

PHY 3070
RELATIVITÉ 2
PROBLÈMES: SÉRIE 1

Distribué le: 26 janvier 2021
Chapitres couverts: 2 et 3

Problème 1

Histoire de vous refaire un peu la main avec les fonctions hyperboliques, démontrez que la transformation

$$\begin{aligned} ct' &= (\cosh \theta)ct - (\sinh \theta)x \\ x' &= (-\sinh \theta)ct + (\cosh \theta)x \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

préserve bien l'intervalle pseudo-Euclidien:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 .$$

Démontrez ensuite qu'en introduisant $V = c \tanh \theta$, on retombe bien sur la forme habituelle de la transformation de Lorentz, en terme des facteurs $\beta = V/c$ et $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$.

Problème 2

Refaites le calcul des intervalles de temps propre $d\tau$ pour Anne et Buck, soit leur vieillissement biologique, pour le paradoxe des jumeaux tel que considéré à la section 2.2.6 des notes de cours, mais cette fois dans le repère (en mouvement) de Anne. Vérifiez que vous retrouvez bien les mêmes intervalles que dans les notes de cours, où le calcul est fait dans le repère au repos de Buck.

Problème 3

Considérons une transformation (de Lorentz) d'une dérivée partielle d'un quadrivecteur, soit le membre de droite de l'équation (2.141) dans les notes de cours; on passe d'un repère (prime) se déplaçant à vitesse constante V dans la direction positive de l'axe- x , vers un repère (non-prime) au repos. Vérifiez que pour une telle transformation le second terme au membre de gauche de l'éq. (2.143) est bien nul.

Problème 4

Pour une transformation de Lorentz vers un repère se déplaçant dans une direction \mathbf{n} dans l'espace 3D Euclidien, on peut montrer que les éléments de la matrice de Lorentz sont donnés par:

$$\Lambda_0^{0'} = \gamma, \quad \Lambda_j^{0'} = \Lambda_0^{j'} = -\beta\gamma n^j,$$

$$\Lambda_k^{j'} = \Lambda_j^{k'} = (\gamma - 1)n^j n^k + \delta^{jk}$$

où $j, k = 1, 2, 3$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, et $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = (n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 = 1$. Les $\Lambda_{\nu'}^{\mu}$ sont obtenus en remplaçant β par $-\beta$ dans les expressions ci-dessus.

- Démontrez que $\Lambda_{\nu'}^{\mu} \Lambda_{\sigma}^{\nu'} = \delta_{\sigma}^{\mu}$;
- Démontrez que le repère prime se déplace à vitesse β dans la direction \mathbf{n} , lorsqu'observé du repère non-prime
- Démontrez que le repère non-prime se déplace à vitesse $-\beta$ dans la direction \mathbf{n} , lorsqu'observé du repère prime
- Démontrer que pour un repère prime se déplaçant dans la direction positive de l'axe $x \equiv x^1$, on retrouve bien la forme habituelle de la transformation de Lorentz, telle qu'introduite dans les notes de cours.

Problème 5

On considère l'espace 3D dont la géométrie est décrite par l'intervalle:

$$ds^2 = (1 - kr^2)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

avec $k = -1, 0$, ou $+1$.

- Établissez la forme du tenseur métrique pour cette géométrie
- Utilisant l'approche du cercle (voir §3.2.2 des notes au besoin), établissez le rapport circonférence-sur-rayon pour les trois valeurs admises de k .

Problème 6

Considérons l'intervalle invariant suivant:

$$ds^2 = -dt^2 + 2dxdt + dy^2 + dz^2$$

Malgré son look un peu bizarre, il décrit un espace pseudo-Euclidien! Déterminez une transformation de coordonnées qui ramène cet intervalle à sa forme Minskowskienne habituelle.

Problème 7

Une géométrie spatiotemporelle est décrite par l'intervalle métrique suivant:

$$ds^2 = -(1 - Ar^2)^2 dt^2 + (1 - Ar^2)^2 dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

- (a) Calculez la distance propre (intervalle!) le long d'un segment radial couvrant de $r = 0$ à $r = R$
- (b) Calculez la surface d'une sphère de rayon R
- (c) Calculez le volume spatial (3D) d'une sphère de rayon R
- (d) Calculez le quadrivolume d'une sphère "tubulaire", soit une sphère 3D contenue dans l'espace-temps entre deux hyperplans $t = \text{constante}$
- (e) Établissez une liste des coefficients de connexion non-nuls pour cet espace non-Euclidien.
-

Problème 8

Il s'agit de démontrer que la dérivée covariante pour la forme covariante d'un quadrivecteur est donnée par:

$$\frac{Db_\mu}{Ds} = \frac{db_\mu}{ds} - \Gamma_{\sigma\rho}^\nu b_\nu \frac{dx^\rho}{ds}$$

Votre point de départ est de supposer que la dérivée covariante obéit au principe de composition des dérivées:

$$\frac{D(a^\mu b_\mu)}{Ds} = a^\mu \frac{Db_\mu}{Ds} + b_\mu \frac{Da^\mu}{Ds}$$

Problème 9

Montrez que pour tout vecteur A_i et tout tenseur antisymétrique T_{ij} ,

$$\frac{DA_i}{Dx_j} - \frac{DA_j}{Dx_i} = \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i},$$

$$\frac{DT_{ij}}{Dx_k} + \frac{DT_{jk}}{Dx_i} + \frac{DT_{ki}}{Dx_j} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_j}.$$

Problème 10

Travaillant en coordonnées sphériques polaires (r, θ, ϕ) dans un espace 3D, on a une mesure de l'intervalle définie par:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{(1 - 2M/r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

- (a) calculez la distance radiale entre la sphère $r = 2M$ et la sphère $r = 3M$.
- (b) calculez le volume délimité par ces deux sphères.
-

Problème 10

On considère un espace Euclidien à 4 dimension; dans un tel espace (coordonnées (w, x, y, z)), la surface d'une sphère de rayon R est définie comme:

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

La surface de cette sphère est donc un espace 3D non-Euclidien, de la même manière que la surface d'une sphère en 3D dans un espace Euclidien définit un espace 2D non-Euclidien (retournez lire la §3.2.2 au besoin).

- (a) Démontrez qu'un point sur la sphère peut être identifié de manière unique par un triplet de coordonnées (χ, θ, ϕ) tel que

$$\begin{aligned}x &= R \sin \chi \sin \theta \cos \phi, & y &= R \sin \chi \sin \theta \sin \phi, \\z &= R \sin \chi \cos \theta, & w &= R \cos \chi,\end{aligned}$$

confirmant que la surface de notre sphère 4D est bel et bien une hypersurface 3D.

- (b) Établissez la forme du tenseur métrique définissant la mesure de l'intervalle ds^2 sur cette hypersurface sphérique.

Problème 12

On a vu que l'intervalle métrique sur la surface d'une sphère de rayon R est donné par:

$$dS^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Démontrez qu'un grand cercle (intersection d'un plan passant par le centre de la sphère avec sa surface) est une solution de l'équation géodésique pour cette géométrie.

Problème 13

Une géométrie spatiotemporelle tridimensionnelle (espace 2D + temps) est décrite par l'intervalle métrique suivant:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2$$

- (a) Écrivez et développez le Lagrangien associé aux géodésiques dans cette géométrie.
 (b) Écrivez les trois composantes de l'équation géodésique telle qu'obtenues à partir du Lagrangien calculé en (a)
 (c) Déduisez de votre résultat en (b) la forme des coefficients de connexion non-nuls pour cette métrique.

Problème 14

Au risque de se répéter, L'intervalle 2D à la surface d'une sphère de rayon R est donné en coordonnées sphériques polaires par

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Le but de ce problème est de vous faire calculer le tenseur métrique associé à un système de coordonnées Euclidiennes tangent à la sphère au pôle Nord. Considérons le changement de coordonnées suivant:

$$x(\theta, \phi) = R\theta \cos \phi, \quad y(\theta, \phi) = R\theta \sin \phi$$

où le pôle Nord ($\theta = 0$) correspond donc à $(x, y) = (0, 0)$.

(a) Démontrez que la transformation inverse a la forme:

$$\theta(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}, \quad \phi(x, y) = \text{atan}(y/x).$$

(b) Substituez votre résultat en (a) dans l'expression ci-dessus pour l'intervalle, et démontrez que dans la limite $x \ll 1$ et $y \ll 1$ le tenseur métrique correspondant s'écrit:

$$g_{AB} \simeq \begin{pmatrix} 1 - 2y^2/(3R^2) & 2xy/(3R^2) \\ 2xy/(3R^2) & 1 - 2x^2/(3R^2) \end{pmatrix}$$

(c) Démontrez qu'au pôle Nord ce tenseur se réduit bien au tenseur identité, et que les dérivées partielles de ses composantes sont toutes nulles.

Problème 15

Relisez bien la section 3.3 des notes de cours; ensuite,

- (a) déterminez un ensemble de valeurs de A, B, C, D qui peuvent garantir que les équations (3.29) soient satisfaites.
- (b) Sans faire le calcul complet, appliquez la même logique à l'espace temps quadridimensionnel; pouvez vous toujours annuler toutes les dérivées premières du tenseur métrique ?

Problème 16

Il s'agit ici de dériver une approximation Newtonienne aux équations géodésiques; cette approximation est applicable aux particules se déplaçant lentement ($v \ll c$) dans un champ gravitationnel faible et stationnaire. Un champ gravitationnel faible et stationnaire implique qu'on puisse écrire le tenseur métrique sous la forme:

$$g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1.$$

où $\eta_{\mu\nu}$ est le tenseur de Minkowski et les $h_{\mu\nu}$ ne dépendent pas du temps.

- (a) Considérant les grandeurs relatives des différentes composantes de la quadrivitesse en régime non-relativiste, obtenez une forme simplifiée de l'équation géodésique.
- (b) Calculez les coefficients de connexion requis pour votre forme simplifiée de l'équation géodésique obtenue en (a)
- (c) À partir de la composante temporelle de l'équation géodésique, montrez que $\tau \equiv t$ ici.
- (d) À partir des composantes spatiales de l'équation géodésique, exprimez la composante h_{00} en termes du potentiel gravitationnel Newtonien habituel.

Problème 17

Considérons l'intervalle suivant:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [d\sigma^2 + \sigma^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]$$

La partie spatiale du tenseur métrique correspondant décrit une géométrie ayant symétrie sphérique, avec σ jouant le rôle d'une variable "radiale", mais où l'échelle spatiale dépend explicitement du temps via la fonction $a(t)$.

- (a) Développez les composantes t et σ de l'équation géodésique pour cette géométrie. Vous n'avez pas à calculer explicitement les coefficients de connexion (ceci exigerait de connaître la dépendance fonctionnelle de a sur t).
 - (b) À partir de votre résultat en (a), démontrez qu'un observateur au repos à un temps t demeurera au repos à tout temps subséquent. Justifiez bien votre raisonnement.
-