PHY 3070
RELATIVITÉ 2
PROBLÈMES: SÉRIE 2

Distribué le: 15 février 2021
Chapitres couverts: 4 et 5

Problème 18

Évaluez la précession du périastre de l'orbite tracée à la Figure 4.6 ($\ell = 4.3M$, $e = 0.9716$), par calcul numérique de l'intégrale au membre de droite de l'équation (4.85). Il sera judicieux de bien étudier le code Python de la Figure 4.14 avant de vous lancer là-dedans, et de bien penser à comment l'adapter à une intégrale qui diverge à ses **deux** bornes. Votre première étape est évidemment de déterminer les rayons du périastre et de l'apoastre pour les paramètres de cette orbite, ce qui demande de solutionner le problème de recherche de racines décrit par l'équation (4.86).

Problème 19

Complétez les étapes mathématiques manquantes dans les passage de l'équation (5.39) à (5.43). ATTENTION: puisque la déviation ξ est purement due à la géométrie, alors $\mathrm{D}\xi/\mathrm{D}s = 0$; mais ceci n'implique PAS que $\mathrm{D}^2\xi/\mathrm{D}^2 s = 0$! Vous devez d'abord développer explicitement la dérivée seconde covariante, en ENSUITE invoquer $\mathrm{D}\xi/\mathrm{D}s = 0$ pour simplifier l'expression.

Problème 20

Reprenez la procédure des TP6 et TP7 (systèmes de coordonnées orthonormales pour un repère en chute libre dans la métrique de Schwarzschild), et démontrez les équations (5.48).

Problème 21

En classe nous avons identifié les neuf coefficients de connexion non-nuls indépendant pour la métrique de Schwarzschild (attention, ici $\Gamma^{\phi}_{r\phi} = \Gamma^{\phi}_{\phi r}$ compte pour un seul coefficient non-nul). Maintenant il s'agit de:

(a) Calculez ces neufs coefficients;

(b) Développez les quatre composantes de l'équation géodésique en toute généralité; c'est-à-dire, hors du plan équatorial $\theta = \pi/2$.

(c) Vérifiez que votre système de quatre équations différentielles couplée se réduit bien aux équations (4.39)–(4.41) pour une géodésique contenue dans le plan équatorial.

Problème 22

Un astronaute dans la navette spatiale, qu'on supposera sur une orbite circulaire d'altitude 320km, (rayon équatorial de la Terre: $R_\oplus = 6380\,\mathrm{km}$) positionne deux balles de ping-pong séparées d'une distance $\xi = 20\,\mathrm{cm}$ dans la direction radiale, au repos dans le repère de la navette. Combien d'orbites de la navette autour de la Terre s'écouleront avant que l'astronaute observe une variation de la distance de 1 cm ?

Ce problème est discuté dans Hartle du point de vue de la mécanique Newtonienne; approchez-le ici du point de vue de la déviation géodésique.

Problème 23

Le ralentissement temporel associé à la gravité est central à la trame dramatique du film **Interstellar**; et fournit aussi l'inspiration de ce petit problème.

Un vaisseau spatial est en orbite circulaire à distance $r_V = 100M$ (unités géométriques) d'un trou noir de masse intermédiaire $M/M_\odot = 10^3$, avec $M_\odot = 2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$ la masse du soleil. Une navette transportant trois membres de l'équipage quitte le vaisseau et approche à une distance de $1\,M$ au dessus de l'horizon, se plaçant en orbite circulaire synchrone avec une planète orbitant elle-même le trou noir sur une orbite également circulaire du même rayon. Vous pouvez supposer que la géométrie de l'espace-temps est bien décrite par la métrique de Schwarzschild (voir éq. (4.2) des Notes).

(a) Calculez le ralentissement gravitationnel du temps (propre) pour l'équipage de la navette, par rapport au temps propre pour l'équipage du vaisseau-mère.
(b) L'équipage de la navette passe 30 de leurs minutes (temps propre) à inspecter visuellement la mystérieuse planète. Pendant cet intervalle de temps (propre), de combien ont vieilli leur collègues dans le vaisseau orbitant à $r = r_V$? De combien ont vieilli les membres de leurs familles sur Terre, très très très loin du trou noir ?

Problème 24

Le but ultime de ce problème et des deux suivants est de vous faire apprécier la capacité de disposer d'approches distinctes pour calculer la même chose!

Le **trou de ver** ("Wormhole") est un autre concept favori de la science-fiction, et joue aussi un rôle majeur dans la trame narrative du film **Interstellar**. Il a été spéculé qu'un trou de ver pourrait connecter directement des régions très éloignées de l'espace-temps, et donc que le traverser reviendrait (effectivement) à voyager dans l'Univers plus rapidement que la lumière (ce qui est physiquement illégal), sans le faire vraiment (redevenant ainsi légal). Vous comprendrez l'attrait de l'idée. Un intervalle métrique décrivant une géométrie de type trou de ver est le suivant:

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + (b^2 + r^2)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2)$$

La Figure 1 ci-dessous présente une "tranche" 2D dans le plan $[r, \phi]$, visualisée ici en 3D mais reprojetée sur le plan (2D) de la feuille.

(a) Établissez la forme du tenseur métrique correspondant à l'expression de l'intervalle invariant donnée en énoncé;

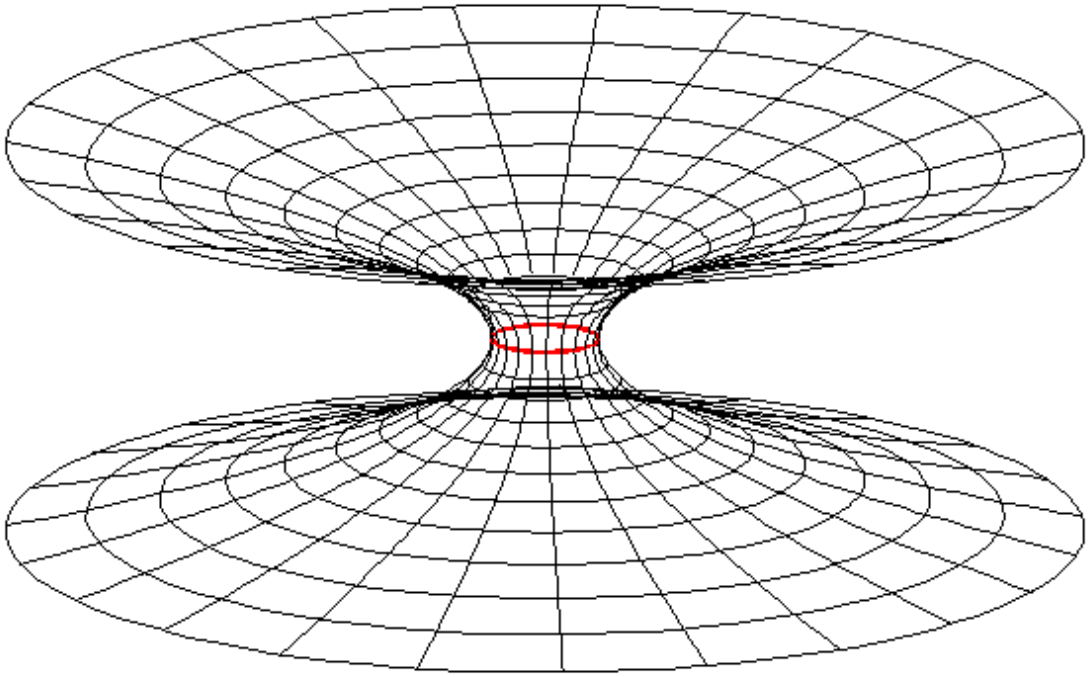

Figure 1: Une tranche dans l'hyperplan $[r, \phi]$ de la géométrie du trou de ver. Ici les cercles sont des lignes de coordonnées en ϕ, et les lignes leur étant perpendiculaire sont des lignes de coordonnées en r, i.e., des trajectoires radiales. Le plus petit cercle (trait épais) au centre de la structure correspond à la ligne $r = 0$ dans l'hyperplan (Problèmes 24, 25, et 26).

(b) Calculez les coefficients de connexion non-nuls pour cette métrique;
(c) Développez la composante r de l'équation géodésique;
(d) Supposez que vous êtes situé(e) à une distance radiale $r = d$ au dessus du centre du trou de ver, vous dirigeant vers lui à une vitesse U le long d'une trajectoire radiale ($r = 0$ est ici le centre du trou de ver, soit au centre de la Figure 1, dans la partie la plus étroite du trou). Par intégration de l'équation différentielle obtenue en (c), calculez le temps (propre) requis pour passer à une position $r = -d$ de l'autre coté du trou de ver.

Problème 25

Le but immédiat de ce problème est encore une fois de vous faire calculer le temps (propre) de traversée du trou de ver le long d'une trajectoire radiale, mais en approchant la formulation du problème d'une manière différente. Reprenant l'expression de l'intervalle invariant donnée au problème précédent,

(a) Écrivez le Lagrangien pour cette métrique;
(b) Développez la composante-r de l'équation de Lagrange, en n'oubliant pas que $L = \mathrm{d}\tau/\mathrm{d}\sigma$;
(c) Developpez la composante-r de l'équation géodésique, mais sans évaluer explicitement les coefficients de connexion en fonction du tenseur métrique;
(d) Par comparaison de vos résultats en (c) et (d), déduisez la forme des coefficients $\Gamma^r_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = t, r, \theta, \phi$);

(e) Supposez que vous êtes situé à une distance radiale $r = d$ au dessus du centre du trou de ver, vous dirigeant vers lui à une vitesse U le long d'une trajectoire radiale ($r = 0$ est ici le centre du trou de ver, soit au centre de la Figure 1, dans la partie la plus étroite du trou). Par intégration d'une équation différentielle pertinente pour $r(\tau)$, calculez le temps (propre) requis pour passer à une position $r = -d$ de l'autre coté du trou de ver.

Problème 26

Le but immédiat de ce problème est exactement le même que les deux précédent: vous faire calculer le temps de traversée du trou de ver de la Figure 1, le long d'une trajectoire radiale; mais cette fois en utilisant l'approche basée sur les invariants. Travaillant toujours avec l'intervalle tel que donné dans le problème 24,

(a) Établissez la forme du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ associé à cet intervalle;
(b) Écrivez les vecteurs de Killings applicables à cette métrique. Justifiez bien votre réponse;
(c) Écrivez les invariants de trajectoires applicables à cette métrique (pour une trajectoire d'un objet massif).
(d) Utilisez les invariants obtenus en (c) pour obtenir une équation différentielle pour $r(\tau)$ décrivant une trajectoire radiale.
(e) Supposez que vous êtes situé à une distance radiale $r = d$ au dessus du centre du trou de ver, vous dirigeant vers lui à une vitesse U le long d'une trajectoire radiale ($r = 0$ est ici le centre du trou de ver, soit au centre de la Figure 1, dans la partie la plus étroite du trou). Par intégration de l'équation différentielle obtenue en (d), calculez le temps (propre) requis pour passer à une position $r = -d$ de l'autre coté du trou de ver.

Problème 27

Vous avez calculé (et recalculé!) l'intervalle de temps propre requis pour traverser un trou de vers le long d'une trajectoire radiale allant de $r = +d$ à $r = -d$. Durant cet intervalle de temps propre, de combien aurait vieilli un(e) observateur(e) situé(e) à grande distance du trou de vers ? Que doit-on entendre par "grande distance" ici ?

Problème 28

On a vu (Figure 4.15) que la déviation angulaire d'un faisceau lumineux arrivant de l'infini et passant près d'une masse M tend vers l'infini à $M/b = 1/\sqrt{27}$. Il est possible de calculer cette valeur limite sans calculer l'intégrale; faites-le. Votre point de départ est tout de même l'équation (4.89).

Problème 29

Utilisez le code Python de la Figure 4.4, tel que modifié au TP5 (ou tout autre équivalent de votre cru) pour traiter les orbites de photons. Travaillant dans le plan équatorial de la métrique de Schwarzschild, calculez des orbites de photons lancés dans la direction azimutale (ϕ) à partir de distances $r/r_S = 2.8$, 2.9, 2.99, 3.01, 3.1 et 3.2, où r_S est le rayon de Schwarzschild ($= 2M$ en unités géométriques).

Sur la base de vos résultats, quelle serait le diamètre apparent du "disque noir" que produirait un trou noir en avant plan d'un arrière plan lumineux ? Comment ceci se compare-t-il au rayon de Schwarzschild ? Y a-t-il paradoxe ici ?

Problème 30

Considérons de nouveau la métrique 2D d'une surface sphérique de rayon R:

$$\mathrm{d}S^2 = R^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2)$$

Calculez les composantes non-nulles du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$, et ensuite le scalaire de Ricci $R = R^\mu_\mu$.

Problème 31

On considère un espace 2D décrit par la métrique:

$$\mathrm{d}s^2 = y^2\mathrm{d}x^2 + x^2\mathrm{d}y^2 \ .$$

(a) Calculer la composante R_{xyxy} du tenseur de Riemann, la seule composante indépendante ici. Cet espace est-il courbe ?
(b) Répétez le calcul pour la métrique alternative suivante, et déterminez similairement si l'espace 2D correspondant est courbe ou non:

$$\mathrm{d}s^2 = y\mathrm{d}x^2 + x\mathrm{d}y^2 \ .$$

Problème 32

Obtenez la forme alternative de l'équation du champ d'Einstein, soit la forme donnée par l'éq. (5.78):

$$R_{\mu\nu} = 8\pi\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \ .$$

Problème 33

On considère un espace-temps vide de matière-énergie ($T_{\mu\nu} = 0$) caractérisé par une métrique de la forme:

$$\mathrm{d}s^2 = -A(x)\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \ ,$$

où (x, y, z) sont les coordonnées spatiale cartésiennes habituelles, et $A(x)$ est une fonction quelconque de x, positive et différentiable.

(a) Montrez que la seule composante non-nulle du tenseur de Riemann est R_{xtxt};
(b) Calculez les composantes non-nulles du tenseur de Ricci pour cette même métrique;
(c) Déterminez quelle composante de l'équation du champ dans le vide n'est pas satisfaite trivialement (i.e., $0 = 0$);

(d) Solutionnez l'équation identifiée en (c);
(e) Donnez une interprétation physique à votre solution obtenue en (d).

Problème 34

Je vous casse les oreilles depuis le début du cours avec cette idée que les équations tensorielles véritables conservent leur structure sous changement de repère. Le but de ce problème est de vous faire vérifier ceci dans le contexte de l'équation tensorielle exprimant la conservation de l'énergie en espace courbe, soit l'équation (5.69):

$$\frac{\mathrm{D}T^{\beta\alpha}}{\mathrm{D}x^{\alpha}} = 0 \ .$$

Montrez que, sous changement général de coordonnées/repère $x \to x'$, la transformation de cette équation conduit bien à:

$$\frac{\mathrm{D}T^{\beta'\alpha'}}{\mathrm{D}x^{\alpha'}} = 0 \ .$$

où les primes sur les indices α et β indiquent des composantes évaluées dans le repère prime.