

TP5 - Univers et équation de Friedmann

Olivier Trudel, Xavier Drolet, Flavie Bélanger

Mars 2025

1 Solution numérique

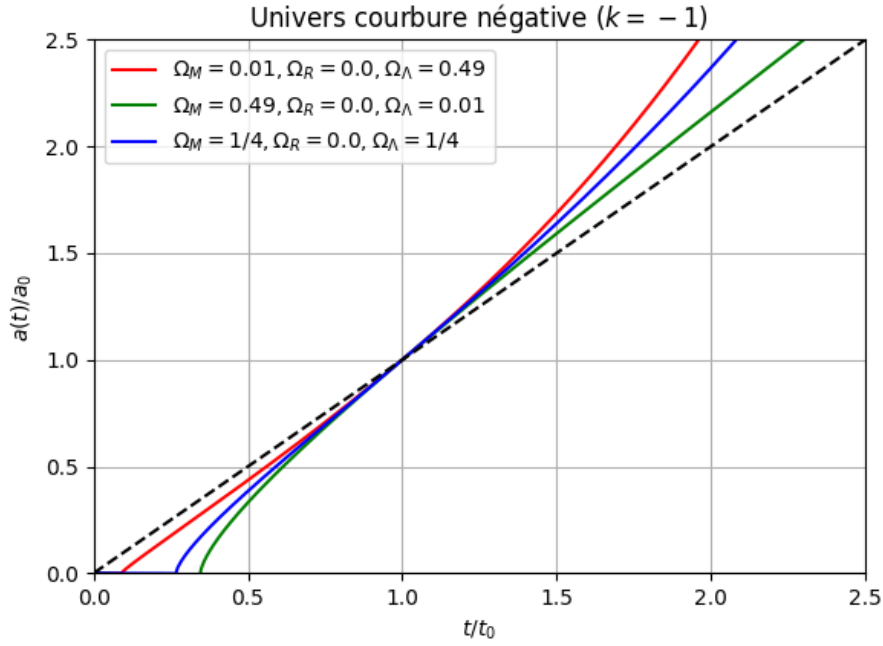


Figure 1: Univers courbe ouvert avec $k = -1$, $\Lambda > 0$

Pour effectuer l'analyse, on peut se référer à l'équation (7.85) des notes de cours,

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = \Omega_\Lambda a + \frac{\Omega_M}{2a^2} - \frac{\Omega_R}{a^3} \quad (1)$$

où on a posé $\frac{\Omega_R}{a^3} = 0$ pour tous les cas considérés.

Nous avons tracé les solutions numériques de l'équation de Friedmann-Lemaître dans le régime : $k = -1, \Lambda > 0, \Omega_m + \Omega_\Lambda = 0.5$.

En intégrant l'équation (7.87), on peut analyser le comportement futur et passé de la solution à l'équation de Friedmann étant donné que cela permet d'obtenir l'évolution de l'expansion de l'univers en fonction du temps. Nous avons traité trois cas : celui où la matière non relativiste domine, celui où la constante cosmologique domine, et celui où les deux contributions à l'énergie sont égales.

Dans les trois cas, l'univers est ouvert étant donnée la courbure négative (univers hyperbolique). Pour une constante cosmologique positive, le facteur d'échelle $a(t)$ croît toujours en fonction du temps, et la courbe n'est pas fermée; nos paramètres ne permettent donc pas un "Big Crunch". L'expansion s'accélère dans le futur de l'univers (au-delà de $a_0 = 1$). Cela s'explique par l'équation (7.84) : lorsque a est faible, le terme en Ω_m domine, mais à des a élevés, donc tard dans l'histoire de l'univers, le terme en Ω_Λ l'emporte. Or, la constante cosmologique est associée à une pression négative, et comme une pression positive a pour effet de ralentir l'expansion, la présence d'une constante cosmologique positive accélère l'expansion. Néanmoins, ces paramètres permettent tout de même des univers d'âge fini, lequel varie en fonction des contributions relatives de la matière et de la constante cosmologique à l'énergie totale (qui est toujours inférieure à 1 étant donné le signe de k). En effet, les univers dominés par la matière sont plus jeunes que les univers dominés par la constante cosmologiques. Quelques autres particularités de chacune des courbes sont les suivantes :

- **Cas no 1** : Dans le cas où la matière non relativiste domine (courbe en vert), l'expansion est moins importante. En effet, la pression nulle de la matière ne permet pas d'accélérer l'expansion, et celle-ci suit une tendance presque linéaire.
- **Cas no 2** : Dans le cas où la constante cosmologique domine (courbe en rouge), la croissance du paramètre d'expansion est plus importante. L'apport en énergie de la constante permet une explosion du facteur d'échelle facilement identifiable après a_0 .
- **Cas no 3** : Dans le cas où les deux contributions à l'énergie sont égales, on observe un comportement très similaire où l'univers est toujours ouvert avec une croissance de l'expansion intermédiaire entre les deux scénarios considérés précédemment.

Es lebe die allgemeine Relativitätstheorie!