

PHY 3070
RELATIVITÉ 2

PROJET 1: ÉCHAPPER À GARGANTUA

Inspiré par une scène critique du film *Interstellar*, ce projet vise à vous faire calculer une orbite d'échappement autour d'un trou noir. Contrairement au trou noir *Gargantua* dans *Interstellar*, ici on posera la rotation du trou noir à zéro, donc on travaillera dans la métrique de Schwarzschild.

L'idée ici, et la nouveauté par rapport à l'étude des orbites faite au chapitre 4 des notes de cours, est d'inclure une accélération due à l'allumage de propulseurs sur un vaisseau spatial. En présence d'une telle accélération, les trajectoires ne suivent plus les géodésiques de l'espace-temps de Schwarzschild, mais obéissent néanmoins à l'équation géodésique avec l'ajout de ladite accélération au membre de droite:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = a^\mu .$$

Les étapes du projet sont les suivantes:

1. Visionner la séquence du film *Interstellar* où le vaisseau spatial *Endurance* s'échappe du trou noir. Cette séquence est disponible sur Youtube, voir lien sur la page web du cours, sous "Cours 10, 11 février 2021". Vous allez essentiellement simuler cette manoeuvre. Popcorn permis durant cette étape.
2. Modifier le code de la Figure 4.5 des notes de cours, de manière à simuler l'orbite circulaire stable d'une masse test ayant $\ell/M = 3.5$ (voir Figure 4.3 des notes de cours). Calculez numériquement une dizaine de rotations sur cette orbite, histoire de vérifier qu'elle est belle et bien stable pour votre choix de tolérance `eps` dans l'algorithme Runge-Kutta à pas adaptif!
3. Lire attentivement la section 3 de l'article intitulé *No Way Back: Maximizing Survival Time Below the Schwarzschild Event Horizon*, par Geraint Lewis et Juliana Kwan (ci-après L&K), disponible sur la page Web du cours (sous "Cours 9, 9 février 2021"). Ensuite, obtenez les équivalents des équations (14) et (15) de L&K pour une (quadri-)accélération orientée en ϕ plutôt qu'en r . Notez que similairement au cas de la trajectoire radiale traitée par L&K, ceci impliquera une composante temporelle de la quadri-accélération (a^t) non-nulle.
4. En présence d'une quadri-accélération en ϕ , e et ℓ ne sont plus des constantes. Vous pouvez néanmoins travailler avec les équations (4.44), mais il faudra réévaluer ℓ et e à chaque pas de temps durant la (brève) phase d'accélération. Le plus facile est de suivre l'approche introduite par L&K, impliquant les vecteurs de Killing. Il faudra aussi également introduire les composantes a^t et a^ϕ de la quadri-accélération au coté droit des équations (4.44) ainsi que dans votre code.
5. Calculez une première trajectoire où vous activez a^ϕ (et a^t) pendant un intervalle de temps propre $\Delta\tau/M = 0.5$ avec amplitude constante (a^ϕ)₀ = 1, retombant à zéro par la suite. Votre condition initiale est l'orbite circulaire stable avec $\ell/M = 3.5$, telle que calculée à l'étape 3 ci-dessus. Tracez la trajectoire dans le plan équatorial.

6. Maintenant explorez diverses combinaisons de $(a^\phi)_0$ et $\Delta\tau$, mais avec $\Delta\tau/M \leq 5$. Identifiez dans quelles portions de ce plan de paramètres vous réussissez à produire une orbite d'échappement. Déterminez ensuite les valeurs minimales de $(a^\phi)_0$ pour un $\Delta\tau$ donné permettant de s'échapper, toujours à partir de la même orbite circulaire stable de l'étape 3.
 7. Dans cette très fameuse séquence d'*Interstellar* (étape 1), une fois le carburant épuisé les deux navettes dans lesquelles se trouvent le robot TARS et l'astronaute Cooper se détachent du vaisseau mère *Endurance*, supposément afin de favoriser l'échappement de ce dernier du champ gravitationnel de *Gargantua*; mais ceci ne fait que réduire la masse du vaisseau, et sa masse (test) n'a aucune influence sur la forme de la géodésique que suit maintenant *Endurance* une fois les propulseurs éteints ! Sous quelle conditions l'éjection des navettes peut-elle être vraiment utile ici ?
-

Échéancier:

- (a) **8 mars:** Me transmettre votre choix du projet et composition de l'équipe (le cas échéant).
 - (b) **18 mars:** Étapes 1, 2 et 3.
 - (c) **30 mars:** Étapes 4 et 5.
 - (d) **12 avril:** Remise du rapport de projet sur Studium.
-