ci-dessus que la composante tt de la métrique prend la forme

$$g_{tt}(r) = -\left(\frac{3}{2}\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2}\right)^2 , \qquad r < R \;.$$

NOTE: la substitution de variable suivante pourrait vous être d'une grande utilité:

$$u(r) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2} - \frac{3}{2}\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} \;.$$

Utilisez ce résultat pour expliquer pourquoi l'équilibre hydrostatique devient impossible quand la masse M dépasse la masse limite trouvée en (f).

(h) Et pour terminer, petit exercice de conversion des unités géométriques aux unités physique. Pour une étoile de rayon R à la masse critique déterminée en (f), calculez la densité critique correspondante en unités physiques (kg m^{-3}). Quel objet physique connu a une densité de cet ordre ?

Problème 46

Ce problème vise à approfondir quelques aspects des orbites de particules massives autour de trous noirs en rotation.

(a) Complétez les étapes mathématiques manquantes pour passer de (8.64)–(8.65) à (8.66)–(8.67), et pour la suite jusqu'à (8.69)–(8.70).

(b) Existe-t-il des orbites circulaires stables et/ou instables ici ? Sous quelles conditions (valeur et signe de ℓ, de e, etc.) ? Ces orbites survivent-elles dans la limite $a/M \to 1$?

Problème 47

Un peu la suite du précédent; il s'agit de modifier le code Python de la Figure 4.5 des notes de cours, calculant les trajectoires de particules massives dans le plan équatorial de la métrique de Schwarzschild, afin de calculer des trajectoires dans le plan équatorial de la métrique de Kerr.

(a) Aux fins de validation, utilisez votre code pour reproduire la Figure 8.7 des notes de cours.

(b) Travaillant avec des trajectoires lancées initialement dans la direction prograde $+\phi$ et avec $e = 1$, comme la trajectoire en vert sur la Figure 8.7, existe-t-il une distance radiale initiale pour laquelle vous pouvez produire une orbite de capture ayant $\ell > 0$?

(c) Travaillant avec des trajectoires lancées initialement dans la direction rétrograde $-\phi$ et toujours avec $e = 1$, comme la trajectoire en rouge sur la Figure 8.7, existe-t-il une distance radiale initiale et valeur de ℓ pour laquelle vous pouvez produire une orbite rétrograde liée ?

Problème 48

Nous avons vu à la §8.4.7 des Notes de cours comment le mécanisme dit de Penrose permet d'extraire de l'énergie d'un trou noir en rotation. Il s'avère que les trajectoires d'énergie négative sont toutes rétrogrades; par conséquent, leur capture extrait également du moment cinétique du trou noir, réduisant inexorablement J, donc le volume de l'ergosphère, dont l'existence est essentielle au mécanisme de Penrose. L'extraction d'énergie ne peut donc seulement se poursuivre jusqu'à ce que $J = 0$. Ceci pose une limite fondamentale à la quantité d'énergie qui peut être extraite d'un trou noir, indépendamment de tout aspect technologique du processus (viz. Fig. 8.10 des Notes). Il s'agit ici de calculer cette limite.

Il s'avère qu'un théorème, dû à Stephen Hawkins (1942–2018), permet de calculer assez facilement la limite en question. Ledit théorème stipule qu'un trou noir absorbant de la masse-énergie de son "environnement" (soit le volume extérieur à son horizon) ne peut, ce faisant, qu'augmenter la surface de son horizon, et jamais la diminuer (il existe en fait ici une analogie profonde avec l'entropie). Allons-y par étapes:

(a) Calculez la surface de l'horizon d'un trou noir de masse M et moment cinétique J.

(b) Calculez la masse d'un trou noir de Schwarzschild (sans rotation) ayant la même surface d'horizon que pour votre trou noir de Kerr en (a), si ce dernier est à la limite de rotation maximale $J = M^2$.

(c) Invoquez $E = mc^2$ (Caramba!) et vos résultats en (a) et (b) pour calculer cette fameuse fraction de l'énergie de masse du trou noir initial en rotation rapide qui peut être extraite par tout mécanisme de type Penrose.

Problème 49

Tel que promis à la §8.5 discutant le mécanisme de Hawkins:

(a) Calculez la quantité d'énergie (en Joule) irradiée par un trou noir en évaporation, dans la dernière seconde du processus.

(b) Ensuite, allez fouiner sur le web (et/ou à la bibliothèque de physique) et déterrez de l'information sur la quantité (estimée) d'énergie émise par les les soit-disant sursauts gamma courts ("short gamma-ray bursts"). L'évaporation de trous noirs primordiaux est-elle un mécanisme viable pouvant être à l'origine de ce phénomène ? Exercez votre pensée critique, justifiez bien votre raisonnement, et incluez les références aux sites/ouvrages que vous avez consultés.

(c) Un trou noir en évaporation voit la surface de son horizon diminuer inexorablement, ce qui semble en contradiction avec le théorème de Hawkins décrit au problème précédent. Comment peut-on résoudre cette contradiction (apparente) ?
