

PHY 3070
RELATIVITÉ 2
PROBLÈMES: SÉRIE 3

Distribué le: 11 mars 2021
Chapitres couverts: 6 à 8

Problème 36

Un peu de jonglerie tensorielle dans le contexte des ondes de gravité:

- (a) Démontrez que la substitution de l'équation (6.33) dans (6.32) conduit bien à la contrainte

$$k_\alpha k^\alpha = 0 .$$

- (b) Démontrez que la substitution de l'équation (6.33) dans (6.12) conduit bien à (6.37)
-

Problème 37

Nous avons obtenu la forme spécifique de la métrique Robertson-Walker-Friedmann pour un espace de courbure positive (l'équation (7.8) des Notes de cours) en exprimant une hypersurface sphérique dans un espace 4D via l'équation (7.2) des Notes.

- (a) La métrique pour un espace de courbure négative peut être obtenue en décrivant cette fois une hypersurface hyperboloïde via la relation:

$$u^2 - x^2 - y^2 - z^2 = a^2(t) .$$

Reprenez le développement de la section 7.1 et démontrez que la métrique prend encore une fois la forme donnée par l'équation (7.9) mais avec $k = -1$.

- (b) Adaptez cette procédure à un espace plat ($k = 0$), et montrez que dans ce cas la métrique se réduit bien à

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) (d\sigma^2 + \sigma^2 d\Omega^2) .$$

Attention, il ne s'agit pas simplement de poser $k = 0$ dans (7.9)! Si vous bloquez, allez fouiner dans le Hartle...

Problème 38

Travaillant dans le contexte de la métrique de Robertson-Walker-Friedmann, démontrez que la trajectoire d'un observateur comobile (coordonnées spatiales fixes) satisfait trivialement (i.e., $0 = 0$) l'équation géodésique, quelle que soit la courbure ($k = 0$ ou ± 1).

Problème 39

Encore un peu de jonglerie tensorielle:

- (a) Suivant la procédure générale introduite dans les Notes de cours pour le calcul de la composante R_{00} du tenseur de Ricci dans la métrique de Robertson-Walker-Friedmann, calculez les composantes R_{11} et R_{22} de ce même tenseur.
- (b) ...et la suite logique: calculez les composantes G_{11} et G_{22} du tenseur d'Einstein.
- (c) Reprenez le calcul en (b), mais cette fois en utilisant le protocole décrit à l'annexe A des Notes de cours; pas mal plus rapide n'est-ce-pas !

Problème 40

On considère un Univers de courbure positive tel que décrit par la métrique de Robertson-Walker-Friedmann avec $k = +1$, avec matière non-relativiste et sans radiation, et incluant une densité d'énergie du vide associée à une constante cosmologique $\Lambda \neq 0$.

- (a) Démontrez que pour une valeur donnée de Λ , il existe une valeur de la densité ρ pour laquelle le facteur d'échelle demeure constant dans le temps.
- (b) Comment l'existence de Λ affecte-t-elle le volume de cet Univers ?
- (c) Calculez l'évolution temporelle du facteur d'échelle $a(t)$ si la densité diffère très légèrement de la valeur trouvée en (a) (soit plus grande, soit plus petite). Qu'en concluez vous par rapport à la stabilité de l'Univers statique d'Einstein ?

Cet Univers statique d'Einstein a été caractérisé par son illustre auteur comme la plus grande gaffe de sa vie...

Problème 41

On avait montré, dans notre étude des modèles cosmologiques basés sur la métrique Robertson-Walker-Friedmann avec $k \neq 0$, que sous la définition $a_{\max} = 8\pi\rho_0 a_0^3/3$ notre première équation de Friedmann prenait la forme:

$$\left(\frac{da}{dt}\right) = \frac{a_{\max}}{a} \mp 1, \quad k \pm 1.$$

- (a) Le cas $k = +1$: montrez que le changement de variable

$$a(\eta) = a_{\max} \sin^2(\eta/2)$$

conduit bien aux équations (7.69)–(7.70) des notes de cours.

- (b) Le cas $k = -1$: montrez que le changement de variable

$$a(\eta) = a_{\max} \sinh^2(\eta/2)$$

conduit bien aux équations (7.74)–(7.75) des notes de cours.

Problème 42

Les observations astronomiques permettent d'évaluer les densités de masse (baryonique visible) et de radiation à l'époque actuelle aux valeurs:

$$\rho(t_0) = 10^{-31} \text{ g cm}^{-3} ,$$

$$\rho_r(t_0) = 10^{-34} \text{ g cm}^{-3} ,$$

- Calculez le facteur d'échelle pour lequel $\rho = \rho_r$.
 - Sachant que la température actuelle caractérisant la densité de radiation cosmologique est de 2.275 K, quelle était la température à l'époque où $\rho = \rho_r$?
 - Dans le cadre de l'Univers plat d'Einstein-de-Sitter ($k = p = \Lambda = 0$), combien de temps après le Big Bang ce stade évolutif a-t-il été atteint ?
-

Problème 43

On a vu que pour un fluide cosmologique dominé par la radiation, la pression (de radiation) obéit à l'équation d'état

$$p_r = \frac{1}{3} \rho_r .$$

Solutionnez les équations de Friedmann-Lemaître (i.e., obtenez $a(t)$) pour un Univers ainsi dominé par la radiation en tout temps. L'expansion est-elle plus rapide ou plus lente que quand la matière domine ? Posez $\Lambda = 0$ mais considérez les trois cas $k = +1, 0, -1$.

Problème 44

L'Univers version Willem de Sitter (1872–1934): Il s'agit ici d'un Univers dominé par la densité d'énergie du vide, tel que capturé par une constante cosmologique $\Lambda > 0$, et ayant $\rho = p = 0$.

- Montrez que pour $k = 0$ ou $k = -1$, quand t devient très grand le facteur d'échelle $a(t)$ croît exponentiellement avec t .
 - Montrez que pour $k = +1$, deux types d'évolution sont possibles (expansion suivie d'une contraction, ou expansion éternelle), dépendant de la grandeur de Λ .
 - A-t-on toujours un état initial singulier du genre Big Bang dans ce type de modèles cosmologiques ?
-

Problème 45

On considère une séquence de modèles cosmologiques pour des Univers plats ($k = 0$) sans radiation et à la densité critique ($\Omega_R = 0, \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1.0$).

- Calculez une séquence de modèles avec Ω_Λ allant de zéro à 1 (tout en respectant $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$), coïncidant tous à $(t, a) = (1, 1)$, un peu comme sur la Figure 7.10 des Notes de cours.
- Portez en graphique l'âge de l'Univers (en milliard d'années) versus Ω_Λ ;

- (c) Allez chercher sur l'internet (ou ailleurs) l'âge de la plus vieille étoile connue;
- (d) Quelle contrainte vos résultats en (a)–(c) posent-ils sur la magnitude de la constante cosmologique (en unités physiques SVP!) si l'Univers est bel et bien plat ? Selon vous, quelles sont les principales sources d'incertitude dans un tel calcul ?

Problème 46

Considérons un observateur chûtant sous l'horizon d'un trou noir de Schwarzschild. Démontrez que même avec une puissance de propulsion illimitée pour tenter de freiner la chute, l'intervalle de temps propre maximal requis pour passer de l'horizon à la singularité centrale est donné par:

$$\Delta\tau = \pi M .$$

Problème 47

Ce problème vise à approfondir quelques aspects des orbites de particules massives autour de trous noirs en rotation.

- (a) Complétez les étapes mathématiques manquantes pour passer de (8.63)–(8.64) à (8.65)–(8.66), et pour la suite jusqu'à (8.68)–(8.69).
- (b) Existe-t-il des orbites circulaires stables et/ou instables ici ? Sous quelles conditions (valeur et signe de ℓ , de e , etc.) ?

Problème 48

Le 10 avril 2019 la NASA présentait, dans la cadre d'une conférence de presse très médiatisée, l'image reproduite à la Figure 8.14 des Notes de cours, soit celle du trou noir supermassif au centre de la galaxie elliptique M87, située à 55 million d'années-lumière de la Terre. Il s'agit là d'une image de synthèse produite par un réseau de radiotélescopes éparpillés un peu partout sur Terre. L'échelle de couleur code l'intensité de la radiation électromagnétique mesurée dans le domaine radio. Le but de ce problème est de vous faire explorer l'origine de cet anneau, et d'en déduire une approximation pour la masse du trou noir central.

L'anneau lumineux est dû principalement à un effet de lentille gravitationnelle, concentrant l'émission lumineuse du gaz chaud et diffus entourant le trou noir. On considérera ici une version géométriquement simplifiée, où on se limitera à calculer l'effet de lentille gravitationnelle sur un arrière-plan de luminosité constante, et ce dans la métrique de Schwarzschild. Le calcul peut donc être effectué en deux dimensions spatiales, un peu comme pour les calculs présentés à la Figure 4.8 des Notes de cours. Se référant à cette Figure, on supposera que l'arrière plan lumineux est le long du bord vertical gauche du diagramme, et l'observateur est situé à grande distance à droite. Vu l'immense distance à M87, on supposera que les rayons lumineux arrivent à l'observateur sur des trajectoires qui sont toutes parallèles.

- (a) Utilisez les invariants du mouvement pour calculer l'équivalent des éqs. (4.49)–(4.51) pour une trajectoire de photon

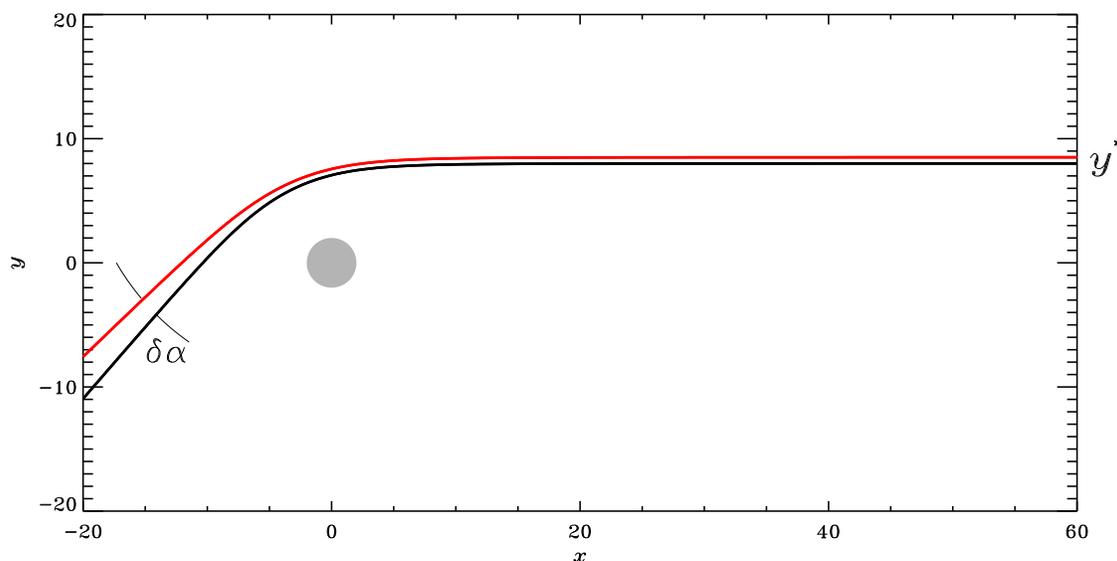


Figure 1: Déviation de deux faisceaux lumineux initialement parallèle par un trou noir. Pour un arrière-plan de luminosité homogène et isotrope, l'amplification de l'intensité lumineuse à la position y^* par focalisation géométrique est proportionnelle à l'ouverture angulaire $\delta\alpha$. L'axe- x serait ici perpendiculaire au plan de l'image sur la Figure 8.14 des Notes de cours.

- (b) Produisez un équivalent (approximatif) de la Figure 4.8, mais où les photons originent de positions réparties uniformément le long de la ligne $x = +100$, pour $0 \leq y \leq +50$ avec intervalle $\Delta y = 0.5$, se déplaçant (initialement) horizontalement vers la gauche (direction négative en x). Notez qu'on est ici en train de calculer la trajectoire des photons dans le sens inverse de leur propagation. Stoppez la trajectoires de vos photons à $x = -25$, $y = -50$, où quand ils tombent sous l'horizon (dépendant de la forme de la trajectoire). Vous pouvez poser $e = 1$, et notez bien que pour une telle condition initiale le paramètre d'impact b est égal à la position initiale en y de votre photon.
- (c) Pour chaque paire de trajectoires adjacentes en y , calculez l'ouverture angulaire $\delta\alpha$ une fois passé le trou noir. La Figure 1 illustre l'idée, pour une seule paire de trajectoires. Évidemment, vous ne calculez ceci que pour les trajectoires de photons n'étant pas capturés par le trou noir.
- (d) Portez en graphique $\delta\alpha$ versus la moyenne (y^*) des positions initiales en y pour chaque paire de trajectoires. L'ouverture $\delta\alpha$ mesure la focalisation géométrique des faisceaux lumineux provenant de la gauche, et détermine donc l'intensité lumineuse que mesurera un observateur éloigné à cette position en y^* (équivalent au segment radial entre cette position et le centre du trou noir, vu la symétrie axiale du système) sur le plan du ciel.
- (e) Sachant que le rayon de l'anneau au pic en intensité sur la Figure 8.14 des Notes de cours est de $\simeq 60 \times 10^9$ km, à partir de votre résultat en (d) déduisez la masse du trou noir supermassif au centre de M87.
- (f) Sur la Figure 8.14, comment est orienté l'axe de rotation dans le plan du ciel ici ? L'anneau est-il contenu dans l'ergosphère ? Justifiez bien vos réponses à ces deux questions.

Problème 49

Nous avons vu à la §8.4.7 des Notes de cours comment le mécanisme dit de Penrose permet d'extraire de l'énergie d'un trou noir en rotation. Il s'avère que les trajectoires d'énergie négative sont toutes rétrogrades; par conséquent, leur capture extrait également du moment cinétique du trou noir, réduisant inexorablement J , donc le volume de l'ergosphère, dont l'existence est essentielle au mécanisme de Penrose. L'extraction d'énergie ne peut donc seulement se poursuivre jusqu'à ce que $J = 0$. Ceci pose une limite fondamentale à la quantité d'énergie qui peut être extraite d'un trou noir, indépendamment de tout aspect technologique du processus (viz. Fig. 8.10 des Notes). Il s'agit ici de calculer cette limite.

Il s'avère qu'un théorème, dû à Stephen Hawking (1942–2018), permet de calculer assez facilement la limite en question. Ledit théorème stipule qu'un trou noir absorbant de la masse-énergie de son "environnement" (soit le volume extérieur à son horizon) ne peut, ce faisant, qu'augmenter la surface de son horizon, et jamais la diminuer (il existe en fait ici une analogie profonde avec l'entropie). Allons-y par étapes:

- (a) Calculez la surface de l'horizon d'un trou noir de masse M et moment cinétique J .
- (b) Calculez la masse d'un trou noir de Schwarzschild (sans rotation) ayant la même surface d'horizon que pour votre trou noir de Kerr en (a), si ce dernier est à la limite de rotation maximale $J = M^2$.
- (c) Invoquez $E = mc^2$ (Caramba!) et vos résultats en (a) et (b) pour calculer cette fameuse fraction de l'énergie de masse du trou noir initial en rotation rapide qui peut être extraite par tout mécanisme de type Penrose.

Problème 50

Tel que promis à la §8.5 discutant le mécanisme de Hawking:

- (a) Calculez la quantité d'énergie (en Joule) irradiée par un trou noir en évaporation, dans la dernière seconde du processus.
- (b) Ensuite, allez fouiner sur le web (et/ou à la bibliothèque de physique) et déterrez de l'information sur la quantité (estimée) d'énergie émise par les soit-disant sursauts gamma courts ("short gamma-ray bursts"). L'évaporation de trous noirs primordiaux est-elle un mécanisme viable pouvant être à l'origine de ce phénomène ? Exercez votre pensée critique, justifiez bien votre raisonnement, et incluez les références aux sites/ouvrages que vous avez consultés.
- (c) Un trou noir en évaporation voit la surface de son horizon diminuer inexorablement, ce qui semble en contradiction avec le théorème de Hawking décrit au problème précédent. Comment peut-on résoudre cette contradiction (apparente) ?