PHY 3070
RELATIVITÉ 2
PROBLÈMES: SÉRIE 1

Distribué le: 16 janvier 2025
Chapitres couverts: 2 et 3

Problème 1

Histoire de vous refaire un peu la main avec les fonctions hyperboliques, démontrez que la transformation

$$ct' = (\cosh\theta)ct - (\sinh\theta)x$$

$$x' = (-\sinh\theta)ct + (\cosh\theta)x$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

préserve bien l'intervalle pseudo-Euclidien:

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \ .$$

Démontrez ensuite qu'en introduisant $V = c\tanh\theta$, on retombe bien sur la forme habituelle de la transformation de Lorentz, en terme des facteurs $\beta = V/c$ et $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$.

Problème 2

Refaites le calcul des intervalles de temps propre $\mathrm{d}\tau$ pour Anne et Buck, soit leur vieillissement biologique, pour le paradoxe des jumeaux tel que considéré à la section 2.2.6 des notes de cours, mais cette fois dans le repère (en mouvement) de Anne. Vérifiez que vous retrouvez bien les mêmes intervalles que dans les notes de cours, où le calcul est fait dans le repère au repos de Buck.

Problème 3

Considérons une transformation (de Lorentz) d'une dérivée partielle d'un quadrivecteur, soit le membre de droite de l'équation (2.141) dans les notes de cours; on passe d'un repère (prime) se déplaçant à vitesse constante V dans la direction positive de l'axe-x, vers un repère (non-prime) au repos. Vérifiez que pour une telle transformation le second terme au membre de gauche de l'éq. (2.143) est bien nul.

Problème 4

Pour une transformation de Lorentz vers un repère se déplaçant dans une direction **n** dans l'espace 3D Euclidien, on peut montrer que les éléments de la matrice de Lorentz sont donnés par:

$$\Lambda^{0'}_{0} = \gamma \ , \qquad \Lambda^{0'}_{j} = \Lambda^{j'}_{0} = -\beta\gamma n^j \ ,$$
$$\Lambda^{j'}_{k} = \Lambda^{k'}_{j} = (\gamma - 1) n^j n^k + \delta^{jk}$$

où $j, k = 1, 2, 3$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, et $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = (n^1)^1 + (n^2)^2 + (n^3)^2 = 1$. Les $\Lambda^{\mu}_{\nu'}$ sont obtenus en remplaçant β par $-\beta$ dans les expressions ci-dessus.

(a) Démontrez que $\Lambda^{\mu}_{\nu'} \Lambda^{\nu'}_{\sigma} = \delta^{\mu}_{\sigma}$;
(b) Démontrez que le repère prime se déplace à vitesse β dans la direction **n**, lorsqu'observé du repère non-prime
(c) Démontrez que le repère non-prime se déplace à vitesse $-\beta$ dans la direction **n**, lorsqu'observé du repère prime
(d) Démontrer que pour un repère prime se déplaçant dans la direction positive de l'axe $x \equiv x^1$, on retrouve bien la forme habituelle de la transformation de Lorentz, telle qu'introduite dans les notes de cours.

Problème 5

On considère l'espace 3D dont la géométrie est décrite par l'intervalle:

$$\mathrm{d}s^2 = (1 - kr^2)^{-1} \mathrm{d}r^2 + r^2 (\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2) \ ,$$

avec $k = -1$, 0, ou +1.

(a) Établissez la forme du tenseur métrique pour cette géométrie
(b) Utilisant l'approche du cercle (voir §3.2.2 des notes au besoin), établissez le rapport circonférence-sur-rayon pour les trois valeurs admises de k.

Problème 6

Considérons l'intervalle invariant suivant:

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

Malgré son look un peu bizarre, il décrit un espace pseudo-Euclidien! Déterminez une transformation de coordonnées qui ramène cet intervalle à sa forme Minskowskienne habituelle.

Problème 7

On considère un espace-temps de type "trou de ver", dont la géométrie est décrite par l'intervalle:

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + (b^2 + r^2)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2)$$

avec $b > 0$ et $r = 0$ indiquant le centre du trou de ver.

(a) Calculez la surface d'une sphère de coordonnée radiale $r = R$;

(b) Calculez la distance entre les coordonnées $r = 0$ et $r = R$; c'est le "rayon" de votre sphère.

(c) Calculez le rapport surface-sur-rayon de votre sphère, en fonction de la valeur du paramètre b. Détaillez bien votre raisonnement;

(d) Démontrez qu'à grande distance du trou de ver cette métrique se réduit bien à celle caractérisant un espace-temps pseudo-Euclidien; "grande distance" veut dire quoi ici ? Justifiez bien votre réponse.

Problème 8

Il s'agit de démontrer que la dérivée covariante pour la forme covariante d'un quadrivecteur est donnée par:

$$\frac{\mathrm{D}b_\mu}{\mathrm{D}s} = \frac{\mathrm{d}b_\mu}{\mathrm{d}s} - \Gamma^\nu_{\sigma\rho} b_\nu \frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}s}$$

Votre point de départ est de supposer que la dérivée covariante obéit au principe de composition des dérivées:

$$\frac{\mathrm{D}(a^\mu b_\mu)}{\mathrm{D}s} = a^\mu \frac{\mathrm{D}b_\mu}{\mathrm{D}s} + b_\mu \frac{\mathrm{D}a^\mu}{\mathrm{D}s}$$

Problème 9

Montrez que pour tout vecteur A_i et tout tenseur antisymmétrique T_{ij},

$$\frac{\mathrm{D}A_i}{\mathrm{D}x_j} - \frac{\mathrm{D}A_j}{\mathrm{D}x_i} = \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \ ,$$

$$\frac{\mathrm{D}T_{ij}}{\mathrm{D}x_k} + \frac{\mathrm{D}T_{jk}}{\mathrm{D}x_i} + \frac{\mathrm{D}T_{ki}}{\mathrm{D}x_j} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_j} \ .$$

Problème 10

On considère un espace Euclidien à 4 dimension; dans un tel espace (coordonnées (w, x, y, z)), la surface d'une sphère de rayon R est définie comme:

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \ .$$

La surface de cette sphère est donc un espace 3D non-Euclidien, de la même manière que la surface d'une sphère en 3D dans un espace Euclidien définit un espace 2D non-Euclidien (retournez lire la §3.2.2 au besoin).

(a) Démontrez qu'un point sur la sphère peut être identifié de manière unique par un triplet de coordonnées (χ, θ, ϕ) tel que

$$x = R\sin\chi\sin\theta\cos\phi \ , \qquad y = R\sin\chi\sin\theta\sin\phi \ ,$$

$$z = R\sin\chi\cos\theta \ , \qquad w = R\cos\chi \ ,$$

confirmant que la surface de notre sphère 4D est bel et bien une hypersurface 3D.

(b) Établissez la forme du tenseur métrique définissant la mesure de l'intervalle $\mathrm{d}s^2$ sur cette hypersurface sphérique.

Problème 11

Une géométrie spatiotemporelle tridimensionnelle (espace 2D + temps) est décrite par l'intervalle métrique suivant:

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\phi^2$$

(a) Écrivez et développez le Lagrangien associé aux géodésiques dans cette géométrie.
(b) Écrivez les trois composantes de l'équation géodésique telle qu'obtenues à partir du Lagrangien calculé en (a)
(c) Déduisez de votre résultat en (b) la forme des coefficients de connexion non-nuls pour cette métrique.

Problème 12

Au risque de se répéter, l'intervalle 2D à la surface d'une sphère de rayon R est donné en coordonnées sphériques polaires par

$$\mathrm{d}s^2 = R^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)$$

Le but de ce problème est de vous faire calculer le tenseur métrique associé à un système de coordonnées Euclidiennes tangent à la sphère au pôle Nord. Considérons le changement de coordonnées suivant:

$$x(\theta,\phi) = R\theta\cos\phi\ , \qquad y(\theta,\phi) = R\theta\sin\phi$$

où le pôle Nord ($\theta = 0$) correspond donc à $(x, y) = (0, 0)$.

(a) Démontrez que la transformation inverse a la forme:

$$\theta(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\ , \qquad \phi(x,y) = \mathrm{atan}(y/x)\ .$$

(b) Substituez votre résultat en (a) dans l'expression ci-dessus pour l'intervalle, et démontrez que dans la limite $x \ll 1$ et $y \ll 1$ le tenseur métrique correspondant s'écrit:

$$g_{AB} \simeq \begin{pmatrix} 1 - 2y^2/(3R^2) & 2xy/(3R^2) \\ 2xy/(3R^2) & 1 - 2x^2/(3R^2) \end{pmatrix}$$

(c) Démontrez qu'au pôle Nord ce tenseur se réduit bien au tenseur identité, et que les dérivées partielles de ses composantes sont toutes nulles.

Problème 13

Dans l'espace-temps Euclidien, l'intervalle invariant exprimé en coordonnées cartésiennes dans un référentiel tournant à vitesse angulaire Ω par rapport à l'axe-z est donné par:

$$\mathrm{d}s^2 = -(1-\Omega^2(x^2+y^2))\mathrm{d}t^2 + 2\Omega(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y)\mathrm{d}t + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

(a) Démontrez que ceci est équivalent à l'intervalle métrique Euclidien habituel exprimé en coordonnées polaires (r, θ, ϕ), mais avec $\phi \to \phi + \Omega t$.
(b) Travaillant dans le référentiel en rotation, obtenez les composantes de l'équation géodésique.
(c) Démontrez que dans la limite non-relativiste, vos équations en (b) se réduisent aux formes Newtoniennes habituelles, incluant les forces centrifuge et Coriolis.

Problème 14

Relisez bien la section 3.3 des notes de cours; ensuite,

(a) déterminez un ensemble de valeurs de A, B, C, D qui peuvent garantir que les équations (3.29) soient satisfaites.
(b) Sans faire le calcul complet, appliquez la même logique à l'espace temps quadridimensionnel; pouvez vous toujours annuler toutes les dérivées premières du tenseur métrique ?

Problème 15

Il s'agit ici de dériver une approximation Newtonienne aux équations géodésiques; cette approximation est applicable aux particules se déplaçant lentement ($v \ll c$) dans un champ gravitationnel faible et stationnaire. Un champ gravitationnel faible et stationnaire implique qu'on puisse écrire le tenseur métrique sous la forme:

$$g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \ .$$

où $\eta_{\mu\nu}$est le tenseur de Minkowski et les $h_{\mu\nu}$ ne dépendent pas du temps.

(a) Considérant les grandeurs relatives des différentes composantes de la quadrivitesse en régime non-relativiste, obtenez une forme simplifiée de l'équation géodésique.
(b) Calculez les coefficients de connexion requis pour votre forme simplifiée de l'équation géodésique obtenue en (a)
(c) À partir de la composante temporelle de l'équation géodésique, montrez que $\tau \equiv t$ ici.
(d) À partir des composantes spatiales de l'équation géodésique, exprimez la composante h_{00} en termes du potential gravitationnel Newtonien habituel.

Problème 16

Considérons l'intervalle suivant:

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\left[\mathrm{d}\sigma^2 + \sigma^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)\right]$$

La partie spatiale du tenseur métrique correspondant décrit une géométrie ayant symétrie sphérique, avec σ jouant le rôle d'une variable "radiale", mais où l'échelle spatiale dépend explicitement du temps via la fonction $a(t)$.

(a) Développez les composantes t et σ de l'équation géodésique pour cette géométrie. Vous n'avez pas à calculer explicitement les coefficients de connexion (ceci exigerait de connaitre la dépendance fonctionnelle de a sur t).
(b) À partir de votre résultat en (a), démontrez qu'un observateur au repos à un temps t demeurera au repos à tout temps subséquent. Justifiez bien votre raisonnement.

Problème 17

Le but ultime de ce problème et des deux suivants est de vous faire apprécier la capacité de disposer d'approches distinctes pour calculer la même chose!

Le **trou de ver** ("Wormhole") est un autre concept favori de la science-fiction, et joue aussi un rôle majeur dans la trame narrative du film **Interstellar**. Il a été spéculé qu'un trou de ver pourrait connecter directement des régions très éloignées de l'espace-temps, et donc que le traverser reviendrait (effectivement) à voyager dans l'Univers plus rapidement que la lumière (ce qui est physiquement illégal), sans le faire vraiment (redevenant ainsi légal). Vous comprendrez l'attrait de l'idée. Un intervalle métrique décrivant une géométrie de type trou de ver est le suivant:

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + (b^2 + r^2)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2)$$

La Figure 1 ci-dessous présente une "tranche" 2D dans le plan $[r, \phi]$, visualisée ici en 3D mais reprojetée sur le plan (2D) de la feuille.

(a) Établissez la forme du tenseur métrique correspondant à l'expression de l'intervalle invariant donnée en énoncé;
(b) Calculez les coefficients de connexion non-nuls pour cette métrique;
(c) Développez la composante r de l'équation géodésique;
(d) Supposez que vous êtes situé(e) à une distance radiale $r = d$ au dessus du centre du trou de ver, vous dirigeant vers lui à une vitesse U le long d'une trajectoire radiale ($r = 0$ est ici le centre du trou de ver, soit au centre de la Figure 1, dans la partie la plus étroite du trou). Par intégration de l'équation différentielle obtenue en (c), calculez le temps (propre) requis pour passer à une position $r = -d$ de l'autre coté du trou de ver.

Problème 18

Le but immédiat de ce problème est encore une fois de vous faire calculer le temps (propre) de traversée du trou de ver le long d'une trajectoire radiale, mais en approchant la formulation du problème d'une manière différente. Reprenant l'expression de l'intervalle invariant donnée au problème précédent,

(a) Écrivez le Lagrangien pour cette métrique;
(b) Développez la composante-r de l'équation de Lagrange, en n'oubliant pas que $L = \mathrm{d}\tau/\mathrm{d}\sigma$;
(c) Developpez la composante-r de l'équation géodésique, mais sans évaluer explicitement les coefficients de connexion en fonction du tenseur métrique;

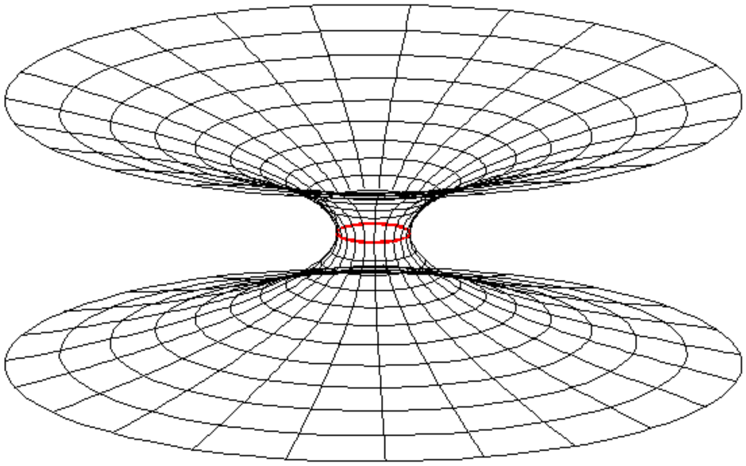

Figure 1: Une tranche dans l'hyperplan $[r, \phi]$ de la géométrie du trou de ver. Ici les cercles sont des lignes de coordonnées en ϕ, et les lignes leur étant perpendiculaire sont des lignes de coordonnées en r, i.e., des trajectoires radiales. Le plus petit cercle (trait rouge) au centre de la structure correspond à la ligne $r = 0$ dans l'hyperplan (Problèmes 17, 18, et 19).

(d) Par comparaison de vos résultats en (c) et (d), déduisez la forme des coefficients $\Gamma^r_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = t, r, \theta, \phi)$;

(e) Supposez que vous êtes situé à une distance radiale $r = d$ au dessus du centre du trou de ver, vous dirigeant vers lui à une vitesse U le long d'une trajectoire radiale ($r = 0$ est ici le centre du trou de ver, soit au centre de la Figure 1, dans la partie la plus étroite du trou). Par intégration d'une équation différentielle pertinente pour $r(\tau)$, calculez le temps (propre) requis pour passer à une position $r = -d$ de l'autre coté du trou de ver.

Problème 19

Le but immédiat de ce problème est exactement le même que les deux précédent: vous faire calculer le temps de traversée du trou de ver de la Figure 1, le long d'une trajectoire radiale; mais cette fois en utilisant l'approche basée sur les invariants. Travaillant toujours avec l'intervalle tel que donné dans le problème 17,

(a) Établissez la forme du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ associé à cet intervalle;

(b) Écrivez les vecteurs de Killings applicables à cette métrique. Justifiez bien votre réponse;

(c) Écrivez les invariants de trajectoires applicables à cette métrique (pour une trajectoire d'un objet massif).

(d) Utilisez les invariants obtenus en (c) pour obtenir une équation différentielle pour $r(\tau)$ décrivant une trajectoire radiale.

(e) Supposez que vous êtes situé à une distance radiale $r = d$ au dessus du centre du trou de ver, vous dirigeant vers lui à une vitesse U le long d'une trajectoire radiale ($r = 0$ est ici le centre du trou de ver, soit au centre de la Figure 1, dans la partie la plus étroite du trou). Par intégration de l'équation différentielle obtenue en (d), calculez le temps (propre) requis pour passer à une position $r = -d$ de l'autre coté du trou de ver.

Problème 20

Vous avez calculé (et recalculé!) l'intervalle de temps propre requis pour traverser un trou de vers le long d'une trajectoire radiale allant de $r = +d$ à $r = -d$. Durant cet intervalle de temps propre, de combien aurait vieilli un(e) observateur(e) situé(e) à grande distance du trou de vers ? Que doit-on entendre par "grande distance" ici ?
