PHY 3070
RELATIVITÉ 2
TRAVAUX PRATIQUES 4: lundi 17 mars 2025

Le TP de cette semaine développe la solution à l'équation de la déviation géodésique pour un observateur chutant pieds les premiers dans un trou noir décrit par la métrique de Schwarzschild, le long d'une trajectoire radiale, soit la situaion décrite à la §5.1.3 des notes de cours (qui devrait être relue avant de débuter ce TP!). Essentiellement, il s'agit de faire au long le passage de l'équation (5.46) à sa solution dans un repère en chute libre, soit l'éq. (5.47).

La séquence d'étapes requises est présentée sous l'Éq. (5.47) dans les notes de cours. Les deux premières seront réalisées en équipe sous la compétente gouverne de votre TP-iste. Ce qui suit fournit quelques explications en supplément au notes de cours, relativement à la transformation du tenseur de Riemann vers un repère en chute libre, i.e., décrit bar une base vectorielle orthonormale.

Commençons avec un quadrivecteur a^μ dont les composantes sont exprimées dans une base vectorielle non-orthonormale (par exemple, la base associée à la métrique de Schwarzschild). En un point spécifique de l'espace-temps, (t, r, θ, ϕ), la projection sur une base orthornormale s'effectue en projetant chaque composante de a^μ sur chacun des vecteurs $\mathbf{e}^{\hat{\mu}}$ définissant la base orthonormale, par un quatuor de produits scalaires:

$$a^{\hat{\mu}} = (\mathbf{e}^{\hat{\mu}})_\mu a^\mu \ , \qquad \hat{\mu} = 0, 1, 2, 3 \ ,$$

où, par convention, le "^" sur un indice signale que base est orthonormale. Comprenez bien comment la sommation implicite sur μ capture bien la projection par produit scalaire de a^μ sur les $\mathbf{e}^{\hat{\mu}}$.

Un tenseur pouvant être construit via le produit extérieur de quadrivecteurs, l'expression ci-dessus se généralise facilement; par exemple, pour un tenseur de rang deux:

$$G^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = (\mathbf{e}^{\hat{\mu}})_\mu (\mathbf{e}^{\hat{\nu}})_\nu G^{\mu\nu} \ , \qquad \hat{\mu}, \hat{\nu} = 0, 1, 2, 3 \ ,$$

ou encore, dans le cas spécifique du tenseur de Riemann qui nous intéresse dans ce TP:

$$R^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} = (\mathbf{e}^{\hat{\alpha}})_\alpha (\mathbf{e}_{\hat{\beta}})^\beta (\mathbf{e}_{\hat{\gamma}})^\gamma (\mathbf{e}_{\hat{\delta}})^\delta R^\alpha_{\beta\gamma\delta} \ , \qquad \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta} = 0, 1, 2, 3 \ .$$

Notez que le caractère covariant/contravariant des indices du tenseur transformé influe sur le choix de la représentation covariante vs contravariante des vecteurs de la base orthonormale dans l'expression du produit scalaire!

Si vous voulez en savoir savoir plus sur tout ça, voir le chapitre 20 du Hartle, en particulier les sections 20.2 et 20.3.