## PHY-3070

# **RELATIVITÉ 2**

Notes de cours par

Paul Charbonneau Département de Physique Université de Montréal

Janvier 2023

### **MINI-PRÉFACE**

Ces notes contiennent toute la matière couverte dans le cadre du cours PHY-3070, Relativité 2, offert par le département de physique de l'Université de Montréal.

Vous avez en main la version 1.4, soit une version revue et corrigée de celle de la session H21. Je tiens à remercier la cohorte d'étudiant(e)s de 2018, 2019 et 2020, dont les commentaires et suggestions ont contribué positivement à cette révision.

Dans le département des nouveautés, les principaux ajouts cette année se retrouvent au chapitre 7, soit une présentation améliorée (j'espère...) de la métrique de Robertson-Walker-Friedmann, et une description plus étoffée du modèle cosmologique maintenant considéré standard, dit "ACDM". Quelques diagrammes de nature didactique ont également été ajoutés au chapitre 8, qui inclut aussi maintenant une brève discussion de la récente imagerie du trou noir supermassif au centre de notre galaxie. Divers remaniements relativement mineurs et "net-toyage notationnel" ont aussi été effectués ici et là, sans ajouter de contenu —il y en a déjà amplement assez pour un cours de 45 heures !

Je tiens à remercier mon collègue Georges Michaud, qui en 1971 a monté la première mouture du cours de relativité générale au département de physique de l'UdeM, pour une lecture attentive de ces notes et nombre de suggestions très pertinentes. Je remercie aussi mon collègue Richard MacKenzie, qui a enseigné le cours à partir de ces Notes en 2022 durant mon année sabbatique, et qui y a relevé plusieurs incohérences ou erreurs de notation, quelques erreurs tout court, et m'a fait plusieurs suggestions de nature plus conceptuelle qui ont amélioré la présentation de la matière couverte. Je compte néanmoins sur vos commentaires et suggestions, sur le cours en général, et sur ces Notes en particulier, pour continuer d'améliorer tout ça.

Tous les graphiques, dessins, images et diagrammes dont une source n'est pas explicitement mentionnée ont été produits par mononcle ici présent. Les portraits ornant les page recto face aux débuts de chapitres sont tous en domaine public, du moins à ce que je sache.

## Table des Matières

1	Le	principe d'équivalence	7
	1.1	Introduction	7
	1.2	Masses gravitationnelle et inertielle	7
	1.3	L'argument de Galilée	8
	1.4	Le principe d'équivalence	0
	1.5	Tests du principe d'équivalence	2
	1.6	La gravité n'est pas une force	3
	1.7	Limites du principe d'équivalence: les effets de marée	4
	1.8	Le programme théorique	6
2	Rar	opel: la relativité restreinte	9
_	2.1	La relativité Galiléenne 1	9
	2.2	L'espace-temps	0
	2.2	2 2 1 L'intervalle invariant	0
		2.2.2 Le cône de lumière	2
		2.2.3 Le temps propre	4
		2.2.4 La transformation de Lorentz	5
		2.2.5 Simultanéité contraction de Lorentz etc 2	8
		2.2.6 Le paradoxe des jumeaux	0
		2.2.7 Temps propre = temps physiologique ?	1
	2.3	Interlude mathématique: vecteurs et tenseurs	3
		2.3.1 Deux représentations vectorielles	3
		2.3.2 Trajectoires et gradient	4
		2.3.3 Produit scalaire: le tenseur métrique de Minkowski	7
		2.3.4 Passage des formes contravariantes à covariantes	8
		2.3.5 Le tenseur métrique inverse	9
		2.3.6 Orthogonalité sous transformation de Lorentz	0
		2.3.7 Les tenseurs	0
		2.3.8 Conventions sur les indices	2
	2.4	Formulation covariante des Lois Physiques	2
		2.4.1 Première Loi de Newton	5
		2.4.2 Seconde Loi de Newton	5
		2.4.3 Invariants du mouvement pour les photons	6
		2.4.4 Invariance des Lois physiques sous transformation de Lorentz 4	7
3	Des	scription mathématique des espaces courbes 5	1
	3.1	Les cinq postulats d'Euclide	2
	3.2	Mesure et géométrie	3
		3.2.1 Métriques diagonales: éléments de ligne, surface, et volume	4
		3.2.2 Un espace 2D courbe: la surface d'une sphère	6
		3.2.3 Un espace 2D courbe uniquement en apparence: la surface d'un cylindre 5	6
	3.3	Métrique localement Euclidienne	7

	3.4	La dérivée covariante	59
	3.5	Calcul des coefficients de connexion	63
		3.5.1 Surface 2D sphérique	64
		3.5.2 Surface 2D cylindrique	64
		3.5.3 Coordonnées polaires dans le plan 2D	64
	36	L'équation réodésique	65
	0.0	3.6.1 Dérivation intuitive de l'écuation géodésique	66
		2.6.2 Dérivation formalle de l'équation géodésique	67
	97	J.0.2 Derivation formene de l'équation geodésique	70
	3.7	Lois de conservation et vecteurs de Killing	70
		3.7.1 Les vecteurs de Killing	70
		3.7.2 Formulation invariante des lois de conservation	71
		3.7.3 Exemple: géodésique en coordonnées polaires 2D	72
4	Тал	teste de la théonie	75
4	Les	Lesus de la théorie	75
	4.1		10
	4.2	Les unites geometriques	76
	4.3	Orbites dans la metrique de Schwarzschild	77
		4.3.1 Rappel: orbites Newtoniennes	77
		4.3.2 Les invariants de l'orbite	78
		4.3.3 Propriétés globales des orbites	80
		4.3.4 Orbite radiale: la chute libre	82
		4.3.5 Calcul numérique des orbites en toute généralité	83
		4.3.6 Trajectoire des photons	86
	4.4	Le redshift gravitationnel	92
	4.5	La dilatation gravitationnelle du temps	94
	4.6	Précession de l'orbite de Mercure	97
	4.7	Déviation de la lumière par le Soleil	99
	4.8	Délai temporel dans la propagation de la lumière	105
			100
			105
5	La	matière-énergie courbe l'espace-temps	105 109
5	La 1 5.1	matière-énergie courbe l'espace-temps Courbure: le tenseur de Riemann	103 109 109
5	<b>La</b> 1 5.1	matière-énergie courbe l'espace-temps         Courbure: le tenseur de Riemann         5.1.1       Le tenseur de Riemann	<b>109</b> 109 110
5	<b>La</b> 1 5.1	matière-énergie courbe l'espace-temps         Courbure: le tenseur de Riemann         5.1.1       Le tenseur de Riemann         5.1.2       L'équation de la déviation géodésique	<b>103</b> <b>109</b> 110 113
5	<b>La</b> 1 5.1	matière-énergie courbe l'espace-temps         Courbure: le tenseur de Riemann         5.1.1       Le tenseur de Riemann         5.1.2       L'équation de la déviation géodésique         5.1.3       La déviation géodésique dans un repère en chute libre	103 109 110 113 118
5	La 1 5.1 5.2	matière-énergie courbe l'espace-temps         Courbure: le tenseur de Riemann         5.1.1       Le tenseur de Riemann         5.1.2       L'équation de la déviation géodésique         5.1.3       La déviation géodésique dans un repère en chute libre         La source de la courbure: le tenseur de stress-énergie	103 109 110 113 118 119
5	La 1 5.1 5.2	matière-énergie courbe l'espace-temps         Courbure: le tenseur de Riemann         5.1.1       Le tenseur de Riemann         5.1.2       L'équation de la déviation géodésique         5.1.3       La déviation géodésique dans un repère en chute libre         La source de la courbure: le tenseur de stress-énergie         5.2.1       Le flux de masse	109 109 110 113 118 119 120
5	<b>La</b> 1 5.1 5.2	matière-énergie courbe l'espace-temps         Courbure: le tenseur de Riemann         5.1.1       Le tenseur de Riemann         5.1.2       L'équation de la déviation géodésique         5.1.3       La déviation géodésique dans un repère en chute libre         La source de la courbure: le tenseur de stress-énergie         5.2.1       Le flux de masse         5.2.2       Le flux d'impulsion	109           109           109           110           113           118           119           120           120
5	La 1 5.1 5.2	matière-énergie courbe l'espace-temps         Courbure: le tenseur de Riemann         5.1.1       Le tenseur de Riemann         5.1.2       L'équation de la déviation géodésique         5.1.3       La déviation géodésique dans un repère en chute libre         La source de la courbure: le tenseur de stress-énergie       5.2.1         Le flux de masse       5.2.2         Le flux d'impulsion       5.2.3         Le tenseur de stress-énergie       5.2.3	109           109           110           113           118           119           120           122
5	<b>La</b> 1 5.1 5.2	matière-énergie courbe l'espace-temps         Courbure: le tenseur de Riemann         5.1.1       Le tenseur de Riemann         5.1.2       L'équation de la déviation géodésique         5.1.3       La déviation géodésique dans un repère en chute libre         5.1.4       Le flux de masse         5.2.1       Le flux de masse         5.2.2       Le flux d'impulsion         5.2.3       Le tenseur de stress-énergie         5.2.4       Exemple: un fluide froid au repos	103           109           109           110           113           118           119           120           120           122           124
5	La 1 5.1	matière-énergie courbe l'espace-temps         Courbure: le tenseur de Riemann         5.1.1       Le tenseur de Riemann         5.1.2       L'équation de la déviation géodésique         5.1.3       La déviation géodésique dans un repère en chute libre         5.1.4       Le flux de masse         5.2.1       Le flux de masse         5.2.2       Le flux d'impulsion         5.2.3       Le tenseur de stress-énergie         5.2.4       Exemple: un fluide froid au repos         5.2.5       Loi de conservation	109           109           110           113           118           119           120           122           124
5	La 1 5.1 5.2	matière-énergie courbe l'espace-temps         Courbure: le tenseur de Riemann         5.1.1       Le tenseur de Riemann         5.1.2       L'équation de la déviation géodésique         5.1.3       La déviation géodésique dans un repère en chute libre         5.1.4       Le fux de masse         5.2.1       Le flux de masse         5.2.2       Le flux d'impulsion         5.2.3       Le tenseur de stress-énergie         5.2.4       Exemple: un fluide froid au repos         5.2.5       Loi de conservation         L'équation du champ d'Finstein	109           109           110           113           118           119           120           122           124           124           126
5	La 1 5.1 5.2	matière-énergie courbe l'espace-temps         Courbure: le tenseur de Riemann         5.1.1       Le tenseur de Riemann         5.1.2       L'équation de la déviation géodésique         5.1.3       La déviation géodésique dans un repère en chute libre         La source de la courbure: le tenseur de stress-énergie	109           109           110           113           118           119           120           122           124           124           126           127
5	La 1 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5	matière-énergie courbe l'espace-temps         Courbure: le tenseur de Riemann         5.1.1       Le tenseur de Riemann         5.1.2       L'équation de la déviation géodésique         5.1.3       La déviation géodésique dans un repère en chute libre         La source de la courbure: le tenseur de stress-énergie       5.2.1         Le flux de masse       5.2.2         Le flux d'impulsion       5.2.3         Le tenseur de stress-énergie       5.2.4         Exemple: un fluide froid au repos       5.2.5         Loi de conservation       5.2.5         La limite Newtonienne       La aportante acemplorigue	109           109           110           113           118           119           120           122           124           126           127           130
5	La 1 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5 5.6	matière-énergie courbe l'espace-temps         Courbure: le tenseur de Riemann         5.1.1       Le tenseur de Riemann         5.1.2       L'équation de la déviation géodésique         5.1.3       La déviation géodésique dans un repère en chute libre         La source de la courbure: le tenseur de stress-énergie       5.2.1         Le flux de masse       5.2.2         Le flux d'impulsion       5.2.3         Le tenseur de stress-énergie       5.2.4         Exemple: un fluide froid au repos       5.2.5         Loi de conservation       5.2.5         La limite Newtonienne       1.2         La constante cosmologique       1.2	109           109           110           113           118           119           120           122           124           126           127           130           121
5	La 1 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5 5.6	matière-énergie courbe l'espace-tempsCourbure: le tenseur de Riemann5.1.1Le tenseur de Riemann5.1.2L'équation de la déviation géodésique5.1.3La déviation géodésique dans un repère en chute libreLa source de la courbure: le tenseur de stress-énergie5.2.1Le flux de masse5.2.2Le flux d'impulsion5.2.3Le tenseur de stress-énergie5.2.4Exemple: un fluide froid au repos5.2.5Loi de conservationL'équation du champ d'EinsteinLa constante cosmologiqueLentilles gravitationnelles	109           109           110           113           118           119           120           122           124           126           127           130           131
5	La 1 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5 5.6 Les	matière-énergie courbe l'espace-temps         Courbure: le tenseur de Riemann         5.1.1       Le tenseur de Riemann         5.1.2       L'équation de la déviation géodésique         5.1.3       La déviation géodésique dans un repère en chute libre         La source de la courbure: le tenseur de stress-énergie	109         109         109         110         113         118         119         120         120         122         124         126         127         130         131
5	La 1 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5 5.6 Les 6.1	matière-énergie courbe l'espace-temps         Courbure: le tenseur de Riemann         5.1.1       Le tenseur de Riemann         5.1.2       L'équation de la déviation géodésique         5.1.3       La déviation géodésique dans un repère en chute libre         La source de la courbure: le tenseur de stress-énergie	109         109         109         110         113         118         119         120         120         122         124         126         127         130         131
5	La 1 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5 5.6 Les 6.1	matière-énergie courbe l'espace-temps         Courbure: le tenseur de Riemann         5.1.1       Le tenseur de Riemann         5.1.2       L'équation de la déviation géodésique         5.1.3       La déviation géodésique dans un repère en chute libre         La source de la courbure: le tenseur de stress-énergie	109         109         109         110         113         118         119         120         122         124         125         124         126         127         130         131         141         141
5	La 1 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5 5.6 Les 6.1	matière-énergie courbe l'espace-temps         Courbure: le tenseur de Riemann         5.1.1       Le tenseur de Riemann         5.1.2       L'équation de la déviation géodésique         5.1.3       La déviation géodésique dans un repère en chute libre         La source de la courbure: le tenseur de stress-énergie	109         109         109         110         113         118         119         120         120         122         124         125         124         126         127         130         131         141         141         141
5	La 1 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5 5.6 Les 6.1	matière-énergie courbe l'espace-temps         Courbure: le tenseur de Riemann         5.1.1       Le tenseur de Riemann         5.1.2       L'équation de la déviation géodésique         5.1.3       La déviation géodésique dans un repère en chute libre         La source de la courbure: le tenseur de stress-énergie	109         109         109         110         113         118         119         120         122         124         126         127         130         131         141         141         141         142
5	La 1 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5 5.6 Les 6.1	matière-énergie courbe l'espace-temps         Courbure: le tenseur de Riemann         5.1.1       Le tenseur de Riemann         5.1.2       L'équation de la déviation géodésique         5.1.3       La déviation géodésique dans un repère en chute libre         La source de la courbure: le tenseur de stress-énergie	109         109         109         110         113         118         119         120         122         124         126         127         130         131         141         141         141         142
5	La 1 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5 5.6 Les 6.1	matière-énergie courbe l'espace-temps         Courbure: le tenseur de Riemann         5.1.1       Le tenseur de Riemann         5.1.2       L'équation de la déviation géodésique         5.1.3       La déviation géodésique dans un repère en chute libre         La source de la courbure: le tenseur de stress-énergie         5.2.1       Le flux de masse         5.2.2       Le flux d'impulsion         5.2.3       Le tenseur de stress-énergie         5.2.4       Exemple: un fluide froid au repos         5.2.5       Loi de conservation         L'équation du champ d'Einstein         La constante cosmologique         Lentilles gravitationnelles         Linéarisation des équations du champ         6.1.1       Le tenseur métrique         6.1.2       Les coefficients de connexion         6.1.3       Tenseurs de Riemann et de Ricci         6.1.4       Équation du champ d'Einstein	109         109         109         110         113         118         119         120         120         122         124         126         127         130         131         141         141         141         142         142         142
5	La 1 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5 5.6 Les 6.1	matière-énergie courbe l'espace-temps         Courbure: le tenseur de Riemann         5.1.1       Le tenseur de Riemann         5.1.2       L'équation de la déviation géodésique         5.1.3       La déviation géodésique dans un repère en chute libre         La source de la courbure: le tenseur de stress-énergie	109         109         109         110         113         118         119         120         121         122         124         125         124         126         127         130         131         141         141         141         142         143         145
5	La 1 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5 5.6 Les 6.1	matière-énergie courbe l'espace-temps         Courbure: le tenseur de Riemann         5.1.1       Le tenseur de Riemann         5.1.2       L'équation de la déviation géodésique         5.1.3       La déviation géodésique dans un repère en chute libre         La source de la courbure: le tenseur de stress-énergie       5.2.1         Le flux de masse       5.2.2         Le flux d'impulsion       5.2.3         Le tenseur de stress-énergie       5.2.4         Exemple: un fluide froid au repos       5.2.5         Loi de conservation       5.2.5         Loi de conservation       5.2.5         Loi de conservation       5.2.5         La limite Newtonienne       5.2.5         La limite Newtonienne       5.2.5         La constante cosmologique       5.2.5         La limite Newtonienne       5.2.5         La constante cosmologique       5.2.5         La constante cosmologique       5.2.5         La constante cosmologique       5.2.5	109         109         109         110         113         118         119         120         120         120         120         121         122         124         126         127         130         131         141         141         141         142         143         145         146

		6.2.2	États de polarisation $\ldots \ldots \ldots$
	6.3	La dét	ection des ondes gravitationnelles $\dots \dots \dots$
	6.4	Évider	nces et scénarios astrophysiques 150
		6.4.1	Ralentissement orbital de pulsars binaires 150
		6.4.2	Coalescence d'objets compacts 150
_	a	, ,	
7		mologi	
	(.1	La me	trique de Robertson-walker-Friedmann
	1.2	Les eq	uations de Friedmann-Lemaitre
		7.2.1	
		(.2.2	Derivation generale
		1.2.3	Equation d etat pour le nuide cosmologique
		7.2.4	Comparametre de Hubble
	7.9	(.2.) TT-::	Courbure et densite critique
	1.3	Univer	s d Einstein-de Sitter: $p = k = \Lambda = 0$
	1.4 7 F	Univer	s courbes: $p = \Lambda = 0$ et $k = \pm 1$ 109
	6.5	Univer	s courbes a constante cosmologique $\Lambda \neq 0$
		7.5.1	Solutions numeriques
		1.5.2	Les Univers $\Lambda > 0$
	76	7.0.5 Éridor	Les Univers $\Lambda < 0$
	1.0		Evenancian de l'Universe la Lei de Hubble
		7.0.1	Expansion de l'Universi la Loi de mubble
		7.0.2	La revennement fessile
		7.0.3	L'hypothèse inflationnaire
		7.0.4 765	La nucléosynthèse primordiale
		7.0.3	La modèle ACDM
		1.0.0	
8	Tro	us noir	rs 191
	8.1	Dériva	tion de la métrique de Schwarzschild
	8.2	Sur l'h	norizon
	8.3	Sous l	horizon
		8.3.1	L'impossibilité de demeurer au repos
		8.3.2	Les coordonnées d'Eddington-Finkelstein 199
		8.3.3	Les coordonnées de Kruskal-Szekeres
	8.4	Trou n	noir en rotation $\ldots \ldots 204$
		8.4.1	La métrique de Kerr
		8.4.2	L'horizon et la censure cosmique
		8.4.3	L'ergosphère
		8.4.4	La chute dans un trou noir en rotation
		8.4.5	Orbites liées autour d'un trou noir en rotation
		8.4.6	Déviation de la lumière par un trou noir en rotation
		8.4.7	Le mécanisme de Penrose 212
	8.5	Le mé	canisme de Hawking
	8.6	Évider	nces et scénarios astrophysiques
		8.6.1	Effondrement gravitationnel des étoiles
		8.6.2	Cygnus-X1 et compagnie 218
		8.6.3	Les Galaxies actives
		8.6.4	Le trou noir au centre de la Voie Lactée
		8.6.5	Le trou noir au centre de la galaxie M87

9	9 Sur les frontières					
	9.1	L'inertie et le principe de Mach	227			
	9.2	La nature de l'espace-temps	229			
	9.3	Singularités et gravité quantique	229			
$\mathbf{A}$	A Tenseurs de courbure pour métriques diagonales					
	A.1	Métriques diagonales en 4D	233			
	A.2	Métriques 2D et 3D	235			

## Chapitre 1

## Le principe d'équivalence

## **1.1** Introduction

La relativité générale est d'abord et avant tout une théorie géométrique de la gravité; théorie particulière à bien des points de vue, non le moindre étant qu'elle élimine la force gravitationnelle de la dynamique Newtonienne. À un niveau plus fondamental la relativité générale offre un changement de paradigme complet par rapport aux notions Newtonienne (et intuitives) de l'espace et du temps. Avant la relativité, l'espace et le temps sont des substrats passifs qui définissent une trame absolue et fixe par rapport à laquelle s'effectuent les mesures et s'expriment les lois physiques. L'espace-temps de la relativité générale est une entité dynamique qui agit sur la matière et l'énergie et réagit à leur présence. Cette vision de l'espace-temps est le point culminant d'une réflexion à laquelle ont contribué la plupart des grands penseurs des courants philosophiques occidentaux, e.g., Platon, Aristote, Newton, Leibniz, Descartes, Kant, Mach... pour n'en nommer que quelques uns.

La relativité générale, telle que formulée entre 1915 et 1917 par Albert Einstein (1879-1955; ci-après parfois Oncle Albert, malgré tout le respect qu'on lui doit) est également un point de bascule en physique: c'est la grande théorie ultime de la physique classique (dans le sens: non-quantique), et en même temps c'est la première théorie des champs dans le sens moderne du terme.

On verra explicitement au fil de ce cours comment la relativité générale englobe la relativité restreinte en l'absence de champs gravitationnels, et englobe également la dynamique et gravitation Newtoniennes dans la double limite des champs gravitationnels faibles et des vitesses non-relativistes (dans le sens  $V/c \ll 1$ ). Il s'avère donc très difficile, quoique possible, de distinguer la relativité générale de la dynamique Newtonienne en laboratoire. Même au niveau de la dynamique du système solaire, les effets associés à la relativité générale sont petits, mais déjà plus facilement mesurables —de telles mesures ont d'ailleurs offert les premières grandes confirmations de la théorie dans les premières décennies du vingtième siècle. Le champ d'applications de la relativité générale se retrouve donc principalement en astrophysique: trous noir, ondes gravitationnelles, cosmologie, Big Bang, lentilles gravitationnelles, etc.

### **1.2** Masses gravitationnelle et inertielle

Intuitivement autant que fondamentalement, la **masse** est une mesure de la "quantité de matière". Cependant, en y réfléchissant un peu il devrait être clair que jusqu'à maintenant vos études de la physique vous ont fait faire connaissance avec deux concepts distincts de la masse:

• La masse inertielle  $(m_I)$ : c'est la constante de proportionalité dans la seconde Loi de Newton:

$$\mathbf{F} = m_I \mathbf{a} \tag{1.1}$$

R223.tex, May 6, 2023

où  $\mathbf{F}$  est ici n'importe quelle force. Ceci exprime (entre autre) qu'il est difficile (i.e., demande plus d'énergie) de mettre en mouvement un wagon de train qu'un modèle réduit à l'échelle HO du même wagon.

• La masse gravitationnelle  $(m_G)$ : c'est la quantité déterminant l'intensité de la force gravitationnelle exercée entre deux objets; dans le champ gravitationnel de la Terre, on écrirait:

$$\mathbf{F} = m_G \mathbf{g} , \qquad \mathbf{g} = -\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \mathbf{e}_r .$$
 (1.2)

Si on introduit cette force gravitationnelle dans la seconde Loi de Newton, l'accélération est alors donnée par:

$$m_G \mathbf{g} = m_I \mathbf{a} \;, \tag{1.3}$$

Si  $m_I = m_G$ , alors  $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ , ce qui implique que tous les corps subissent la même accélération gravitationnelle, quelle que soit leur masse; autrement dit, tous les corps tombent à la même vitesse<sup>1</sup>. Ce n'est pas le cas sinon. Or voilà,

Il n'y aucune raison *a priori* de supposer que  $m_G = m_I$ 

La masse inertielle  $m_I$  "mesure" la difficulté à mettre un corps en mouvement sous l'action de n'importe quelle force; tandis que la masse gravitationnelle  $m_G$  est une constante de couplage mesurant la force ressentie par un corps ("quantité de matière") placé dans un champ gravitationnel, tout comme la charge électrique q mesure la force électrostatique ressentie par un corps chargé placé dans un champ électrique; on pourrait tout aussi bien appeler  $m_G$  la "charge gravitationnelle".

Les interrogations philosophico-physiques changent avec le temps. La dynamique Newtonienne est formulée dans le cadre d'un espace absolu —on dirait aujourd'hui un **repère**— par rapport auquel peuvent se mesurer tout déplacement ou accélération, selon un écoulement du temps tout aussi unique et absolu. Cet aspect de la dynamique Newtonienne ne posait pas problème à l'époque, peut-être parce qu'il formalisait quelque chose de déjà implicite dans la vieille dynamique Aristotélienne, mais cette idée a nez en moins<sup>2</sup> continué d'alimenter les réflexions philosophiques dans les siècles qui ont suivi. C'est le concept d'action-à-distance (et instantanée) associée à la gravitation universelle, par contre, qui s'est avéré plus difficile à avaler pour plusieurs.

Cependant, du point de vue pratique la dynamique Newtonienne (incluant sa loi de la gravitation universelle) a connu un succès retentissant, au point où elle a rapidement éclipsé la compétition du temps (Descartes et Leibniz) et est rapidement devenue le cadre dominant et quasi-exclusif de la pensée physique de la fin du dix-septième siècle à celle du dix-neuvième. La prédiction en 1682 (vérifiée en 1759) du retour de la comète de Halley fut considérée à l'époque comme une confirmation aussi spectaculaire qu'indubitable de la théorie Newtonienne.

## 1.3 L'argument de Galilée

La dynamique Newtonienne **prédit** que tous les corps tombent à la même accélération/vitesse dans le champ gravitationnel de la Terre **seulement** si  $m_I = m_G$ . Déjà du temps de Newton cette égalité était considérée comme démontrée, entre autre via un argument du type "expérience par la pensée" popularisé au début du seizième siècle par Galileo Galilei (1564-1642, alias Galilée). La physique dite Aristotélienne, encore dominante à l'époque, soutenait que les corps plus lourds tombent plus rapidement, déduction "évidente" si on regarde tomber

 $<sup>^1\</sup>mathrm{En}$  négligeant bien sur toutes ces fascinantes complications comme la viscosité de l'air, la turbulence, etc.  $^2\mathrm{Toujours}$  réveillé(e) là…?

un boulet de canon et une plume relâchés simultanément... Galilée, qui s'était fait une obsession personnelle de réfuter Aristote<sup>3</sup>, ne pouvait pas laisser passer ça...

Il est remarquable que ce postulat de la gravitation Aristotélienne puisse être réfuté par un argument purement logique, qui prédate de quelques siècles les Lois de Newton, et énoncé longtemps avant que le concept d'inertie ne soit même clairement formulé. L'idée est illustrée sur la Figure 1.1. On considère deux masses,  $m_1$  et  $m_2$  (avec  $m_1 > m_2$ , disons) relâchées



Figure 1.1: La preuve de Galilée. Deux masses  $m_1$  et  $m_2$  ( $< m_1$ ) sont relâchées simultanément. Selon Aristote,  $m_1$  chute plus rapidement parce que plus lourde, et donc devance  $m_2$  dans sa chute (en A). Si les deux masses sont reliées par un ressort (en B), un fois celui-ci étiré il exercera une force tendant à ralentir la chute de  $m_1$  et accélérer celle de  $m_2$ , et donc, par rapport à la situation en A, après le même intervalle de temps l'assemblage aura chuté moins loin que  $m_1$  mais plus loin que  $m_2$ . En (C), un tour de magie remplace le ressort étiré par une tige rigide (de masse nulle) soudée aux deux masses; l'haltère en résultant est un objet rigide de masse  $m_1 + m_2 > m_1$ , et donc selon Aristote devrait avoir chuté plus loin que  $m_1$  en (A), ce qui est en contradiction avec notre conclusion en B.

simultanément dans le champ gravitationnel de la Terre. On commence par poser l'hypothèse qu'Aristote a raison, et qu'une masse plus grande (ici la 1) chute plus rapidement qu'une masse plus petite, comme illustré en (A). Maintenant reprenons l'expérience après avoir installé un ressort connectant les deux masses; le ressort sera étiré durant la chute, ce qui produira une force qui ralentira la chute de la masse 1 et accélérera celle de la masse 2 jusqu'à ce que les

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Il serait beaucoup plus exact de dire que Galilée s'est appliqué à démolir la version de la physique Aristotélienne qui était enseignée depuis le Moyen Âge dans les Universités d'Europe, modifiée et épurée pour ne pas entrer en conflit trop direct avec les Saintes Écritures; cette version différait en plusieurs aspects de l'original, et à plusieurs reprises dans ses écrits Galilée s'applique à argumenter qu'Aristote lui-même n'aurait jamais accepté certaines des idées qui lui étaient attribuées au seizième siècle.



Figure 1.2: Le principe d'équivalence. Il est impossible de distinguer, par manipulations expérimentales à l'intérieur d'une fusée, une situation où la dite fusée est au repos dans le champ gravitationnel terrestre (au centre), ou accélère vers le haut à 9.8 m s<sup>-2</sup> (à droite), en l'absence de tout champ gravitationnel.

deux chutent à la même vitesse (en B). À partir de ce moment on peut remplacer le ressort étiré par une tige rigide de la même longueur et soudée aux deux masses, sans rien changer à l'équilibre des forces en présence (en C). Mais on a maintenant un objet rigide de masse  $m_1 + m_2$ , clairement  $> m_1$ , qui devrait donc chuter plus rapidement que ne le ferait la masse  $m_1$  seule; ce qui contredit notre déduction basée sur la situation en (B). L'hypothèse de départ doit donc être fausse. QED. Et donc, des corps de masses différentes doivent **logiquement** chuter à la même vitesse, ce qui, en dynamique Newtonienne, impose que  $m_I = m_G$ .

## 1.4 Le principe d'équivalence

Le **Principe d'Équivalence** en relativité restreinte pose l'égalité démocratique de tous les repères inertiels. Le **Principe d'Équivalence généralisé**, en relativité générale, étend ce principe aux repères non-inertiels, avec la conséquence qu'il devient impossible de distinguer, sur la base de manips expérimentales, l'effet d'une accélération constante de celui d'un champ gravitationnel; la Figure 1.2 illustre le concept. Anne et Buck sont à l'intérieur d'une fusée sans hublots. En (A), Anne relâche un boulet, qui entre par la suite en collision avec la tête de Buck en faisant Bok<sup>4</sup>. Buck, au bas de la fusée, n'est pas en mesure de distinguer si le boulet lui est tombé sur la tête à  $9.8 \text{ m s}^{-2}$  dans une fusée fixée à sa rampe de lancement à la surface de la Terre (la situation en B), ou si c'est la fusée, Anne, et lui qui accélèrent tous les trois à 9.8 m

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>S'cusez, je ne suis pas très doué pour les rimes.



Figure 1.3: Le principe d'équivalence appliqué à la lumière. Un faisceau lumineux traversant horizontalement une une fusée accélérant à 9.8 m s<sup>-2</sup> (en A, vue d'un repère inertiel, ou du repère accéléré de la fusée, en B), versus au repos dans le champ gravitationnel terrestre (en C).

 $s^{-2}$  vers une balle demeurant au repos dans un repère inertiel une fois relâchée (la situation en C), en l'absence de toute gravité.

On verra aussi plus tard que si **g** n'est pas constant dans l'espace (e.g.,  $\mathbf{g} \propto 1/r^2$ ), le principe d'équivalence généralisé tient encore la route *localement*, c'est à dire dans un volume spatial suffisamment petit pour que **g** puisse y être considéré constant sans affecter les résultats expérimentaux au delà de la précision des mesures.

Mais qu'en est-il si on effectue des expériences avec des ondes électromagnétiques, i.e, la lumière ? C'est ici que la version "généralisée" du principe d'équivalence prend du poids. Même avec la lumière, on ne peut distinguer un repère accéléré sans gravité d'un second repère au repos mais sujet à un champ gravitationnel. La Figure 1.3A montre trois vues d'une fusée traversée par un faisceau lumineux. En (A), la situation telle que vue d'un repère inertiel où le faisceau lumineux se déplace horizontalement. Comme la fusée accélère vers le haut, le trou du coté droit de la fusée doit être percé un peu plus bas que celui du coté gauche, pour permettre à la lumière de passer, puisque la lumière prend un temps fini pour traverser le diamètre de la fusée. Le diagramme en (B) illustre la même situation, vue cette fois du repère accéléré (non-inertiel) de la fusée. Le faisceau lumineux semble maintenant dévier vers le bas, le long d'une trajectoire courbe puisque la fusée accélère vers le haut: la lumière parcourt une distance horizontale  $c \times t$  tandis que la fusée s'élève de  $at^2/2$ , d'où la forme parabolique de la trajectoire.

Si maintenant on accepte la forme généralisée du principe d'équivalence, alors on doit conclure que dans le cas illustré sur le diagramme en (C), soit une fusée **au repos** dans le champ gravitationnel de la Terre, la lumière est déviée vers le bas par la gravité, selon la même trajectoire parabolique qu'en (B). Mais pourtant la lumière (i.e. les photons) n'a pas de masse... Ça commence à sentir le soufre n'est-ce-pas... !

### 1.5 Tests du principe d'équivalence

Sir Isaac Newton (1643-1727), qui un peu comme Galilée ne faisait confiance à personne et aimait bien tout comprendre lui-même, s'est lui aussi intéressé à la question de l'égalité des masses inertielle et gravitationnelle sous l'angle expérimental.

Pour un pendule de longueur L sujet à l'accélération gravitationnelle g à la surface de la Terre, et pour un faible déplacement angulaire  $\theta$  par rapport à la verticale, la seconde Loi de Newton conduit à:

$$m_I L \frac{\mathrm{d}^2 \theta}{\mathrm{d}t^2} = m_G g \, \theta \, , \qquad \theta \ll 1 \, .$$
 (1.4)

Cette équation différentielle est celle du mouvement harmonique, donc la fréquence angulaire  $\omega$  est donnée par

$$\omega = \sqrt{\frac{m_G}{m_I}} \sqrt{\frac{g}{L}} , \qquad \theta \ll 1 .$$
 (1.5)

Ceci se réduit au résultat habituel,  $\omega = \sqrt{g/L}$ , si et seulement si  $m_I = m_G$ . Newton a ainsi tenté de mesurer les différences dans la période d'oscillations de pendules ayant tous le même L, mais des masses différences. Il en a conclut que la différence dans la fréquence d'oscillation, si il existe une, est en deça de la précision de ses mesures de l'écoulement du temps; résultat donc inconclusif.

Le montage expérimental mis au point deux siècles plus tard par Loránd Eötvös (1848-1919), utilise un pendule à torsion pour mesurer le déséquilibre entre la force gravitationnelle et la force centrifuge produit si  $m_I \neq m_G$ . Considérons une masse m suspendue dans le champ gravitationnel terrestre, à mi-latitudes (plus précisément: en Hongrie), tel qu'illustré sur la Figure 1.4A; à cause de la force centrifuge, la masse sera légèrement déviée de la verticale, par un angle  $\alpha$  se calculant en posant égalité de la force centrifuge et de la projection de la gravité dans la direction perpendiculaire à l'axe de rotation. Pour une très faible déviation de la verticale locale, cet équilibre se réduit à:

$$m_I \Omega_{\oplus}^2 R_{\oplus} \sin \theta = \frac{G M_{\oplus} m_G}{R_{\oplus}^2} \frac{\tan \alpha}{\cos(\theta)} \longrightarrow \tan \alpha = \frac{\Omega_{\oplus}^2 R_{\oplus}^3}{G M_{\oplus}} \left(\frac{m_I}{m_G}\right) \sin \theta \cos \theta .$$
(1.6)

où  $\theta$  est l'angle polaire à la latitude du pendule. Supposons maintenant que deux sphères de rayons identiques faites de métaux de densités différentes, donc de masses  $m^a$  et  $m^b$  différentes, sont fixées à chaque bouts d'une tige rigide, et l'haltère en résultant est suspendue par un fil attaché à la tige au point d'équilibre (hors-centre) entre les deux masse, comme sur la Fig. 1.4B. L'assemblage sera encore très légèrement dévié de la verticale par la force centrifuge; mais si  $m_I \neq m_G$ , la déviation par rapport à la verticale qui conduira à un équilibre entre les forces centrifuge et gravitationnelle ne sera pas la même pour chacune des deux masses. On observera donc une torsion autour de l'axe du pendule. Même une minuscule torsion peut être détectée en mesurant la déviation d'un faisceau lumineux réfléchi sur un petit miroir fixé sur la tige reliant les deux masses.

Je vous fais grâce des détails (voir Hartle, §6.1), mais cette expérience donne accès à un paramètre scalaire  $\eta$  mesurant la différence des accélérations par rapport à leur moyenne:

γ

$$\eta = \left(\frac{m_G^a}{m_I^a} - \frac{m_G^b}{m_I^b}\right) \left/ \frac{1}{2} \left(\frac{m_G^a}{m_I^a} + \frac{m_G^b}{m_I^b}\right) \right.$$
(1.7)

Une série de manips effectuées par Eötvös et collaborateurs entre 1885 et 1890 mènent à  $m_G = m_I$  à une précision déclarée de  $\eta \simeq 10^{-7}$ . Les variations plus récentes (1994) de l'expérience arrivent à la même conclusion, mais à une précision de  $\eta = (-0.2 \pm 2.8) \times 10^{-12}$ . Les mesures les plus précises proviennent en fait de l'observation des variations de l'orbite de la Lune par

Ha §6.1



Figure 1.4: L'expérience d'Eötvös. En (A), une masse suspendue à un fil dévie légèrement de la verticale locale en raison de la force centrifuge. La grandeur de l'angle  $\alpha$  est grandement exaggérée ici. En B, deux masses inégales reliées par une tige rigide et suspendues à leur point d'équilibre (hors-centre; ici on aurait  $m^a > m^b$ ), l'assemblage résultant agissant comme un pendule torsionnel venant remplacer la masse m en A (voir texte).

télémétrie laser<sup>5</sup>; la Terre et la Lune, de masses différentes, orbitent autour de leur centre de masse commun sur une orbite quasi-circulaire où la force centrifuge équilibre leur gravité mutuelle. Mais elles "tombent" aussi toutes les deux dans le champ gravitationnel du Soleil, et agissent donc comme une version astronomique de l'expérience d'Eötvös; on en tire  $m_I = m_G$ à une précision de  $1.5 \times 10^{-13}$ . Très peu de Lois physiques (ou de valeurs des constantes fondamentales leur étant associées) sont validées expérimentalement à ce niveau de pécision !

### 1.6 La gravité n'est pas une force

En relativité générale, la gravité est une force **fictive**. N'en déplaise à tout ce qu'on vous a raconté depuis le secondaire, la trajectoire d'une balle lancée vigoureusement n'est pas parabolique parce qu'une force l'accélère vers le bas; elle suit simplement la courbure de l'espacetemps, et la déviation de sa trajectoire par rapport à la ligne droite est une mesure de cette courbure. Il n'y pas d'action à distance, et des masses différentes "tombent" à la même vitesse simplement parce qu'elle suivent la même courbure. Finalement, la curieuse égalité  $m_I = m_G$ n'a plus à être expliquée:  $m_G$  n'existe simplement pas!

Vous devriez être très ébranlé(e) par le paragraphe qui précède; quoiqu'après réflexion l'idée qui y est mise de l'avant puisse sembler facile à invalider. Par exemple considérons, comme sur la Figure 1.5, une balle de fusil et une balle de baseball, toutes deux projetées du point Aet atteignant le point B, situé à la même altitude 10 mètres plus loin. Si l'on suppose que la balle de baseball est lancée à 5 m s<sup>-1</sup>, alors elle traverse d = 10 m en  $t_2 = 2$  s, atteignant à mi-parcours une hauteur  $h_2 = 5$  m. Si maintenant la balle de fusil est tirée à 500 m s<sup>-1</sup>, alors elle traverse d = 10 m en  $t_1 = 0.02$  s, atteignant à mi-parcours une hauteur  $h_1 = 5 \times 10^{-4}$  m. Ça, c'est bel et bien de la cinématique de secondaire 4 !

Or les deux trajectoires, illustrées sur la Figure 1.5, n'ont pas du tout l'air d'avoir la même courbure. Plus quantitativement, si on approxime les deux trajectoires par des arcs de cercle (une excellente approximation pour la balle de fusil, mais plutôt mauvaise pour la balle de

 $<sup>^{5}</sup>$ Télémétrie rendue possible par des réflecteurs laissés sur la Lune par les astronautes des missions Apollo.



Figure 1.5: Courbure dans l'espace. Trajectoires dans l'espace d'une balle de baseball et d'une balle de fusil parcourant tous les deux 10 mètres horizontalement avant de frapper le sol. La courbure spatiale des deux trajectoires est très différente dans les deux cas. Source: Box 1.6 de MTW (Misner, Thorne & Wheeler, *Gravitation*, Freeman &co. 1973), p33.

baseball), on devrait avoir:

$$R_i = \frac{(d/2)^2 + h_i^2}{2h_i} \tag{1.8}$$

$$\simeq \frac{d^2}{8h_i} \qquad \text{si } d \gg h_i , \qquad i = 1, 2 . \tag{1.9}$$

Ce qui donne  $R_1 = 5$  m pour la balle de baseball, et  $R_2 = 10^4$  m pour la balle de fusil; clairement  $R_1 \neq R_2$ , et celà n'a rien à voir avec le fait que  $d \ll h$  n'est pas vraiment le cas pour la balle de baseball, ou qu'un arc de cercle soit une mauvaise approximation d'un segment de parabole.

Retour en secondaire 4 ? Non; la Fig. 1.5 est tracée dans un plan purement spatial [x, z]. En relativité (restreinte ou générale), les deux trajectoires doivent être tracées, et leur courbure mesurées, dans **l'espace-temps** ! Ceci est illustrée sur la Figure 1.6. Histoire de ne pas comparer pommes et oranges, et comme en relativité restreinte, la dimension temporelle est tracée selon une variable ct, où c est la vitesse de la lumière; cette dernière étant gigantesque par rapport même à celle de la balle de fusil, les deux trajectoires se retrouvent orientées principalement dans la direction temporelle.

Revenons maintenant à notre calcul de la courbure. Cette fois l'arc de cercle est une excellente approximation dans les deux cas, et dans les expressions ci-dessus il s'agit simplement de remplacer d par  $\sqrt{d^2 + (ct_i)^2}$ ; on trouve alors dans les deux cas  $R_1 = R_2 \simeq 9 \times 10^{15}$  m, soit  $\simeq 1$  année-lumière. Mais, ce qui est vraiment le plus important, on a maintenant  $R_1 = R_2$ , tel qu'annoncé. Exit le secondaire 4 !

## 1.7 Limites du principe d'équivalence: les effets de marée

Revenons à notre pôvre Buck qui se ramasse le boulet sur la tête sur la Figure 1.2. Supposons maintenant que l'accélération gravitationelle n'est pas constante à 9.8 m s<sup>-2</sup>, mais diminue significativement si on s'élève de la position de Buck vers celle de Anne. Dans la situation du centre, Buck reçoit encore le boulet sur la tête, mais après un intervalle de temps un peu plus long que dans le cas à gravité constante. Mais maintenant si on veut remplacer l'accélération gravitationnelle vers le bas par une accélération de la fusée vers le haut afin que Buck se frappe le crâne sur le boulet demeuré immobile après le même intervalle de temps, l'accélération devra maintenant dépendre de la hauteur. Ce différentiel d'accélération devrait donc **compresser la** 



Figure 1.6: Courbure dans l'espace l'espace-temps. Les mêmes trajectoires que sur la Fig. 1.5, mais tracées cette fois dans l'espace-temps, avec la coordonnée temporelle donnée par  $c \times t$ . Le diagramme n'est pas tracé à l'échelle, l'étendue temporelle de la trajectoire étant en fait 600000 plus grande qu'en x pour la balle de fusil, et encore 100 fois plus pour la balle de baseball. Les rayons de courbure spatiotemporelle des deux trajectoires sont maintenant identiques. Source: Box 1.6 de MTW, p33.

fusée verticalement, un effet observable par Buck, et absent dans la situation du centre de la Figure 1.2. Le principe d'équivalence ne tient donc plus la route  $ici^6$ .

De manière plus générale, le bris du principe d'équivalence se manifeste dans quelque chose que vous connaissez déjà, soit l'**effet de marée**. Considérons la situation schématisée sur la Figure 1.7. Un corps sphérique déformable de rayon R et de masse m est sujet à la force gravitationnelle causée par la présence d'une seconde masse M située à distance d. Le point a à la surface de la masse m étant situé plus près de M que le centre de m, il ressentira une force gravitationnelle de grandeur  $F_a$  plus grande que la force  $F_0$  ressentie au centre de m. En régime Newtonien cette différence par rapport au centre est donnée par:

$$F_a - F_0 = \frac{GMm}{(d-R)^2} - \frac{GMm}{d^2}$$
$$= \frac{GMm}{d^2} \left[ \left( 1 - \left(\frac{R}{d}\right)^2 \right)^{-1} - 1 \right]$$

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Sur réflexion, on pourrait penser sauver le principe d'équivalence en imposant à la fusée une accélération vers le haut qui dépende du temps, de manière à reproduire la variation de la gravité ressentie par la balle à mesure qu'elle chute de Anne vers Buck sur le dessin du milieu de la Fig. 1.2; il s'avère que Buck pourrait encore ici distinguer expérimentalement les deux situations. Essayez d'imaginer comment...



Figure 1.7: Représentation schématique de la déformation d'une masse sphérique m de rayon R par effet de marée, causée par le champ gravitationnel ( $\propto 1/d^2$ ) dû à d'une seconde masse M située à distance d du centre de m. La déformation résulte de la **variation spatiale** de la force gravitationnelle sur l'étendue finie de la masse m. Une déformation symétrique par rapport à un plan bissectant m verticalement, tel qu'illustré ici, requiert  $R/d \ll 1$ .

$$= \frac{GMm}{d^2} \left[ \left( 1 + 2\frac{R}{d} \right) - 1 \right] \qquad R/d \ll 1$$
$$= \frac{2GMmR}{d^3} , \qquad (1.10)$$

où le passage de la seconde à la troisième égalité résulte du développement du premier terme entre parenthèses carrées dans la limite  $R/d \ll 1$ . On retrouve le résultat classique, soit que la force de marée varie comme le cube de la distance d séparant les deux masses. Dans le cas d'un point situé à la position b, la force de marée est dirigée vers le centre de m, mais varie aussi en  $R/d^3$  dans la limite  $R/d \ll 1$ . La déformation globale de la surface de m résultant de l'action de cette force de marée est indiquée par le trait rouge sur la Fig. 1.7: la sphère est **étirée** dans la direction parallèle à l'axe joignant m et M, et **compressée** dans la direction perpendiculaire. Le point clef ici est qu'aucun changement vers un repère uniformément accéléré vers la droite ne peut reproduire cette déformation. C'est donc la force de marée qui permet de véritablement démontrer sans ambiguité la présence de la gravité !

## 1.8 Le programme théorique

Ce petit chapitre introductif vous aura donné un avant-goût, je l'espère, de l'abime dans lequel nous nous apprêtons à plonger, du bout de notre planche surplombant les profondeurs insondables de l'infini (Yé !). Notre programme théorique se fragmente naturellement en deux parties, et se développera donc en deux temps:

- Formuler les Lois physiques sous une forme applicable à l'espace-temps courbe (chapitre 3)
- Établir comment la matière-énergie courbe l'espace-temps (chapitre 5)

Il sera utile de débuter tout ceci par un bref rappel de certains concepts-clef en relativité restreinte, sur lesquels nous bâtirons ensuite la première partie de notre programme théorique. Alea jacta est, Banzai, et toute cette sorte de choses !

#### **Bibliographie**:

Ces notes de cours sont de mon cru, mais je me suis évidemment inspiré de divers manuels de cours sur le sujet, plus spécifiquement les sept qui suivent, listés en ordre croissant de niveau technique (selon ma perception de la chose). Parfois l'inspiration est vraiment forte, i.e., je n'ai surtout fait que traduire et/ou élaborer/ajouter des étapes manquantes aux développements mathématiques. J'indique alors en **rouge** dans les marges les références aux sections correspondantes dans l'un ou l'autre de ces bouquins, suivant le code d'abbréviation indiqué:

- Barrau, A., & Grain, J., Relativité générale,  $2^e$  éd., Dunod 2016. [BG]
- Hartle, J.B., Gravity: an Introduction to Einstein's General Relativity, Addison-Wesley 2003. [Ha]
- Schutz, B., A first course in General Relativity, 2ème éd., Cambridge University Press, 2006. [Sch]
- Rindler, W., *Relativity: special, general and cosmological*, 2<sup>e</sup> éd., Oxford University Press, 2006. [Ri]
- Thorne, K.S., & Blandford, R.D., *Modern Classical Physics*, Princeton University Press 2017; chaps. 24–28. [TB]

Caroll, S.M., Spacetime and Geometry, Cambridge University Press 2019. [Ca]

Misner, C., Thorne, K.S., & Wheeler, J.A., Gravitation, Freeman & Co. 1973. [MTW]

Notez cependant que j'ai recalculé moi-même tout seul comme un grand tous les résultats analytiques ou numériques présentés au fil des pages qui suivent. Si c'est trop difficile pour que je puisse le recalculer, c'est trop difficile pour l'inclure dans ces Notes de cours. Les quelques rares exceptions à ce *modus operandi* seront explicitement indiquées.

J'inclus aussi parfois en marge, cette fois en **bleu** mais toujours en utilisant le même code, les sections de ces ouvrages où des détails supplémentaires particulièrement intéressants/pertinents sont fournis, quand j'ai choisi de ne pas en discuter en détail dans ces Notes.

Une autre ressource très intéressante, quoiqu'à un niveau parfois plus avancé que celui de ce cours, est la revue en ligne "Living Reviews in Relativity" (LRR); il s'agit d'articles de revue (parfois assez techniques) en accès libre, qui sont mis à jour de manière régulière (en principe) par leurs auteurs. Voir:

https://www.springer.com/gp/livingreviews/relativity/lrr-articles

Les pages Wikipedia traitant de relativité générale sont, comme toujours, d'intérêt et de qualité très inégales, donc à utiliser avec prudence et un esprit critique bien éveillé. Dans le plus solide sur le web, je recommanderais plutôt:

http://www.einstein-online.info/spotlights/gr.html

Au niveau du principe d'équivalence et de sa vérification expérimentale, le chapitre 1 de l'ouvrage suivant demeure un incontournable:

Ohanian, H.C., & Ruffini, R., Gravitation and Spacetime, 2ème éd., W.W. Norton, 1994.

Voir aussi l'article suivant dans LRR:

Will, C.F., Liv. Rev. Rel., 17, 4 (2014); link.springer.com/article/10.12942%2Flrr-2014-4.

Et pour le plus récent résultat (en date de janvier 2020):

Touboul, P., Phys. Rev. Lett., 119, 231101 (2017).

17



Hermann Minkowski (1864–1909)



Hendrik Lorentz (1853–1928)



Albert Einstein(1879–1955)

## Chapitre 2

## Rappel: la relativité restreinte

Ce chapitre présente un bref survol des concepts-clef de la relativité restreinte. La présentation du sujet n'est pas du tout complète, l'emphase étant mise sur les aspects qui nous seront particulièrement utiles pour la suite, soit la notion d'intervalle invariant, les diagrammes espacetemps, la transformation de Lorentz, et la formulation invariante de la dynamique relativiste en terme de quadrivecteurs. Le chapitre inclut également un interlude mathématique sur les représentations vectorielles et les tenseurs, et introduit la notion de tenseur métrique, se limitant pour le moment au tenseur métrique d'usage en relativité restreinte, soit le tenseur dit de Minkowski, qui définit la mesure de l'intervalle invariant dans l'espace-temps pseudo-Euclidien.

### 2.1 La relativité Galiléenne

Ce que nous appelons maintenant la **relativité Galiléenne** est principalement une règle d'addition vectorielle des vitesses, proposée par Galilée à la toute fin du seizième siècle en appui (entre autre) à l'hypothèse Copernicienne de la rotation diurne de la Terre.

En notation et en langage moderne, pour un repère "prime" se déplaçant dans la direction positive de l'axe des x à vitesse V, vu d'un repère "non-prime" au repos, on écrirait (anachroniquement!):

$$x = x' + Vt' \tag{2.1}$$

$$y = y' \tag{2.2}$$

$$z = z' \tag{2.3}$$

et donc (encore plus anachroniquement) pour la composante-x de la vitesse:

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$
  
=  $\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} + V\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}$   
=  $v'_x + V$  ssi  $t = t'$  (2.4)

C'est la Loi Galiléenne d'addition des vitesses, qui, notons le bien présuppose que  $t \equiv t'$ ! Le temps est absolu en relativité Galiléenne, tout comme il l'est en mécanique et dynamique Newtoniennes, par ailleurs cohérente avec la relativité Galiléenne.

La relativité Galiléenne indique qu'un faisceau lumineux émis à vitesse c' dans un repère "prime" en mouvement uniforme à vitesse V (e.g., un train) se déplacera, vue d'un repère au repos, à une vitesse c = c' + V; l'expérience de Michelson-Morley, à la surprise générale à l'époque (1887), a plutôt démontré que la vitesse de la lumière est toujours  $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$  quel que soit l'état de mouvement du repère où la vitesse est mesurée. La relativité Galiléenne ne fonctionne pas, ou plus précisément, ne fonctionne approximativement bien que quand on se limite à des repères se déplaçant à des vitesses beaucoup plus petites que celle de la lumière (comme un train!).

Ha §4.1

La **relativité restreinte**, mise en place au tout début du vingtième siècle par Einstein et plusieurs de ses contemporains, élève la constance de la vitesse de la lumière au niveau de postulat, et pose l'équivalence de tous les repères inertiels, c.-à-d. non-accélérés. Il n'y a donc plus de repère absolu pour la mesure des positions ou du temps (et donc des vitesses, accélérations, etc.). Une des conséquences contre-intuitives de cet état de fait est que la simultanéité devient relative, dans le sens que deux événements observés comme simultanés dans un repère ne le sont pas nécessairement dans un autre repère. On y reviendra un peu plus loin.

Du point de vue mathématico-physique, le défi relevé (avec succès) par la relativité restreinte était d'exprimer les Lois de la Physique d'une manière qui soit invariante sous changement d'un repère inertiel à un autre, malgré le fait que la vitesse de la lumière soit la même dans tous les repères.

### 2.2 L'espace-temps

Philosophiquement et opérationnellement parlant, l'idée peut-être la plus révolutionnaire de la relativité restreinte est l'abandon du statut absolu du temps, et de l'incorporer dans une structure quadridimensionnelle nommée **espace-temps**<sup>1</sup> dans le cadre duquel se reformulent les théories cinématiques et dynamiques du mouvement.

En pratique, la notion-clef est celle des **invariants**, soit des quantités dont les valeurs sont indépendantes du repère (un choix spécifique de système de coordonnées spatiotemporelles) dans lequel les invariants sont calculés. L'utilité de cette propriété deviendra claire au fil de ces pages et des semaines à venir. En bref, l'idée sera de calculer un invariant dans un repère particulier où le calcul est facile, et ensuite invoquer son invariance pour l'utiliser dans d'autres repères d'intérêt où son calcul aurait été plus complexe.

#### 2.2.1 L'intervalle invariant

Considérons une horloge très idéalisée, dont le coeur opérationnel est constitué de deux miroirs parallèles séparés d'une distance L, entre lesquels se réfléchit un faisceau lumineux; la durée d'un aller-retour entre les deux miroirs définit un "tick" de cette horloge. L'idée est illustrée schématiquement à la Figure 2.1.

Pour l'horloge au repos, l'intervalle de temps  $\Delta t$  requis pour faire un aller-retour entre les miroirs est donné par:

$$\Delta t = 2L/c \qquad \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0 . \tag{2.5}$$

Mais, pour la seconde horloge en mouvement, on aurait plutôt:

$$\Delta t' = \frac{2}{c} \sqrt{L^2 + \left(\frac{\Delta x'}{2}\right)^2} , \qquad \Delta x' = V \Delta t' , \qquad \Delta y' = \Delta z' = 0 .$$
 (2.6)

Clairement, on aura ici  $\Delta t' > \Delta t$  puisque c =constante. Plus spécifiquement, si on substitue  $\Delta x' = V \Delta t'$  dans l'expression ci-dessus on obtient:

$$\Delta t' = \frac{2}{c} \sqrt{L^2 + \left(\frac{V\Delta t'}{2}\right)^2} , \qquad (2.7)$$

et donc en mettant au carré:

$$(\Delta t')^2 = \frac{4}{c^2} \left[ L^2 + \left( \frac{V^2 (\Delta t')^2}{4} \right) \right]$$
(2.8)

 $<sup>^{1}</sup>$ Le terme anglais "spacetime", sans trait d'union, capture mieux l'unité fondamentale de la trame spatiotemporelle.



Figure 2.1: Horloges idéalisées, au repos (en haut à gauche) et en mouvement dans la direction positive de l'axe-x (en bas). Le faisceau lumineux (en rouge) doit traverser une plus grande distance dans l'horloge en mouvement que dans celle au repos, et donc "ticke" plus lentement puisque la vitesse c de la lumière est constante (voir texte).

$$= \frac{4L^2}{(\Delta t)^2} + \frac{V^2}{c^2} (\Delta t')^2 , \qquad (2.9)$$

d'où on tire:

$$\Delta t = \Delta t' \sqrt{1 - \left(\frac{V^2}{c^2}\right)} \quad \rightarrow \quad \Delta t' \ge \Delta t \tag{2.10}$$

Si on interprète un aller-retour du faisceau lumineux comme un "tick" de l'horloge, on ne peut qu'en conclure que l'horloge ticke plus lentement dans le repère en mouvement. Calculons maintenant, pour nos deux horloges, la quantité

$$-(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2$$
; (2.11)

comme  $\Delta x = 0$  pour l'horloge au repos, on a donc:

$$-(c\Delta t)^2 = -4L^2$$
 [horloge au repos] (2.12)

$$-(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 = -4\left[L^2 + \left(\frac{\Delta x'}{2}\right)^2\right] + (\Delta x')^2 = -4L^2 \qquad \text{[horloge en mouven(ant]]}$$

soit le même résultat dans les deux cas. Si on répète le calcul pour une orientation arbitraire de V dans l'espace, l'algèbre est plus compliquée mais on arrive au même résultat, soit

$$-(c\Delta t')^{2} + (\Delta x')^{2} + (\Delta y')^{2} + (\Delta z')^{2} = -(c\Delta t)^{2} + (\Delta x)^{2} + (\Delta y)^{2} + (\Delta z)^{2}$$
(2.14)  
$$\equiv (\Delta s)^{2}$$
(2.15)

On peut considérer l'horloge au repos identique à celle en mouvement, mais vue d'un repère en mouvement uniforme à vitesse V dans la direction positive de l'axe-x. Notre résultat ci-dessus implique donc que la quantité  $(\Delta s)^2$  est **invariante** en passant d'un repère (inertiel) à un autre; en version infinitésimale on écrit:

$$ds^{2} = -c^{2} dt^{2} + dx^{2} + dy^{2} + dz^{2}$$
(2.16)

**ATTENTION**: on a introduit ici une convention de signe; on aurait tout aussi bien pu calculer la quantité  $(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ , qui se serait retrouvée invariante elle aussi, et d'où on aurait conclut que l'intervalle s'écrirait:

$$ds^{2} = c^{2} dt^{2} - dx^{2} - dy^{2} - dz^{2} . \qquad (2.17)$$

Certains bouquins et/ou auteurs (dont l'Oncle Albert lui-même!) adoptent cette seconde convention; ici nous nous en tiendrons à (2.16), qui est la convention qui s'est lentement imposée au fil des années, et est adoptée (entre autre) dans les ouvrages de Hartle, Misner Thorne et Wheeler, Schutz, Caroll, et la plupart des autres bouquins qui seront cités au fil des chapitres qui suivent (voir la bibliographie du chapitre 1 pour les références complètes). Notons cependant deux exceptions importantes pour nous, soit les ouvrage de Rindler, et de Barrau et Grain, qui seront aussi souvent cités, qui utilisent la convention (2.17).

Quelle que soit la convention adoptée, le fait que le terme temporel (en  $dt^2$ ) n'ait pas le même signe que les termes spatiaux (les  $dx^2$ , etc.) implique que l'espace-temps est **pseudo-Euclidien**; comme on le verra sous peu, la "distance" entre deux événements dans l'espacetemps ne se calcule pas par le théorème de Pythagore, mais plutôt via (2.16). Il serait en fait plus exact de dire que (2.16) est la généralisation du théorème de Pythagore à l'espace-temps quadri-dimensionnel pseudo-Euclidien.

### 2.2.2 Le cône de lumière

La quantité  $ds^2$  introduit ci-dessus combine les coordonnées spatiales et temporelle; l'intervalle invariant est donc défini dans **l'espace-temps**. Similairement, l'identification complète et unique d'un **événement** dans l'espace temps (e.g., le rayon lumineux se réfléchissant sur l'un des miroir dans l'horloge de la Figure 2.1) exige trois coordonnées spatiales et une coordonnée temporelle; schématiquement on peut regrouper ces coordonnées en un vecteur à 4 composantes:

$$x^{\alpha} = (ct, \mathbf{x}), \qquad \alpha = 0, 1, 2, 3, \qquad (2.18)$$

où par convention on ordonne les composante selon:

$$0 \equiv ct \qquad 1 \equiv x \qquad 2 \equiv y \qquad 3 \equiv z \ . \tag{2.19}$$

Notre  $x^{\alpha} = (ct, \mathbf{x})$  est un exemple de **quadrivecteur**, soit la généralisation dans l'espace-temps des vecteurs usuels dans l'espace 3D; ici  $x^{\alpha}$  représente un quadrivecteur pointant de l'origine du système de coordonnées (quel qu'il soit) vers la position de l'événement identifiée par les quatre coordonnées  $x^{\alpha}$  (Notons déjà que cette interprétation géométrique simple ne tiendra plus en espace courbe).

La Figure 2.2 présente un diagramme espace temps montrant (en rouge) la trajectoire d'Anne, située au point A à t = 0 et au repos dans ce repère. La trajectoire en vert correspond à Buck accélérant vers Anne, la frôlant (ici à une vitesse approchant dangereusement celle de la lumière) à t = 0, pour ralentir par la suite. Les deux traits noirs se croisant en A sont les trajectoires de photons provenant de  $x = \pm \infty$  et atteignant simultanément A à t = 0. Comme



Figure 2.2: Coupe dans le plan [x, ct] du cône de lumière défini ici par rapport à la position d'Anne en A. La trajectoire de Buck est en vert. Les événements F et G sont à l'extérieur du cône de lumière de l'événement A; G ne peut donc influencer A, et A ne peut influencer F.

la vitesse de la lumière ne peut êre dépassée, à partir du point A seule la partie grise du demiplan t > 0 est atteignable de A. De même, seule la partie grise du demi-plan t < 0 peut avoir atteint A. C'est le **cône de lumière**, qui détermine la structure causale de l'espace-temps.

Ici la trajectoire de Buck (en vert) est légale, car Buck provient (point C) et est demeurée en tout temps dans le passé causal de A; par la suite, sa trajectoire demeure en tout temps dans le futur causal de A; et la pente de sa trajectoire est toujours supérieure à celle d'une trajectoire de type "lumière". Le point E est à la limite du passé causal de A; seul un photon émis de E peut atteindre A, mais aucune particule massive ne le pourrait. Le point G est à l'extérieur du passé causal de A, donc rien ne se produisant à G ne peut influencer ce qui se passe à A; notons cependant que l'événement G a un futur causal qui intersecte éventuellement le futur causal de A; un photon émis dans la direction positive de l'axe-x (pointillés bleus) sera détecté par Anne à un temps correspondant au point d'intersection avec sa trajectoire (au repos; verticale rouge). Similairement, le point F est à l'extérieur du futur causal de A et ne peut donc pas être influencé par cet événement; mais F peut potentiellement ressentir l'influence des événements C et E.

La Figure 2.2 est en fait une tranche 2D [x, ct] de l'espace-temps quadridimensionnel, où les dimensions y et z ont été supprimées. En en rajoutant mentalement une dans la direction perpendiculaire au plan de la page, on comprend immédiatement pourquoi les deux trajectoires photoniques traversant A à ±45 degrés définissent un "cône". L'ajout de la troisième dimension spatiale est un peu plus problématique pour l'imagerie mentale. Le cône de lumière devient en fait une (hyper)surface 3D dans l'espace-temps 4D, correspondant à un pulse lumineux spatialement isotrope, c'est-à-dire se propageant dans l'espace sous la forme d'un front sphérique originant en A et dont le rayon croit à la vitesse de la lumière. La "distance" entre deux événements dans l'espace-temps (pseudo-Euclidien) est donnée par notre expression (2.16) pour l'intervalle invariant. Selon notre convention de signe (-+++)pour les contributions temporelle et spatiales à l'intervalle, on distingue trois situations:

- $ds^2 < 0$ : intervalle de type "temporel": relation causale possible
- $ds^2 = 0$ : intervalle nul, de type "lumière"
- $ds^2 > 0$ : intervalle de type "espace": relation causale impossible

### 2.2.3 Le temps propre

Le **temps propre** est une forme alternative de notre invariant  $ds^2$ , défini en terme de ce dernier:

$$\mathrm{d}\tau^2 = -\frac{\mathrm{d}s^2}{c^2} \tag{2.20}$$

Le temps propre correspond au temps mesuré par une horloge au repos dans un repère donné. Par exemple, sur la trajectoire (rouge) d'Anne sur la Figure 2.2, le temps propre coincide avec la coordonnée temporelle t. Le temps propre est donc la quantité mesurant l'écoulement du temps "physiologique", i.e., le temps propre mesure le vieillissement d'un observateur au repos dans son repère, ou encore la demie-vie d'un isotope radioactif, etc.

Le temps propre est une quantité "naturelle" pour paramétrer une trajectoire (séquence d'intervalles infinitésimaux contigus) de type temporelle dans l'espace temps. Considérons par exemple la portion  $A \rightarrow B$  de la trajectoire de Buck (en vert) sur la Figure 2.2. L'intervalle de temps propre entre ces deux points se calcule selon:

$$\tau_{AB} = \int_{A}^{B} d\tau = \int_{A}^{B} \left[ dt^{2} - \frac{1}{c^{2}} (dx^{2} + dy^{2} + dz^{2}) \right]^{1/2}$$
$$= \int_{A}^{B} dt \left\{ 1 - \frac{1}{c^{2}} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^{2} + \left( \frac{dy}{dt} \right)^{2} + \left( \frac{dz}{dt} \right)^{2} \right] \right\}^{1/2} .$$
(2.21)

La seconde égalité suivant du fait que

$$dx = \frac{dx}{dt}dt \qquad \to \qquad (dx)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 (dt)^2 . \tag{2.22}$$

En version plus compacte:

$$\tau_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \mathrm{d}t \left[ 1 - V^2(t)/c^2 \right]^{1/2} \,. \tag{2.23}$$

où en général V peut varier le long du parcours d'intégration. On note que  $\tau_{AB} < t_B - t_A$ , indiquant qu'Anne calculerait (de son repère) un vieillissement de Buck moindre que son propre vieillissement. C'est la **dilatation du temps**, un des phénomènes très contre-intuitifs prédit par la relativité restreinte, bien vérifié expérimentalement, et en conflit direct avec la relativité Galiléenne et la mécanique Newtonienne. Si les points A et B sont très rapprochés (dans l'espace-temps), on peut considérer V comme constant et écrire maintenant sous forme différentielle:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = (1 - V^2/c^2)^{-1/2} \qquad (\equiv \gamma) \ . \tag{2.24}$$

Notons cependant que pour les photons  $ds^2 = d\tau^2 = 0$ ; donc le temps propre n'est **pas** une quantité appropriée pour paramétrer la trajectoire d'un faisceau lumineux; et donc, un photon ne vieillit pas !

#### 2.2.4 La transformation de Lorentz

L'idée est maintenant de trouver une règle de transformation entre deux repères inertiels qui préserve l'invariance de l'intervalle. Nous débuterons par une analogie, soit la rotation d'un système cartésien dans l'espace 3D Euclidien habituel. Dans un tel espace, la **distance** entre deux points est invariante sous rotation; pour une rotation par un angle  $\theta$  dans le plan [x, y], on aurait:

$$\begin{pmatrix} x'\\y'\\z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix}$$
(2.25)

Exprimé en fonction des composantes:

$$x' = (\cos \theta)x + (\sin \theta)y \tag{2.26}$$

$$y' = (-\sin\theta)x + (\cos\theta)y \tag{2.27}$$

$$z' = z \tag{2.28}$$

La rotation "mélange" les composantes x et y; voir aussi les Figures 2.3 et 2.4.

Mais, dans l'espace-temps, un changement à un repère se déplaçant dans la direction x (disons) se représente aussi comme une "rotation" dans le plan [ct, x]. Cependant, à cause que notre intervalle métrique est **pseudo-Euclidien** (le "-" devant ct), la matrice de rotation qui préserve  $ds^2$  s'écrit maintenant comme:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta & 0 & 0 \\ -\sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
(2.29)

Exprimé en fonction des composantes:

$$ct' = (\cosh\theta)ct - (\sinh\theta)x \tag{2.30}$$

$$x' = (-\sinh\theta)ct + (\cosh\theta)x \tag{2.31}$$

$$y' = y \tag{2.32}$$

$$z' = z \tag{2.33}$$

La rotation "mélange" encore une fois les composantes ct et x. Il est facile de vérifier que cette transformation préserve l'intervalle  $ds^2$  défini précédemment. Voir aussi les Figures 2.5 et 2.6.

Exercice

#### ATTENTION: intervalle métrique $\neq$ distance Euclidienne

Comment relier l'angle  $\theta$  à la vitesse (constante) V du repère en mouvement ? On considère un mobile située à l'origine (ct', x') = (0, 0) dans le repère prime et au repos dans ce repère; selon l'éq. (2.31) ci-dessus:

$$(\sinh\theta)ct = (\cosh\theta)x \quad \rightarrow \quad \frac{x}{t} \equiv V = c(\tanh\theta)$$
 (2.34)

Notons que tanh  $\theta$  est borné dans [-1, 1], donc on a toujours  $V \leq c$ , comme il se doit. Exprimé en fonction de V plutôt que  $\theta$ , la transformation de Lorentz s'écrit ainsi:

$$t' = \gamma(t - Vx/c^2) \tag{2.35}$$

$$x' = \gamma(x - Vt) \tag{2.36}$$

$$y' = y \tag{2.37}$$

$$z' = z \tag{2.38}$$

Exercice



Figure 2.3: Un système de coordonnées cartésiennes dans le plan [x, y]; Anne (A) et Buck (B) sont situés aux positions (x, y) = (2, 1) et (4, 5) respectivement, et sont séparés par une distance  $\sqrt{20}$ .



Figure 2.4: Rotation d'un système de coordonnées cartésiennes dans le plan [x, y], ici par un angle  $\theta = \pi/12$  dans le sens antihoraire par rapport à l'axe-z. Anne (A) et Buck (B) sont situés aux positions (x', y') = (1.67, 1.48) et (5.16, 3.79) respectivement, et sont toujours séparés par une distance  $\sqrt{20}$ .



Figure 2.5: Anne (A) et Buck (B) sont situés dans l'espace-temps à (x, ct) = (2, 1) et (4, 5) respectivement, et sont séparés par un intervalle  $ds^2 = -12$ . Dans le système de coordonnées [ct', x'] (rouge), correspondant à un repère se déplaçant dans la direction positive de l'axe-x à une vitesse  $V/c = \tanh(\pi/12)$ , Anne et Buck sont situés à (x', ct') = (1.80, 0.50) et (2.81, 4.11) respectivement, et sont toujours séparés par un intervalle  $ds^2 = -12$ .



Figure 2.6: Le système de coordonnées [ct'', x''] correspondant à un repère se déplaçant dans la direction négative de l'axe-x à une vitesse  $V/c = \tanh(-\pi/12)$ ; Anne (A) et Buck (B) sont situés dans l'espace-temps aux positions (x'', ct'') = (2.33, 1.56) et (5.46, 6.23) respectivement, mais sont encore et toujours séparés par un intervalle  $ds^2 = -12$ . R223.tex, May 6, 2023 PHY-3070, Relativité 2, Paul Charbonneau, Université de Montréal

avec le bon vieux

$$\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2} . \tag{2.39}$$

On peut reformuler cette transformation sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
(2.40)

où  $\beta = V/c$ . La matrice ci-dessus est appelée **matrice de Lorentz**, dénotée ci-après  $\Lambda_{\alpha}^{\alpha'}$ . De manière plus générale, cette matrice détermine la règle de transformation d'un repère inertiel à un autre selon:

$$\Lambda^{\alpha'}_{\ \alpha} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} , \qquad \alpha, \alpha' = 0, 1, 2, 3 .$$
 (2.41)

La matrice de Lorentz agit donc comme le Jacobien de la transformation de coordonnées associée au changement de repère. Notons que la matrice correspondante pour la transformation inverse serait donnée par:

$$\Lambda^{\alpha}_{\ \alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} , \qquad \alpha, \alpha' = 0, 1, 2, 3 , \qquad (2.42)$$

ce qui implique évidemment que

$$\sum_{\mu'=0}^{3} \Lambda^{\alpha}_{\ \mu'} \Lambda^{\mu'}_{\ \beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \ , \tag{2.43}$$

où le  $\delta^{\alpha}_{\beta}$  est le delta de Kronecker, soit ici ici la matrice identité.

De manière tout-à-fait générale, la matrice de Lorentz permet donc de transformer les quadrivecteurs d'un repère inertiel à un autre, selon:

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\ \nu} x^{\nu} , \qquad \mu' = 0, 1, 2, 3$$
 (2.44)

On en a profité ici pour introduire ici la convention (dite d'Einstein) de sommation implicite sur des indices répétés apparaissant en paires indices+exposant dans le même terme; ici  $\nu$  est cet **indice de sommation**. Par contre ici  $\mu'$  est un **indice libre**, prenant les valeurs 0,1,2,3, de telle sorte que l'expression ci-dessus représente en fait quatre équations, une par valeur légale de  $\mu'$ . L'écriture de  $\nu$  parfois sous forme "indice" (comme dans  $\Lambda_{\nu}^{\mu'}$ ) ou parfois en exposant (comme dans  $x^{\nu}$ ) n'est pas arbitraire; on y reviendra plus loin. Pour l'instant le message important est simplement:

Changement de repère  $\equiv$  changement de (quadri-)coordonnées

### 2.2.5 Simultanéité, contraction de Lorentz, etc.

Deux événements A, B sont dits **simultanés** dans un repère prime si et seulement si ils sont positionnés dans l'espace-temps sur la même "ligne" de coordonnées ct' =constante. Comme l'illustre la Figure 2.7, ces deux événements ne seront habituellement pas simultanés dans un autre repère.

Imaginons maintenant que A et B représentent les extrémités d'une tige, au repos dans le repère prime, mais vue comme en mouvement dans le repère non-prime. Se reportant à la Figure 2.7, on note que la distance entre A et B projetée sur l'axe x est plus petite que sur l'axe x'; s'agit-il ici de la fameuse contraction de Lorentz ? **NON !!** La longueur physique d'un objet doit être



Figure 2.7: Deux événement simultanés (i.e., situés sur la même ligne de coordonnée ct' = const.) dans le repère prime  $(t'_A = t'_B)$  ne le sont pas dans le repère non-prime  $(t_A \neq t_B)$ . Autrement dit, Anne et Buck éternuent simultanément dans le repère prime, mais pas dans le non-prime.

mesurée quand ses deux extrémités sont sur la même ligne de simultanéité! Ici les événements A et B ne sont pas simultanés dans le repère non-prime  $(t_A \neq t_B)$ ; et de surcroit l'espace-temps est pseudo-Euclidien, la "projection" sur des axes de coordonnées diffère de celle en espace Euclidien.

Pour calculer la contraction de Lorentz, il faut travailler à partir de la constance de l'intervalle  $ds^2$  entre les deux repère. L'intervalle métrique entre A et B tel que vu du repère non-prime est donnée par:

$$\underbrace{(\underline{x'_B - x'_A})^2}_{L'} = \underbrace{(\underline{x_B - x_A})^2 - c^2(t_B - t_A)^2}_{L} .$$
(2.45)

Mais puisque les points A et B sont sur une ligne ct' =constante; selon la transformation de Lorentz:

$$t' = \gamma (t - Vx/c^2)$$
 . (2.46)

Supposons que A est à l'origine (t', x') = (0, 0); alors la ligne ct' = 0 devient  $t = Vx/c^2$  dans le repère non-prime, d'où

$$t_B - t_A = \frac{V}{c^2} \underbrace{(x_B - x_A)}_{L} \ . \tag{2.47}$$

Substituant pour  $t_B - t_A$  dans l'éq. (2.45):

$$(L')^2 = L^2 - \frac{V^2}{c^2}L^2 \quad \rightarrow \quad L' = L\sqrt{1 - V^2/c^2}, \quad ( (2.48)$$

R223.tex, May 6, 2023



Figure 2.8: Le paradoxe des jumeaux tracé dans un diagramme espace-temps. Buck est au repos dans le repère non-prime, et donc "voyage" dans l'espace-temps le long d'une ligne verticale joignant C à G, tandis que l'aller-retour de Anne à Zeta-Centauri correspond au parcours  $C \rightarrow H \rightarrow G$ , en vert. Les lignes ct' =constante font un angle  $\arctan(V/c)$  par rapport aux lignes (ici horizontales) ct =constantes, et –  $\arctan(V/c)$  pour les lignes ct'' =constante.

Ça, c'est la contraction de Lorentz!

#### 2.2.6 Le paradoxe des jumeaux

Les diagrammes espace-temps seront utilisés à répétition dans tout ce qui suit. Ils aident parfois à démêler les nombreux "paradoxes" (apparents) qui peuvent surgir en relativité restreinte. Le paradoxe des jumeaux est un grand classique parmi ces paradoxes. Vous aurez l'occasion d'en travailler deux autres dans le cadre du premier TP, donc suivez bien le guide...

La Figure 2.8 illustre la situation dans un diagramme espace-temps. Anne et Buck (jumeaux non-identiques, pour les besoins de la cause) sont initialement au point C. Buck y demeure, au repos, donc sa trajectoire dans l'espace temps suit l'axe ct, soit  $C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G$ ; tandis que Anne fait un aller-retour ( $C \rightarrow H \rightarrow G$ ) à vitesse  $V/c = \pm 0.6$  pour se ramasser une quille de Trois-Pistoles au dépanneur de Zeta-Centauri, situé à une distance d = 15 années-lumière du point C (distance mesurée dans le repère où Buck est au repos).

Examinons la situation du point de vue de Buck au repos dans le repère non-prime (noir); Maitrisant bien la cinématique Newtonienne, il calculera que l'intervalle de temps  $\Delta t$  requis par Anne pour atteindre Zeta-Centauri est  $\Delta t = d/V = 15/0.6 = 25$  yr, comme indiqué sur la Figure 2.8. Buck sera alors au point E. Maitrisant bien la relativité restreinte, il calculera également que l'intervalle de temps correspondant mesuré par l'horloge de Anne le long du parcours CH sera  $\Delta t' = \Delta t/\gamma = 20$  car ici  $\gamma = 1.25$  pour  $V/c = \pm 0.6$ . Le même facteur de dilatation temporelle s'appliquera sur la partie HG du voyage; au retour de Anne, au point G, Buck aura âgé de  $2 \times d/V = 50$  ans, et Anne de  $2 \times d/(\gamma V) = 40$  ans. Mais Anne peut faire exactement le même calcul en considérant que c'est elle qui est au repos et Buck qui fait un aller-retour; d'où le fameux paradoxe...

Examinons maintenant la même situation, cette fois *correctement*, du point de vue de Anne, qui se considère au repos dans son repère prime. Du point de vue de ce repère, pas seulement Buck mais aussi tout le reste de l'Univers se déplace à vitesse -V = 0.6, et donc la distance entre la Terre et Zeta-Centuri est contractée d'un facteur  $1/\gamma = 0.8$ , soit de 15 à 12 années-lumière, correspondant à la distance spatiale  $\Delta x' \equiv$ DH sur la Figure 2.8; une distance purement spatiale doit être mesurée le long d'une ligne de simultanéité t' = constante! (en rouge sur la Figure); Buck (et le reste de l'Univers) fera donc l'aller en un temps  $(d\gamma)/V = 20$  ans mesuré par l'horloge du repère prime de Anne, donc Anne aura vieilli de 40 ans durant son observation de l'aller retour. Ça, c'est comme auparavant. Cependant, maitrisant aussi la relativité restreinte, Anne calculera qu'en raison de la dilatation temporelle, Buck n'aura âgé que de  $2 \times 20/\gamma = 32$ ans, plutôt que 50. Retour au paradoxe ?

Mais, et voici la subtilité, le vieillissement total de Buck sur l'allez-retour, tel que correctement calculé par Anne, n'est **pas** simplement 16 + 16 = 32 ans. Le 16 ans calculé par Anne correspond à l'intervalle CD sur la Figure 2.8 (et égal en grandeur à l'intervalle FG sur la portion retour du trajet). La clef est de réaliser qu'au moment du changement de direction, et du passage de la vitesse +V à -V, les lignes de simultanéité t' =constante changent d'orientation dans l'espace-temps. Dans le repère prime, au moment ou Anne atteint le point H, Buck est au point D; mais dès que Anne inverse sa vitesse (passage au repère double-prime), la nouvelle ligne de simultanéité t'' =constante (bleu) a une orientation différente, et fait "sauter" Buck au point F, le vieillissant donc "instantanément" de 18 ans! Et quand notre duo se retrouve au point G, Buck aura donc bel et bien vieilli de 16 + 9 + 9 + 16 = 50 ans. Il n'y a pas de paradoxe!<sup>2</sup>

Maintenant, si on travaille directement en terme de l'intervalle  $ds^2$ , la question est réglée en deux lignes. Calculons simplement les temps propres, via  $d\tau^2 = -ds^2/c^2$ , associés aux trajets de Anne et Buck dans l'espace-temps, calculés directement dans le repère non-prime dans les deux cas:

Buck: 
$$d\tau = \sqrt{(50-0)^2} = 50$$
, (2.49)

Anne : 
$$d\tau = \underbrace{\sqrt{(25-0)^2 - (15-0)^2}}_{\text{aller}} + \underbrace{\sqrt{(50-25)^2 - (0-15)^2}}_{\text{retour}} = 40$$
, (2.50)

et c'est tout! Comme l'intervalle  $ds^2$  est invariant, on peut faire le calcul dans n'importe quel repère, *le résultat sera toujours le même*. Ici il est plus simple de le faire dans le repère non-prime, alors voilà!

### 2.2.7 Temps propre = temps physiologique ?

La dilatation du temps, telle que démontrée par l'exemple de l'horloge idéalisée de la Fig. 2.1, et par notre solution du paradoxe des jumeaux en géométrie pseudo-Euclidienne de la Fig. 2.8, est mathématiquement et géométriquement indiscutable. N'empêche, quel est le lien physique avec le fait qu'une Anne en mouvement relativiste *vieillisse physiologiquement* plus lentement qu'un Buck au repos ?

Le vieillissement physiologique, c'est de la (bio)chimie, et les liaisons chimiques, quand on y regarde de près, ce n'est qu'une combinaison (incroyablement complexe) d'interactions électromagnétiques, qui relèvent de l'électrodynamique quantique. Dans ce contexte, l'interaction électromagnétique entre deux particules chargées se fait par échange de paires de photons

 $<sup>^{2}</sup>$ Si ce saut "instantané" de D à F qu'effectue Buck au moment du changement de direction de Anne vous perturbe, consultez l'article par Gamboa et al. cité en fin de chapitre.



Figure 2.9: À gauche, un proton et un électron, tous deux au repos, échangent une paire de photons virtuels  $\gamma, \gamma^*$ , médiateurs de la force électromagnétique en électrodynamique quantique. À droite, ce même duo de particules est en mouvement vers la droite à vitesse V, et échangent la même paire de photons virtuels. Le chemin optique à parcourir est maintenant plus long, donc l'interaction est plus "lente". Comparez à la Figure 2.1 pour bien en comprendre la similarité profonde entre ces deux "horloges".

virtuels  $(\gamma, \gamma^*)$ , comme l'illustre schématiquement le diagramme de gauche sur la Figure 2.9 pour un tandem électron-proton. Si notre paire est au repos, l'interaction électromagnétique implique que les photons virtuels doivent traverser la distance entre les deux particules à une vitesse c. Si maintenant la paire électron-proton est en mouvement (vers la droite sur le coté droit de la Figure), alors la distance que doivent parcourir ces photons virtuels est plus grande, car la paire de particules s'est déplacée vers la droite, d'une distance pouvant devenir comparable à la séparation de la paire si le déplacement se fait à une vitesse commençant à approcher celle de la lumière. C'est exactement la même logique que dans le cas de l'horloge idéalisée de la Figure 2.1 ! Le tempo de l'interaction électromagnétique s'en retrouve allongé, et donc tous les temps caractéristiques de réactions chimiques augmentent proportionellement. Toute la machinerie cellulaire roule donc au ralenti, correspondant à un ralentissement du temps "physiologique"; et c'est ultimement pourquoi Anne vieillit plus lentement que Buck.

L'effet est le même pour toute force médiatisée par des particules (non-massives) se déplaçant à la vitesse de la lumière; c'est pourquoi la demie-vie des isotopes radioactifs devient plus longue lorsqu'on accélère ces isotopes à des vitesses relativistes. L'effet est mesuré tous les jours dans les accélérateurs de particules, et colle farpaitement avec la prédiction de la relativité restreinte, soit l'éq. (2.10).

### 2.3 Interlude mathématique: vecteurs et tenseurs

On met maintenant la relativité restreinte sur "pause" pour introduire un formalisme mathématique qui, bien que non-essentiel dans le contexte de la relativité restreinte, le deviendra en relativité générale.

#### 2.3.1 Deux représentations vectorielles

Commencons par introduire deux représentations distinctes servant à exprimer un vecteur en terme de ses composantes. La distinction se visualise plus facilement dans le contexte d'un système de coordonnées non-orthogonales. Soit un système de coordonnées 2D (x, y) où l'axe-y soustend un angle  $\psi \neq \pi/2$  par rapport à l'axe-x, comme sur la Figure 2.10. Il existe deux manières distinctes de décomposer un vecteur **a** dans ce système, tel qu'indiqué en bleu et rouge sur la Figure.

La représentation dite **contravariante** consiste à projeter **a** sur les axes-x et y dans les directions parallèles aux axes de coordonnées (tirets bleus). C'est le type de projection que vous avez appris au secondaire. Ici les composantes scalaires sont dénotées  $a^x$  et  $a^y$ ; l'utilisation de la forme "exposant" indique que les projections sont mesurées le long (tangentiellement) des axes de coordonnées. La base vectorielle correspondantexi est, dénotée  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y]$ . La décomposition du vecteur **a** s'écrit donc:

$$\mathbf{a} = a^x \mathbf{e}_x + a^y \mathbf{e}_y \equiv \sum_{A=1}^2 a^A \mathbf{e}_A \equiv a^A \mathbf{e}_A , \qquad (2.51)$$

Notez encore une fois la convention de sommation sur des indices répétés apparaissant en paires indices+exposant dans le même terme<sup>3</sup>. **ATTENTION:** 

- L'écriture  $a^A$  décrit la A-ème composante du vecteur **a**;
- L'écriture  $\mathbf{e}_A$  décrit le A-ème vecteur de la base de coordonnée  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y]$ .

Une autre projection possible, la forme dite **covariante**, utilise une base  $[\mathbf{e}^x, \mathbf{e}^y]$  telle que  $\mathbf{e}^x$  est perpendiculaire au plan défini par les autres axes de coordonnée; dans un cas 2D, comme sur la Fig. 2.10,  $\mathbf{e}^x$  est simplement perpendiculaire à l'axe-y. Les composantes scalaire  $a_x$ ,  $a_y$  sont les projections sur cette base dans une direction perpendiculaires aux axes-x et y, respectivement. On écrirait maintenant:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}^x + a_y \mathbf{e}^y \equiv \sum_{A=1}^2 a_A \mathbf{e}^A \equiv a_A \mathbf{e}^A .$$
(2.52)

Une décomposition du même vecteur **a** sur ces deux bases produira, en général, des composantes de grandeurs différentes, i.e.,  $a^x \neq a_x$ ,  $a^y \neq a_y$ . Néanmoins, le vecteur **a** peut être décomposé en toute légitimité selon l'une ou l'autre de ces deux bases. Se référant encore à la Figure 2.10, notons bien que qu'ici

$$a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y \neq \mathbf{a} \neq a^x \mathbf{e}^x + a^y \mathbf{e}^y \tag{2.53}$$

En résumé:

$$\mathbf{a} = a^A \mathbf{e}_A$$
,  $a^A = \mathbf{e}^A \cdot \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a} = a_A \mathbf{e}^A$ ,  $a_A = \mathbf{e}_A \cdot \mathbf{a}$ ,  $A = 1, 2 \equiv x, y$ . (2.54)

Ha §20.2

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Une lettre Grecque (e.g.,  $\alpha$ ) indique un indice/exposant qui couvre 0, 1, 2, 3; un indice en alphabet romain (e.g., k) couvre les composantes spatiales uniquement, k = 1, 2, 3. Dans quelques exemples en deux dimensions spatiales, comme ici, on utilisera des majuscules romaines (e.g., A) pour dénoter deux composantes spatiales (A = 1, 2).



Figure 2.10: Décomposition d'un vecteur **a** selon deux bases complémentaires. On en tire les représentations dites contravariante et covariante du même vecteur **a**. Les directions de projection (traits en tirets) sont soit parallèles (représentation contravariante), soit perpendiculaire (représentation covariante) aux axes de coordonnées. Notez bien ici comment  $\mathbf{e}_x \perp \mathbf{e}^y$  et  $\mathbf{e}_y \perp \mathbf{e}^x$ . Adaptation colorée de la Figure 20.1 de Hartle.

Si on retourne à la Fig. 2.10, on constate immédiatement que  $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y \neq 0$  et  $\mathbf{e}^x \cdot \mathbf{e}^y \neq 0$ , conséquence directe de la non-orthogonalité du système de coordonnées (x, y) ici. Cependant, on a clairement:

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}^y \equiv 0 , \qquad \mathbf{e}^x \cdot \mathbf{e}_y \equiv 0 , \qquad (2.55)$$

Bon, maintenant, dans l'espace 3D Euclidien et une base de coordonnées orthonormales,

$$\mathbf{e}^{j} = \mathbf{e}_{j}$$
,  $a^{j} = a_{j}$ ,  $\mathbf{e}_{i} \cdot \mathbf{e}_{j} = \delta_{ij}$ .  $j = 1, 2, 3$ , (2.56)

mais ceci s'avère vraiment être l'exception plutôt que la règle !!

### 2.3.2 Trajectoires et gradient

La représentation covariante est définie en terme d'une base dont chaque vecteur est perpendiculaire aux autres axes de coordonnées, tandis que la représentation contravariante est basée sur des vecteurs unitaires alignés aux axes de coordonnées. Du point de vue de la géométrie différentielle, la première est une représentation de type "gradient", tandis que la seconde est de type "tangent à une trajectoire". La Figure 2.11 illustre le concept. Sur le diagramme du haut, on définit le champ vectoriel 2D (en vert) via une relation du genre

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}, \frac{\partial y}{\partial \sigma}\right) \quad , \tag{2.57}$$

où  $\sigma$  est un paramètre mesurant la position de long de la trajectoire (le temps propre  $\tau$  serait la quantité naturelle à utiliser ici, sauf dans le cas d'un photon.); tandis que sur le diagramme du bas le champ vectoriel est plutôt défini comme

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \ . \tag{2.58}$$

Considérons maintenant une fonction scalaire  $f(\mathbf{x})$  de la quadriposition, et une trajectoire dans l'espace temps, paramétrée par le temps propre  $\tau$ ; la trajectoire est donc décrite par  $x^{\alpha}(\tau)$ . Maintenant supposons que l'on veuille calculer la variation de notre fonction scalaire le long de cette trajectoire; on écrirait

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau} \equiv \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} u^{\alpha} . \tag{2.59}$$

avec sommation implicite sur l'indice  $\alpha$ , ne l'oublions pas. Ici on constate que

- $u^{\alpha}$  est un vecteur tangent à la trajectoire;
- $\partial f/\partial x^{\alpha}$  est le gradient de la fonction scalaire f, et en général n'est pas nécessairement aligné avec la trajectoire;
- le taux de variation df/dτ est donnée en bout de ligne par le produit scalaire du gradient de f et du vecteur tangent u<sup>α</sup>.

Examinons maintenant comment ces deux vecteurs se transforment d'un repère non-prime à prime  $(x^{\alpha} \to x^{\alpha'})$ :

$$u^{\alpha'} \equiv \frac{\mathrm{d}x^{\alpha'}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau} \equiv \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} u^{\alpha} , \qquad (2.60)$$

 $\operatorname{et}$ 

$$\frac{\partial f}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} , \qquad (2.61)$$

Attention, dans ce genre d'écriture, les  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont des indices distincts, qui n'impliquent pas de sommation implicite sur des paires  $\alpha - \alpha'$ ; dans les expressions ci-dessus,  $\alpha'$  est un indice libre, mais  $\alpha$  est bel et bien un indice de sommation (implicite). Utilisons maintenant ces expressions pour transformer le produit scalaire (2.59) du repère prime au non-prime:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tau} \equiv \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha'}} u^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} u^{\beta}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}}_{\partial x^{\alpha} / \partial x^{\beta}} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}}_{\delta_{\beta}^{\alpha}} u^{\beta}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}}_{\delta_{\beta}^{\alpha}} u^{\beta}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} u^{\alpha}.$$
(2.62)



Figure 2.11: Deux manières géométriquement distinctes de construire un champ vectoriel: comme des vecteurs tangents à des trajectoires (en haut), ou en terme du gradient d'une fonction scalaire (en bas).
On en conclut, et c'est **TRÈS IMPORTANT**, que ces règles de transformation impliquent conjointement que le produit scalaire décrivant  $df/d\tau$  est **invariant** sous changement de repère, et ce même si individuellement les  $u^{\alpha}$  et  $\partial f/\partial x^{\alpha}$  ne le sont pas. Quand on y pense un peu c'est tout à fait normal: la variation d'une fonction scalaire entre deux points, tout comme la distance entre ces deux points, n'a rien à voir avec le système de coordonnées choisi pour étiquetter la position de ces points ! On généralisera cette idée sous peu (à la §2.4).

On voit donc ici qu'un quadrivecteur contravariant se transforme selon

$$a^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} a^{\alpha}$$
 contravariant (2.63)

tandis qu'un quadrivecteur **covariant** se transforme selon la matrice inverse:

$$b_{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} b_{\alpha} \qquad \text{covariant}$$
(2.64)

Notons déjà que l'opérateur vectoriel  $\partial/\partial x^{\alpha}$ , impliquant des dérivées par rapport aux coordonnées contravariantes, se transforme comme un vecteur covariant.

Quoiqu'il en soit, le développement ci-dessus indique **et c'est là le point clef**, que tout produit intérieur entre un vecteur covariant et un vecteur contravariant sera similairement invariant sous changement de coordonnées/repère. Explicitons le calcul:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})' = a^{\beta'} b_{\beta'} \qquad \left(\sum_{\mu=0}^{3} \text{ implicite}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\alpha}} a^{\alpha}\right) \left(\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\beta'}} b_{\gamma}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\beta'}}\right) a^{\alpha} b_{\gamma}$$

$$= \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\alpha}} a^{\alpha} b_{\gamma}$$

$$= a^{\alpha} b_{\alpha} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

$$(2.65)$$

C'est un résultat important, que nous utiliserons à répétition pour se construire des invariants caractérisant les trajectoires d'objets massifs, ou de photon, autant en relativité restreinte que générale. Voilà qui mérite donc bien d'être encadré:

Le produit scalaire est invariant sous changement de repère

#### 2.3.3 Produit scalaire: le tenseur métrique de Minkowski

L'expression (2.65) pour le produit scalaire des vecteurs **a** et **b** entremêle les représentations contravariante et covariante, ce qui n'est pas particulièrement pratique ni transparent du point de vue du calcul vectoriel (viz. la Fig. 2.10). Pour deux quadrivecteurs exprimés sous leur forme usuelle (contravariante)  $a^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}$  et  $b^{\beta} \mathbf{e}_{\beta}$ , on écrirait normalement le produit scalaire comme:

$$\underbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}_{\neq a^{\alpha} b^{\alpha}} = (a^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}) \cdot (b^{\beta} \mathbf{e}_{\beta})$$
$$= (\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{e}_{\beta}) a^{\alpha} b^{\beta}$$
$$= \eta_{\alpha\beta} a^{\alpha} b^{\beta} \qquad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$$
(2.66)

où on a donc défini:

$$\eta_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{e}_{\beta} \qquad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3 .$$

Attention, la quantité  $(\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{e}_{\beta})$  n'est pas égale au delta de Kronecker ! C'est plutôt le regroupement de 16 produits scalaires, chacun correspondant au produit scalaire entre le  $\alpha$ -ème et  $\beta$ -ème vecteur définissant la base de coordonnées! L'objet géométrique en résultant est un **tenseur** de rang deux qu'on a rebaptisé ici  $\eta_{\alpha\beta}$ . On en aura plus long à dire sur les tenseurs en général sous peu. Pour le moment, notons simplement que le tenseur  $\eta_{\alpha\beta}$  peut être représenté par une matrice de dimensions  $4 \times 4$  et est symétrique:  $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}$ ; et de plus, si la base de coordonnée est orthogonale, alors  $\eta_{\alpha\beta}$  est diagonal.

Dans l'espace-temps pseudo-Euclidien de la relativité restreinte ce tenseur s'appelle le **tenseur** métrique de Minkowski.

Les  $\mathbf{e}_{\alpha}$  et  $\mathbf{e}_{\beta}$  dépendent du choix de système de (quadri)coordonnées, et donc on pourrait penser que les  $\eta_{\alpha\beta}$  aussi; mais on doit se rappeler que l'intervalle est invariant:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} \; ; \tag{2.68}$$

mais comme

$$ds^{2} = -d(ct)^{2} + dx^{2} + dy^{2} + dz^{2} , \qquad (2.69)$$

on doit alors avoir que

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(2.70)

donc

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} \qquad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$$
(2.71)

L'expression ci-dessus implique également que les composantes du tenseur métrique sont des quantités adimensionnelles.

L'intervalle métrique correspondant au système de coordonnées non-orthogonales de la Figure 2.10 est donné par:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + 2\cos\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{d}y^2 , \qquad (2.72)$$

où  $\psi$  est l'angle entre les axes x et y. Je vous laisse le soin d'en déduire les composantes du tenseur métrique correspondant, et de tester vos talents trigonométriques en vérifiant que (2.71) donne bien le carré de la grandeur du vecteur **a**. Mais le point important demeure:

#### Le tenseur métrique définit la mesure de l'intervalle dans l'espace-temps

Notre définition du tenseur métrique de Minkowski via l'éq. (2.67) pourrait donner l'impression que ce dernier est intimement relié au choix d'une base de coordonnées spécifique. Le calcul de ses composantes dépend certainement du choix de la base; mais à un niveau plus fondamental, ce tenseur métrique capture des propriétés **géométriques** de la trame spatiotemporelle, soit les notions d'**intervalle** et d'**orthogonalité**.

#### 2.3.4 Passage des formes contravariantes à covariantes

L'expression (2.71) nous offre, en bonus, la manière de passer de la forme contravariante d'un vecteur à sa représentation covariante. Selon notre règle de sommation sur les paires indice/-exposant, on devrait écrire  $ds^2$  sous la forme:

$$\mathrm{d}s^2 \equiv (\mathrm{d}\mathbf{x}) \cdot (\mathrm{d}\mathbf{x}) = \mathrm{d}x_\alpha \mathrm{d}x^\alpha \tag{2.73}$$

Mais on vient de définir le produit scalaire selon

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta \tag{2.74}$$

Comparant ces deux expressions, on en conclut:

$$\mathrm{d}x_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta} \mathrm{d}x^{\beta} \tag{2.75}$$

De manière plus générale, le passage de la forme contravariante à covariante ("descendre" un indice) se fait à l'aide du tenseur métrique:

$$a_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta} a^{\beta} , \qquad \alpha = 0, 1, 2, 3 \tag{2.76}$$

#### 2.3.5 Le tenseur métrique inverse

On aurait évidemment tout aussi bien pu écrire notre produit scalaire (2.66) en terme des formes covariantes des quadrivecteurs impliqués:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_{\alpha} \mathbf{e}^{\alpha}) \cdot (b_{\beta} \mathbf{e}^{\beta}) = (\mathbf{e}^{\alpha} \cdot \mathbf{e}^{\beta}) a_{\alpha} b_{\beta} \equiv \eta^{\alpha \beta} a_{\alpha} b_{\beta} \qquad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3 .$$
(2.77)

Comme le produit scalaire est un invariant dont la valeur ne peut dépendre du choix de base de coordonnées, le résultat de ce produit scalaire doit être identique à celui produit par l'éq. (2.66):

$$\eta_{\alpha\beta}a^{\alpha}b^{\beta} = \eta^{\alpha\beta}a_{\alpha}b_{\beta}$$
  
=  $\eta^{\alpha\beta}(\eta_{\alpha\nu}a^{\nu})(\eta_{\mu\beta}b^{\mu})$   
=  $(\eta^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\nu})\eta_{\mu\beta}a^{\nu}b^{\mu}$ . (2.78)

Si on veut assurer l'égalité on doit avoir

$$\eta^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\nu} = \delta^{\beta}_{\nu} \ , \tag{2.79}$$

ou le Kronecker delta  $\delta^\beta_\nu$  agit ici comme la matrice identité dans le quel cas la suite du développement ci-dessus devient

$$\eta_{\alpha\beta}a^{\alpha}b^{\beta} = \delta^{\beta}_{\nu}\eta_{\mu\beta}a^{\nu}b^{\mu}$$
$$= \eta_{\mu\nu}a^{\nu}b^{\mu} , \qquad (2.80)$$

ce qui est bien une égalité car on peut rebaptiser librement les indices de sommations, e.g.,  $\mu \to \alpha$  et  $\nu \to \beta$  au membre de gauche. Le résultat clef ici est l'éq. (2.79), indiquant que la forme covariante du tenseur métrique est l'inverse de sa forme contravariante. Pour une métrique diagonale comme Minkowski, ceci implique

$$\eta^{\alpha\beta} = \frac{1}{\eta_{\alpha\beta}} \qquad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3 . \tag{2.81}$$

Mais n'en concluez surtout pas que ceci tient pour tous les tenseurs, métriques ou non, et encore moins que  $a^{\alpha} = 1/a_{\alpha} \parallel$ 

Dans l'espace-temps pseudo-Euclidien, le tenseur de Minkowski ne fait qu'ajouter un "—" à la composante "temps" (0) du quadrivecteur.

$$a_{\alpha} = (a_0, a_1, a_2, a_3) = \eta_{\alpha\beta} a^{\beta} = (-a^0, a^1, a^2, a^3) .$$
(2.82)

Les différences deviendront plus marquées lorsque nous passerons aux géométries non-Euclidiennes. Finalement, la trace du tenseur métrique (Minkowskien ou autre) donne la dimensionalité de l'espace(-temps):

$$\eta^{\alpha}_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta} = 4 . \tag{2.83}$$

#### 2.3.6 Orthogonalité sous transformation de Lorentz

Vous vous rappelez certainement qu'un produit scalaire nul entre deux vecteurs définit ces deux vecteurs comme étant orthogonaux. Cette définition demeure valide dans l'espace-temps. Considérons, dans un repère "prime", deux quadrivecteurs (unitaire) dans les directions t et x de l'espace temps;

$$\mathbf{a}' = (1, 0, 0, 0) , \qquad \mathbf{b}' = (0, 1, 0, 0) .$$
 (2.84)

Ces vecteurs sont ici clairement orthogonaux. Appliquons maintenant la transformation de Lorentz à chacun de ces vecteurs; le fait que chacun est orienté selon un axe de coordonnées ne change rien à la manière donc un vecteur se transforme selon Lorentz; on a donc, dans le nouveau repère:

$$\mathbf{a} = (\gamma, \beta\gamma, 0, 0) , \qquad \mathbf{b} = (\beta\gamma, \gamma, 0, 0) . \tag{2.85}$$

À prime abord ces vecteurs n'ont pas l'air particulièrement orthogonaux... mais selon notre définition du produit scalaire:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \eta_{\alpha\beta} a^{\alpha} b^{\beta} = -(\gamma)(\beta\gamma) + (\beta\gamma)(\gamma) + 0 + 0 = 0 .$$
(2.86)

Les deux vecteurs sont bel et bien orthogonaux dans n'importe quel repère. En particulier, sur la Fig. 2.5 les lignes ct' = constante sont bel et bien orthogonales aux lignes x' = constante, et de même pour les lignes ct'' = constante et x'' = constante sur la Figure 2.6!

#### L'orthogonalité est dictée par la forme du tenseur métrique

#### ATTENTION! À NE PAS CONFONDRE:

- 1. Le tenseur de Minkowski, qui définit la mesure de l'intervalle pour un espace-temps pseudo-Euclidien;
- 2. La matrice de Lorentz, qui définit un changement de repère (inertiel) dans un espace pseudo-Euclidien !

#### 2.3.7 Les tenseurs

L'équation (2.71), définissant le produit scalaire en terme d'un tenseur métrique, permet une interprétation de ce qu'est un tenseur: une "machine géométrique" linéaire qui ici accepte en entrée deux quadrivecteurs, et produit un scalaire; de manière encore plus générale, du point de vue de la géométrie différentielle, un tenseur est un mapping multilinéaire des vecteurs vers les scalaires, e.g.:

$$S = \eta_{\alpha\beta}a^{\alpha}(C b^{\beta} + D h^{\beta})$$
  
=  $C \eta_{\alpha\beta}a^{\alpha}b^{\beta} + D \eta_{\alpha\beta}a^{\alpha}h^{\beta}$ , (2.87)

où ici S, C et D sont des scalaires. On a vu que le tenseur de Minkowski  $\eta_{\alpha\beta}$  est construit en prenant le produit intérieur cyclique des formes covariantes des quatre vecteurs unitaires définissant la base de coordonnées. Ceci représente en fait un cas particulier, mais on verra qu'il nous servira toujours à définir un **tenseur métrique** dans les espace-temps courbes (non-Euclidiens) de la relativité générale.

Plus généralement, on peut construire un tenseur via le produit extérieur de (quadri)vecteurs, qu'ils soient exprimés sous forme covariante ou contravariante; par exemple:

$$T^{\beta}_{\alpha} = a_{\alpha}b^{\beta} , \qquad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$$

$$(2.88)$$

Attention encore une fois, il n'y a pas d'indices répétés ici, donc pas de sommation implicite sur aucun indice;  $T^{\beta}_{\alpha}$  est constitué de 16 composantes, comme le serait une matrice de dimensions  $4 \times 4$ .

Le tenseur de Minkowski  $\eta_{\alpha\beta}$  et le tenseur  $T^{\beta}_{\alpha}$  défini ci-dessus sont des exemples de tenseurs de rang deux<sup>4</sup>. On peux se les représenter sous la forme d'une matrice, mais on verra que tous les objets de rang deux (toutes les matrices) ne sont pas des tenseurs; et il est possible de construire un tenseur de rang deux autrement que via un produit extérieur de deux quadrivecteurs. On en verra un exemple sous peu.

Un tenseur de rang trois peut être construit par le produit extérieur de trois quadrivecteurs (1 + 1 + 1 = 3), ou encore par le produit extérieur d'un quadrivecteur et d'un tenseur de rang deux (1 + 2 = 3), par exemple:

$$S^{\alpha}_{\ \mu\nu} = a^{\alpha}T_{\mu\nu} , \qquad \alpha, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 .$$
 (2.89)

Les règles usuelles d'addition de matrices s'appliquent ici; on doit additionner des tenseurs de même rang et mêmes dimensions. On doit cependant respecter la position des indices/exposants, autrement dit, seule la première des deux additions tensorielles suivantes est légale:

$$C_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + B_{\mu\nu} \qquad \text{OUI} \tag{2.90}$$

$$C^{\nu}_{\ \mu} = A^{\nu}_{\ \mu} + B_{\mu\nu} \qquad \text{NON}$$
(2.91)

La raison est que les tenseurs héritent du caractère covariant ou contravariant des (quadri)vecteurs à partir desquels ils sont construits.

Rappelons finalement que, comme les matrices, un tenseur peut toujours être décomposé en ses parties symétrique et antisymétrique par rapport à une paire d'indices:

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^{(S)} + T_{\alpha\beta}^{(A)} , \qquad (2.92)$$

où

$$T_{\alpha\beta}^{(S)} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}) , \qquad (2.93)$$

$$T_{\alpha\beta}^{(A)} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}) . \qquad (2.94)$$

Un tenseur (symétrique) que vous connaissez déjà est le tenseur identité de rang 2, delta de Kronecker de son petit nom:

$$\delta_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(2.95)

Formellement parlant, le delta de Kronecker sert (entre autres) à changer un indice sur un tenseur ou quadrivecteur, e.g.:

$$T_{\alpha\beta} = \delta^{\mu}_{\beta}T_{\alpha\mu} , \qquad \left(\sum_{\mu=0}^{3} \text{ implicite}\right)$$
 (2.96)

puisque  $\delta^{\mu}_{\beta} \neq 0$  seulement si  $\mu = \beta$ . Notez bien le résultat trivial (sous réflexion) suivant, grandement utile dans certains développements subséquents:

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \delta^{\alpha}_{\beta} , \qquad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$$
(2.97)

En quoi un tenseur diffère-t-il d'une matrice ? Dans ce qui suit on verra qu'un tenseur est contraint dans (certains bouquins écrivent "défini par") la manière dont il se transforme sous

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Attention à une petite subtilité terminologique ici; en algèbre linéaire, le rang réfère au nombre de lignes linéairement indépendantes dans une matrice; tandis qu'ici le rang réfère à la dimensionalité géométrique de l'objet: un scalaire est de rang 0, un vecteur de rang 1, et une matrice (conventionnelle, comme dans vos cours d'algèbre linéaire) est de rang 2.

changement de coordonnées/repère. Si on veut calculer des trucs, c'est vraiment tout ce qu'on a besoin de savoir. En vertu de la linéarité de leur action sur des vecteurs (viz. éq. (2.87)), les tenseurs se transforment comme le ferait un produit extérieur de quadrivecteurs, e.g.:

$$T_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta'}} T_{\mu\nu} , \qquad C_{\mu'}^{\nu'} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\mu'}} C_{\beta}^{\alpha} , \qquad \text{etc.}$$
(2.98)

Notez bien, sur les deux exemples ci-dessus, comment le caractère covariant/contravariant se reflète dans la forme des matrices de transformation, plus spécifiquement dans la position des "prime" sur les indices/exposants!

#### 2.3.8 Conventions sur les indices

Terminons cet interlude mathématico-notationnel avec un petit résumé de nos conventions par rapport à l'écriture des composantes de vecteurs et des équations tensorielles;

- L'écriture  $a^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}$  implique une sommation sur  $\alpha$ ;  $\alpha$  est ici un indice dit "de sommation" ("dummy index" dans la littérature anglo).
- $a^{\alpha}$  représente la  $\alpha$ -ième composante (un scalaire) du quadrivecteur **a**; mais  $\mathbf{e}_{\alpha}$  représente le  $\alpha$ -ième vecteur de la base de coordonnées.
- Un  $\alpha$  en exposant indique une composante scalaire d'un vecteur contravariant, soit de type "tangent à une trajectoire".
- Un  $\alpha$  en indice indique une composante scalaire d'un vecteur covariant, de type "gradient".
- Les expressions  $a^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}$  et  $a^{\nu} \mathbf{e}_{\nu}$  sont absolument équivalentes; ici  $\alpha$  et  $\nu$  sont des indices de sommation, et chacun peut être rebaptisé librement (mais de manière cohérente dans toute l'expression!)
- Il n'y a pas de sommation implicite sur les  $\alpha$  dans un terme du genre  $a^{\alpha} + b^{\alpha}$ ; ici  $\alpha$  est un indice dit "libre", qui prend les valeurs 0, 1, 2, 3.
- Les expressions  $\Delta x^{\alpha} = x^{\alpha}_{B} x^{\alpha}_{A}$  et  $\Delta x^{\mu} = x^{\mu}_{B} x^{\mu}_{A}$  sont absolument équivalentes;  $\alpha$  et  $\mu$  sont des indices libres, et ces deux expressions représentent les mêmes quatre équations.
- Une équation tensorielle doit présenter les mêmes indices libres dans tous ses termes; par exemple, dans l'équation suivante  $\alpha$  et  $\beta$  sont des indices de sommation, et  $\nu$  est un indice libre.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^{\nu}_{\beta\alpha} \frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau} = 0$$
(2.99)

On a donc ici en fait quatre équations, pour  $\nu = 0, 1, 2, 3$ 

#### 2.4 Formulation covariante des Lois Physiques

Autant dans le contexte de la relativité restreinte que générale, Oncle Albert a affirmé que les Lois Physiques devaient être formulées de manière "covariante", autrement dit, de manière indépendante de tout choix de repère (ou de système de quadricoordonnées). Ce principe est parfois énoncé sur au ton frôlant le mysticisme; non seulement n'y a-t-il rien de vraiment sorcier là-dedans, mais en plus vous êtes déjà familier avec le concept. Considérons encore une fois notre fameuse seconde Loi de Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \; ; \tag{2.100}$$

Cette expression est d'abord et avant tout **géométrique**: une force  $\mathbf{F}$  (vecteur) agissant sur une masse (ponctuelle) m produit une accélération  $\mathbf{a}$  (vecteur) orienté dans la même direction

que  $\mathbf{F}$  et proportionnelle à sa grandeur. C'est ici un énoncé physique qui en soi ne requiert aucune référence explicite à un repère ou à un système de coordonnées spécifique. Évidemment, si on souhaite **calculer** à partir de cette expression la trajectoire de la masse m, aux fins de comparaison avec des observations ou manipulations expérimentales par exemple, alors un choix de repère et de système de coordonnées devra être fait; et en pratique, ce choix est souvent fait de manière à simplifier le calcul. C'est là un prélude à une manoeuvre que nous effectuerons souvent par la suite en relativité générale: écrire les Lois physiques sous forme tensorielle, soit indépendante d'un choix de repère, puis les solutionner ensuite dans un repère où elles prennent la forme la plus simple possible; ensuite transformer les résultats vers un repère plus pratique pour nous.

Explicitons un peu plus tout ça, en anticipation de la suite. La Figure 2.12 illustre une trajectoire dans l'espace-temps. Ça pourrait être une portion de la trajectoire d'Anne, en chemin vers Zeta-Centauri (relire §2.2.6 au besoin...). Histoire de passer le temps durant ce long voyage, Anne fait éclater un pétard de temps en temps. L'éclatement de chaque pétard est un événement ( $\mathcal{P}$ ) dans l'espace temps, et est indiqué par un point le long de la trajectoire sur la Fig. 2.12. Ces événements sont des objets géométriques de dimension zéro (des points!) et ont une existence propre qui est indépendante du choix de repère ou de système de coordonnées utilisé pour assigner des valeurs aux composantes des quadricoordonnées à chaque  $\mathcal{P}$  (revoir les Figs. 2.4–2.6 au besoin). La trajectoire même est une "ligne" dans l'espace-temps, et peut être



Figure 2.12: Une trajectoire dans l'espace-temps, paramétrée à l'aide d'un paramètre affin  $\sigma$ . Chaque point  $\mathcal{P}$  de la trajectoire correspond à une valeur distincte de  $\sigma$ . Deux vecteurs tangents  $d\mathcal{P}/d\sigma$  sont tracés en rouge, à  $\sigma_4$  et  $\sigma_5$ . Les événements  $\mathcal{P}(\sigma_k)$ , la trajectoire dans son ensemble, ainsi que ses vecteurs tangents, sont des objets géométriques dont l'existence et la forme sont indépendantes du choix de système de coordonnées.

approximée par une succession d'événements infinitésimalement rapprochés sur la trajectoire. On peut donc introduire un paramètre affin  $\sigma$  qui paramétrise la trajectoire comme une suite

ordonnée d'événements  $\mathcal{P}(\sigma)^5$ . La trajectoire même est un objet géométrique de dimension un (une "ligne"), et a aussi une existence propre indépendante de tout choix de repère ou de système de coordonnées.

Caractérisons maintenant le taux de variation de la trajectoire en terme de la différence entre deux événements successifs rapprochée en  $\sigma$ . Sa formulation mathématique en est une que vous connaissez trop bien

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}\sigma} = \lim_{\Delta\sigma\to 0} \frac{\mathcal{P}(\sigma + \Delta\sigma) - \mathcal{P}(\sigma)}{\Delta\sigma} \ . \tag{2.101}$$

Comme chaque événement  $\mathcal{P}$  est un point dans l'espace-temps, le résultat de cette opération produit un vecteur (objet géométrique de rang 1) tangent à la trajectoire à la position  $\sigma$ . Deux de ces vecteurs sont indiqués en rouge sur la Fig. 2.12, pour les événements  $\mathcal{P}(\sigma_4)$  et  $\mathcal{P}(\sigma_5)$ .

Ces notions géométriques en mains, retournons à la relativité restreinte. Notre petit survol se termine par l'écriture des équations dynamiques du mouvement en termes de quadrivecteurs. Utilisons le temps propre  $\tau$  pour paramétrer une trajectoire dans l'espace-temps. On peut écrire le quadrivecteur position sous une forme indépendante du système de coordonnées, simplement comme:

$$\mathbf{x}(\tau) ; \qquad (2.102)$$

ou encore explicitement via ses composantes (contravariantes) dans un repère donné:

$$x^{\alpha}(\tau)$$
,  $\alpha = 0, 1, 2, 3$ . (2.103)

Une fois la trajectoire ainsi paramétrée, le quadrivecteur-vitesse  $\mathbf{u}$  (quadrivecteur partout tangent à la trajectoire) est alors simplement:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\tau} = \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{\mathbf{x}(\tau + \Delta\tau) - \mathbf{x}(\tau)}{\Delta\tau} \ . \tag{2.104}$$

Cette définition est toujours fondamentalement géométrique, et donc indépendante de tout choix de repère ou système de quadricoordonnées. Maintenant, pour un choix spécifique de repère (inertiel) et de quadricoordonnées (ct, x, y, z) on a:

$$u^{0} = \frac{\mathrm{d}(ct)}{\mathrm{d}\tau} = c(1-\beta^{2})^{-1/2} = \gamma c , \qquad (2.105)$$

$$u^{i} = \frac{\mathrm{d}x^{i}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x^{i}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{V^{i}}{(1-\beta^{2})^{1/2}} , \qquad i = 1, 2, 3 , \qquad (2.106)$$

où  $V^2 = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}$  et  $\beta = V/c$ , avec  $\mathbf{V}$  étant la vitesse habituelle (dans l'espace plutôt que l'espacetemps):

$$V^{i} = \frac{\mathrm{d}x^{i}}{\mathrm{d}t}$$
  $i = 1, 2, 3$  . (2.107)

En forme plus compacte

$$u^{\alpha} = (\gamma c, \gamma \mathbf{V}) \ . \tag{2.108}$$

Notons bien que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \eta_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} = -\gamma^2 c^2 + \gamma^2 V^2 = c^2 \frac{-1+\beta^2}{1-\beta^2} = -c^2 .$$
 (2.109)

La norme du quadrivecteur-vitesse est invariante, au même titre que  $ds^2$ . C'est un invariant qui nous sera fort utile en relativité générale, et qui mérite donc bien d'être encadré:

 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -c^2 , \qquad \text{[objet massif]}$ (2.110)

 $<sup>^5</sup>$ Le temps propre $\tau$ est un choix naturel de paramètre affin utilisé pour paramétrer une trajectoire, mais ce choix n'est ni unique ni obligatoire.

#### 2.4.1 Première Loi de Newton

La première Loi de Newton stipule qu'en l'absence de force extérieure, un mobile conserve son état de mouvement; autrement dit, son accélération est nulle. Formulé en terme de quadrivecteur on écrit, géométriquement ou en termes de composantes dans un repère inertiel spécifique:

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = 0$$
, ou  $\frac{du^{\alpha}}{d\tau} = 0$ ,  $\alpha = 0, 1, 2, 3$ . (2.111)

Notons que la première équation, pour  $\alpha = 0$ , est trivialement nulle car  $u^0 = \gamma$ ; on a donc bel et bien trois équations ici, une par composante spatiale de la vitesse, comme il se doit. Cette écriture de la première Loi de Newton est cependant valide seulement dans l'espace pseudo-Euclidien de Minkowski; on verra plus tard comment généraliser à un espace(-temps) courbe.

#### 2.4.2 Seconde Loi de Newton

Introduisons la quadri-impulsion **p**:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u}$$
 ou  $p^{\alpha} = mu^{\alpha} = (m\gamma c, m\gamma \mathbf{V})$  (2.112)

où m est la masse au repos, et  $\mathbf{V} = (V^1, V^2, V^3)$ . Comme  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -c^2$ , alors

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = -m^2 c^2 \tag{2.113}$$

La masse au repos est donc un invariant, au même titre que d<br/>  $s^2.$  En terme des composantes, dans la limit<br/>e $\beta \ll 1$  on développe

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots$$
 (2.114)

d'où

$$cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq mc^2 + \frac{1}{2}mV^2 + \dots \rightarrow \text{Energie}$$
 (2.115)

$$\mathbf{P} \equiv (p^1, p^2, p^3) = m\mathbf{V} + \dots \quad \rightarrow \quad \text{Impulsion} \tag{2.116}$$

On reconnait  $p^0c$  comme l'énergie totale (E), et donc l'éq. (2.113) peut s'exprimer comme:

$$-E^{2}/c^{2} + P^{2} = -m^{2}c^{2} \quad \rightarrow \quad E^{2} = (mc^{2})^{2} + P^{2}c^{2} \tag{2.117}$$

Et donc, pour une particule au repos dans son repère ( $\gamma = 1$ ,  $\mathbf{P} = 0$  et énergie cinétique nulle):

$$E = mc^2 \tag{2.118}$$

C'est sans nul doute la plus célèbre équation de toute la physique dans l'imaginaire populaire! Écrivons maintenant la seconde Loi de Newton sous la forme (géométrique):

$$\mathbf{f} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}\tau} \ . \tag{2.119}$$

où la forme exacte de la quadriforce  $\mathbf{f}$  reste à spécifier. Comme on a

$$\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}\tau} = \mathbf{a} , \qquad (2.120)$$

il en suit que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{u} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}{\mathrm{d}\tau} = 0 , \qquad (2.121)$$

R223.tex, May 6, 2023

puisque  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -c^2$ . Donc ceci nous fournit un nouvel invariant:

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = 0 \ . \tag{2.122}$$

Cette contrainte indique que (2.112) n'implique en fait seulement trois équations du mouvement indépendantes, même si elles sont écrites en terme de quadrivecteurs!

Il nous reste à spécifier la forme du quadrivecteur-force. Dans l'espace 3D habituel on écrirait:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} , \qquad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} \equiv \mathbf{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{X}}{\mathrm{d}t} .$$
 (2.123)

où la dernière égalité indique que le taux de variation de l'énergie est donné par le travail par unité de temps fait par ou contre la force  $\mathbf{F}$ , ce qui devrait définitivement être familier. On peut ainsi utiliser ces relations entre la force, l'énergie et l'impulsion pour **définir** la quadri-force comme:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}\tau} = (\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}/c, \gamma \mathbf{F}) \ . \tag{2.124}$$

Remarquons que la première composante ( $\alpha = 0$ ) de l'équation du mouvement donne alors le taux de variation de l'énergie, et les trois autres composantes le taux de variation de l'impulsion, comme il se doit.

#### 2.4.3 Invariants du mouvement pour les photons

En relativité restreinte, les photons se déplacent à vitesse c le long de lignes à ±45 degrés dans nos diagrammes espace-temps (voir Fig. 2.2). Cependant l'intervalle  $ds^2 = 0$  pour les photons, donc le temps propre ne peut pas être utilisé pour paramétrer la trajectoire d'un faisceau lumineux, et celà demeurera le cas en relativité générale.

Considérons un photon se déplaçant le long de l'axe-x; on aura alors x = ct, et donc  $x^{\alpha} = ct \times (1, 1, 0, 0)$  et  $u^{0} = u^{1} = cdt/d\sigma$ , où  $\sigma$  est un paramètre affin approprié. ce qui implique, sous la métrique de Minkowski:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \equiv g_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} = -c^2 \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 + c^2 \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 = 0 , \qquad (2.125)$$

et non pas  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = c^2$  comme on aurait pu (très) naivement s'y attendre! Cet invariant nous sera très utile dans le calcul de trajectoire de photons en relativité générale, donc il mérite aussi son encadré:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 , \qquad [\text{photon}] \tag{2.126}$$

Ceci n'empêche cependant pas le photon d'être porteur d'énergie et d'impulsion; le quadrivecteur impulsion pour un photon est donné par:

$$\mathbf{p} \equiv (E/c, \mathbf{P}) = (\hbar\omega/c, \hbar\mathbf{k}) , \qquad (2.127)$$

où  $\omega$  est la fréquence (angulaire) du photon, **k** son vecteur d'onde, et  $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$  J s est la constante de Planck. Le quadrivecteur impulsion est tangent à la trajectoire du photon dans l'espace-temps, tout comme l'est le quadrivecteur vitesse; encore ici on a

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = 0 , \qquad (2.128)$$

puisque  $\omega^2/k^2 = c^2$ . La comparaison avec l'expression équivalente pour une particule, l'éq. (2.113), confirme bien que le photon n'a pas de masse!

Considérons maintenant un photon se déplaçant dans la direction-x; on a alors

$$(\omega/c, \mathbf{k}) = (\omega/c, k_x, 0, 0) , \qquad (2.129)$$

d'où, via (2.128) et notre définition du produit scalaire,  $\omega/c = k_x$  dans ce repère. Calculons maintenant la fréquence de ce même photon, cette fois mesurée dans un repère prime se déplaçant à vitesse V dans la direction positive de l'axe-x. Nous n'avons qu'à appliquer la transformation de Lorentz au quadrivecteur ci-dessus; pour la composante "0" ( $\equiv \hbar \omega/c$ ) on obtient:

$$\omega'/c = \gamma \omega/c - \gamma \beta k_x = \frac{\gamma \omega}{c} (1 - \beta) , \qquad (2.130)$$

La seconde égalité provenant du fait qu'ici  $k_x = \omega/c$ . On a alors:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \gamma(1-\beta) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} , \qquad (2.131)$$

et dans la limite  $\beta \ll 1$ ,

$$\lim_{\beta \ll 1} \frac{\omega'}{\omega} \simeq 1 - \frac{V}{c} . \tag{2.132}$$

La fréquence  $\omega'$  mesurée dans le repère prime est donc plus faible que la fréquence  $\omega$  mesurée dans un repère au repos. Nous retrouvons bien ici la formule habituelle pour le décalage Doppler.

#### 2.4.4 Invariance des Lois physiques sous transformation de Lorentz

Dans toutes les expressions quadri-vectorielles introduites ci-dessus, dans la limite  $V \ll c$  on a  $\gamma \to 1$  et on retombe bien sur la mécanique Newtonienne. Heureusement d'ailleurs. Mais tout ça est beaucoup plus qu'une simple réécriture quasi-triviale des équations du mouvement habituelles. Formulées en terme de quadrivecteurs, ces équations sont invariantes sous la transformation de Lorentz. On avait vu que le quadrivecteur-coordonnées dans l'espace-temps se transforme selon:

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\ \nu} x^{\nu} , \qquad \mu' = 0, 1, 2, 3 .$$
 (2.133)

Celà demeure la règle de transformation pour tous les quadrivecteurs. Considérons, par exemple, comment se transforme la seconde Loi de Newton exprimée dans le repère prime:

$$\frac{\mathrm{d}p^{\mu'}}{\mathrm{d}\tau} = f^{\mu'} \tag{2.134}$$

vers un repère non-prime:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} (\Lambda^{\mu'}_{\ \nu} p^{\nu}) = \Lambda^{\mu'}_{\ \nu} f^{\nu} \ . \tag{2.135}$$

Puisque dans le contexte d'un changement de repère, la matrice de Lorentz n'implique que des combinaisons de constantes  $(\beta, \gamma)$  et que l'intervalle de temps propre d $\tau$  est lui-même invariant, cette dernière expression devient:

$$\Lambda^{\mu'}_{\nu} \frac{\mathrm{d}p^{\nu}}{\mathrm{d}\tau} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} f^{\nu} \tag{2.136}$$

$$\Lambda^{\mu'}_{\nu} \left( \frac{\mathrm{d}p^{\nu}}{\mathrm{d}\tau} - f^{\nu} \right) = 0 \qquad (2.137)$$

$$\frac{\mathrm{d}p^{\nu}}{\mathrm{d}\tau} = f^{\nu} . \qquad (2.138)$$

L'expression relativiste de la seconde Loi de Newton est ainsi **invariante** sous transformation de Lorentz, même si les composantes individuelles des quadrivecteurs impliqués ne le sont pas.

Nous devons composer avec un problème résiduel cependant; la formulation de plusieurs lois physiques implique habituellement des dérivées spatiales; par exemple, les équations de Maxwell

sont formulées en terme d'opérateurs différentiels: divergence et rotationnel. Considérons la dérivée partielle suivante, et sa transformation dans le repère "prime":

$$\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \to \frac{\partial A^{\nu'}}{\partial x^{\mu'}} \tag{2.139}$$

Il faut transformer le vecteur  $A^{\nu}$  ainsi que le système de coordonnées utilisé par rapport auquel on dérive. D'où:

$$\frac{\partial A^{\nu'}}{\partial x^{\mu'}} = \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right) \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}A^{\nu}\right)$$
(2.140)

$$= \underbrace{\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}}_{\Lambda^{\mu}_{\mu'}} \underbrace{\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}}_{\Lambda^{\nu'_{\nu}}} \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} A^{\nu} .$$
(2.141)

Le premier terme au membre de droite se transforme exactement comme le ferait un tenseur mixte de rang 2 (voir éq. (2.98) au besoin). Le second terme, par contre, implique les dérivées secondes des coordonnées "prime" par rapport aux coordonnées "non-prime". Il est facile de vérifier que ce second terme s'annule pour des changements de repères (inertiels) en espace-temps pseudo-Euclidien; mais ce ne sera plus le cas en géométrie non-Euclidienne. Le second terme au membre de droite est une manifestation de la **courbure** de l'espace-temps. La formulation des Lois physiques en relativité générale demandera donc

- de remplacer le tenseur de Minkowski  $\eta_{\alpha\beta}$  par un tenseur métrique  $g_{\alpha\beta}$  caractérisant la mesure de l'intervalle  $ds^2$  dans un espace-temps courbe; le calcul des produits scalaires (invariants) sera affecté!
- de reformuler la notion de dérivée pour y incorporer la contribution de la courbure; la définition des opérateurs différentiels (gradients, divergence, etc.) va changer.

#### **Bibliographie:**

La relativité restreinte est discutée plus ou moins brièvement dans pratiquement tous les bouquins sur la relativité générale, incluant ceux cités en bibliographie du chapitre 1: voir les chapitres 4 et 5 de Hartle; le chapitre 2 de Barrau & Grain; le chapitre 1 de Schutz; et le chapitre 2 de Thorne & Blandford. Si vous en voulez encore plus, je suggère, en plus évidemment de vos Notes et bouquin(s) pour PHY-1652 (Relativité 1):

Griffith, J.D., Introduction to Electrodynamics, (3ème éd.), Prentice Hall: chap. 12,

Durand, S., Comprendre Einstein en animant soi-même l'espace-temps, Belin/Pour la Science, Paris, 2014.

Le vieux classique suivant offre toujours une lecture très instructive:

Taylor, E.F., & Wheeler, J.A., Spacetime Physics, W.H. Freeman, 1963.

Sur la résolution du paradoxe des jumeaux sans changement instantané de direction (accélération infinie!) du jumeau en voyage, voir:

Gamboa, J., Mendez, F., Paranjape, M.J., & Sirois, B., Can. J. Phys., 97(10), 1049–1063 (2019).

La mathématique tensorielle est discutée aux §20.1 à 20.3 dans l'ouvrage de Hartle; à la §4.1 dans Barrau & Grain; et au chapitre 3 de Schutz. Si vous en voulez plus, mon collègue Michel Moisan a très gentiment accepté de me laisser mettre à votre disposition (via la page web du cours) ses notes de cours sur le sujet, datant de l'époque maintenant révolue où le cours

d'électro avancé PHY-3812 incluait un solide 6 semaines sur les tenseurs. Une bonne référence (classique) sur le sujet est:

Synge, J.L., & Schild, A. Tensor Calculus, U. Toronto Press 1949 (Reprint Dover 1978); chaps. 1–4.

et, pour un condensé très pratique, la §1.1 de:

Poisson, E., A relativistic Toolkit, Cambridge University Press, 2004



Euclide (ca. 325–265)



Carl Friedrich Gauss (1777–1855)



Georg Bernhard Riemann (1826–1866)

### Chapitre 3

# Description mathématique des espaces courbes

Première partie du programme théorique

ou:

Comment décrire la physique en espace(-temps) courbe.

L'idée fondamentale sous-jacente à la première partie de notre programme théorique est de ramener la géométrie à la mesure de l'intervalle; en analogie à la définition de l'intervalle dans l'espace pseudo-Euclidien de Minkowski, on écrit maintenant:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} \equiv \mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x_{\mu} = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta} , \qquad (3.1)$$

où  $g_{\alpha\beta}$  est devient le **tenseur métrique** tout court. Ses composantes peuvent toujours s'exprimer en fonction d'une base vectorielle associé à un choix spécifique de (quadri)coordonnées:

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{e}_{\beta} \qquad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$$
 (3.2)

Notons déjà que l'expression ci-dessus implique

$$\mathrm{d}x_{\mu} = g_{\mu\beta}\mathrm{d}x^{\beta} \ . \tag{3.3}$$

Autrement dit ce tenseur métrique général définit l'intervalle, permet le calcul du produit scalaire, et permet le passage de la forme contravariante à covariante d'un quadrivecteur, rôle joué par le tenseur de Minkowski  $\eta_{\alpha\beta}$  dans l'espace-temps pseudo-Euclidien de la relativité restreinte. En espace courbe, nous nous retrouverons souvent à travailler avec des bases qui ne sont pas orthonormales, ou même orthogonales. Néanmoins, et tout comme avec le tenseur métrique de Minkowski décrivant l'espace-temps pseudo-Euclidien:

$$g_{\alpha\beta}g^{\alpha\gamma} = \delta^{\gamma}_{\beta}$$
, et  $g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = g^{\alpha}_{\alpha} = 4$ ,  $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3$ . (3.4)

Vu ainsi, toute l'information relative à la courbure se retrouve incorporée dans le tenseur métrique  $g_{\alpha\beta}$ . Faire de la géométrie en espace courbe demandera donc de connaitre les composantes de ce tenseur. Mais comment s'y prendre ? Empiriquement, c'est possible par la **mesure**.

#### 3.1 Les cinq postulats d'Euclide

Toutes les règles et théorèmes géométriques que vous avez appris depuis le primaire peuvent être déduits à partir de cinq postulats dûs à Euclide (ca. 325–265):

- Deux points ne peuvent être reliés que par un seul segment de droite.
- L'extension d'un segment de droite peut générer une seule droite
- À partir d'un segment de droite, un seul cercle peut être tracé à partir d'une extrémité comme centre et le segment comme rayon.
- Tous les angles droits sont congruents.
- Si deux droites en intersectent une troisième en formant des angles dont la somme < π d'un coté, elles vont s'intersecter de ce coté<sup>1</sup>.

Ces cinq postulats (ou un ensemble de 5 équivalents) définissent la **géométrie Euclidienne**; on peut tout prouver (e.g. Pythagore) à partir de ça; et on le sait depuis l'an  $\sim 300$  BC !!

Le cinquième postulat se distingue des quatre premiers. Dans la limite où la somme des angles tend vers  $\pi$ , le point d'intersection se déplace à l'infini. C'est le seul des cinq postulats qui est fondamentalement **non-local**. En abandonnant le cinquième postulat, on produit les géométries non-Euclidiennes, développées à partir de 1823 entres autres par Janos Bolyai (1802–1860) et Nicolai Lobachevsky (1792–1856). Carl Friedrich Gauss (1777–1855) avait déjà exploré certaines de ces possibilités; c'est un de ses étudiants, Bernhard Riemann (1826-1866), qui en a finalement développé la formulation générale au milieu du 19ème siècle.

La mathématique nous fournit les géométries logiquement possibles; la physique nous indique laquelle caractérise notre Univers.

La géométrie est accessible à partir des mesures; mesure  $\equiv ds$ . De telles mesures permettent de reconstruire la métrique; et de là on peut reconstruire tous les postulats définissant la géométrie. Mais ATTENTION:

#### Géométrie $\neq$ Coordonnées !

Ha §2.5

Le sens de cet énoncé deviendra plus clair, j'espère, avec l'exemple suivant. L'intervalle spatial Euclidien exprimé dans le système de coordonnées sphérique polaire  $(r, \theta, \phi)$  s'écrit:

$$ds^{2} = dr^{2} + r^{2}d\theta^{2} + r^{2}\sin^{2}\theta d\phi^{2} \equiv g_{jk}dx^{j}dx^{k} \qquad j,k = 1,2,3 \equiv r,\theta,\phi$$
(3.5)

correspondant donc à la métrique (spatiale 3D)

$$g_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$
(3.6)

Ceci ne ressemble pas du tout à la métrique de Minkowski; on notera en particulier que l'élément  $g_{\phi\phi}$  dépend explicitement des coordonnées r et  $\theta$ ; Je vous laisse vérifier que la transformation de coordonnées habituelle:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
,  $\theta = \arccos(z/r)$ ,  $\phi = \arctan(y/x)$ , (3.7)

substituée dans (3.5), nous ramène bien au tenseur métrique de l'espace Euclidien, de courbure nulle. L'aspect rébarbatif du tenseur métrique (3.6) ne résulte que d'un choix d'une base de coordonnées très particulière (mais néanmoins très pratique dans plusieurs situations!), et reliée

Exercice

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Vous avez possiblement appris celui-ci sous une forme différente mais équivalente, dans le genre: "Par un point situé hors d'une droite ne peut être construite qu'une seule droite étant parallèle à la première".

non-linéairement aux coordonnées cartésiennes, viz. l'éq. (3.7). Cette base de coordonnée est orthogonale (le tenseur métrique est diagonal), mais n'est pas orthonormale, car clairement ici

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = 1$$
,  $\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta = r^2$ ,  $\mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\phi = r^2 \sin^2 \theta$ , (3.8)

Il est cependant facile de passer à une base orthonormale en définissant de nouveaux vecteurs de base:

$$\mathbf{e}_{\hat{r}} = \mathbf{e}_r , \qquad \mathbf{e}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{r} \mathbf{e}_{\theta} , \qquad \mathbf{e}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_{\phi} .$$
 (3.9)

Cette manoeuvre, qui nous ramène directement à un tenseur métrique Euclidien dans tout l'espace, indique donc encore une fois que la métrique (3.6) décrit bien un espace Euclidien. On verra plus loin (§3.3) qu'en espace courbe, il est toujours possible de transformer la base vectorielle de manière à la rendre orthonormale **en un point**, mais en général des transformations distinctes seront requises en d'autres points de l'espace(-temps).

#### 3.2 Mesure et géométrie

Nos amis Anne et Buck ont tous les deux les pieds fermement plantés sur l'équateur terrestre, Anne au point A sur la Figure 3.1 et Buck 9000 km plus à l'est, au point B. Tous deux se dirigent franc nord, donc en ligne droite le long de leur méridien respectif. Leurs trajectoires sont donc parallèles; cependant, avec une bonne dose d'endurance, nos deux comparses se croiseront éventuellement au pôle Nord; clairement, le cinquième postulat d'Euclide ne tient plus à la surface d'une sphère !



Figure 3.1: Un (très grand) triangle tracé à la surface du globe terrestre, avec les points A, B et P comme sommets, P coincidant ici avec le pôle Nord, et A et B tous deux sur le cercle équatorial et séparés de 80° en longitude.

L'infini du cinquième postulat d'Euclide, c'est loin. Il s'avère que la courbure de la sphère peut être détectée à partir de mesures purement locales. Revenons à la Figure 3.1 et imaginez vous au pôle Nord terrestre. Vous vous dirigez franc sud jusqu'à l'équateur (point A); vous tournez à gauche (virage à 90 degrés) pour vous diriger franc ouest, parcourant 80 degrés en longitude, jusqu'au point B; vous tournez encore à gauche (encore un virage à 90 degrés), direction franc Nord, et remontez à votre point de départ, au pôle Nord. Vous venez de tracer, à la surface de la Terre, un triangle dont la somme des angle internes est de  $90+90+80 = 260^{\circ}$ , plutôt que le 180° qu'on vous a appris en géométrie plane<sup>2</sup>. Vous pouvez donc, sur la base de trois mesures de vos angles de virage, chacune purement *locale* (même si le triangle tracé ne l'est pas), distinguer la surface d'une sphère d'un plan. En fait, la somme des angles internes d'un triangle de surface A tracé sur la surface d'une sphère de rayon R est donnée par:

Ha §2.2

$$\sum(\text{angle}) = \pi + \frac{A}{R^2} \qquad [\text{rad}] \tag{3.10}$$

Une mesure de la surface d'un triangle et de ses angles internes permet donc de calculer le rayon de la sphère !

La courbure peut également trahir sa présence durant le déplacement d'un vecteur, comme l'illustre la Figure 3.2. On déplace un vecteur (en vert) le long d'un parcours fermé de forme triangulaire, formant un circuit fermé débutant et se terminant au même point P. Durant le transport, le vecteur garde une orientation fixe par rapport à un système cartésien local transporté avec le vecteur<sup>3</sup>. Cette procédure s'appelle le **transport parallèle**, et on y reviendra plus loin. En géométrie plane (diagramme du haut), une fois le circuit complété le vecteur transporté est indistingable du vecteur initial, ayant conserve son orientation Nord-Nord-Ouest durant tout le circuit Cependant, sur une surface courbe (diagramme du bas), le vecteur subit ici une rotation de 80° vers l'est, et ce même si le vecteur est demeuré parfaitement aligné à la direction sud durant son transport, donc fixe par rapport à un système cartésien local tangent aux directions latitudinale et longitudinale. Cette rotation est une manifestation de la courbure de la surface sphérique.

En géométrie, quand on parle de "mesurer", on entend habituellement des mesures de longueurs, de surfaces, de volumes, etc. Notre tenseur métrique  $g_{\alpha\beta}$  est l'objet géométrique qui permet de définir ces mesures en espaces courbes.

#### 3.2.1 Métriques diagonales: éléments de ligne, surface, et volume

Pour un système de coordonnées orthogonales (dans le sens  $\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{e}_{\beta} = 0$  si  $\alpha \neq \beta$ ), la métrique Ha §7.6 est diagonale:

$$ds^{2} = g_{00}(dx^{0})^{2} + g_{11}(dx^{1})^{2} + g_{22}(dx^{2})^{2} + g_{33}(dx^{3})^{2} .$$
(3.11)

La grande majorité des système de coordonnées que vous connaissez (cartésien, polaire, cylindrique, sphérique, etc.) ont cette propriété. Un élément de ligne infinitésimal  $d\ell$  est alors donné directement par la définition même de l'intervalle:

$$d\ell = \sqrt{g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}} .$$
(3.12)

Si d $\ell$  est orienté le long d'un des axes de coordonnées (disons  $x_1$ ), alors ceci devient simplement:

$$d\ell = \sqrt{g_{11}} dx^1 . \tag{3.13}$$

Ceci exprime le fait qu'un intervalle de coordonnée  $(dx_1)$  n'est pas nécessairement égal à une distance physique  $(d\ell)$ . Considérez par exemple un intervalle de longitude à la surface de la terre, comme le segment reliant les points A et B sur la Figure 3.1; l'intervalle de coordonnée  $\Delta \phi = 80^{\circ}$  n'est pas une distance physique mesurée en mètres. La distance physique serait plutôt ici  $\Delta S = R \sin \theta \Delta \Phi$  (avec  $\Delta \phi$  mesuré en radians!), ce qui correspond bien à  $\sqrt{g_{33}} \Delta x^3$ pour la métrique (3.6).

 $<sup>^{2}</sup>$ Notez bien que ce résultat n'a rien à voir avec le fait qu'un des trois sommets coincide ici avec un des pôles de la sphère.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>En pratique ceci pourrait être accompli en fixant le vecteur sur un gyroscope.



Figure 3.2: Transport parallèle d'un vecteur (en vert) le long d'un parcour fermé (en rouge) sur une surface. En haut, le vecteur est transporté le long d'un triangle dans le plan cartésien 2D, tandis qu'en bas le vecteur est transporté le long du triangle sur la sphère de la Figure 3.1. Dans ce second cas, le vecteur revient à son point de départ P pivoté de 80° par rapport à son orientation initiale.

Considèrons maintenant un élément infinitésimal de surface dans le plan  $[x^1, x^2]$ , dont les arêtes opposées sont parallèles et alignées aux axes de coordonnées. Les longueurs des arêtes (mesures!) sont données par:

$$d\ell^1 = \sqrt{g_{11}} dx^1 , \qquad d\ell^2 = \sqrt{g_{22}} dx^2 , \qquad (3.14)$$

d'où on tire l'élément de surface

$$dA = d\ell^1 \times d\ell^2 = \sqrt{g_{11}g_{22}} \, dx^1 dx^2 , \qquad (3.15)$$

et similairement pour l'élément de volume 3D:

$$dV = \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} \,dx^1 dx^2 dx^3 \,. \tag{3.16}$$

Je vous laisse vérifier que le calcul de ces expressions pour la métrique du système de coordonnées sphériques polaires (soit l'éq. (3.6)) produit bien les expressions habituelles pour les éléments de ligne, surface, volume, etc. Mais attention cependant, dans l'espace temps l'élément de quadrivolume est donné par:

$$dv = \sqrt{-g_{00}g_{11}g_{22}g_{33}} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 , \qquad (3.17)$$

#### 3.2.2 Un espace 2D courbe: la surface d'une sphère

À la surface d'une sphère de rayon R, et en terme des coordonnées  $(\theta, \phi)$ , l'intervalle s'écrit:

$$\mathrm{d}s^2 = R^2 \mathrm{d}\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta \mathrm{d}\phi^2 , \qquad (3.18)$$

ce qui correspond au tenseur métrique (spatial 2D)

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} R^2 & 0\\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \qquad A, B = 1, 2 \equiv \theta, \phi .$$
(3.19)

Calculons la circonférence C d'un cercle tracé sur la surface, avec son centre au pôle-N uniquement pour simplifier le calcul. On a alors  $d\theta = 0$ , et  $ds = R \sin \theta d\phi$ , d'où

$$C = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{g_{\phi\phi}} d\phi$$
  
= 
$$\int_{0}^{2\pi} \underbrace{R \sin \theta}_{\text{cst.}} d\phi$$
  
= 
$$2\pi R \sin \theta < 2\pi (R\theta) . \qquad (3.20)$$

Dans la limite  $\theta \to 0$ , alors  $\sin \theta \simeq \theta$  et  $C/(R\theta) \to 2\pi$ ; notre cercle aura la "bonne" circonférence tant que son rayon demeure beaucoup plus petit que celui de notre sphère.

## 3.2.3 Un espace 2D courbe uniquement en apparence: la surface d'un cylindre

L'intervalle à la surface d'un cylindre de rayon R, exprimée en coordonnées cylindriques 2D  $(\phi, z)$ , a la forme:

$$ds^2 = R^2 d\phi^2 + dz^2 , (3.21)$$

correspondant donc à la métrique (spatiale 2D)

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} R^2 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A, B = 1, 2 \equiv \phi, z .$$
 (3.22)

On remarque que le changement de coordonnées  $\psi = R\phi$  ramène la métrique à sa forme Euclidienne:

$$ds^{2} = d\psi^{2} + dz^{2} \qquad \rightarrow \qquad g_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(3.23)

ce qui indique déjà que la surface du cylindre est Euclidienne, même si la surface d'un cylindre est définitivement courbée autour de son axe de symétrie. Une petite manip très simple pourra vous en convaincre: tracez sur une feuille de papier un triangle et un cercle, et mesurez la somme des angles internes de votre triangle, et le rapport circonférence/rayon de votre cercle. Vous obtiendrez 180° pour le premier, et  $2\pi$  pour le second. Maintenant, armé d'un rouleau de Scotch Tape, collez l'une à l'autre deux cotés opposées de votre feuille de papier. Le triangle et le cercle sont maintenant déformés, mais la somme des angles interne du premier est toujours 180°, et le rapport circonférence/rayon du second toujours  $2\pi$ .

Maintenant, décollez le Scotch Tape, et essayez de former avec votre feuille de papier non pas un cylindre, mais une sphère; c'est une manip très instructive, qu'il sera bon de se remémorer plus tard quand on déclarera la courbure irréductible !

#### 3.3 Métrique localement Euclidienne

Le Principe d'équivalence généralisé (§1.4) stipule que sur un intervalle temporel et/ou spatial suffisamment court, on ne peut distinguer un repère en chute libre (dans un champ gravitationnel) d'un repère inertiel (dans le vide). Du point de vue géométrique, ceci revient à dire qu'il est possible de définir un repère *localement* Euclidien dans un espace courbe. C'était l'idée déjà invoquée dans le cadre du transport parallèle du vecteur sur la surface courbe de la Figure 3.2. Plus spécifiquement, dans un espace-temps courbe quelconque, il doit toujours exister à chaque point P un changement de coordonnées (vers un repère en chute libre) qui puisse ramèner **localement** la métrique à une forme (pseudo-)Euclidienne à la Minkowski. Ceci revient à construire un hyperplan tangent à l'espace-temps courbe, faisant contact au point P.

Un exemple géométriquement simple de cette idée est offert par la surface 2D d'une sphère de rayon R; dans l'espace 3D "contenant" cette sphère, il est toujours possible de définir un plan (Euclidien) touchant la sphère et tangent à sa surface en un point spécifique. L'idée est illustrée (en coupe) à la Figure 3.3. Ici le plan rouge est tangent au point P, et en ce point on peut définir un système de coordonnées orthonormales 2D [x, y] dans ce plan. La direction z, bien qu'indiquée sur la Fig. 3.3, ne fait pas partie du système de coordonnées mesurant la position dans le plan, tout comme la position à la surface de la Terre se mesure en 2D, latitude et longitude<sup>4</sup>. Il existe clairement une transformation de coordonnées qui permet le passage des coordonnées latitude-longitude localisant P sur la sphère (disons) à ces coordonnées [x, y]localisant ce même P dans le plan tangent. Notez bien que la métrique associée au système [x, y]est clairement Euclidienne ici, dans le sens  $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = \delta_{xy}$ . Cependant, à strictement parler la métrique n'est Euclidienne qu'en un point (ici P). Une transformation de coordonnées différente sera nécessaire pour la rendre Euclidienne en un autre point  $P' \neq P$ , le plan tangent à P' (en bleu sur la Fig. 3.3) définissant un système de coordonnées 2D [x', y'] également Euclidien, mais orienté différemment du système [x, y]. De toute évidence, un plan ne peut capturer la courbure d'une surface sphérique, manifestation très géométrique de l'irréductibilité de la courbure.

Essayons de mathématiser tout ça de manière plus générale, mais toujours en 2D pour le moment. On considère la métrique suivante, décrivant en toute généralité une surface courbe en 2D:

$$ds^{2} = g_{11}(v, w)dv^{2} + 2g_{12}(v, w)dvdw + g_{22}(v, w)dw^{2}.$$
(3.24)

Notons que si les coefficients de la métrique ne dépendaient pas des coordonnées, on retomberait sur un système non-orthogonal en espace Minkowskien, du genre utilisé pour illuster la distinction covariant/contravariant (revoir la Fig. 2.10).

BG §3.2.1

 $<sup>^{4}</sup>$ Sauf pour les astronautes, les pilotes d'avion, les parachutistes, et les alpinistes, pour qui la notion d'altitude est importante!



Figure 3.3: Deux plans tangents à la surface d'une sphère de rayon R, vue ici en coupe aux fins de clarté. Pour deux points distincts P et P', les plans tangents à la sphère (en rouge et bleu) auront une inclinaison différente, à quoi correspondent des systèmes de coordonnées orthonormales locales [x, y] et [x', y'] dans le plan, reliés aux latitude-longitude sur la sphère par des transformations distinctes (voir texte). Notons que les directions y et y' sont ici toutes deux perpendiculaires au plan du diagramme, et que les axes z et z' ne font pas partie du système de coordonnées 2D mesurant la position dans chaque plan tangent.

On se place à un point P quelconque, et on cherche si il est possible de choisir des coordonnées (x, y) telles que la métrique soit localement Euclidienne. On écrit:

$$dv = \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{A(x,y)} dx + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{B(x,y)} dy , \qquad (3.25)$$

$$dw = \underbrace{\frac{\partial w}{\partial x}}_{C(x,y)} dx + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial y}}_{D(x,y)} dy .$$
(3.26)

On substitue dans la métrique:

$$ds^{2} = g_{11}(A^{2}dx^{2} + 2ABdxdy + B^{2}dy^{2}) +2g_{12}(ACdx^{2} + (AD + CB)dxdy + BDdy^{2}) +g_{22}(C^{2}dx^{2} + 2CDdxdy + D^{2}dy^{2}) = (g_{11}A^{2} + 2g_{12}AC + g_{22}C^{2})dx^{2} +2(g_{11}AB + g_{12}(AD + CB) + g_{22}CD)dxdy +(g_{11}B^{2} + 2g_{12}BD + g_{22}D^{2})dy^{2}.$$
(3.27)

Si l'intervalle est invariant (comme il se doit), alors on peut aussi écrire:

$$ds^{2} = g'_{11}(x, y)dx^{2} + 2g'_{12}(x, y)dxdy + g'_{22}(x, y)dy^{2} .$$
(3.28)

On doit maintenant choisir les A, B, C, D (4 quantités) et leurs dérivées (normalement 8 quantités, mais en fait 6 car les dérivées secondes croisées de v et w sont identiques — égalité de Schwarz) de manière à ce que la métrique g' soit Euclidienne. Les 4 quantités A, B, C, D sont plus que suffisantes pour imposer (au point P):

$$g'_{11} = g'_{22} = 1$$
,  $g'_{12} = 0$ . (3.29)

La démonstration vous est laissée en exercice (série 1)! Le choix des 6 dérivées indépendantes de A, B, C, D par rapport à x, y permet d'imposer les 6 conditions:

$$\frac{\partial g'_{11}}{\partial x} = \frac{\partial g'_{22}}{\partial x} = \frac{\partial g'_{12}}{\partial x} = 0 , \qquad \frac{\partial g'_{11}}{\partial y} = \frac{\partial g'_{22}}{\partial y} = \frac{\partial g'_{12}}{\partial y} = 0 , \qquad (3.30)$$

ce qui implique que la métrique est localement Euclidienne en P. Cependant, on n'a pas assez de dérivées secondes (8) de A, B, C, D pour annuler toutes les 9 dérivées secondes des  $g_{jk}$  par rapport à x, y, soit:

$$\frac{\partial^2 g'_{11}}{\partial x^2} , \quad \frac{\partial^2 g'_{11}}{\partial y^2} , \quad \frac{\partial^2 g'_{11}}{\partial x \partial y} , \quad \frac{\partial^2 g'_{12}}{\partial x^2} , \quad \frac{\partial^2 g'_{12}}{\partial y^2} , \quad \frac{\partial^2 g'_{12}}{\partial x \partial y} , \quad \frac{\partial^2 g'_{22}}{\partial x^2} , \quad \frac{\partial^2 g'_{22}}{\partial y^2} , \quad \frac{\partial^2 g'_{22}}{\partial x \partial y} . \tag{3.31}$$

La conclusion est incontournable:

#### La courbure est irréductible !!

Ce problème demeure quand on passe à l'espace-temps 4D: on a assez de degrés de liberté pour ramener la métrique à sa forme Minskowskienne et annuler ses dérivées premières (équivalent à définir un hyperplan 4D tangent à une hypersurface 4D courbe), mais pas ses dérivées secondes. Plus spécifiquement, dans l'espace-temps 4D l'équivalent des transformations (3.25)–(3.26) n'implique plus 4 mais 16 coefficients; c'est encore plus que suffisant pour spécifier les 10 composantes indépendantes d'une métrique localement Minskowskienne. De plus, les 40 dérivées premières indépendantes de ces coefficients sont suffisantes pour annuler les 40 dérivées premières des composantes indépendantes du tenseur métrique. Maintenant, au niveau des dérivées secondes nous disposons de 80 degrés de liberté, ce qui est insuffisant pour annuler toutes les 100 dérivées secondes distinctes du tenseur métrique. La §3.3 de Barrau et Grain donne plus de détails sur toute cette jonglerie numérologique. Le message important demeure: la courbure est irréductible aussi en 4D !

Revenant à la Figure 3.3, on peut tout de même imaginer que si la distance entre P et P' est  $\ll R$ , alors les deux plans tangents seront presque coincidents, et difficile à distinguer dans le voisinage de ces deux points. C'est le cas, et on y reviendra plus loin.

#### 3.4 La dérivée covariante

Considérons la dérivée d'un vecteur **a** par rapport (par exemple) à un paramètre affin, disons  $\sigma(\mathbf{x})$ , mesurant la position le long d'une trajectoire arbitraire. Appliquant la dérivée en chaine:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{\mathrm{d}(a^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha})}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{\mathrm{d}a^{\alpha}}{\mathrm{d}\sigma}\mathbf{e}_{\alpha} + a^{\alpha}\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_{\alpha}}{\mathrm{d}\sigma}$$
(3.32)

En général, les vecteurs  $\mathbf{e}_{\alpha}$  peuvent dépendre des coordonnées spatio-temporelles (comme, e.g., sur la Fig. 3.5 plus loin), d'où l'apparition du second terme, qui capture cette dépendance. La courbure se manifeste donc via ce second terme, qui n'a rien à voir avec une variation véribale (i.e., physique) de **a**, et qui disparait pour un système de coordonnées cartésiennes orthonormales.

Le **transport parallèle** consiste à déplacer un vecteur le long d'une trajectoire, en conservant son orientation par rapport à un système de coordonnées localement Euclidien/Minkowskien. Le processus est illustré sur la Figure 3.4. Ici un vecteur **a** (en vert) est déplacé dans le plan



Figure 3.4: Le transport parallèle d'un vecteur **a** d'un point  $\sigma_A$  vers  $\sigma_B$  permet de calculer la variation vectorielle d**a** entre ces deux points par la simple soustraction vectorielle  $\mathbf{a}(\sigma_B) - \mathbf{a}(\sigma_A)$ . Ici les composantes contravariantes  $a^x(\sigma_A) \neq a^x(\sigma_B)$  et  $a^y(\sigma_A) \neq a^y(\sigma_B)$ , indiquant une variation "physique" du vecteur **a**.

Cartésien [x, y] du point  $\sigma_A$  vers le point  $\sigma_B$  le long d'une trajectoire (en rouge) paramétrée par la variable  $\sigma$ . Il n'y aucune raison *a priori* de supposer que  $\mathbf{a}(\sigma_A) = \mathbf{a}(\sigma_B)$ , et ici ce n'est pas le cas. La variation d**a** du vecteur **a** entre ces deux points est calculée en soustrayant vectoriellement de  $\mathbf{a}(\sigma_B)$  le vecteur  $\mathbf{a}(\sigma_A)$  transporté **parallèlement** au point  $\sigma_B$ . La variation d $\mathbf{a}/d\sigma$  correspond au premier terme au RHS de (3.32), soit la variation de **a** qui a une origine véritablement "physique".

Mais déjà en coordonnées non-Cartésiennes, même dans l'espace Eulidien les choses se compliquent, comme le montre la Figure 3.5. Ici le vecteur **a** ne varie pas au cours de son déplacement de  $\sigma_A$  vers  $\sigma_B$ : le transport parallèle de  $\mathbf{a}(\sigma_A)$  jusqu'à  $\sigma_B$  produit un vecteur transporté qui coincide exactement avec  $\mathbf{a}(\sigma_B)$ , donc d $\mathbf{a} = 0$ . Cependant les composantes contravariantes de **a**, telles qu'associées à la base orthogonale ( $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{\theta}$ ), elles, changent. Cette variation est non-physique, dans le sens qu'elle est uniquement due au choix du système de coordonnées. C'est cette variation dite "métrique" qui est capturée par le second terme au RHS de (3.32).

Le passage à une géométrie non-Euclidienne, en général, va également introduire de telles variations non-physiques quand un vecteur est transporté parallèlement. Allons-y de manière plus formelle et définissons:

•  $\Delta A^{\mu}$ : variation totale mesurée d'un (quadri)vecteur  $A^{\mu}$  déplacé sur une distance  $\Delta \sigma$ 



Figure 3.5: Le transport parallèle d'un vecteur **a**, avec cette fois les composantes contravariantes exprimées en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . Ici le vecteur **a** demeure constant (en longueur et orientation, i.e.,  $d\mathbf{a} = 0$ ) dans son déplacement de  $\sigma_A$  vers  $\sigma_B$ , mais ses composantes contravariantes changent:  $a^r(\sigma_A) > a^r(\sigma_B)$  et  $a^{\theta}(\sigma_A) < a^{\theta}(\sigma_B)$ ; mais ici cette variation n'est pas physique, étant causée uniquement par le choix du système de coordonnées polaire pour exprimer les composantes du vecteur.

•  $\delta A^{\mu}$  partie de la variation du (quadri)vecteur  $A^{\mu}$  dûe uniquement à la courbure.

La dérivée covariante est définie comme:

$$\frac{\mathrm{D}A^{\mu}}{\mathrm{D}\sigma} = \lim_{\Delta\sigma\to 0} \frac{\Delta A^{\mu} - \delta A^{\mu}}{\Delta\sigma} , \qquad (3.33)$$

et correspond donc à la variation "physique" de  $A^{\mu}$ .

Retour au transport parallèle: on transport  $A^{\sigma}$  sur un intervalle  $\Delta x^{\rho}$ ; la "rotation" du vecteur affectera les autres composantes de A, proportionnellement à la grandeur de  $A^{\sigma}$  et à la grandeur du déplacement  $\Delta x^{\rho}$ . Dans limite  $\Delta x^{\rho} \to 0$  on peut supposer que ces variations sont linéaires en  $A^{\sigma}$  et en  $\Delta x^{\rho}$  (développement en série de Taylor). Écrivons:

$$\delta A^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} A^{\sigma} \Delta x^{\rho} \tag{3.34}$$

les  $\Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}$  sont appelés **coefficients de connexion**, ou encore parfois **Symboles de Christoffel**. Le signe "–" est conventionnel. Fondamentalement, les coefficients de connexion capturent l'impact des variations de la base de coordonnée lors du transport parallèlle d'un vecteur. Pourquoi trois indices sur les  $\Gamma$ ? Parce que ces coefficients établissent une relation linéaire entre une quantité vectorielle ( $\delta A^{\mu}$ ) et deux autres quantités vectorielles ( $A^{\sigma}$  et  $\Delta x^{\rho}$ ); autrement dit, la rotation du vecteur ( $\delta A^{\mu}$ ) associée à la courbure de l'espace est elle-même une quantité vectorielle (un premier indice), et dépend de l'orientation initiale du vecteur ( $A^{\sigma}$ , un second indice), et de l'orientation du déplacement ( $\Delta x^{\rho}$ , un troisième indice).

Avec cette définition la dérivée covariante devient:

$$\frac{\mathrm{D}A^{\mu}}{\mathrm{D}s} = \frac{\mathrm{d}A^{\mu}}{\mathrm{d}s} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}A^{\sigma}\frac{\mathrm{d}x^{\rho}}{\mathrm{d}s}$$
(3.35)

Les  $\Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}$  ne sont **pas** des tenseurs ! Ils établissent simplement la forme de la relation bilinéaire (3.34). La (bi)linéarité de cette relation implique que la dérivée covariante satisfait à la règle de composition de la dérivée:

$$\frac{\mathcal{D}(A^{\mu}B^{\nu})}{\mathcal{D}s} = A^{\mu}\frac{\mathcal{D}B^{\nu}}{\mathcal{D}s} + B^{\nu}\frac{\mathcal{D}A^{\mu}}{\mathcal{D}s} .$$
(3.36)

Dans le cas d'un quadrivecteur de type covariant, on peut montrer que:

$$\frac{\mathrm{D}A_{\mu}}{\mathrm{D}s} = \frac{\mathrm{d}A_{\mu}}{\mathrm{d}s} - \Gamma^{\nu}_{\mu\rho}A_{\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\rho}}{\mathrm{d}s} \ . \tag{3.37}$$

Et pour un tenseur:

$$\frac{\mathrm{D}A_{\mu\nu}}{\mathrm{D}s} = \frac{\mathrm{d}A_{\mu\nu}}{\mathrm{d}s} - \Gamma^{\tau}_{\mu\rho}A_{\tau\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\rho}}{\mathrm{d}s} - \Gamma^{\tau}_{\nu\rho}A_{\mu\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\rho}}{\mathrm{d}s} , \qquad (3.38)$$

ou encore

$$\frac{\mathrm{D}A^{\nu}_{\mu}}{\mathrm{D}s} = \frac{\mathrm{d}A^{\nu}_{\mu}}{\mathrm{d}s} + \Gamma^{\nu}_{\sigma\rho}A^{\sigma}_{\mu}\frac{\mathrm{d}x^{\rho}}{\mathrm{d}s} - \Gamma^{\tau}_{\mu\rho}A^{\nu}_{\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\rho}}{\mathrm{d}s} , \qquad (3.39)$$

etc. La dérivée covariante peut se prendre le long d'une trajectoire (dérivée par rapport à s), par rapport au temps propre  $\tau$  (ce qui est essentiellement identique), par rapport à une variable  $\sigma$  paramétrant la trajectoire, ou encore par rapport à l'une ou l'autre des coordonnées  $x^{\rho}$  du système utilisé.

En principe il existe  $4^3 = 64$  coefficients de connexion; mais plusieurs symétries réduisent substantiellement ce nombre. Par exemple, les coefficients de connexion sont symétriques par rapport à leurs indices covariants, i.e.,

$$\Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} = \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} \ . \tag{3.40}$$

Cette propriété ressort de la dérivée covariante de la quadrivitesse par rapport au temps propre:

$$\frac{\mathrm{D}u^{\mu}}{\mathrm{D}\tau} = \frac{\mathrm{d}u^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}u^{\sigma}\underbrace{\frac{\mathrm{d}x^{\rho}}{\mathrm{d}\tau}}_{=u^{\rho}}.$$
(3.41)

Mais on peut aussi vérifier, en développant explicitement la double somme dans l'expression générale de la dérivée covariante, que la partie antisymétrique covariante ne contribue pas.

Le remplacement des dérivées habituelles par leur version covariante permet donc d'exprimer les Lois Physiques formulée en relativité restreinte sous une forme devenant valide en espace-temps courbe. Considérons par exemple la forme relativiste (dans un espace-temps pseudo-Euclidien à la Minkowski) de la seconde Loi de Newton:

$$\frac{\mathrm{d}p^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = f^{\mu} \ , \tag{3.42}$$

Exercice

**Exercice** 

où  $f^{\mu}$  est une force extérieure (électrostatique, Coriolis, etc.) En relativité générale (espacetemps courbe) ceci devient:

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}p^{\mu}}{\mathrm{D}\tau} = f^{\mu}} \tag{3.43}$$

Et voilà la seconde Loi de Newton en relativité générale ! Sauf que cette fois la quadriforce  $f^{\mu}$  ne doit **pas** inclure la gravité !!

Notre prochaine tâche est d'exprimer les coefficients de connexion en termes du tenseur métrique.

#### 3.5 Calcul des coefficients de connexion

Considérons le gradient du tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$ , calculé en utilisant la dérivée covariante:

$$\frac{\mathrm{D}g_{\mu\nu}}{\mathrm{D}x^{\rho}} = \frac{\mathrm{d}g_{\mu\nu}}{\mathrm{d}x^{\rho}} - \Gamma^{\tau}_{\mu\alpha}g_{\tau\nu}\underbrace{\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\rho}}}_{=\delta^{\alpha}_{\rho}} - \Gamma^{\tau}_{\nu\alpha}g_{\mu\tau}\underbrace{\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\rho}}}_{=\delta^{\alpha}_{\rho}}$$

$$= \frac{\mathrm{d}g_{\mu\nu}}{\mathrm{d}x^{\rho}} - \Gamma^{\tau}_{\mu\rho}g_{\tau\nu} - \Gamma^{\tau}_{\nu\rho}g_{\mu\tau} . \qquad (3.44)$$

Si on se place dans un repère en chute libre, comme on l'a vu, il est possible d'annuler localement les dérivées premières de la métrique; l'espace-temps est localement Minkowskien, et donc tous les  $\Gamma = 0$ , l'expression ci-dessus se réduisant alors à:

$$\frac{\mathrm{D}g_{\mu\nu}}{\mathrm{D}x^{\rho}} = 0 \ . \qquad [\mathrm{RCL}]$$

Mais cette équation tensorielle doit être valide dans tous les repères, y compris ceux n'étant pas en chute libre! Donc, en toute généralité, on doit avoir

$$\frac{\mathrm{d}g_{\mu\nu}}{\mathrm{d}x^{\rho}} = \Gamma^{\tau}_{\mu\rho}g_{\tau\nu} + \Gamma^{\tau}_{\nu\rho}g_{\mu\tau} \ . \tag{3.46}$$

Mais comme

$$\Gamma^{\tau}_{\mu\rho}g_{\tau\nu} \equiv \Gamma_{\nu\mu\rho} \qquad \Gamma^{\tau}_{\nu\rho}g_{\mu\tau} \equiv \Gamma_{\mu\nu\rho} , \qquad (3.47)$$

ceci devient:

$$\frac{\mathrm{d}g_{\mu\nu}}{\mathrm{d}x^{\rho}} = \Gamma_{\nu\mu\rho} + \Gamma_{\mu\nu\rho} \;. \tag{3.48}$$

On se rappelle qu'on peut rebaptiser comme on veut les indices libres; donc les deux expressions ci-dessous sont équivalentes à celle ci-dessus:

$$\frac{\mathrm{d}g_{\rho\mu}}{\mathrm{d}x^{\nu}} = \Gamma_{\mu\rho\nu} + \Gamma_{\rho\mu\nu} 
= \Gamma_{\mu\nu\rho} + \Gamma_{\rho\mu\nu}$$
(3.49)

$$\frac{\mathrm{d}g_{\nu\rho}}{\mathrm{d}x^{\mu}} = \Gamma_{\rho\nu\mu} + \Gamma_{\nu\rho\mu} 
= \Gamma_{\rho\mu\nu} + \Gamma_{\nu\mu\rho} ,$$
(3.50)

où les secondes égalités résultent de la symétrie des  $\Gamma$  par rapport à leurs second et troisième indices. Maintenant on effectue l'opération arithmétique suivante: Équation (3.48) – Équation (3.49) + Équation (3.50):

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} = \Gamma_{\nu\mu\rho} \underbrace{+ \Gamma_{\mu\nu\rho} - \Gamma_{\mu\nu\rho}}_{=0!} \underbrace{- \Gamma_{\rho\mu\nu} + \Gamma_{\rho\mu\nu}}_{=0!} + \Gamma_{\nu\mu\rho}$$
$$= 2\Gamma_{\nu\mu\rho} , \qquad (3.51)$$

et donc:

$$\Gamma_{\nu\mu\rho} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} \right)$$
(3.52)

Cette expression est parfois appelée **Théorème fondamental de la géométrie Riemanni**enne. Elle indique que des coefficients de connexion non-nuls exigent (au minimum) que les composantes de la métrique dépendent des coordonnées! Elle indique aussi que les coefficients de connexion sont symétriques par rapport à leur second et troisième indices, i.e., sur échange  $\mu \rightleftharpoons \rho$  dans (3.52).

#### 3.5.1 Surface 2D sphérique

Revenons à la métrique 2D sur la sphère  $(x^1, x^2) \equiv (\theta, \phi)$ :

$$ds^{2} = R^{2}d\theta^{2} + R^{2}\sin^{2}\theta d\phi^{2} \qquad \rightarrow \qquad g_{jk} = \begin{pmatrix} R^{2} & 0\\ 0 & R^{2}\sin^{2}\theta \end{pmatrix}$$
(3.53)

avec R = cst. Ici la seule dérivée non-nulle est

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = 2R^2 \sin \theta \cos \theta , \qquad (3.54)$$

et les seuls coefficients de connexion non nuls sont donc  $\Gamma_{122}$ ,  $\Gamma_{212}$  et  $\Gamma_{221}$ :

$$\Gamma_{122} = -R^2 \sin \theta \cos \theta \tag{3.55}$$

$$\Gamma_{212} = R^2 \sin \theta \cos \theta \tag{3.56}$$

$$\Gamma_{221} = R^2 \sin \theta \cos \theta \tag{3.57}$$

On peut maintenant calculer:

$$\Gamma_{122} = g_{\alpha 1} \Gamma_{22}^{\alpha} \tag{3.58}$$

$$= \underbrace{g_{11}}_{R^2} \Gamma_{22}^1 + \underbrace{g_{21}}_{=0} \Gamma_{22}^2 \to \Gamma_{22}^1 = -\sin\theta\cos\theta , \qquad (3.59)$$

et, similairement

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \cot\theta \ . \tag{3.60}$$

#### 3.5.2 Surface 2D cylindrique

Pour la métrique 2D décrivant une surface cylindrique,

$$ds^{2} = R^{2}d\phi^{2} + dz^{2} \qquad \rightarrow \qquad g_{jk} = \begin{pmatrix} R^{2} & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$
(3.61)

Aucun coefficient de la métrique ne dépend des coordonnées, donc automatiquement tous les  $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$ ; cet espace 2D est bel et bien Euclidien !

#### 3.5.3 Coordonnées polaires dans le plan 2D

Si on choisit d'exprimer les coordonnées d'un point dans le plan Euclidien 2D en coordonnées polaires, comme sur la Figure 3.5, alors on a  $(x^1, x^2) = (r, \theta)$ , et l'intervalle s'écrit:

$$ds^{2} = dr^{2} + r^{2}d\theta^{2} \qquad \rightarrow \qquad g_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & r^{2} \end{pmatrix}$$
(3.62)

Ici la seule dérivée non-nulle est

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = 2r , \qquad (3.63)$$

et les seuls coefficients de connexion non nuls sont donc  $\Gamma_{122}$ ,  $\Gamma_{212}$  et  $\Gamma_{221}$ :

$$\Gamma_{122} = -r$$
,  $\Gamma_{212} = r$ ,  $\Gamma_{221} = r$ . (3.64)

On peut maintenant calculer:

$$\Gamma_{22}^1 = -r$$
,  $\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = 1/r$ . (3.65)

Donc trois coefficients de connexion sont non-nuls, même si la géométrie est Euclidienne; il est instructif de comparer cette situation à celle de la surface cylindrique considérée précédemment. On constate qu'une indépendance de tous les coefficients du tenseur métrique par rapport à toutes les coordonnées est une condition suffisante —mais non-nécessaire— pour garantir une géométrie Euclidienne. Le "non-nécessaire" provient du fait que certaines transformations non-linéaires de coordonnées —par exemple ici le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires— produira un tenseur métrique dépendant explicitement des nouvelles coordonnées (viz. l'éq. (3.62)), et donc des coefficients de connexion non-nuls, et ce même si l'espace demeure Euclidien. Répétons le encore une fois, ça en vaut vraiment la peine:

#### Géométrie $\neq$ Coordonnées !

Notre prochaine tâche est d'obtenir une équation décrivant la "ligne droite" en espace courbe; ce bestiau est appelé *géodésique*.

#### 3.6 L'équation géodésique

Géométriquement parlant, la géodésique est la ligne (courbe ou pas) représentant l'intervalle le plus court entre deux points dans l'espace-temps (courbe ou pas). Dans l'espace Euclidien, les géodésiques sont des segments de droites. Dans l'espace-temps courbe, les géodésiques deviennent des lignes de courbure minimale, soit le plus près qu'on puisse s'approcher d'une "droite". La Figure 3.6 illustre l'idée, toujours pour notre bonne vieille surface 2D sphérique. Ici, géométriquement les géodésiques sont définies par l'intersection de la surface sphérique avec la famille de plans contenant le point central C. Ce sont les grands cercles de la géographie. Le cercle en rouge sur la Figure 3.6 en est un; mais celui en vert non. On notera de surcroit que son rayon,  $R_2$  est plus petit que celui du grand cercle équatorial en rouge. On en conclut que la courbure du cercle rouge est plus petite que celle du cercle vert. Vous pouvez bien essayer de tracer tous les cercles que vous pouvez imaginer sur la surface d'une sphère, vous n'en produirez jamais un qui a une courbure plus faible (i.e., un rayon de courbure plus grand) que celle des grands cercles; ceux-ci sont donc les équivalents sur la sphère des droites dans le plan cartésien; et ce sont les géodésiques de la géométrie 2D sur la surface d'une sphère.

Sur la Fig. 3.6, si on construit un plan contenant les trois points C, E, F (ce qui est toujours possible et unique à moins que les trois points ne soient colinéaires), le grand cercle résultant de son intersection avec la sphère connectera E et F le long de la trajectoire de courbure minimale, qui dévierait "au Nord" du segment EF du cercle vert. Ce sont les trajectoires préférées des lignes aériennes, car elles minimisent les distances parcourues, et dont la consommation de carburant.

Mentionnons finalement que le triangle ABP en rouge sur la Figure 3.1, est un triangle véritable sur la sphère; dans un plan Cartésien un triangle est défini par l'intersection de trois droites; donc, sur la sphère, un triangle véritable est défini par les intersections de trois grands cercles, ce qui est le cas sur la Figure car le segment AB suit l'équateur.

Ha §3.5, 5.4, Ch. 8



Figure 3.6: Deux cercles tracés à la surface d'une sphère. Celui en rouge est un **grand cercle**, dont le centre coincide avec le centre géométrique de la sphère. Ce n'est pas le cas pour le cercle vert, qui se retrouve avec un rayon de courbure  $R_2 < R_1$ , plus petit que celui du cercle rouge. Les grand cercles sont ceux ayant la courbure minimale sur la sphère. La portion du cercle rouge reliant les points A et B est la distance la plus courte entre ces deux points; ce n'est pas le cas de la portion du cercle vert reliant E et F (voir texte).

#### 3.6.1 Dérivation intuitive de l'équation géodésique

Ayant établi que la géodésique est la généralisation à l'espace courbe de la ligne droite de l'espace Euclidien, nous sommes prêt à faire le saut vers la dynamique. Tout comme la ligne droite en dynamique Newtonienne (en géométrie Euclidienne), la géodésique correspond à la trajectoire d'une particule-test en l'absence de force extérieure. Ceci nous donne, quasi-gratos, notre première dérivation "intuitive" de l'équation géodésique, qui correspond donc à la première Loi de Newton en espace courbe:

#### Géodésique = trajectoire d'une particule libre

La suite est d'inspiration toute Newtonienne, et consiste à exprimer ce beau principe en terme de la dérivée *covariante* de la quadri-impulsion; en absence de force extérieure on doit avoir:

$$\frac{\mathrm{D}p^{\mu}}{\mathrm{D}\tau} = \frac{\mathrm{d}p^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}p^{\sigma}\frac{\mathrm{d}x^{\rho}}{\mathrm{d}\tau} = 0 ; \qquad (3.66)$$

mais comme

$$p^{\mu} = m u^{\mu} = m \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} , \qquad (3.67)$$

on arrive à:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} \frac{\mathrm{d}x^{\sigma}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^{\rho}}{\mathrm{d}\tau} = 0$$
(3.68)

Et voilà, c'est l'équation géodésique! C'est un système de 4 équations différentielles ordinaires couplées, qui décrivent la variation des quadricoordonnées  $\mathbf{x}(\tau)$  (plus précisément: l'accélération) d'un mobile en fonctions du temps propre  $\tau$ .

Chose importante à noter: bien que formulée en terme de la quadri-impulsion, la masse n'apparait pas dans l'équation géodésique; et heureusement! Car ceci implique que tous les corps, quelle que soit leur masse, suivent la même courbure, i.e., "tombent" à la même vitesse dans un champ gravitationnel... tant qu'on ne considère que des masses-test. L'accélération gravitationnelle Newtonienne se retrouve donc cachée dans le second terme au membre de gauche de (3.68); elle ne doit surtout pas être rajoutée "à bras" au membre de droite!

Autre point important également à noter: l'équation géodésique est nonlinéaire en  $\mathbf{x}$ , car elle implique un produit de dérivées des  $x^{\alpha}$ . En pratique, ceci compliquera le processus de solution visant à déterminer les trajectoires.

#### 3.6.2 Dérivation formelle de l'équation géodésique

La mécanique classique nous informe que la trajectoire d'un mobile peut formellement se calculer par un principe de moindre action. Cette idée s'applique également en espace courbe, et conduit à une dérivation formelle de l'équation géodésique:

#### Géodésique = extremum du temps propre entre deux points

En mécanique Lagrangienne (classique), les équations du mouvement sont décrites par

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial L}{\partial q^k} \right) = 0 , \qquad k = 1, 2, 3 \tag{3.69}$$

où la variable temps (t) est utilisée pour paramétrer la trajectoire dans l'espace habituel (3D). L'équation de Lagrange résulte de l'application d'un principe d'extrémisation (dit de moindre action) où l'action

$$I = \int L \mathrm{d}t \tag{3.70}$$

est soumise au principe variationnel  $\delta I = 0$ . En relativité (restreinte ou générale), l'équivalent de I (quantité dont l'extremum définit la trajectoire stationnaire) est le temps propre  $\tau$ ; on cherche donc à établir la trajectoire  $\mathbf{x}(\sigma)$  entre deux points A et B dans l'espace-temps (en général courbe) pour lequel la quantité

$$\tau_{AB} = \int_{A}^{B} L \mathrm{d}\sigma \tag{3.71}$$

est un extremum, avec  $\sigma$  paramétrant la trajectoire. Écrivons maintenant la même intégrale directement en terme du temps propre:

$$\tau_{AB} = \int_{A}^{B} d\tau$$
$$= \int_{A}^{B} \frac{d\tau}{d\sigma} d\sigma . \qquad (3.72)$$

Comparant nos deux intégrales on voit immédiatement que

$$L = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma} \ . \tag{3.73}$$

C'est un résultat qui nous sera bien utile plus tard, et qui monte bien qu'un extremum de  $Ld\sigma$ intégré sur une trajectoire dans l'espace-temps est un extremum du temps propre. Maintenant exprimons la seconde version de notre intégrale en terme de l'intervalle ds; comme  $d\tau^2 = -ds^2$ (n'oublions pas c = 1), on a

$$\tau_{AB} = \int_{A}^{B} \left(-g_{\alpha\beta} \mathrm{d}x^{\alpha} \mathrm{d}x^{\beta}\right)^{1/2}$$
$$= \int_{A}^{B} \left(-g_{\alpha\beta} q^{\alpha} q^{\beta}\right)^{1/2} \mathrm{d}\sigma , \qquad (3.74)$$

où dans la seconde égalité on a reparamétré l'intégrand selon l'élément de trajectoire d $\sigma$ : <sup>5</sup>

$$\mathrm{d}x^{\alpha} = \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\sigma \equiv q^{\alpha}\mathrm{d}\sigma \;. \tag{3.75}$$

Comparant nos deux expressions pour  $\tau_{AB}$  on en conclut:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \left(-g_{\alpha\beta}q^{\alpha}q^{\beta}\right)^{1/2} , \qquad \mathbf{q} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\sigma} , \qquad (3.76)$$

en se rappelant bien qu'en général la métrique dépend de la position x.

Le développement mathématique qui suit s'inspire en majeure partie de celui présenté à la section 4.3.3 de l'ouvrage de Barrau & Grain cité au plan de cours, transposé à la convention de signe de Hartle pour l'intervalle métrique, et avec la trajectoire paramétrée selon  $\sigma$  plutôt que  $\tau$ , encore ici suivant Hartle.

L'équation de Lagrange se généralise ici à:

$$\frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \left( \frac{\partial L}{\partial q^{\mu}} \right) = 0 , \qquad \mu = 0, 1, 2, 3 .$$
(3.77)

Calculons

$$\frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(-g_{\alpha\beta}q^{\alpha}q^{\beta}\right)^{-1/2}}_{=1/L} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(-g_{\alpha\beta}q^{\alpha}q^{\beta}\right) \\
= -\frac{1}{2L} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} q^{\alpha}q^{\beta} \qquad (3.78)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q^{\mu}} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(-g_{\alpha\beta}q^{\alpha}q^{\beta}\right)^{-1/2}}_{=1/L} \frac{\partial}{\partial q^{\mu}} \left(-g_{\alpha\beta}q^{\alpha}q^{\beta}\right) ,$$

$$= -\frac{1}{2L} \frac{\partial}{\partial q^{\mu}} \left( g_{\alpha\beta} q^{\alpha} q^{\beta} \right) ,$$

$$= -\frac{1}{2L} \left( g_{\alpha\beta} q^{\alpha} \frac{\partial q^{\beta}}{\partial q^{\mu}} + g_{\alpha\beta} q^{\beta} \frac{\partial q^{\alpha}}{\partial q^{\mu}} \right) ,$$

$$= -\frac{1}{2L} \left( q^{\alpha} \underbrace{g_{\alpha\beta} \delta^{\beta}}_{=g_{\alpha\mu}} + q^{\beta} \underbrace{g_{\alpha\beta} \delta^{\alpha}}_{=g_{\mu\beta}} \right)$$

$$= -\frac{1}{2L} \left( g_{\alpha\mu} q^{\alpha} + g_{\mu\beta} q^{\beta} \right) . \qquad (3.79)$$

**BG §4.3.3** 

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>BG (§4.3.3) reparamètre directement en terme du temps propre  $\tau$  plutôt que  $\sigma$ , une procédure moins générale mais qui leur permet de faire disparaitre la racine carrée en travaillant effectivement avec le carré du Lagrangien; mais celà s'avère ne pas avoir d'impact sur le résultat final. Je préfère quand même la version Hartle.

Maintenant ça se complique un peu:

$$-2L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{\mu}}\right) = \frac{\mathrm{d}g_{\alpha\mu}}{\mathrm{d}\sigma}q^{\alpha} + \frac{\mathrm{d}g_{\mu\beta}}{\mathrm{d}\sigma}q^{\beta} + \underbrace{g_{\alpha\mu}\frac{\mathrm{d}q^{\alpha}}{\mathrm{d}\sigma} + g_{\mu\beta}\frac{\mathrm{d}q^{\beta}}{\mathrm{d}\sigma}}_{=2g_{\mu\alpha}\frac{\mathrm{d}q^{\alpha}}{\mathrm{d}\sigma}}$$
(3.80)

Notons qu'on a rebaptisé ici l'indice de sommation  $\beta \to \alpha$  dans le dernier terme, et utilisé à bon escient la symétrie du tenseur métrique:  $g_{\alpha\mu} = g_{\mu\alpha}$ . Maintenant on écrit

$$\frac{\mathrm{d}g_{\alpha\mu}}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\sigma} \equiv \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} q^{\nu} , \qquad (3.81)$$

et tintin pour l'autre dérivée du tenseur métrique. On arrive ainsi à:

$$-2L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{\mu}}\right) = \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}}q^{\alpha}q^{\nu} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\nu}}q^{\beta}q^{\nu} + 2g_{\mu\alpha}\frac{\mathrm{d}q^{\alpha}}{\mathrm{d}\sigma} \ . \tag{3.82}$$

On reporte les éqs. (3.78) et (3.82) dans l'équation de Lagrange (3.77):

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}q^{\alpha}q^{\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}}q^{\alpha}q^{\nu} - \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\nu}}q^{\beta}q^{\nu} - 2g_{\mu\alpha}\frac{\mathrm{d}q^{\alpha}}{\mathrm{d}\sigma} = 0 \ . \tag{3.83}$$

On peut rebaptiser les indices de sommation,  $\nu \to \beta$  dans le second terme, et  $\nu \to \alpha$  dans le troisième; L'expression ci-dessus devient:

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}q^{\alpha}q^{\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\beta}}q^{\alpha}q^{\beta} - \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\alpha}}q^{\beta}q^{\alpha} - 2g_{\mu\alpha}\frac{\mathrm{d}q^{\alpha}}{\mathrm{d}\sigma} = 0 , \qquad (3.84)$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right)}_{(3.85)} q^{\alpha}q^{\beta} - 2g_{\mu\alpha}\frac{\mathrm{d}q^{\alpha}}{\mathrm{d}\sigma} = 0 , \qquad (3.85)$$

$$= -2\Gamma_{\mu\beta\alpha}$$

où le coefficient de connexion est réapparu dans le portrait! Donc

$$-2\Gamma_{\mu\beta\alpha}q^{\alpha}q^{\beta} - 2g_{\mu\alpha}\frac{\mathrm{d}q^{\alpha}}{\mathrm{d}\sigma} = 0 \ . \tag{3.86}$$

On "monte" un indice sur le coefficient de connexion, i.e.,

$$\Gamma_{\mu\beta\alpha} = g_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha} \ . \tag{3.87}$$

Se rappelant que le tenseur métrique est symétrique et qu'on peut encore rebaptiser librement les indices de sommation,  $\alpha \rightarrow \nu$  dans le second terme de l'équation (3.86), celle-ci devient alors

$$g_{\mu\nu} \left( \Gamma^{\nu}_{\beta\alpha} q^{\alpha} q^{\beta} + \frac{\mathrm{d}q^{\nu}}{\mathrm{d}\sigma} \right) = 0 \ . \tag{3.88}$$

En général ceci ne sera possible que si l'expression entre parenthèses est elle-même égale à zéro; ramenant dans le portrait la définition des  $q^{\alpha}$  (voir l'équation (3.75)), on arrive à:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{\nu}}{\mathrm{d}\sigma^2} + \Gamma^{\nu}_{\beta\alpha} \frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}\sigma} \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\sigma} = 0 ; \qquad (3.89)$$

ce qui est effectivement la même équation géodésique qu'obtenue précédemment (l'éq. (3.68)), car l'équation se reparamétrise sans changement de forme en terme du temps propre  $\tau$  plutôt que la variable de trajectoire  $\sigma$ , et, évidemment, les indices de sommation peuvent être rebaptisés sans changer le sens mathématique de l'expression:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^{\nu}_{\beta\alpha} \frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau} = 0 \ . \tag{3.90}$$

Dans un espace-temps Minskowskien (espace pseudo-Euclidien de courbure nulle), en coordonnées Cartésiennes tous les  $\Gamma \rightarrow 0$  et l'expression ci-dessus se réduit bien à l'expression attendue en relativité restreinte (effectivement la première Loi de Newton, comme on l'a déjà vu).

Exercice

#### 3.7 Lois de conservation et vecteurs de Killing

Solutionner l'équation géodésique, celà implique (en général) solutionner un système de 4 équations différentielles ordinaires qui sont nonlinéaires et couplées; certainement possible, mais pas exactement de la tarte. Une alternative intéressante et parfois utile est de travailler en terme de *premières intégrales* des équations du mouvement.

Une de ces premières intégrales est associée à la normalisation (et invariance!) du quadrivecteur vitesse:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1 \ . \tag{3.91}$$

En ramenant notre définition du produit scalaire en terme du tenseur métrique:

$$g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}\tau} = -1 \tag{3.92}$$

ceci demeure valide dans toutes les géométries et systèmes de coordonnées. C'est la seule première intégrale générale de l'équation géodésique.

Les autres intégrales du mouvement résultent de symétries inhérentes à la dynamique dans l'espace-temps, qui se traduisent en la conservation de certains invariants physiques:

- Énergie conservée  $\leftrightarrow$  invariance sous translation temporelle
- Impulsion conservée  $\leftrightarrow$  invariance sous translation spatiale
- Moment cinétique conservé  $\leftrightarrow$  invariance sous une rotation

#### 3.7.1 Les vecteurs de Killing

En espace-temps courbe, une symétrie est associée à une invariance sous translation le long d'une des coordonnées; autrement dit, une symétrie existe si le tenseur métrique demeure inchangé quand on écrit, e.g.,

$$x^1 = x^1 + K , \qquad K = \text{constante} \tag{3.93}$$

On associe à cette direction dans l'espace-temps un vecteur de Killing, qui ici serait

$$\xi^{\alpha} = (0, 1, 0, 0) . \tag{3.94}$$

L'espace 3D Euclidien a trois vecteurs de Killing, dont les composantes dépendent du choix de systèmes de coordonnées; en coordonnées Cartésiennes:

$$\xi^1 = (1,0,0)$$
  $\xi^2 = (0,1,0)$   $\xi^3 = (0,0,1)$  (3.95)

exprimant l'invariance sous translation de l'intervalle Euclidien

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 . (3.96)$$

Mais si on exprime ces vecteurs en coordonnées polaires, les composantes changeront (voir exemple 8.6 Hartle).

Ha §8.2

Ha Exmp 8.6

#### 3.7.2 Formulation invariante des lois de conservation

Revenons à la formulation Lagrangienne: si la métrique est indépendante d'une coordonnée (disons  $x^1$ ) le Lagrangien L le sera aussi puisque toute la dépendance en  $\mathbf{x}$  y est contenue:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \left(-g_{\alpha\beta}q^{\alpha}q^{\beta}\right)^{1/2} , \qquad (3.97)$$

et donc la composante 1 de notre équation de Lagrange devient:

$$\frac{\partial L}{\partial x^1} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial L}{\partial q^1} \right) = 0 , \qquad (3.98)$$

Ce qui implique que, le long d'une trajectoire paramétrée par une variable  $\sigma$  (ou tout autre paramètre en fait), on doit avoir

$$\frac{\partial L}{\partial q^1} = \text{constante} . \tag{3.99}$$

Calculons cette dérivée (voir section précédente):

$$\frac{\partial L}{\partial q^{1}} = \frac{\partial}{\partial q^{1}} \left( -g_{\alpha\beta} q^{\alpha} q^{\beta} \right)^{1/2} 
= -\frac{1}{2L} \frac{\partial}{\partial q^{1}} (g_{\alpha\beta} q^{\alpha} q^{\beta}) 
= -\frac{1}{2L} g_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial q^{1}} (q^{\alpha} q^{\beta}) 
= -\frac{1}{2L} \left( g_{\alpha\beta} q^{\alpha} \frac{\partial q^{\beta}}{\partial q^{1}} + g_{\alpha\beta} q^{\beta} \frac{\partial q^{\alpha}}{\partial q^{1}} \right) 
= -\frac{1}{2L} \left( g_{\alpha1} q^{\alpha} + g_{1\beta} q^{\beta} \right) 
= -\frac{1}{L} g_{1\beta} q^{\beta} .$$
(3.100)

Mais l'invariance en  $x^1$  implique un vecteur de Killing  $\boldsymbol{\xi} = (0, 1, 0, 0)$ ; donc on peut réécrire notre dérivée comme

$$\frac{\partial L}{\partial q^1} = -\frac{1}{L} g_{\alpha\beta} \xi^{\alpha} q^{\beta}$$
$$\equiv -\frac{1}{L} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{q} . \qquad (3.101)$$

Mais selon la définition des **q**:

$$q^{\alpha} = \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\sigma}$$
$$= \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau}$$
$$\equiv L\mathbf{u} , \qquad (3.102)$$

où la troisième égalité suit de (3.73). Revenant à (3.99), on a donc

$$\frac{\partial L}{\partial q^1} = -\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u} = \text{constante} . \tag{3.103}$$

On en conclut que la quantité

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u} = \text{constante} , \qquad (3.104)$$

ou encore, en terme de la quadri-impulsion:

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{p} = \text{constante} \tag{3.105}$$

C'est ainsi que peuvent s'exprimer, sous forme "intégrée", les Lois de conservation dans l'espacetemps (celle-ci indiquant la conservation de l'impulsion). Car la quantité  $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{p}$  est un invariant!

Donc la stratégie: évaluer  $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{p}$  dans un repère où le calcul est facile, et ensuite invoquer son invariance pour utiliser le résultat dans le repère "observationnel".

On notera aussi que la courbure de l'espace-temps entre dans l'expression des lois de conservations, via le tenseur métrique définissant le produit scalaire !!

Mais comment calculer une géodésique avec ça?

#### 3.7.3 Exemple: géodésique en coordonnées polaires 2D

Considérons l'espace Euclidien 2D, où la position est exprimée en coordonnées polaires  $x^1 \equiv r$ , **Ha E8.6**  $x^2 \equiv \theta$ . L'intervalle est donné ici par

$$dS^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$
 (3.106)

Considérons une trajectoire géodésique paramétrée par la variable S; on peut exprimer les composantes de la vitesse le long de cette trajectoire comme  $\mathbf{u} = d\mathbf{x}/dS$ ; l'expression de l'intervalle devient alors

$$1 = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}S}\right)^2 + r^2 \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}S}\right)^2 \tag{3.107}$$

Ici la métrique ne dépend pas de  $\theta$ ; donc on a un vecteur de Killing (0, 1); et donc la quantité

$$\ell = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u} = g_{AB} \boldsymbol{\xi}^A u^B = r^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}S} , \qquad A, B = 1, 2$$
(3.108)

est conservée. Substituant dans l'expression précédente:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}S} = \left(1 - \frac{\ell^2}{r^2}\right)^{1/2} \,. \tag{3.109}$$

Maintenant si on considère r et  $\theta$  comme étant paramétrés en fonction de S, on a

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}S}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = \frac{\ell}{r^2} \left(1 - \frac{\ell^2}{r^2}\right)^{-1/2} \tag{3.110}$$

Intégrons ceci de la manière habituelle:

$$\int d\theta = \ell \int \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{\ell^2}{r^2} \right)^{-1/2} dr .$$
 (3.111)

Si vous aller fouiner dans vos tables d'intégrales (ou Mathematica, Maple, etc), cette intégrale indéfinie a comme solution

$$\theta - \theta_0 = \arccos(\ell/r) \quad \rightarrow \quad r\cos(\theta - \theta_0) = \ell ,$$
 (3.112)

où  $\theta_0$  est la constante d'intégration. En développant le cosinus et réintroduisant les coordonnées cartésiennes:

$$\underbrace{\underline{r}\cos\theta}_{\equiv x}\cos\theta_0 + \underbrace{\underline{r}\sin\theta}_{\equiv y}\sin\theta_0 = \ell , \qquad (3.113)$$
on arrive à

$$x\cos\theta_0 + y\sin\theta_0 = \ell \qquad \rightarrow \qquad y = \underbrace{-\cot\theta_0}_m x + \underbrace{\frac{\ell}{\sin\theta_0}}_{b}$$
(3.114)

Ce qui est bien la forme y = mx + b, soit l'équation d'une droite dans le plan cartésien. C'est certainement la manière la plus tordue que vous aurez rencontré de calculer une ligne droite; mais c'est exactement comme ça qu'on va calculer des orbites en espace-temps courbe !

#### Fin de la première partie du programme théorique

#### **Bibliographie:**

Ce chapitre est partiellement inspiré par du matériel éparpillé dans le Hartle, avec certaines sections reprenant de près des dévelopements présentés dans Barrau & Grain, tel qu'indiqué en marge. Le chapitre 2 du Hartle est une bonne introduction non-mathématique à l'expression géométrique des lois physiques du mouvement.

La gémoétrie différentielle, discipline permettant (entre autres) de transposer le calcul vectoriel dans les espaces courbes, est un sujet gigantesque. Le chapitre 2 de l'ouvrage de Carroll cité en bibliographie au chapitre 1 offre une introduction relativement concise et plus que suffisante pour les besoins de ce cours. Si vous en voulez vraiment plus, d'un angle plus plus mathématique mais toujours accessible au niveau de ce cours, voir par exemple:

Pressley, A., Elementary Differential Geometry, Springer (2010),

et, résolument plus orienté vers les applications pratiques:

Doolin, B.F., & Martin, C.F., Introduction to Differential Geometry for Engineers, Courier Corp. (2013).

Finalement, l'ouvrage suivant m'a récemment été recommandé; je ne l'ai pas encore lu mais je me risque néanmoins à transmettre la recommandation:

Sternberg, S., Curvature in Mathematics and Physics, Dover (2012).



Karl Schwarzschild (1873–1916)



Arthur Eddington (1882–1944)



Irwin Shapiro (1929–)

# Chapitre 4

# Les tests de la théorie

La première solution mathématique formelle de l'équation du champ de la relativité générale (qui sera introduite au chapitre 5) a été obtenue dès 1915 par l'astrophysicien allemand Karl Schwarzschild (1873–1916). Sa solution spécifie la forme du tenseur métrique décrivant la géométrie d'un espace contenant une masse ponctuelle M. Elle permet ainsi de calculer les "corrections" à la mécanique céleste Newtonienne permettant de décrire de manière plus précise les orbites planétaires, et offrait ainsi la possibilité de "tester" la relativité générale. Une première validation de la théorie fut la reproduction de l'avance du périhélie de la planète Mercure, mais elle ne fut vraiment consacrée après qu'une de ses plus surprenantes prédictions se vit vérifiée: la déviation de la lumière par la gravité du soleil.

Ce chapitre prend comme acquise la solution de Schwarzschild, et déduit les conséquences pour les orbites planétaires et les trajectoires des rayons lumineux, en plus d'introduire d'autres conséquences dont les effets sont mesurables dans le système solaire (délais de propagation de la lumière), ou même sur Terre (dilatation gravitationnelle du temps et redshift gravitationnel). La dérivation formelle de la métrique de Schwarzschild par solution des équations du champ d'Einstein sera présentée au chapitre 8.

# 4.1 La métrique de Schwarzschild

La métrique de Schwarzschild décrit la courbure spatiotemporelle produite à l'extérieur d'une masse M concentrée en un point. On travaille en coordonnées de type sphériques polaires  $(r, \theta, \phi)$ , donc en termes de nos indices et coordonnées:

$$\alpha \to (0, 1, 2, 3) \equiv (ct, r, \theta, \phi) . \tag{4.1}$$

Dans ces coordonnées la métrique de Schwarzschild prend la forme:

$$ds^{2} = -\left(1 - \frac{2GM}{c^{2}r}\right)(cdt)^{2} + \left(1 - \frac{2GM}{c^{2}r}\right)^{-1}dr^{2} + r^{2}(d\theta^{2} + \sin^{2}\theta d\phi^{2})$$
(4.2)

avec le tenseur métrique correspondant donné par:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$
(4.3)

Notons que cette métrique est:

- stationnaire (indépendant du temps),
- sphériquement symétrique.

• associée à une base vectorielle orthogonale, mais pas orthonormale.

La dépendance radiale/latitudinale de  $g_{22}$  et  $g_{33}$  n'implique pas une courbure dans l'espace temps; mais la dépendance en r de  $g_{00}$  et  $g_{11}$  oui !

Plusieurs choses potentiellement bizarres se passent au rayon de Schwarzschild:

$$r_S = \frac{2GM}{c^2} \tag{4.4}$$

Notons en particulier que les  $g_{00}$  et  $g_{11}$  interchangent leurs signes; la coordonnées t devient ainsi "spatiale (radiale)" et la coordonnée r devient "temporelle". C'est en partie pourquoi, à l'époque, Schwarzschild et Oncle Albert considéraient tous les deux seulement la solution "extérieure"  $r > r_s$  comme ayant un sens physique.

Un objet suffisamment compact pour concentrer toute sa masse dans un "volume" sphérique  $r < r_S$  est appellé **trou noir**. On verra déjà pourquoi plus loin dans ce chapitre, et en encore plus de détail à la fin du cours. La surface  $r = r_S$  est appelée l'**horizon** du trou noir; on verra aussi pourquoi d'ici la fin de ce chapitre.

## 4.2 Les unités géométriques

Il est pratique (et conventionnel en relativité générale) de travailler dans un système d'unités dites **géométriques** où G = 1 et c = 1. Puisque

$$\frac{G}{c^2} = 7.425 \times 10^{-28} \,\mathrm{m \, kg^{-1}} \,\,, \tag{4.5}$$

la masse se mesure alors en mètre, selon la conversion:

$$M[m] = \frac{G}{c^2} M[kg] = 7.425 \times 10^{-28} \left(\frac{m}{kg}\right) M[kg] .$$
(4.6)

C'est le système d'unités qui sera utilisé dans tout ce chapitre, sauf mention explicite du contraire. Le Tableau 4.1 liste quelques constantes physiques d'intérêt dans ce système d'unités. Notons également que le rayon de Schwarzschild (4.4) est alors donné par:

Table 4.1: Constantes physiques dans le système $G = c = 1$			
Constante	Valeur SI	Unités géométriques	
c	$2.998 \times 10^8 \mathrm{m \ s^{-1}}$	1	
G	$6.674 \times 10^{-11} \mathrm{m^{3}  kg^{-1}  s^{-2}}$	1	
$\hbar$	$1.055 \times 10^{-34} \mathrm{kg} \mathrm{m}^2 \mathrm{s}^{-1}$	$2.612 \times 10^{-70} \mathrm{m}^2$	
$m_e$	$9.109 \times 10^{-31} \mathrm{kg}$	$6.764 \times 10^{-58} \mathrm{m}$	
$m_p$	$1.673 \times 10^{-27}  \mathrm{kg}$	$1.242 \times 10^{-54} \mathrm{m}$	
$\dot{M_{\odot}}$	$1.988  imes 10^{30}  \mathrm{kg}$	$1.467 \times 10^3 \mathrm{m}$	
$M_\oplus$	$5.972 \times 10^{24}  \mathrm{kg}$	$4.434\times10^{-3}\mathrm{m}$	

$$r_S = 2M . (4.7)$$

puisque  $G/c^2 = 1$ . Il faudrait donc concentrer toute la masse du soleil à l'intérieur d'une sphère de 3 km de rayon, plutôt que son rayon actuel  $R_{\odot} = 700,000$  km, pour en faire un trou noir. Pour la Terre, la sphère équivalente aurait un rayon de 9 millimètres !

Exercice

Nous invoquerons plus loin la limite de diverses expressions mathématiques dans le régime dit de faible gravité. Mais quand on parle du "régime de faible gravité", ça veut dire faible par rapport à quoi ? Si on a une seule masse dans tout l'Univers, la gravité qu'elle produit est-elle forte ou faible ? C'est là une question fort épineuse en général, et on y reviendra ultérieurement. Cependant, dans le cadre de la métrique de Schwarzschild, un critère émerge naturellement de la forme même de la métrique. Il est facile de voir que si, dans (4.2), on a  $r \gg r_S$ , alors la métrique tendra vers la métrique pseudo-Euclidienne de Minkowski (mais exprimée en coordonnées sphériques polaires!). La gravité produite par une masse M sera donc considérée "faible" aux positions  $r \gg r_S$ . Même un photon frôlant la surface du Soleil  $(R_{\odot} = 6.96 \times 10^5 \text{ km}, \text{ versus } r_{S,\odot} \simeq 3 \text{ km})$  est donc confortablement dans le régime  $r \gg r_S$ , et c'est encore plus vrai à l'orbite de Mercure (demi-grand axe orbital  $a = 58 \times 10^6 \text{ km}$ ).

### 4.3 Orbites dans la métrique de Schwarzschild

Afin de simplifier les calculs qui suivent, on se limite à des orbites contenues dans le plan équatorial  $\theta = \pi/2$ ; ceci est justifiable au vu de la symétrie sphérique de la métrique: tous les (hyper)plans passant par l'origine du système de coordonnée (r = 0) sont équivalents. La métrique de Schwarzschild devient alors, en unités géométriques:

$$ds^{2} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^{2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^{2} + r^{2}d\phi^{2} \qquad [\theta = \pi/2, d\theta \equiv 0]$$
(4.8)

#### 4.3.1 Rappel: orbites Newtoniennes

Commençons par un bref rappel sur la théorie Newtonienne des orbites. Travaillant en coordonnées polaires  $[r(t), \phi(t)]$  dans le plan de l'orbite, les équations du mouvement pour une masse m se déplaçant dans le champ gravitationnel d'une masse M (avec  $m \ll M$ ) située à l'origine r = 0 peuvent s'obtenir via la conservation de l'énergie ( $\mathcal{E}$ ) et du moment cinétique  $\ell$ par unité de masse:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \left( r \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \right)^2 \right] - \frac{GM}{r} , \qquad (4.9)$$

$$\ell = r^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \,. \tag{4.10}$$

Dériver les équations orbitales à partir de principes de conservation n'est pas la procédure standard, mais c'est en anticipation de la suite. Les deux expressions ci-dessus peuvent facilement se combiner en une seule en remplaçant  $d\phi/dt$  dans la première par  $\ell/r^2$ , en vertu de la seconde:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \underbrace{\frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}}_{V_{\mathrm{eff}}(r)} .$$
(4.11)

où le potentiel effectif  $V_{\text{eff}}$  inclut la contribution centrifuge. Les orbites liées sont caractérisées par  $\mathcal{E} < 0$ . Si on dérive cette expression par rapport à t on arrive, après un peu d'algèbre, à:

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}r} , \qquad (4.12)$$

ce qui est bien la composante-r de la seconde Loi de Newton en coordonnées polaires. Si on ne s'intéresse qu'à la forme des orbites, on peut aussi écrire

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} , \qquad (4.13)$$

ce qui permet de fusionner les éqs. (4.9)-(4.10) en une seule EDO:

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 = \frac{r^4}{\ell^2} \left[2\mathcal{E} - \frac{1}{r^2}(\ell^2 - 2GMr)\right] \,. \tag{4.14}$$

Il est avantageux d'introduire une nouvelle variable radiale u = 1/r, ce qui transforme cette EDO en:

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{2GMu}{\ell^2} + \frac{2\mathcal{E}}{\ell^2} \ . \tag{4.15}$$

Ce qui est encore méchamment nonlinéaire... mais si on dérive par rapport à  $\phi$ , on arrive à:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = \frac{GM}{\ell^2} , \qquad (4.16)$$

ce qui est maintenant une EDO linéaire inhomogène. Sa solution est de la forme générale:

$$\frac{GM}{\ell^2}(1+\varepsilon\cos\phi) = u \equiv \frac{1}{r} .$$
(4.17)

Ceci décrit une section conique d'excentricité  $0 < \varepsilon < 1$  pour une orbite elliptique ( $\varepsilon = 0$  pour une orbite circulaire,  $\varepsilon = 1$  pour une trajectoire parabolique, et  $\varepsilon > 1$  pour les trajectoires hyperboliques) avec le foyer à r = 0 et  $\phi = 0$  correspondant au périhélie  $(r_p)$ , soit le point de l'orbite le plus rapprochée de la masse M. La Figure 4.1 illustre quelques une de ces orbites dites Képlériennes. On peut montrer, à l'aide de (4.17) que

$$\ell^2 = GMa(1 - \varepsilon^2) , \qquad (4.18)$$

où a est l'axe semi-majeur de l'ellipse:  $2a = r_a + r_p$ ,  $r_a$  étant le point le plus éloigné de l'orbite  $(\phi = \pi)$ , l'aphélie. Voilà!

#### 4.3.2 Les invariants de l'orbite

Revenons à la relativité générale. On considère une masse-test m se déplaçant dans l'espace temps tel que décrit par la métrique de Schwarzschild<sup>1</sup>. Comme la métrique de Schwarzschild ne dépend pas explicitement du temps ni de l'angle azimuthal, on a (au minimum) les deux vecteurs de Killing:

$$\xi^{\alpha} = (1, 0, 0, 0) , \qquad (4.19)$$

$$\eta^{\alpha} = (0, 0, 0, 1) , \qquad (4.20)$$

à partir desquels on peut construire les deux invariants:

$$e = -\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u} = -g_{tt} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} , \qquad (4.21)$$

$$\ell = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{u} = g_{\phi\phi} \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} = r^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} .$$
(4.22)

Le premier invariant exprime la conservation de l'énergie (e), et le second la conservation du moment cinétique  $\ell$ ; comparez aux équivalents Newtoniens (4.9)–(4.10)! On peut ensuite construire un troisième invariant en invoquant la norme de la quadrivitesse  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$  (n'oublions pas que c = 1!):

$$u^{\mu}u_{\mu} = g_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Par masse-test on entend ici une masse  $m \ll M$ , de telle sorte qu'elle ne contribue pas de manière significative à la courbure de l'espace-temps, cette dernière étant entièrement déterminée par la masse centrale M.



Figure 4.1: Exemples d'orbites planétaires en mécanique Newtonienne. Le centre d'attraction (le soleil!) est à la position indiquée par un "+" dans tous les cas, et correspond à un foyer de l'orbite. Pour les orbites liés ( $0 \le \varepsilon < 1$ ), le orbites ont la forme d'ellipses d'excentricité égale à  $\varepsilon$ , et le cube du demi-grand axe a de l'orbite est proportionnel au carré de la période orbitale; c'est la célèbre troisième Loi de Kepler. Les orbites ayant  $\varepsilon \ge 1$  ne sont pas gravitationnellement liées.

$$= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)(u^{t})^{2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}(u^{r})^{2} + r^{2}(u^{\phi})^{2}$$

$$= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^{2} + r^{2}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}\right)^{2}$$

$$= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}e^{2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^{2} + \frac{\ell^{2}}{r^{2}} = -1, \qquad (4.23)$$

où on a utilisé  $\mathbf{u} = d\mathbf{x}/d\tau$  pour passer de la seconde à la troisième égalité, et les éqs. (4.21) et (4.22) pour passer de la troisième à la quatrième. Quelques étapes supplémentaires d'algèbre —incluant la soustraction à prime abord arbitraire de 1 et la division par 2 de chaque coté de l'équation— conduisent à<sup>2</sup>:

$$\underbrace{\frac{e^2 - 1}{2}}_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} \right)^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left( 1 + \frac{\ell^2}{r^2} \right) - 1 \right]}_{V_{\mathrm{eff}}(r)} \,. \tag{4.24}$$

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>La soustraction de 1 ramène le point zéro du potentiel justement à zéro à  $r \to \infty$ ; et la division par deux ramère la dérivée de r à quelque chose ressemblant à une énergie cinétique par unité de masse.

Avec ces dernières définitions on arrive à une expression prenant la même forme que son équivalent Newtonien (4.11): l'énergie totale par unité de masse est égale à la contribution cinétique plus le potentiel gravitationnel (effectif):

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} \right)^2 + V_{\mathrm{eff}}(r) , \qquad (4.25)$$

mais avec ce potentiel effectif maintenant donné par:

$$V_{\rm eff}(r) = -\frac{M}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{M\ell^2}{r^3} .$$
(4.26)

Comparant au potentiel Newtonien dans l'éq. (4.11), on remarque que la seule différence est la présence du dernier terme au RHS, en  $1/r^3$ . Ce terme aura d'importantes conséquences pour la forme des orbites.

Notons finalement qu'établir les équations orbitales en termes des invariants ci-dessus revient à travailler en terme de *premières intégrales* des équations (géodésiques) du mouvement; celles-ci sont nonlinéaires et d'ordre deux dans les dérivées, tandis que (4.21)–(4.23) demeurent nonlinéaires, mais n'impliquent que des dérivées premières.

#### 4.3.3 Propriétés globales des orbites

Avant de se lancer dans le calcul formel des orbites, il est possible —et instructif— d'en déduire certaines caractéristiques globales à partir des résultats déjà en main. On voit déjà, directement à partir de l'éq. (4.26), que

$$\lim_{r \to \infty} V_{\text{eff}}(r) \to -\frac{M}{r} , \qquad V_{\text{eff}}(2M) = -\frac{1}{2} .$$
(4.27)

Le potentiel (4.26) est porté en graphique sur la Figure 4.2, pour  $\ell = 4.3M$  (en bleu). On constate qu'il y existe deux extrema, situés à

$$r(\pm) = \frac{\ell^2}{2M} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - 12\left(\frac{M}{\ell}\right)^2} \right].$$
(4.28)

Ces extrema du potentiel correspondent à des orbites circulaires, la plus éloignée (choix du signe "+") étant stable, mais la plus rapprochée instable. L'existence de ces extrema dépend cependant du rapport  $\ell/M$ , comme le montre la Figure 4.3. Il est facile de montrer qu'ils disparaissent tous les deux si  $\ell/M < \sqrt{12}$ .

Comme avec le potentiel Newtonien, il existe une barrière dite centrifuge (le terme en  $+\ell^2/2r^2$  dans l'éq. (4.26)). Ici cette barrière atteint un maximum où  $V_{\text{eff}} > 0$  seulement si  $\ell/M > 4$ . Ces orbites (ayant  $\ell/M > 4$ ) correspondent aux orbites hyperboliques (non-liées) de la mécanique céleste Newtonienne.

Dans le cas illustré à la Figure 4.2, et tout comme en mécanique céleste Newtonienne, une orbite liée n'est possible que si  $\mathcal{E} < 0$ . C'est là l'équivalent des orbites elliptiques Kepleriennes habituelles. L'**apoastre**  $(r_a)$  est le rayon le plus grand de l'orbite, et le **périsatre**  $(r_p)$  le rayon le plus petit, ce dernier correspondant donc au point de plus petite approche de la masse centrale. À ces deux positions on a  $dr/d\tau = 0$ , et donc l'éq. (4.25) nous produit deux problèmes de recherche de racine décrits par:

$$\mathcal{E} - V_{\text{eff}}(r_a) = 0 , \qquad (4.29)$$

$$\mathcal{E} - V_{\text{eff}}(r_p) = 0 . \tag{4.30}$$

Cependant, et contrairement au cas Newtonien:



Figure 4.2: Comparaison du potentiel effectif associé à la métrique de Schwarzschild (l'éq. (4.26)), versus le potentiel Newtonien classique (voir eq. (4.11)) pour les même valeurs de masse de l'objet central et de moment cinétique pour la trajectoire ( $\ell/M = 4.3$ )



Figure 4.3: Le potentiel effectif associée à la métrique de Schwarzschild, pour différentes valeurs du rapport  $\ell/M$ , telles qu'indiquées. Le point d'inflexion du potentiel permettant une orbite stable apparait à  $\ell/M > \sqrt{12}$ .



Figure 4.4: Évolution du rayon en fonction du temps propre ( $\tau$ , en rouge) et du temps t (en mauve) mesuré par un observateur extérieur (Anne), en fonction du rayon r pour une chute libre radiale ( $\ell = 0$ ) de Buck, tel que décrit par les éqs. (4.32) et (4.33). Le point zéro de la seconde trajectoire a été ajusté pour la faire coincider avec la première au rayon r/2M = 25.

- Les trajectoires d'approche pour les quelles  $\ell/M < \sqrt{12}$  sont toutes capturées par l'objet central;
- Dans le cas  $\ell/M \ge \sqrt{12}$ , toute trajectoire ayant  $\mathcal{E} > \max(V_{\text{eff}})$  est également capturée par l'objet central;

De telles orbites de capture n'existent pas en régime Newtonien, en raison de la barrière centrifuge, sauf pour le cas limite d'une trajectoire exactement radiale ( $\ell = 0$ ).

#### 4.3.4 Orbite radiale: la chute libre

La chute libre radiale d'un observateur/mobile initialement au repos à grande distance du trou noir représente un cas particulier d'orbite, qui revient à poser  $\ell = 0$  dans notre système d'équations (4.21)–(4.24).

Il s'avère possible de calculer une solution *analytique* à ce problème de chute purement radiale. Commencons par calculer la trajectoire en fonction du temps propre  $\tau$ , tel que le mesurerait Buck dans son repère en chute libre vers le trou noir. Pour une chute libre débutant à vitesse nulle à l'infini, on doit poser  $\mathcal{E} = 0$  dans (4.24), ce qui implique e = 1. Il est alors facile d'intégrer cette expression:

$$\tau(r) - \tau_0 = -\frac{4M}{3} \left(\frac{r}{2M}\right)^{3/2} , \qquad (4.31)$$

où  $\tau_0$  est la constante d'intégration, déterminée par les conditions initiales du problème. La trajectoire correspondante est portée en graphique en rouge sur la Figure 4.4. Rien de particulier

ne se produit en traversant le rayon de Schwarzschild, et Buck s'écrapoutille sur le point central peu après, tel qu'anticipé<sup>3</sup>.

Considérons maintenant la trajectoire r(t) de Buck telle qu'observée par Anne, sagement au repos à grande distance, et observant attentivement la chute de son collègue. On doit maintenant calculer:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) , \qquad (4.32)$$

où la seconde égalité résulte de l'utilisation des éqs. (4.24) et (4.21) avec e = 1 et on a conservé la racine négative de  $(dr/d\tau)^2$  puisqu'on s'intéresse à la chute vers le trou noir (dr/dt < 0). L'intégration de cette expression est plus costaude, mais le résultat demeure passablement compact:

$$t(r) - t_0 = -\frac{4M}{3} \left(\frac{r}{2M}\right)^{3/2} - 4M \left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2} + 2M \log \left|\frac{(r/2M)^{1/2} + 1}{(r/2M)^{1/2} - 1}\right| , \qquad (4.33)$$

où la constante d'intégration  $t_0$  est encore une fois déterminée par la condition initiale. La courbe mauve sur la Figure 4.4 montre cette trajectoire de Buck telle qu'observée par Anne. La chute apparait initialement un peu plus lente que mesurée dans le repère en chute libre, mais l'aspect remarquable est qu'à l'approche de  $r_S$ , du point de vue d'Anne, Buck n'atteint jamais  $r = r_S !$  (ou, plus précisément, le fait dans un temps infini). Autrement dit,

$$\lim_{r \to 2M} t(r) \to \infty \tag{4.34}$$

en raison de la divergence du troisième terme au membre de droite de (4.33). On est rendu très loin de la mécanique céleste Newtonienne!

#### 4.3.5 Calcul numérique des orbites en toute généralité

On a fait pas mal de chemin à l'aide de nos invariants, mais le calcul de trajectoires orbitales en toute généralité s'effectue par solution numérique de l'équation géodésique. Les étapes sont les suivantes:

- 1. Étant donné la métrique, déterminer quelles dérivées partielles de la métrique sont nonnulles, et les calculer;
- 2. Calculer tous les coefficients de connexion non-nuls;
- 3. Développer les 4 composantes de l'équation géodésique
- 4. Construire un système d'équation différentielle ordinaires (EDOs) d'ordre 1 dans la dérivée par rapport au paramètre de la trajectoire;
- 5. Intégrer numériquement ce système d'EDOs à partir d'une condition initiale donnée.

Les étapes (1)-(3) sont le sujet d'un des problèmes de la seconde série d'exercices! Le résultat à la fin de l'étape (3) est:

$$(t) \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \left( h \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma} \right) = 0 \longrightarrow h \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma} = e$$

$$(4.35)$$

$$(\phi) \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \left( r^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\sigma} \right) = 0 \longrightarrow r^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\sigma} = \ell$$

$$(4.36)$$

$$(r) \rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\sigma^2} - \frac{h'}{2h} \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 - rh \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 + \frac{hh'}{2} \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 = 0$$
(4.37)

Exercice

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>En fait, un peu avant d'arriver à r = 0, Buck se ferait spaghettifier par la force de marée. On y reviendra au prochain chapitre.

avec ici

$$h(r) = 1 - \frac{2M}{r}$$
,  $h' = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r}$ . (4.38)

Ci-dessus on a déjà pu intégrer une fois et produire ainsi des énoncés de conservation, pour l'énergie (e) dans le cas de la composante-t, et pour le moment cinétique ( $\ell$ ) dans le cas de la composante  $\phi$ . Ce sont les mêmes invariants qu'obtenus précédemment via les vecteurs de Killing. Notre système d'EDOs devient donc:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{e}{h}, \qquad (4.39)$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{\ell}{r^2} , \qquad (4.40)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\sigma^2} = \frac{h'}{2h} \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 + \frac{h\ell^2}{r^3} - \frac{h'e^2}{2h} . \tag{4.41}$$

Il ne s'agit plus que d'intégrer numériquement ce système pour  $t(\sigma)$ ,  $\phi(\sigma)$ , et  $r(\sigma)$ . Il est avantageux d'introduire une quatrième variable "secondaire":

$$w = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma} , \qquad (4.42)$$

l'équation pour  $r(\sigma)$  devenant ainsi:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{h'}{2h}w^2 + \frac{h\ell^2}{r^3} - \frac{h'e^2}{2h} .$$
(4.43)

Le système de quatre équations différentielles couplées nonlinéaires d'ordre 1 défini par (4.39), (4.40), (4.42) et (4.43) peut se réécrire sous forme synthétique comme:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \begin{pmatrix} t\\ \phi\\ r\\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e/h\\ \ell/r^2\\ w\\ h'w^2/(2h) + h\ell^2/r^3 - h'e^2/(2h) \end{pmatrix}$$
(4.44)

C'est un système de la forme générale:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}\sigma} = g(\mathbf{u},\sigma) , \qquad \mathbf{u} = (t,\phi,r,w)$$
(4.45)

qui se solutionne très bien avec la méthode de Runge-Kutta, par exemple. Le code Python listé à la Figure 4.5 en offre une implémentation possible, avec pas adaptif de surcroit. La validation de ce code peut se faire en comparant les solutions qu'il produit pour une chute radiale à la solution analytique, soit les éqs. (4.32) et (4.33).

Le code de la Fig. 4.5 implémente une condition initiale (ligne 37) correspondant à:

$$t(0) = 0$$
,  $\phi(0) = 0$ ,  $r(0) = 22.2$ ,  $w(0) = 0$ . (4.46)

Ceci correspond à un objet situé à l'apoastre d'une orbite elliptique liée  $(M = 1, \ell = 4.3M, \mathcal{E} = -0.02798 \rightarrow e = 0.9716$ ; ces paramètres sont fixés en début de code, lignes 4–6). La Figure 4.6 montre quelques révolutions de cette orbite. Les points et segments radiaux colorés indiquent le périastre associé à chaque révolution successive, soit le point où la distance radiale de la masse centrale est minimale. Les segments colorés rouge et vert de l'orbite tracent le retour au périastre pour deux orbites successives. On constate immédiatement que ce retour requiert plus que  $2\pi$  en rotation azimutale; i.e., l'orbite montre une précession du périastre  $\delta \phi_{\rm prec}$ , substantielle ici car l'orbite est fortement relativiste, dans le sens qu'elle s'approche à des distances devenant comparables à  $r_S$  (= 2M en unités géométriques).

La Figure 4.7 montre une orbite de capture ayant  $\ell \neq 0$  (rouge), et une orbite non liée  $(\mathcal{E} > 0)$ . La première n'a pas d'équivalent en mécanique céleste Newtonienne, ni la très forte déviation de la seconde. En version Newtonienne, la déviation maximale est de  $\delta \phi_{\text{dev}} = \pi$  pour une orbite parabolique  $(\mathcal{E} = 0)$ , et  $< \pi$  pour les orbites hyperboliques  $(\mathcal{E} > 0)$ .

```
# SOLUTION DE L'EQUATION GEODESIQUE: ORBITES DANS LA METRIQUE DE SCHWARZSCHILD
  1
      import numpy as np
  2
      # VARIABLES GLOBALES
 3
      M=1.0
                                                                                # Masse centrale (unites geometriques)
  4
      e=0.9716
                                                                                # energie; voir Eq (4.35)
 5
      ell=4.3*M
                                                                               # moment cinetique; voir Eq (4.36)
 6
      #-----
 7
      # FONCTION CALCULANT LE COTE DROIT DU SYSTEME DE QUATRE EDO:
 8
      # variable dependantes: u[0]=t, u[1]=phi, u[2]=r, u[3]=dr/dtau
 9
10 def g(s0,u):
          h=1-2*M/u[2]
                                                                                 # Eq (4.38)
11
^{12}
           hprime=2*M/u[2]**2
                                                                                 # Eq (4.38)
          gt=e/h
                                                                                 # RHS Eq (4.39)
13
      gp=ell/u[2]**2
                                                                                 # RHS Eq (4.40)
14
                                                                                # RHS Eq (4.41)
         gr=u[3]
15
16
           gw=hprime/(2.*h)*u[3]**2+h*ell**2/u[2]**3-hprime*e**2/(2.*h) # RHS Eq (4.43)
           eval=np.array([gt,gp,gr,gw])  # vecteur RHS (pentes)
17
           return eval
18
19 # END FONCTION G
20 #-----
      # FONCTION CALCULANT UN SEUL PAS DE RUNGE-KUTTA D'ORDRE 4 (voir PHY-3075)
21
     def rk(h,s0,uu):
22
         g1=g(s0,uu)
^{23}
         g2=g(s0+h/2.,uu+h*g1/2.)
^{24}
         g3=g(s0+h/2.,uu+h*g2/2.)
25
           g4=g(s0+h,uu+h*g3)
26
27
           unew=uu+h/6.*(g1+2.*g2+2.*g3+g4)
28
           return unew
29 # END FONCTION RK
      #-----
30
31
     # MAIN
32 nMax=10000
                                                                                # nombre maximal de pas de temps
33 eps =1.e-5
                                                                                # tolerance
    eps =1.e 0
sfin=1000.
    # duree d ====0
s=np.zeros(nMax)    # tableau sigma
u=np.zeros([nMax,4])    # tableau solution
u[0,:]=np.array([0.,0.,22.2,0.])    # condition initiale (au periastre)
    # compteur iterations temporelles
    # compteur iterations
    # compte
34 sfin=1000.
35
36
37
38 nn=0
39
      while (s[nn] < sfin) and (nn < nMax): # boucle temporelle
40
                                                                                # pas pleine longueur
41
42
^{43}
                                                                               # mesure de l'erreur
44
                                                                                # on rejette
45
             step/=1.5
46
                                                                               # reduction du pas
          else:
                                                                               # on accepte le pas
47
^{48}
              nn=nn+1
                                                                              # compteur des pas de temps
                s[nn]=s[nn-1]+step
                                                                                # le nouveau pas de temps
49
                                                                               # la solution a ce pas
50
                  u[nn,:]=u2[:]
                if delta <= eps/2.: step*=1.5  # on augmente le pas
51
           print("{0}, sigma {1}, r {2}, phi {3}.".format(nn,s[nn],u[nn,2],u[nn,1]))
52
53 # fin boucle temporelle
      # END MAIN
54
```

Figure 4.5: Code Python pour l'intégration de l'équation géodésique dans la métrique de Schwarzschild, par Runge-Kutta d'ordre 4 avec pas adaptif.



Figure 4.6: Une orbite liée dans la métrique de Schwarzschild. Le sens orbital est antihoraire, et les points et tirets colorés indiquent le périastre, soit le point de l'orbite le plus rapproché de la masse centrale, pour deux orbites complètes, en rouge et vert respectivement. Le retour au périastre demande ici plus de  $2\pi$  en azimuth, indiquant une précession  $\delta\phi_{\rm prec}$  (ici substantielle,  $\delta\phi_{\rm prec} \simeq 0.6\pi$ ) du périastre dans la même direction que celle du mouvement orbital. Les deux cercles en pointillés indiquent l'intervalle en rayon dans lequel est contenue l'orbite, et le cercle gris l'horizon du trou noir. Solution numérique calculée à l'aide d'une méthode Runge-Kutta d'ordre 4 avec pas adaptif, comme dans le code Python de la Fig. 4.5.

#### 4.3.6 Trajectoire des photons

D'après le principe d'équivalence, un photon devrait suivre les mêmes géodésiques qu'une masse m sujette à aucune force extérieure. C'est le cas, mais on doit composer avec une complication technique: les photons se déplacent sur une trajectoire où  $ds^2 \equiv 0$ , et donc le temps propre  $\tau$  ne peut être utilisé pour paramétrer la trajectoire.

Considérons la paramétrisation:

$$dx^{\alpha} = u^{\alpha} d\sigma \qquad u^{\alpha} \equiv \frac{dx^{\alpha}}{d\sigma} .$$
 (4.47)

Comme il est toujours possible de se ramener **localement** à la métrique de Minkowski, on peut en déduire que même en espace courbe, on doit avoir  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ , comme en relativité restreinte; d'où:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \equiv g_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} = 0 \ . \tag{4.48}$$

La construction des invariants  $-\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u}$  et  $\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{u}$  conduit encore une fois à deux quantités conservées,



Figure 4.7: Une orbite de capture (rouge) et non-liée (vert) dans la métrique de Schwarzschild. En gravité Newtonienne, la première est impossible, et la seconde devrait être de forme hyperbolique. Solutions numériques calculées à l'aide d'une méthode Runge-Kutta d'ordre 4 avec pas adaptif.

soit l'énergie (e) et le moment cinétique  $(\ell)$  du photon:

$$e = -\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma} , \qquad (4.49)$$

$$\ell = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{u} = r^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\sigma} . \tag{4.50}$$

Le troisième invariant se calcule maintenant à partir de  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$  (plutôt que = -1):

$$g_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)e^{2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}\right)^{2} + \frac{\ell^{2}}{r^{2}} = 0.$$
(4.51)

On peut réécrire ça sous la forme:

$$\frac{1}{b^2} = \frac{1}{\ell^2} \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 + W_{\mathrm{eff}}(r) , \qquad (4.52)$$

avec

$$b^2 = \frac{\ell^2}{e^2}$$
(4.53)



Figure 4.8: Potentiel effectif pour les trajectoires de photons dans la métrique de Schwarzschild. Il n'existe aucune orbite liée stable pour les photons dans cette métrique, mais une orbite circulaire instable est possible à r/M = 3 (voir texte).

 $\operatorname{et}$ 

$$W_{\rm eff}(r) = \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \ . \tag{4.54}$$

La constante b est ici le **paramètre d'impact** du faisceau lumineux. C'est la longueur du segment de droite originant à r = 0 et rejoignant perpendiculairement le prolongement rectiligne d'un faisceau lumineux approchant l'objet central de l'infini. Attention, b n'est pas égal au périastre de l'orbite!

Comme  $\ell$  est conservé sur la trajectoire, il peut être "absorbé" dans la variable  $\sigma$  paramétrant la trajectoire:

$$\frac{1}{\ell^2} \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 \equiv \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}(\ell\sigma)}\right)^2 \,. \tag{4.55}$$

La forme de la trajectoire ne dépend donc que de la valeur de  $b^2$ , autrement dit du rapport  $\ell/e$ , contrairement à la trajectoire d'une masse test qui elle était définie par des valeurs distinctes de e et  $\ell$ . Comment peut-on ainsi perdre un degré de liberté, si les masses-test et les photons doivent tous suivre une géodésique déterminée entièrement par la courbure de l'espace-temps ? C'est en fait normal, avec le photon, la vitesse est fixe et = c! on perd ainsi un degré de liberté, par rapport à la trajectoire d'une masse-test. Les géodésiques "lumière" représentent donc un sous-ensemble limite très particulièr des géodésiques accessibles en général par des particules massives dans l'espace-temps courbe.

La Figure 4.8 trace le potentiel effectif donné par l'éq. (4.54). Comparant aux Figs. 4.2 et 4.3, on voit déjà qu'il n'y a aucune orbite liée possible ici, exception faite d'une orbite circulaire à r/M = 3, mais cette dernière est clairement instable.

Il est relativement simple de modifier le code Python de la Figure 4.5 de manière à calculer la trajectoire d'un faisceau lumineux. Les modifications principales se limitent à la fonction g(s0,u) (lignes 8–19). Il faut partir des équations (4.49)–(4.51) pour coder les cotés droits



Figure 4.9: Déviation de la lumière dans la métrique de Schwarzschild. Il n'existe aucune orbite liée stable pour les photons dans cette métrique. Un observateur loin en haut à gauche détectant le rayon bleu foncé en déduirait une position de la source dévié d'un angle  $\Delta \phi_{\text{dev}}$  par rapport à la position réelle de la source.

du système (4.44), soit les variables locales gt, gp et gw, après avoir encore une fois introduit la variable secondaire  $w = dr/d\sigma$ . Il faut aussi bien réfléchir à la formulation de la condition initiale, considérant que les trajectoires sont maintenant complètement déterminées par un seul paramètre, soit le rapport  $b^2 = \ell^2/e^2$ . Je vous laisse tout ça en **Exercice!!** (série 2).

La Figure 4.9 montre quelques trajectoires de photons, tous émanant du même point (à droite) mais selon des paramètres d'impact *b* différents. Ces trajectoires ont été calculées avec la même méthode Runge-Kutta à pas adaptif que pour les Figs. 4.6–4.7. On notera que tout faisceau lumineux s'approchant à moins de r/M = 3 de l'objet central est capturé. Pour les trajectoires non-capturées, le "périastre"  $r_p$  de la trajectoire correspond à la valeur  $r_p$  telle que:

$$\frac{1}{b^2} = W_{\text{eff}}(r_p) \ .$$
 (4.56)

Les périastres sont indiqués sur la Figure 4.9 par des points colorés reliés à l'objet central. Il est clair ici que dans tous les cas, en raison de la déviation des faisceaux, le périastre est toujours plus petit que le paramètre d'impact, i.e.,  $r_p < b$ .

Imaginons maintenant être un observateur situé au point d'émission des rayons lumineux à droite, et inversons la direction de ces derniers; considérant la trajectoire tracée en noir, on en conclut que la déviation de la lumière par la masse centrale permet de voir **derrière** l'objet.

La Figure 4.10 montre un premier exemple de cet effet, ici dans le cas d'une étoile à neu-

90



Figure 4.10: Surface d'une étoile à neutron de masse  $M_* = 1 \text{ km}$  et rayon  $R_* = 4M$ , vue d'une distance  $\gg R_*$  le long d'une ligne de visée tangente à son plan équatorial. Le quadrillage est tracé à intervalles constants de 30 degrés en latitude et longitude. Source: Wikipedia commons, https://en.wikipedia.org/wiki/File:Neutronstar\_2Rs.svg

tron de masse  $M = 1 \,\mathrm{km}$  (en unités géométriques) et rayon  $R_* = 4$ , soit deux fois le rayon de Schwarzschild correspondant à sa masse<sup>4</sup>. On a peint ici sur sa surface un quadrillage d'intervalles constants de 30 degrés en latitude et longitude, ce qui donne 18 "cases" par hémisphère. La Figure montre la surface de cette étoile à neutron, telle que vue par un observateur à l'infini le long d'une ligne de visée traversant le plan équatorial. Ici l'axe polaire est donc perpendiculaire à cette ligne de visée, mais la déviation de la lumière permet de voir les deux groupes de 12 cases entourant les pôles N et S; nettement plus de la moitié de la surface de l'étoile est ici visible!

Une version encore plus extrême de cette déviation de la lumière est aussi à l'origine d'un des "effets spéciaux" à prime abord bizarre, mais en fait quantitativement correct du point de vue de la relativité générale, dans le film Interstellar. À l'approche du trou noir "Gargantua", l'équipage de l'*Endurance* est confrontée à l'image reproduite au haut de la Figure 4.11. On y voit (en fait on n'y voit pas) le trou noir même, mais on voit son disque d'accrétion, très mince et vu ici presque par la tranche. Ce disque est fortement lumineux, due au chauffage induit par la très forte dissipation visqueuse des écoulements fluides dans le disque même. La "surprise" est ici la présence des deux larges bandes lumineuses en forme de demi-cercles entourant le trou noir en haut en en bas. Ces bandes représentent le dessus (en haut) et le dessous (en bas) de la partie arrière du disque d'accrétion, rendue visible par la très forte déviation de la lumière à proximité du trou noir, comme pour la trajectoire tracée en noir sur la Fig. 4.9. L'image du bas montre un modèle coloré du disque, permettant de mieux saisir sa déformation apparente.

Revenant aux trajectoire de photons dans la métrique de Schwarzschild, on peut aussi montrer que pour tout faisceau lumineux émis de quelque part dans l'intervalle 2  $\leq r/M \leq$  3, les Exercice trajectoires sortantes sont restreintes à un "cône" centré sur la trajectoire radiale sortante, l'ouverture angulaire de ce cône tendant vers zéro dans la limite  $r/M \rightarrow 2$ .

Ha Exmp 9.2

 $<sup>^4</sup>$ Un bon petit exercice d'acclimatation aux unités géométriques consiste à calculer la densité moyenne de



Figure 4.11: Le trou noir Gargantua, objet central (!) du film Interstellar (dir. C. Nolan). Les deux arcs lumineux au dessus et en dessous du trou noir sont des images déformées de la partie arrière de son disque d'accrétion, visible de l'avant suite à la très forte déviation de la lumière causée par le trou noir. L'image du bas présente le modèle du disque ayant servi à générer l'image du dessus, tirée du film. L'asymétrie haut/bas provient du fait que le disque est légèrement incliné par rapport à la ligne de visée. Source: Double Negative Ltd.

# 4.4 Le redshift gravitationnel

La courbure de l'espace ne fait pas que dévier les rayons lumineux, elle en change également la **Ha §9.2** longueur d'onde. C'est le **redshift gravitationnel**<sup>5</sup>. Celà peut être vu comme une inévitable conséquence de la conservation de l'énergie.

Répétons ici une expérience en pensée ("Gedanken experiment") proposée par Oncle Albert lui-même pour démontrer l'incontournable nécessité du redshift gravitationnel. Une masse mchute du haut d'une tour de hauteur h (voir Figure 4.12); une fois arrivée en bas, un dispositif transforme toute l'énergie (masse au repos plus l'énergie cinétique acquise aux dépends de l'énergie potentielle gravitationelle) en un photon, renvoyé vers le haut et recapturé en haut de la tour, pour être reconverti en une masse m ( $E = mc^2$  après tout). La situation donc est la suivante:

- L'énergie initiale du système quand la masse est au haut de la tour:  $E = mc^2$
- L'énergie du système quand la masse est capturée au bas de la tour:  $E = mc^2 + mgh$
- Et donc l'énergie du photon renvoyé vers le haut: de la tour:  $E = mc^2 + mgh$  également
- Et donc, la nouvelle masse m' produite au haut de la tour:  $m' = m(1 + gh/c^2) > m$
- Et on recommence un autre cycle, et un autre, et un autre, chaque fois augmentant la masse (et donc l'énergie) par un facteur  $1 + gh/c^2$ .
- Après n de ces cycles, l'énergie sera égale à  $(mc^2) \times (1 + gh/c^2)^n$ ; ceci croit donc inexorablement à mesure que n augmente...

On a ici un bel exemple de **mouvement perpétuel**, soit un système qui (en apparence) produit de l'énergie gratos...

La seule façon de s'en sortir est de conclure que le photon, dans son ascension de la base de la tour à son sommet, perd la même quantité d'énergie que la masse en a gagné en étant accélérée dans le champ gravitationnel; comme pour un photon  $E = \hbar \omega$ , la fréquence du photon doit diminuer quand ce dernier se déplace contre le champ gravitationnel. Cet effet de redshift gravitationnel a été mesuré, un peu comme sur la Figure 4.12, en détectant le décalage en fréquence d'un photon gamma voyageant entre le haut et le bas d'une tour de 22.5 mètres de haut. Voir la §6.3 et Box 6.1 du Hartle pour plus de détails.

Revenons à ce pôvre Buck chutant vers le trou noir; avant d'atteindre l'horizon, Buck active sa fusée et parvient à freiner sa chute et se maintenir au repos à une distance  $R \ (> 2M)$  du centre du trou noir. Anticipant manquer de carburant assez rapidement, il envoie un signal de détresse à Anne, également au repos mais sagement située à  $r \gg R$ .

L'énergie d'un photon mesurée par un observateur dans un repère en mouvement est donné par (voir Hartle, exemple 5.8)

$$E = \hbar\omega = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_{\rm obs} \ . \tag{4.57}$$

avec, pour la lumière,  $\mathbf{p} = (\hbar\omega, \hbar \mathbf{k})$ . Je vous laisse vérifier que dans l'espace-temps Minkowskien, cette expression conduit bien à la formule habituelle pour le décalage Doppler. Ici, si Buck est au repos  $(u^1 = u^2 = u^3 = 0)$  alors la condition  $\mathbf{u}_{obs} \cdot \mathbf{u}_{obs} = -1$  se réduit à

$$g_{00}(u_{\rm obs}^0)^2 = -1 \qquad \to \qquad u_{\rm obs}^0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}$$
(4.58)

cette étoile à neutron; à essayer!

 $<sup>^5{\</sup>rm Je}$  me permets ici et dans tout ce qui suit l'utilisation du terme anglophone "redshift", plus compact que "décalage-vers-le-rouge".



Figure 4.12: Ma version de l'expérience en pensée ("Gedanken experiment") de l'Oncle Albert, démontrant le redshift gravitationnel de la lumière. Buck (en bas) at trape une masse m relâchée du haut de la tour, et la transforme à l'ai de son Buckotron<sup>TM</sup> en un photon d'énergie  $h\nu = mc^2 + mgh$ , qui est renvoyé vers le haut de la tour, où Anne le reconvertit en une masse  $m = h\nu/c^2 = m(1+gh/c^2)$  à l'ai de son Annatomiseur v2.05. Cette masse est ensuite relâchée du haut de la tour et le cycle recommence (voir texte).

On peut donc réécrire le quadrivecteur vitesse sous la forme:

$$\mathbf{u}_{\rm obs} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \boldsymbol{\xi} , \qquad (4.59)$$

où  $\boldsymbol{\xi} \equiv (1,0,0,0)$  est notre premier vecteur de Killing. Substituant ceci dans l'éq. (4.57), on en concluerait qu'à la position (précaire) de Buck,

$$\hbar\omega = \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2} \left(-\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{p}\right)_R \,, \tag{4.60}$$

et dans la limite où Anne est située à  $r \to \infty$ , et également au repos, on écrirait similairement

$$\hbar\omega_{\infty} = (-\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{p})_{\infty} \ . \tag{4.61}$$

Et voici la justification de toute cette gymnastique: dans la métrique de Schwarzschild,  $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{p}$  est un produit scalaire, et donc un invariant, soit une quantité conservée le long d'une géodésique! Donc on doit avoir:  $(-\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{p})_R = (-\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{p})_{\infty}$ . On en tire immédiatement que

$$\hbar\omega_{\infty} = \hbar\omega \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} \tag{4.62}$$

Comme la quantité entre parenthère au RHS est toujours < 1, la fréquence des photons détectés à  $r \to \infty$  est plus petite qu'à r = R, et dans la limite ou Buck approche le rayon de Schwarzschild  $r_S = 2M$ , la fréquence de la lumière détectée par Anne tend vers zéro, quelle que soit la fréquence émise (frénétiquement) par Buck. Pôvre Buck...

# 4.5 La dilatation gravitationnelle du temps

Un corollaire du redshift gravitationnel est que les horloges tickent plus lentement dans un champ gravitationnel. Revenons à notre pôvre Buck coincé au repos à distance  $r_B$  (>  $r_S$ ) du centre du trou noir. À cadence fixe, il envoie un signal lumineux vers Anne, au repos à  $r_A \gg r_B$ ; l'intervalle entre deux signaux successifs est  $\Delta t$  mesuré selon la coordonnée t de la métrique de Schwarzschild. La Figure 4.13 montre un diagramme espace-temps de la situation; Les traits en tirets bleus représentent la trajectoire des signaux, chacun étant une géodésique.

Une trajectoire de photon est une géodésique de mesure nulle, dans le sens que  $ds^2 = 0$ . Pour une trajectoire radiale ( $d\theta = d\phi = 0$ ), l'intervalle invariant dans la métrique de Schwarzschild devient:

$$ds^{2} = 0 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^{2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^{2}, \qquad (4.63)$$

d'où on tire immédiatement une équation différentielle pour la trajectoire dans l'hyperplan [t, r] de l'espace-temps:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} , \qquad (4.64)$$

le signe "+" étant retenu pour les géodésique sortantes (r augmente avec t). Les deux traits en tirets sur la Figure 4.13 sont des solutions de cette équation, pour deux conditions initiales identiques en  $r (= r_B)$ , mais différant de  $\Delta t$  en t.

On notera sur la Figure 4.13 la variation de la "pente" de la trajectoire des photons; cette pente (donnée directement par le côté droit de l'éq. (4.64)) correspond à l'angle ouverture du cône de lumière, tel que tracé en gris pour quelques positions radiales le long de la trajectoire supérieure; dans l'espace pseudo-Euclidien de Minkowski, ce cône a toujours une ouverture angulaire fixe, qui correspondrait à une pente unitaire dans le diagramme espace-temps de la Fig. 4.13; à la



Figure 4.13: Diagramme espace-temps des trajectoires de Buck (rouge) et Anne (vert), tous les deux au repos aux positions  $r = r_B = 3M$  et  $r = r_A = 10M$ , respectivement. Les signaux lumineux (tirets bleus) envoyés par Buck à cadence fixe sont reçus à cette même cadence en terme de la coordonnée t de Schwarzschild, mais l'intervalle de temps propre correspondant est différent dans les deux cas,  $\Delta \tau_A \neq \Delta \tau_B$ , puisque  $g_{00}$  est fonction de r dans la métrique de Schwarzschild (voir texte).

position d'Anne  $(r_A)$  on est en effet pas loin de cette pente unitaire, mais à la position de Buck la pente est beaucoup plus raide, i.e., le cône de lumière est fortement refermé par rapport à son ouverture habituelle dans l'espace pseudo-Euclidien de la relativité restreinte.

Ici Buck est situé à  $r_B = 3M$  en unités géométriques, soit 1.5 rayons de Schwarzschild ( $r_S = 2M$ ). Il est facile de voir, à partir de l'éq. (4.64), que

$$\lim_{r \to 2M} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \lim_{r \to 2M} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \to 0 , \qquad (4.65)$$

Le cône de lumière est alors complètement refermé, et donc rien —lumière ou masse— ne peut plus s'échapper radialement pour  $r \leq r_s$ . Voilà pourquoi on appelle ça un trou noir !

Mais revenons à Buck et Anne. On voir déjà sur la Figure 4.13 que les deux géodésiques ont la même forme, i.e., celle du dessous est identique à celle du bas sous translation par  $\Delta t$ le long de la direction ct. Cette invariance reflète le fait que la métrique de Schwarzschild est indépendante du temps. Ceci implique donc que la réception des signaux à  $r = r_A$  se fait à la même cadence  $\Delta t$  que l'émission à  $r_B$ , tant que t est mesuré selon la coordonnée temporelle de la métrique de Schwarzschild. Cependant, et c'est crucial ici, les intervalles de temps propre correspondant ne le seront pas, car la composante "temporelle"  $g_{00}$  de la métrique de Schwarschild dépend de la coordonnée r !

Calculons l'intervalle de temps propre  $\Delta \tau_B$  entre deux signaux successifs émis à  $r_B$ , et l'intervalle  $\Delta \tau_A$  entre leur réception à  $r_A$ . Puisque Buck et Anne sont tous les deux au repos, on a dans les deux cas

$$d\tau^2 = -ds^2$$
,  $ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2$ , (4.66)

d'où

$$\Delta \tau_A = \left(1 - \frac{2M}{r_A}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \;, \tag{4.67}$$

$$\Delta \tau_B = \left(1 - \frac{2M}{r_B}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \;. \tag{4.68}$$

et donc

$$\frac{\Delta \tau_A}{\Delta \tau_B} = \sqrt{\frac{1 - 2M/r_A}{1 - 2M/r_B}} \ . \tag{4.69}$$

Le sens de cette expression devient un peu moins opaque dans la limite de faible gravité, sans le sens  $2M/r_A \ll 1$ ,  $2M/r_B \ll 1$ , dans lequel cas on peut développer le numérateur et le dénominateur de la racine carrée selon:

$$\left(1 - \frac{2M}{r_A}\right)^{1/2} \simeq 1 - \frac{M}{r_A} , \qquad \left(1 - \frac{2M}{r_B}\right)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{M}{r_B} ; \qquad (4.70)$$

Ramenant les unités SI dans le portrait, on a donc:

$$\frac{\Delta \tau_A}{\Delta \tau_B} \simeq \left[ 1 - \underbrace{\frac{GM}{c^2} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)}_{\text{ordre 1}} - \underbrace{\left( \frac{GM}{c^2} \right)^2}_{\text{ordre 2}} \frac{1}{r_A r_B} \right].$$
(4.71)

On se rappelera qu'en unités physiques  $GM/c^2 = r_S$ , et ici on suppose que  $r_S/(r_A, r_B) \sim \epsilon \ll 1$ ; donc le second terme dans la parenthèse carrée est de magnitude  $\sim \epsilon$  (ordre 1), tandis que le troisième est de magnitude  $\sim \epsilon^2$  (ordre 2). On peut donc négliger le troisière terme dans la limite de faible gravité; d'où:

$$\frac{\Delta \tau_A}{\Delta \tau_B} \simeq \left[ 1 - \frac{GM}{c^2} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \right] \,. \tag{4.72}$$

Comme  $r_A > r_B$  ici, le terme entre parenthèses carrées est > 1, donc  $\Delta \tau_A > \Delta \tau_B$ ; autrement dit, l'horloge d'Anne mesure un plus grand interval de temps (propre) entre la réception de deux signaux successifs, que l'horloge de Buck en mesure entre l'émission de deux signaux successifs. Leurs deux horloges étant au repos, le temps propre qu'elles mesurent est le temps "ressenti" par Anne et Buck. On en conclut donc que le temps s'écoule plus rapidement pour Anne que pour Buck! Et ceci demeure vrai pour l'expression générale (sans l'approximation de faible gravité) donnée par l'éq. (4.69).

#### La gravité ralentit l'écoulement du temps!

Notons finalement qu'on peut reécrire l'équation (4.69) sous la forme:

$$\frac{\Delta \tau_A}{\Delta \tau_B} \simeq \left( 1 + \frac{\Phi(r_A) - \Phi(r_B)}{c^2} \right) , \qquad (4.73)$$

où  $\Phi(r) = -GM/r$  est le potentiel gravitationnel Newtonien habituel.

Les satellites du réseau GPS orbitent à une altitude de  $\simeq 4.2 R_{\oplus}$ , où  $R_{\oplus} = 6400 \,\mathrm{km}$  est le rayon de la Terre. La variation  $\Delta \Phi$  entre le potentiel gravitationnel entre cette altitude et celle du sol conduit à  $\Delta \Phi/c^2 \simeq 1.6 \times 10^{-10}$ ; c'est environ deux fois la correction associée à la dilatation du temps due à la vitesse orbitale du satellite, mais en sens inverse. L'horloge du satellite ticke plus lentement que la même horloge au repos à cause de sa vitesse orbitale  $(V/c \approx 1.3 \times 10^{-5})$ , selon la dilatation du temps en relativité restreinte, mais se retrouve au final à ticker encore plus rapidement que la même horloge au repos au sol, qui elle est sujette à une plus forte gravité.

Si on ne corrigeait pas pour ces effets de dilatation gravitationnelle du temps, les positions calculées via le système GPS dériveraient de la réalité de quelques mètres après déjà seulement quelques minutes.

Ha §6.4

# 4.6 Précession de l'orbite de Mercure

Il est temps de passer à l'application de nos calcul d'orbites et trajectoires au système solaire, qui a produit les premiers tests quantitatifs de la relativité générale. On commence ici par l'avancée du périhélie de la planète Mercure<sup>6</sup>, et on passera à la déviation de la lumière à la section suivante. **Ri §11.9** 

Les équations (4.22) et (4.24) peuvent être recombinées en une seule, en calculant

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\phi} 
= \pm \frac{r^2}{\ell} \left[ 2(\mathcal{E} - V_{\mathrm{eff}}(r)) \right]^{1/2} 
= \pm \frac{r^2}{\ell} \left[ e^2 - \left( 1 + \frac{\ell^2}{r^2} \right) \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \right]^{1/2} ,$$
(4.74)

On procède maintenant exactement comme dans notre analyse de la forme des orbites Newtoniennes à la §4.3.1: (1) on met l'expression ci-dessus au carré pour se débarasser de l'embêtant  $\pm$ ; on dérive par rapport à  $\phi$ ; et on introduit une nouvelle variable radiale u = 1/r; on obtient ainsi l'EDO suivante:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = \frac{M}{\ell^2} + 3Mu^2 \ . \tag{4.75}$$

Comparez avec l'équivalent Newtonien (4.16): la seule différence est le second terme en  $u^2$  au membre de droite (ne pas oublier que G = 1 dans nos unités géométriques)!

On pourrait solutionner cette EDO numériquement à l'aide de la méthode de Runge-Kutta; mais en pratique, dans le cas du calcul de l'avance du périhélie de Mercure, nous avons un problème potentiellement difficile à gérer. Revenant temporairement aux unités physiques, et approximant  $\ell = rv$ , examinons le rapport dimensionnel entre les deux termes au membre de droite de (4.75):

$$\frac{[3GM/r^2]}{[GM/(rv/c)^2]} \sim 3\left(\frac{v}{c}\right)^2 ; \qquad (4.76)$$

Pour l'orbite de Mercure,  $3v^2/c^2 \simeq 10^{-7}$ . La grande disparité dans la grandeur des deux termes au membre de droite de (4.75) rend une solution numérique directe très sensible eux erreurs de troncation; mais permet une solution analytique approximative, car en très bonne première approximation, on s'attend à ce que la solution de (4.75) soit quasi-identique à celle de son équivalent Newtonien (4.16). On peut alors substituer la solution Newtonienne (4.17) pour uau membre de droite de (4.75), ce qui conduit à (retour aux unités géométriques):

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = \frac{M}{\ell^2} + \frac{3M^3}{\ell^4} \left(1 + 2\varepsilon\cos\phi + \varepsilon^2\cos^2\phi\right) \,. \tag{4.77}$$

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Si la masse centrale est le soleil, périastre devient périhélie, et apoastre devient aphélie.

Les solutions à ce type d'EDO linéaire s'obtiennent en additionant à la solution générale (Newton!) les *intégrales particulières* correspondantes aux solutions de

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = \begin{cases} A \\ A\cos\phi \\ A\cos^2\phi \end{cases}$$
(4.78)

où  $A \sim M^3/\ell^4$ . Ces solutions sont:

$$u = \begin{cases} A \\ \frac{1}{2}A\phi\sin\phi \\ A\frac{1}{2} - A\frac{1}{6}\cos(2\phi) \end{cases}$$
(4.79)

La première n'ajoute qu'une minuscule constante à la solution Newtonienne (4.17); la troisième ajoute une constante du même ordre, ainsi qu'une oscillation d'amplitude tout aussi minuscule; la seconde est plus intéressante, car elle n'est pas périodique. Ne conservant que celle-là, notre version modifiée de la solution Newtonienne (4.17) s'écrit comme:

$$u = \frac{M}{\ell^2} \left( 1 + \varepsilon \cos \phi + \frac{3M^2}{\ell^2} \varepsilon \phi \sin \phi \right)$$
  

$$\simeq \frac{M}{\ell^2} \left\{ 1 + \varepsilon \cos \left[ \left( 1 - \frac{3M^2}{\ell^2} \right) \phi \right] \right\}$$
(4.80)

L'approximation pour passer de la première ligne à la seconde revient à faire usage de l'identité

$$\cos(\phi - \beta) = \cos\phi\cos\beta + \sin\phi\sin\beta , \qquad \beta = \frac{3M^2\phi}{\ell^2} , \qquad (4.81)$$

et du fait que  $\beta \ll 1$ . Vous le ferez en exercice! Mais, et c'est là l'important, l'éq. (4.80) indique clairement que u (et donc r = 1/u) est une fonction périodique de  $\phi$ , de période

$$\frac{2\pi}{1 - 3M^2/\ell^2} > 2\pi \ . \tag{4.82}$$

Ceci implique que le vecteur rayon r ne revient à sa valeur minimale (périhélie) qu'après unpeu plus d'une rotation par  $2\pi$  dans le plan de l'orbite; l'avance du périhélie correspond à cette quantité moins  $2\pi$ , l'angle balayée par une orbite elliptique sans précession, i.e., purement Newtonienne. Cet excès, étant  $\ll \pi$ , peut être interprété comme une précession du grand axe de l'ellipse, donc de l'orbite, par une quantité:

$$\delta\phi_{\text{prec}} = \frac{2\pi}{1 - 3M^2/\ell^2} - 2\pi$$
  

$$\simeq 2\pi (1 + 3M^2/\ell^2) - 2\pi$$
  

$$= \frac{6\pi M}{a(1 - \varepsilon^2)}, \qquad (4.83)$$

la seconde égalité résultant de l'utilisation du développement du binôme, et la troisième provenant de l'utilisation de l'expression Newtonienne (4.18). Si on revient aux unités physiques:

$$\delta\phi_{\rm prec} = \frac{6\pi G}{c^2} \frac{M}{a(1-\varepsilon^2)} \ . \tag{4.84}$$

Dans le cas de l'orbite de Mercure autour du soleil, on a  $a = 57.91 \times 10^6$  km et  $\varepsilon = 0.2056$ , ce qui conduit à une précession de 42.98 secondes d'arc (1 seconde d'arc = 1/3600 degré) par **siècle**; minuscule, mais mesurable, entre autre grâce aux très précises observations prétélescopiques de Tycho Brahe (1546–1601). Le petit tableau ci-dessous compile les valeurs prédites en mesurées de l'avance des périhélie des quatre premières planètes du système solaire.

Planète	Précession observée	Précession prédite
Mercure	43.1	42.98
Venus	8.65	8.62
Terre	3.85	3.84
Mars	1.36	1.35

Table 4.2: Précession (en arcsec/siècle) du périhélie des planètes

Les erreurs observationnelles étant de l'ordre de  $\pm 0.1 \operatorname{arcsec/siècle}$ , on voit que les mesures astronomiques collent farpaitement à l'équation (4.84).

Hartle décrit une approche différente mais équivalente, consistant à exprimer la solution de (4.74) directement sous la forme d'une intégrale effectuée sur une demie-orbite, du périhélie à l'aphélie, l'avance totale étant deux fois cette quantité:

$$\delta\phi_{\rm prec} = 2\ell \int_{r_p}^{r_a} \frac{1}{r^2} \left[ e^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\ell^2}{r^2}\right) \right]^{-1/2} \mathrm{d}r \;. \tag{4.85}$$

Cette intégrale peut être évaluée pour toute combinaison de  $\ell$  et *e* associées à des orbites liées. Ceci demande cependant de calculer les bornes d'intégration, soit les rayons des aphélie et périhélie. À ces points de l'orbite on a  $dr/d\tau = 0$ , et donc l'éq. (4.24) se réduit à  $\mathcal{E} = V_{\text{eff}}(r)$ , ce qui définit un problème de recherche de racine décrit par:

$$e^{2} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{\ell^{2}}{r^{2}}\right) = 0$$
 (4.86)

1 10

Hartle (pp202-204 et son problème 9.15) explique comment obtenir une solution analytique approximative de cette intégrale dans la limite de faible gravité, dans le sens  $r \gg M$  partout sur l'orbite, M étant mesuré ici en unités géométriques. On arrive encore à l'équation (4.83).

La reproduction de l'avance du périhélie de Mercure est maintenant considérée comme un des grands succès astronomique de la relativité générale, mais ce ne fut pas le cas à l'époque. L'explication d'Einstein, basée sur sa théorie de la relativité générale, se positionnait comme une explication parmis d'autres alternatives considérées moins "exotiques", d'une mesure déjà connue. Par exemple, il aurait été possible en principe d'expliquer l'avance du périhélie de Mercure via un moment quadrupolaire du soleil due à une rotation interne rapide de son coeur; en fait ceci ajouterait une contribution en  $1/r^3$  au potentiel effectif! Cette explication (maintenant "déclassée") n'a pu être rejetée avec confiance qu'il y a un quart de siècle, suite à la détermination de la séparation des fréquences d'oscillations acoustiques à l'intérieur du soleil, via l'héliosismologie.

C'est la prédiction et détection de la déviation de la lumière par le soleil qui a fait pencher la balance en faveur d'Oncle Albert, et ce dès 1919. Examiner ça est notre prochaine tâche.

# 4.7 Déviation de la lumière par le Soleil

Historiquement, la mesure de déviation de la lumière par la masse du soleil observée durant l'éclipse de 1919 a émergé comme LA grande confirmation expérimentale de la relativité générale. La géométrie du problème est illustrée sur la Figure 4.14.

La procédure de calcul est semblable à celle suivie pour établir l'avance du périhélie de Mercure, appliquée cette fois aux trajectoires des photons. Les équations (4.50) et (4.51) peuvent être recombinées en une seule:

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = \pm \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{b^2} - W_{\mathrm{eff}}(r) \right]^{-1/2} \,. \tag{4.87}$$



Figure 4.14: Géométrie et notation pour le calcul de l'angle de déviation d'un rayon lumineux frôlant le soleil. Par rapport à un point (•) situé au centre du soleil, une trajectoire en ligne droite est caractérisée par une déviation angulaire  $\Delta \phi = \pi$  si la trajectoire s'étend de  $-\infty$  à  $+\infty$ . La déviation  $\delta \phi_{\text{dev}}$  associée à la courbure de la trajectoire est donc donnée par  $\Delta \phi - \pi$ . Pour une très faible déviation, le rayon du périhélie  $r_p$  et le paramètre d'impact b sont essentiellement identiques.

Comme le montre la Figure 4.14, dans le cas d'un photon arrivant de l'infini, la déviation angulaire totale est deux fois celle accumulée une fois arrivé au périhélie ( $r_p$ , points colorés sur la Fig. 4.9):

$$\Delta\phi_{\rm dev} = 2 \int_{r_p}^{\infty} \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \right]^{-1/2} \mathrm{d}r \;. \tag{4.88}$$

Il est pratique de commencer par introduire une nouvelle variable d'intégration w telle que r = b/w, ce qui transforme l'intégrale ci-dessus dans une forme montrant bien que la déviation ne dépend que du rapport M/b:

$$\Delta\phi_{\rm dev} = 2 \int_0^{w_p} \left[ 1 - w^2 \left( 1 - \frac{2M}{b} w \right) \right]^{-1/2} {\rm d}w , \qquad (4.89)$$

Notons déjà que quand M = 0, l'intégrale au membre de droite de (4.89) se réduit à

$$\Delta \phi_{\rm dev} = 2 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{1 - w^2}} = \pi \ . \tag{4.90}$$

La déviation nette  $\delta \phi_{dev}$  en présence d'une masse M est donc donnée par

$$\delta\phi_{\rm dev} = \Delta\phi_{\rm dev} - \pi \ . \tag{4.91}$$

Si  $M/b \neq 0$  alors l'intégrale (4.89) doit être évaluée numériquement. Il faut d'abord, pour toute valeur de M/b donnée, calculer la borne supérieure d'intégration  $w_p$ . Au périhélie, on a  $dr/d\sigma = 0$ , et donc l'éq. (4.52) se réduit à:

$$\frac{1}{b^2} - W_{\text{eff}}(w_p) = 0 . ag{4.92}$$

Le calcul de  $w_p$  devient donc un problème de recherche de racine pour le polynôme cubique:

$$1 - w^2 + \frac{2M}{b}w^3 = 0. ag{4.93}$$

Notons déjà que ce polynôme cubique est équivalent au terme entre parenthèses carrées dans notre intégrale au membre de droite de (4.89); donc, notre intégrand diverge à la borne supérieure de l'intégrale. Crotte...

L'évaluation numérique de l'intégrale peut se faire par n'importe quelle méthode classique, comme la bonne vieille méthode du trapèze; cependant on doit composer avec la divergence de l'intégrand à la borne supérieure  $w_p$ .

Considérons la méthode du trapèze, une des plus simples. On introduit une maille spatiale de N-1 incréments  $h_k$  couvrant l'intervalle  $[0, w_p]$ :

$$w_{k+1} = w_k + h_k$$
,  $k = 0, 1, ..., N - 2$ , (4.94)

(numérotation à la Python...) où l'incrément  $h_k$  peut être constant, ou varier le long de la maille. Dénotant l'évaluation de l'intégrand à  $w_k$  par  $f_k \equiv f(w_k)$ , la méthode du trapèze prend la forme:

$$I = \sum_{k=0}^{N-2} \frac{f_{k+1} + f_k}{2} h_k, \qquad w_{k+1} = w_k + h_k .$$
(4.95)

La précision de l'évaluation de l'intégrale augmente quand  $h_k$  diminue, mais il est souvent difficile d'établir à priori les  $h_k$  requis. Une stratégie intéressante consiste à adapter l'incrément, un peu comme dans le cas de la méthode de Runge-Kutta à pas adaptif introduite précédemment (§4.3.5). L'idée est de débuter à la borne inférieure de l'intégrale ( $w_0$ ), choisir un pas h, et calculer deux estimés du premier terme dans la somme (4.95), couvrant l'intervalle [ $w_0, w_1$ ] où  $w_1 = w_0 + h$ :

$$i^{(1)} = \frac{f_0 + f_1}{2}h , \qquad (4.96)$$

$$i^{(2)} = \frac{f_0 + f_m}{2} \left(\frac{h}{2}\right) + \frac{f_m + f_1}{2} \left(\frac{h}{2}\right) = \frac{f_0 + 2f_m + f_1}{2} \left(\frac{h}{2}\right) .$$
(4.97)

où  $f_m = f(w_m)$  avec  $w_m = (w_0 + w_1)/2$ . La seconde évaluation subdivise simplement le pas original en deux moitiés, appliquant la règle du trapèze séparément à ces deux moitiés. La différence entre ces deux estimés est une mesure de l'erreur de discrétisation numérique; quand cette erreur dépasse un seuil pré-établi, on réduit  $h_k$  et on reprend le processus; sinon on passe à l'intervalle suivant,  $[w_1, w_2]$ , et ainsi de suite jusqu'à ce que la borne supérieure de l'intégrale soit atteinte.

La Figure 4.15 présente un code Python pour cette méthode du trapèze à pas adaptif. Le calcul de l'intégrale même est effectué dans la fonction trapeze (lignes 17–43), l'intégrand étant lui-même codé sous la forme d'une fonction, ici f(w) (lignes 12–15). Le programme principal (lignes 45–54) calcule d'abord la borne supérieure  $w_p$  de l'intégrale en trouvant la racine appropriée du polynôme cubique (4.93) par la méthode de la bissection, ici à l'aide de la fonction bisect du module Python scipy.optimize. Ceci requiert d'établir un intervalle de départ pour la bissection, ce qui s'avère ne pas être complètement trivial<sup>7</sup>. Ici on cherche une

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 ,$$

le nombre de racine réelles est déterminé par le *discriminant* du polynôme:

$$\Delta = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2 .$$

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Un polynôme cubique peut avoir jusqu'à trois racine réelles, et il faut choisir la bonne! Pour un polynôme cubique de la forme générale

Si  $\Delta > 0$ , on a trois racine réelles; si  $\Delta < 0$  une racine est réelle et les deux autres sont complexes; et dans le cas limite  $\Delta = 0$ , les trois racines sont dégénérées, à une valeur réelle.

```
# CALCUL DE L'ANGLE DE DEVIATION DE LA LUMIERE DANS LA METRIQUE DE SCHWARZSCHILD
 1
   import numpy
                       as np
2
   import scipy.optimize as opt
3
   # VARIABLES GLOBALES
 4
  Msb=0.19
                                                # rapport M/b
5
   pi=3.1415926536
6
   #-----
 7
   def pcub(w):
8
   # POLYNOME CUBIQUE DEFINISSANT BORNE SUPERIEURE
10
     return 1.-w**2*(1.-2.*Msb*w) # Eq (4.93)
                       _____
11
   # FONCTION CALCULANT L'INTEGRAND
12
   def f(w):
13
     return 2./np.sqrt(1.-w**2*(1.-2.*Msb*w)) # Eq (4.89)
14
15 # END FONCTION F
16
   #-----
  # FONCTION CALCULANT UNE INTEGRALE PAR TRAPEZE A PAS ADAPTIF
17
18 # (Avec critere d'arret pour borne superieure divergente)
19 def trapeze(xi,xo):
    nMax=5000
                                                # nombre maximal de raffinement
20
      eps=1.e-4
                                                # tolerance pour ajustement du pas
21
     toler=1.e-5
                                                # tolerance sur l'integrale
22
                                                # pas initial: 1% de l'intervalle
     h=(xo-xi)/100.
23
24
     integrale=0.
                                                # variable cumulative (integrale)
     n,stop=0,0
                                                # compteur, variable d'arret
25
      while (xi+h<xo) and (n<nMax) and (stop==0): # boucle sur l'intervalle
26
                                                # l'intervalle pour ce trapeze
27
        xp=min(xi+h.xo)
        yi,ymid,yp=f(xi),f(0.5*(xi+xp)),f(xp) # 3 evaluations de l'integrand
28
29
        int1=0.5*(yi+yp)*h
                                               # trapeze plein pas Eq. (4.96)
                                              # trapeze demi-pas Eq. (4.97)
# difference normalisee
        int2=0.5*(yi+2.*ymid+yp)*h/2.
30
31
         err=np.abs( (int2-int1)/int2 )
                                               # erreur trop grande: on rejette
        if (err > eps):
32
33
           h/=1.5
                                               # diminution du pas
         else:
                                               # on accepte le pas
34
35
           integrale+=(4.*int2-int1)/3.
                                            # cumul de l'integrale (+Romberg)
           xi=xp
                                                # on passe au prochain intervalle
36
           if (err < eps/2.): h*=1.5
                                                # augmentation du pas
37
         n+=1
                                                # increment du compteur
38
         if (np.abs(int2/integrale)<toler): stop=1 # critere d'arret atteint</pre>
39
      print("Integrale= {0}, n= {1}".format(integrale,n))
40
      if n >= nMax: print("ATTENTION: fin de boucle prematuree")
^{41}
     return integrale
                                               # Eq. (4.95)
42
43 # END FONCTION TRAPEZE
   #-----
44
   # MAIN
45
46
   # Etape 1: recherche de racine par bisection
47 a=0.
                                                # borne inf recherche de racine
48 b=1./(3.*Msb)
                                                # borne sup recherche de racine
   xi=0.
                                                # borne inf integrale
49
50
   xo=opt.bisect(pcub,a,b)
                                                # borne sup integrale Eq. (4.93)
  # Etape 2: Integrale par la methode du trapeze modifiee
51
52 deltaphidev=trapeze(xi,xo)-pi
                                                # Eq (4.91)
53 print("deviation/pi= {0}.".format(deltaphidev/pi))
54
   # END MAIN
```

Figure 4.15: Code Python pour le calcul de la déviation angulaire d'un faisceau lumineux approchant une masse M avec un paramètre d'impact b.

racine positive qui soit le plus près possible de w = 0 (correspondant à  $r \to \infty$ ); quelque part entre cette racine  $(w^*)$  et la suivante on aura un extremum, dont la position est donnée par la racine non-nulle du polynôme quadratique obtenu en posant égale à zéro la dérivée de (4.93) par rapport à w:

$$3\frac{M}{b}w^* - 1 = 0 \qquad \to \qquad w^* = \frac{1}{3(M/b)}$$
 (4.98)

La recherche de racine est donc effectuée dans l'intervalle  $w \in [0, w^*]$  (lignes 47–48), qui est fourni en entrée à la fonction **bisect** (ligne 50).

Examinons maintenant la boucle while dans la fonction trapeze; cette boucle débute à la borne inférieure xi et effectue les deux évaluations (4.96)–(4.97) aux lignes 29–30; si l'erreur relative calculée à la ligne 31 dépasse le seuil eps spécifié à la ligne 21, l'incrément est réduit du tier (ligne 33) et on passe à l'itération suivante; sinon, on accepte le pas, on comptabilise la contribution à l'intégrale (ligne 35)<sup>8</sup>, et on passe à l'intervalle suivant (ligne 36). Si l'erreur tombe sous la moitié de la tolérance, l'incrément suivant est augmenté de 50% (ligne 37). On remarquera à la ligne 27 l'utilisation de la fonction Python min(), qui assure ici que le prochain intervalle à intégrer ne dépasse pas la borne supérieure de l'intégrale.

Ça, c'est la méthode du trapèze à pas adaptif. Le problème de la borne supérieure divergente est traité au niveau du critère d'arrêt de la boucle while; à mesure qu'on approche de la borne supérieure, le pas se réduit car l'intégrand croit rapidement. Ceci évite la divergence de l'intégrale, mais le processus tendra vers  $h_k \to 0$ , version trapézoidale du paradoxe de Zénon<sup>9</sup>. On évite ceci en stoppant l'itération (ligne 39) lorsque la contribution relative à l'intégrale (variable d'accumulation integrale dans le code de la Fig. 4.15) chute sous un seuil prétabli, ici toler spécifié à la ligne 22. En général, on voudra que ce seuil soit au moins un facteur 10 plus petit que celui associé à la procédure de réduction/augmentation de l'incrément (eps, ligne 21). Pour notre problème de déviation de la lumière, la combinaison  $eps=10^{-4}$  et toler=  $10^{-5}$ donne des résultats satisfaisants.

La Figure 4.16 montre la variation de  $\delta\phi_{dev}$  en fonction du rapport M/b. Attention, ici un M/b qui augmente veut dire un paramètre d'impact b qui diminue, i.e., le faisceau lumineux passe de plus en plus près de l'objet central. On constate que la déviation augmente graduellement à mesure que M/b augmente, mais au delà de  $M/b \simeq 0.19$  on observe une divergence,  $\delta\phi_{dev} \rightarrow \infty$  quand  $M/b \rightarrow 1/\sqrt{27}$ . Cette limite correspond à la capture des photons sur cette fameuse orbite circulaire (instable) à r = 3M (voir Fig. 4.8). Si M/b dépasse cette valeur limite, les photons sont tout simplement capturés par l'objet central, comme pour la trajectoire lumineuse en noir sur le Figure 4.9; on ne peut alors plus définir un angle de déviation.

Dans le cas de la trajectoire d'un photon frisant la surface du soleil, on a  $b = R_{\odot} =$  700,000 km et  $M_{\odot} = 1.47$  km en unités géométriques, d'où  $M/b \simeq 2 \times 10^{-6}$ . Si vous essayez d'utiliser le code de la Fig. 4.15 pour calculer la déviation associée, même en réduisant **eps** et **toler** à  $\sim 10^{-8}$  notre solution numérique se retrouve dominée par les erreurs de troncation.

Hartle (pp211-212) montre comment évaluer notre intégrale d'une manière analytique approximative dans la limite  $M/b \ll 1$ ; cette approche conduit à:

$$\delta\phi_{\rm dev} = \Delta\phi - \pi = \frac{4GM}{c^2b} , \qquad \frac{GM}{c^2b} \ll 1$$
 (4.99)

$$i^{(1)} = i^* + Ah^2 ,$$
  
 $i^{(2)} = i^* + A\left(\frac{h}{2}\right)^2$ 

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>Le membre de droite à la ligne 35 vous semble probablement bizarre; c'est le résultat d'un **super truc** en intégration numérique, appelé *intégration de Romberg*. La méthode du trapèze est d'ordre deux, ce qui implique que l'on puisse écrire, pour un h suffisamment petit,

où  $i^*$  est la valeur de *i* dans la limite  $h \to 0$ , et *A* est une constante. On peut solutionner ce système de deux équations pour les inconnues  $i^*$  et *A*; le résultat pour  $i^*$  est ce fameux membre de droite à la ligne 35.

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Pour ceux/celles connaissant cet illustre personnage, et son paradoxe.



Figure 4.16: Angle de déviation d'un rayon lumineux en fonction du rapport M/b, résultant de l'intégrale numérique de (4.89). La limite  $M/b \rightarrow 1/\sqrt{27}$  correspond aux photons capturés dans l'orbite circulaire instable à r/M = 3.

qui donne  $\delta \phi_{\text{dev}} \simeq 1.7''$  ( $\eta \equiv$  une seconde d'arc = 1/3600 degré). C'est petit, mais facilement détectable... durant une éclipse solaire !

La Figure 4.17 en montre un exemple quasi-centenaire, où deux photographies du même coin de ciel ont été superposées, l'une prise lors d'une éclipse solaire et l'autre pas. Les paires d'images alignées dans la direction radiale offrent une mesure de la déviation de la lumière produite par la présence du soleil. La déviation est celle prédite par l'expression ci-dessus, à l'intérieur des barres d'erreur.

Cette mesure s'avère cependant très difficile, et avec le recul, était possiblement un peu moins convaincante qu'on l'avait jugé à l'époque. Le petit tableau ci-dessous, adapté du tableau 4.2 présenté dans l'ouvrage de Ohanian et Ruffini cité en bibliographie du chapitre 1, montre bien que même avec plus d'un demi-siècle d'améliorations technologiques, les incertitudes observationnelles n'ont pas diminué substantiellement.

Table 4.3: Déviation de la lumière mesurée durant quelque	es éc	elipses so	plaires
---	-------	------------	---------

	1 1
Eclipse	déviation (arcsec)
29 mai 1919	$1.98\pm0.16$
29 mai 1919	$1.16\pm0.40$
21 septembre $1922$	$1.77\pm0.40$
21 septembre $1922$	$1.72\pm0.15$
21 septembre $1922$	$1.82\pm0.20$
9 mai 1929	$2.24\pm0.10$
19 juin 1936	$2.73\pm0.31$
20 mai 1947	$2.01\pm0.27$
25 février 1952	$1.70\pm0.10$
30 juin 1973	$1.66\pm0.19$



Figure 4.17: Superpositions de deux photographies (centenaires, et en format négatif) du ciel, l'une prise de nuit et l'autre durant une éclipse solaire totale. On y remarque le déplacement radial apparent des positions des étoiles, manifestation de la déviation de la lumière induite par la courbure de l'espace causée par la masse du soleil, dont on voit le bord du disque à gauche de la photo. Source: BBC 2008.

C'est la mesure de la déviation des ondes radio provenant de sources extragalactiques, débutant dans les années 1970s, qui a fini par fournir au début des années 1990s un accord de  $1 \pm 10^{-4}$  dans le rapport entre les déviations prédites et observées.

De nos jours, l'astrométrie de haute précision rendue possible par des satellites astronomiques comme Hipparcos et Gaia a permis de détecter la déviation de la lumière stellaire par toute sorte d'objets, certains (relativement) peu massifs; les données Hipparcos, par exemple, ont permi la mesure de la déviation de la lumière par Jupiter! Un minuscule  $\delta \phi_{dev} = 0''.013$  !!

# 4.8 Délai temporel dans la propagation de la lumière

Le fait qu'un rayon lumineux soit dévié dans le champ gravitationnel implique aussi un délai temporel par rapport à la trajectoire qui serait suivie en l'absence de la masse, puisque le chemin optique parcouru est plus grand (voir petit dessin sur la Figure 4.18). La mesure de ce délai temporel représente un autre test de la relativité générale pouvant être effectué dans le système solaire à un haut niveau de précision.

Les équations (4.49) et (4.52) forment le point de départ de notre analyse, après avoir reparamétré la trajectoire:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}r} 
= \pm \frac{1}{b} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{1}{b^2} - W_{\mathrm{eff}}(r)\right)^{-1/2}$$
(4.100)

le choix de signe étant déterminé par le signe de  $dr/d\sigma$ . En supposant que ni l'émetteur ni le récepteur ne bougent de manière significative durant la durée de la mesure, le laps de temps total  $(\Delta t)_{tot}$  écoulé durant un aller-retour le long de la trajectoire est alors simplement donné par:

$$(\Delta t)_{\rm tot} = 2t(r_{\oplus} \to r_p) + 2t(r_R \to r_p) \tag{4.101}$$



Figure 4.18: Un faisceau d'ondes électromagnétiques (en pratique, lumière laser ou ondes radios) faisant l'aller-retour entre la Terre et un émetteur/récepteur situé en opposition à la Terre (trait plein), donc en frôlant le soleil, parcourt un plus grand chemin optique que si le Soleil n'y serait pas (trait en tirets). Le temps de transit s'en trouve augmenté. Si la déviation est faible, alors  $b \simeq r_p$  (voir texte).

où

$$t(r_{\oplus} \to r_p) = \int_{r_p}^{r_{\oplus}} \frac{1}{b} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{1}{b^2} - W_{\text{eff}}(r)\right)^{-1/2} \mathrm{d}r , \qquad (4.102)$$

avec une expression semblable pour  $t(r_R \to r_p)$ . Le périastre  $r_p$  est déterminé par la relation obtenue précédemment:

$$\frac{1}{b^2} = W_{\text{eff}}(r_p) \ . \tag{4.103}$$

L'intégrale ci-dessus peut être évaluée numériquement, mais encore une fois on est pris avec une borne divergente à  $r_p$ ... Hartle préfère développer l'intégrand en puissance de M et ne conserver que le plus petit terme, pour arriver au résultat approximatif (mais très près du résultat exact dans le cas d'un rayon lumineux dévié par le soleil):

$$t(r \to r_p) = \sqrt{r^2 - r_p^2} + 2M \log\left(\frac{r + \sqrt{r^2 + r_p^2}}{r_p}\right) + M\left(\frac{r - r_p}{r + r_p}\right)^{1/2} .$$
(4.104)

Se reportant à la Figure 4.18, on note que le premier terme au membre de droite donnerait le temps d'aller-retour le long d'une trajectoire rectilinéaire (droite en tirets sur la Fig. 4.18; et ne pas oublier que dans les développements ci-dessus, c = 1!). L'excès du temps d'aller-retour sur toute la trajectoire est donné par

$$(\Delta t)_{\rm exc} \equiv (\Delta t)_{\rm tot} - 2\sqrt{r_{\oplus}^2 - r_p^2} - 2\sqrt{r_R^2 - r_p^2}$$
 (4.105)

Dans la limite où  $r_p/r_{\oplus} \ll 1$  et  $r_p/r_R \ll 1$ , et ramenant les unités SI dans le portrait, ceci se réduit à:

$$(\Delta t)_{\rm exc} \simeq \frac{4GM}{c^3} \left[ \log \left( \frac{4r_{\oplus}r_R}{r_p^2} \right) + 1 \right]$$
(4.106)

L'idée, déjà proposé en 1964 par Irwin Shapiro, a été finalement mise à l'épreuve une décennie plus tard. Le délai de transmission avec les sondes Viking (circa 1976), sur Mars, lorsque cette planète se trouvait en opposition par rapport à la Terre, a été mesuré et trouvé en excellent accord (à l'intérieur des barres d'erreur) avec la prédiction de la relativité générale, basée sur l'expression ci-dessus. On parle d'un délai de transmission de l'ordre de quelques dixièmes de microsecondes! La précision avec laquelle les horloges atomiques permettent la mesure du temps conduit ici à un test extrêmement précis de la relativité générale.

107

### **Bibliographie**:

Les tests classiques de la relativité générale dans le système solaire sont habituellement discutés en détails dans tous les bouquins sur le sujet, incluant tous ceux cités en bibliographie du chapitre 1. Sauf pour la §4.6, qui suit essentiellement la présentation du sujet faite dans l'ouvrage de Rindler, ce chapitre suit d'assez près le chapitre 9 du Hartle; avec cependant plusieurs ajouts/élaborations, incluant évidemment tout ce qui relève des solutions numériques... et les petits dessins.

Pour une discussion très complète de la question de l'avance du périhélie de Mercure, incluant ses aspects techniques et historiques, voir:

Roseveare, N.T., Mercury's Perihelion from Le Verrier to Einstein, Oxford University Press (1982).

La section 4.3 du bouquin d'Ohanian & Ruffini, cité en bibliographie du chapitre 1, contient une discussion très complètes des mesures de la précession du périhélie des orbites dans le système solaire (d'où le tableau 4.2 de la §4.6 est d'ailleurs repris *verbatim*), de la déviation de la lumière par le soleil (d'où le contenu du tableau 4.3 de la §4.7 est tiré) et du délai temporel dans la transmission des ondes électromagnétiques (§4.8).

Pour (beaucoup) plus de détails sur les effets relativistes devant être pris en considération par le système de géolocalisation GPS, voir:

Ashby, N., Relativity in the Global Positioning System, Liv. Rev. Rel., 6(1) (2003): https://link.springer.com/article/10.12942/lrr-2003-1



Georg Bernhard Riemann (1926–1866)



Albert Einstein (1979–1955)



David Hilbert (1862–1943)
## Chapitre 5

# La matière-énergie courbe l'espace-temps

Deuxième partie du programme théorique

ou

Comment la matière-énergie courbe l'espace

ou encore, plus spécifiquement: étant donné une distribution spatiotemporelle de masse-énergie, comment calculer le tenseur métrique décrivant la courbure induite.

Commençons avec quelque chose qu'on connait déjà (rarement une mauvaise idée), soit la force gravitationnelle en régime Newtonien. Cette force gravitationnelle (**F**) peut s'exprimer en fonction d'un champ gravitationnel **g** tel que la force gravitationnelle ressentie par une masse m est donnée par  $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ . Le champ **g** peut lui-même être exprimé comme le gradient d'un potentiel gravitationnel  $\Phi$  via:

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi \,\,, \tag{5.1}$$

où le potentiel est "créé" (ou, peut-être mieux, "induit") par une distribution de masse  $\rho(\mathbf{x})$ . La dépendence de  $\Phi(\mathbf{x})$  sur  $\rho(\mathbf{x})$  est donnée par l'équation de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho \ . \tag{5.2}$$

Le coté droit de cette expression, essentiellement la densité  $\rho$ , agit comme un **terme source** pour le potentiel gravitationnel, au coté gauche.

Notre objectif est donc d'écrire une expression semblable applicable en relativité générale; ce sera (évidemment) une relation tensorielle, invariante sous changement de repère. Il s'agira cette fois de relier une mesure de la courbure (au coté gauche) à sa source (au coté droit), soit la distribution de matière-énergie dans l'espace-temps.

Les deux sections qui suivent développent les tenseurs requis, d'abord pour la courbure, ensuite pour le contenu de matière-énergie. L'assemblage final de ces deux morceaux nous conduira ensuite à l'équation du champ d'Einstein.

## 5.1 Courbure: le tenseur de Riemann

Notre première tâche est de déterminer quelle représentation mathématico-physique de la courbure doit être utilisée au coté gauche de notre futur équivalent de l'éq. (5.2).

109

**BG§5.1** 



Figure 5.1: Un parcours fermé infinitésimal, construit selon deux paires de déplacements di et dj le long de deux axes de coordonnées curvilinéaires (i, j). Si la surface sur laquelle le parcours est construit est de courbure non-nulle, le transport parallèle d'un vecteur  $v^{\alpha}$  le long du parcours,  $A \to B \to C \to D$ , produira une variation  $dv^{\alpha}$  entre le vecteur initial et sa version transportée.

Il ne peut s'agir simplement du tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$ ; on se rappelle que ce dernier peut toujours être ramené localement à une forme Minkowskienne (pseudo-Euclidienne), de courbure nulle (relire la §3.3 au besoin!). Mais la courbure est irréductible quel que soit le repère choisi. Comme l'équation tensorielle recherchée doit être valide dans tous les repères, le fait que la courbure soit irréductible implique qu'il ne peut pas exister de repères dans lesquels la courbure puisse s'annuler, même localement. Il faut aller plus loin que le tenseur métrique.

Les coefficients de connexion  $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$  ne peuvent pas faire l'affaire non plus, pour la même raison: ils sont déterminés par des dérivées premières du tenseur métrique, et on a vu qu'il est toujours possible d'annuler ces dérivées localement, en se plaçant dans ce même repère en chute libre qui ramène le tenseur métrique à une forme localement Minkowskienne.

La mesure recherchée sera **définie** par le transport parallèle d'un (quadri)vecteur le long d'un parcours infinitésimal fermé, dans une situation où la seule variation dudit vecteur est dûe à la courbure, et non à un agent "physique" extérieur. On se souvient que dans un tel cas la dérivée covariante est nulle. L'équation (3.35) se réduit alors à

$$\frac{\mathrm{d}A^{\mu}}{\mathrm{d}s} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}A^{\sigma}\frac{\mathrm{d}x^{\rho}}{\mathrm{d}s} = 0$$

## 5.1.1 Le tenseur de Riemann

On considère donc le transport parallèle d'un vecteur  $v^{\alpha}$  le long d'un parcours constitué de quatre segments infinitésimaux le long de deux des axes de coordonnées, tel qu'illustré sur la Figure 5.1. Ici la variation (infinitésimale) du vecteur  $v^{\alpha}$  sur chacun des quatre segments du parcours correspond à la partie géométrique de la dérivée covariante, e.g., pour le segment Asur la Fig. 5.1 on écrirait:

$$(\mathrm{d}v^{\alpha})_{A} = -\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}(x)v^{\nu}(x)\mathrm{d}i^{\beta}$$
(5.3)

et similairement pour les trois autres segments. La variation sur le parcours fermé est simplement la somme des variations sur chaque segment:

$$dv^{\alpha} = -\underbrace{\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}(x)v^{\nu}(x)di^{\beta}}_{\text{segment A}} - \underbrace{\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}(x+di)v^{\nu}(x+di)dj^{\beta}}_{\text{segment B}} + \underbrace{\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}(x+dj)v^{\nu}(x+dj)di^{\beta}}_{\text{segment C}} + \underbrace{\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}(x)v^{\nu}(x)dj^{\beta}}_{\text{segment D}}$$
(5.4)

Les signes +/- réfèrent à l'orientation des  $di^{\beta}$  et  $dj^{\beta}$  par rapport aux coordonnées, qui dépendent de la manière dont le parcours a été construit (voir Fig. 5.1).

Regroupons le premier et troisième terme:

$$\left[\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}(x+\mathrm{d}j)v^{\nu}(x+\mathrm{d}j)-\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}(x)v^{\nu}(x)\right]\times\mathrm{d}i^{\beta}.$$
(5.5)

Examinons le terme entre parenthèses carrées; structurellement, ça ressemble à f(x+dx) - f(x), avec ici  $dx \equiv dj$ ; donc on pourrait réécrire l'expression ci-dessus sous la forme:

$$\frac{\partial (\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}v^{\nu})}{\partial x^{\gamma}} \mathrm{d}i^{\beta} \mathrm{d}j^{\gamma} , \qquad (5.6)$$

et on obtient la même chose en combinant les deuxième et quatrième termes de (5.4), avec cette fois  $dx \equiv di$ ; donc l'éq. (5.4) dans son ensemble peut se réécrire comme:

$$dv^{\alpha} = \frac{\partial (\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}v^{\nu})}{\partial x^{\gamma}} di^{\beta} dj^{\gamma} - \frac{\partial (\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}v^{\nu})}{\partial x^{\delta}} di^{\delta} dj^{\beta} = \left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}}{\partial x^{\gamma}}v^{\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\frac{\partial v^{\nu}}{\partial x^{\gamma}}\right) di^{\beta} dj^{\gamma} - \left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}}{\partial x^{\delta}}v^{\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\frac{\partial v^{\nu}}{\partial x^{\delta}}\right) di^{\delta} dj^{\beta} .$$
(5.7)

Et nous voici au passage clef; telle que nous l'avons défini, la variation d $v^{\alpha}$  est en fait la partie "géométrique" de la dérivée covariante; donc,

$$\mathrm{d}v^{\nu} = -\Gamma^{\nu}_{\sigma\gamma}\mathrm{d}x^{\gamma}v^{\sigma} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial v^{\nu}}{\partial x^{\gamma}} = -\Gamma^{\nu}_{\sigma\gamma}v^{\sigma} \ . \tag{5.8}$$

Une tournée générale de re-baptème de paires d'indices de sommation permet ensuite d'écrire la relation précédente pour  $dv^{\alpha}$  sous la forme équivalente

$$\mathrm{d}v^{\alpha} = \left(\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\gamma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\delta}\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}\right)\mathrm{d}i^{\delta}\mathrm{d}j^{\gamma}v^{\beta} , \qquad (5.9)$$

ou encore, sous forme plus compacte:

$$\mathrm{d}v^{\alpha} = R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \mathrm{d}i^{\delta} \mathrm{d}j^{\gamma}v^{\beta} , \qquad (5.10)$$

où

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\gamma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\delta}\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}$$
(5.11)

est le **tenseur de Riemann**. C'est un tenseur de rang 4, exprimant la dépendance linéaire de la variation vectorielle  $dv^{\alpha}$  (un indice) sur les trois quadrivecteurs  $di^{\delta}$ ,  $dj^{\gamma}$  (deux indices) et  $v^{\beta}$  lui même (un indice). Ses composantes ont une dimension physique de  $1/L^2$ , soit l'inverse du carré d'une échelle de longueur, qui comme on le verra plus loin est reliée à l'échelle de la courbure.

Notons que même si les coefficients de connexion  $\Gamma$  ne sont pas des tenseurs, le tenseur de Riemann  $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ , lui, est bel et bien un tenseur; si on remonte à sa dérivation, on réalise qu'il

définit effectivement la différence entre deux vecteurs, chacun de ces derniers se transformant selon les règles définissant le caractère tensoriel des objets géométriques.

On peut tirer avantage du caractère tensoriel de l'éq. (5.10) en se plaçant dans un repère en chute libre (RCL), pour lequel tous les  $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = 0$ . Mais ATTENTION, celà ne veut pas nécessairement dire que les dérivées des  $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$  vont s'annuler! Le tenseur de Riemann se réduit alors à:

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} . \qquad [\text{RCL}]$$
(5.12)

Il s'agit maintenant de descendre l'indice  $\alpha$  sur le tenseur de Riemann; il faut d'abord noter que:

$$\frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} = \frac{\partial(g_{\alpha\rho}\Gamma_{\beta\delta}^{\rho})}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial(g_{\alpha\rho}\Gamma_{\beta\gamma}^{\rho})}{\partial x^{\delta}} \\
= g_{\alpha\rho}\frac{\partial\Gamma_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma_{\beta\delta}^{\rho}\frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^{\gamma}} - g_{\alpha\rho}\frac{\partial\Gamma_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\rho}\frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^{\delta}} \\
= g_{\alpha\rho}\left(\frac{\partial\Gamma_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial\Gamma_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}}\right),$$
(5.13)

la dernière égalité provenant encore une fois du fait que dans un repère en chute libre, les  $\Gamma = 0$  (mais pas leurs dérivés!). On déduit donc de cette dernière expression et de la précédente:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\rho}R^{\rho}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} .$$
(5.14)

Maintenant il s'agit d'invoquer notre théorème fondamental de la géométrie Riemanienne:

$$\Gamma_{\nu\mu\rho} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} \right) , \qquad (5.15)$$

pour exprimer les dérivés (premières) des  $\Gamma$  en fonction des dérivées (secondes) du tenseur métrique:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\delta} \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\delta}} + \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\delta}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\delta}} \right)$$
(5.16)

...on respire bien par le nez trois fois... et on constate que le premier et quatrième s'annulent mutuellement (théorème de Schwarz), c'est déjà ça; donc

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha \partial x^\delta} - \frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\delta} \right) . \quad [\text{RCL}]$$
(5.17)

Cette relation relie ainsi le tenseur de Riemann au tenseur métrique. Notons bien que parce qu'elle implique des dérivées partielles, ce n'est pas une relation tensorielle véritable, même si elle relie deux tenseurs, car elle ne demeurera pas invariante sous changement de repère. C'est là bien normal, car pour arriver à (5.17) nous avons fait un choix spécifique de repère, soit le repère en chute libre. Néanmoins, si on connait le tenseur métrique dans un repère, le tenseur de Riemann dans ce même repère peut être calculé, et ensuite transformé vers d'autres repères.

Mais, ATTENTION, le calcul des composantes du tenseur via l'éq. (5.17) exige que les composantes du tenseur métrique soient écrites elles-aussi dans les coordonnées du repère en chute libre où l'expression est valide. Par exemple, il serait **illégal** d'insérer les composantes de la métrique de Schwarzschild données par (4.3) au membre de droite de (5.17), et ensuite de retransformer les composantes du tenseur de Riemann dans le repère inertiel... dans lequel est exprimé la métrique de Schwarzschild.

L'écriture (5.17) du tenseur de Riemann permet néanmoins d'en établir facilement certaines symétries, et ces symétries ne dépendent **pas** du choix de repère. On notera en particulier que:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} , \qquad (5.18)$$

et, moins évident a priori:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0 . \tag{5.19}$$

Ces symétries font que des 256 composantes du tenseur de Riemann pour un espace-temps quadridimensionnel, seul 20 composantes sont indépendantes. C'est le même nombre que celui des dérivées secondes indépendantes du tenseur métrique, au vu des symétries de celui-ci et du théorème de Schwarz; et ce n'est évidemment **pas** un hasard!

Le fait que le tenseur de Riemann se retrouve ainsi défini en termes des dérivées secondes du tenseur métrique est satisfaisant; on se souvient qu'aucune transformation dans aucun repère ne peut annuler toutes les dérivées secondes du tenseur métrique.

Vous êtes peut-être choqué(e), ou tout au moins sceptique, du fait qu'on se débarrasse si joyeusement de plusieurs termes dans nos expressions mathématiques en passant dans un repère en chute libre quand ça fait notre affaire. Mais c'est justement là la beauté et la puissance de tout écrire la physique en termes de relations tensorielles: obtenues dans un repère spécifique où leur calcul est plus simple, elles demeurent valides dans tous les repères !

## 5.1.2 L'équation de la déviation géodésique

Le tenseur de Riemann est donc notre mesure primaire de la courbure de l'espace-temps. Cet énoncé à prime abord gratuit peut se justifier en considérant la **déviation géodésique**, soit le taux auquel deux points initialement situés très près l'un de l'autre, chacun suivant sa géodésique, peuvent graduellement s'éloigner ou se rapprocher l'un de l'autre.

Un exemple géographique facile à visualiser (voir Figure 5.2) est le suivant: deux intrépides explorateurs polaires, je les nomme Nansen et Johanssen, sont à  $\epsilon$  du pôle Nord mais décident de rebrousser chemin à cause du mauvais temps et de la visibilité nulle. Épaule à épaule, chacun se lance en ski de fond vers le sud, les yeux fermement fixés sur sa boussole respective. Chacun suit donc un méridien distinct, et donc la distance entre nos deux explorateurs va inexorablement augmenter à mesure qu'ils progressent vers le sud... sauf si ils finissent par traverser l'équateur, dans lequel cas la distance les séparant va se mettre à diminuer... jusqu'à leur collision au pôle sud!

Intéressons nous à ce qui se passe au début du voyage, soit quand Nansen et Johanssen sont encore très près du pôle. Travaillant en coordonnées sphériques polaires, la distance  $\xi$  séparant nos comparses est donnée par

$$\xi = (R_{\oplus} \sin \theta) \times \delta \phi , \qquad (5.20) \quad \text{Ri §8.1}$$

où  $\delta\phi$  est la (petite) différence angulaire entre les médiriens le long desquels se déplacent nos vaillants skieurs. La longueur s de l'arc parcouru par chacun est  $s = R_{\oplus}\theta$ , et donc l'expression ci-dessus devient:

$$\begin{aligned} \xi &= R_{\oplus} \,\delta\phi \sin\left(\frac{s}{R_{\oplus}}\right) \\ &\simeq \,\delta\phi\left(s - \frac{s^3}{6R_{\oplus}^2} + \ldots\right) \,, \end{aligned} \tag{5.21}$$

où la seconde égalité résulte du développement en série de Taylor pour sin(x) quand  $x \ll 1$ . Si on dérive cette expression deux fois par rapport à l'arc s, on obtient

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} = -\frac{\xi}{R_{\oplus}^2} \equiv -K\xi \ , \qquad s/R_{\oplus} \ll 1 \ , \tag{5.22}$$

() Exercice

Ca §3.7



Figure 5.2: La déviation géodésique, telle que mesurée par un vecteur  $\boldsymbol{\xi}$  reliant deux explorateurs polaires initialement quasi-coincidents, se déplaçant chacun le long de sa propre géodésique (grand cercle méridien) vers le Sud.

où on a introduit la *courbure Gaussienne*  $K = 1/R_{\oplus}^2$ , et on a approximé  $\xi \simeq s\delta\phi$ , en ne conservant que le premier terme dans le développement en série de Taylor de l'éq. (5.20).

Imaginons maintenant que Nansen et Johanssen mesurent la distance les séparant en utilisant la géométrie Euclidienne; ceci revient à mesurer leurs trajectoires comme si elle étaient inscrites dans un plan tangent à la sphère au pôle. Si K = 0, soit une surface de courbure nulle —espace véritablement Euclidien—, alors l'éq. (5.22) indique que la distance  $\xi$  séparant Nansen de Johanssen croit linéairement avec la distance s parcourue par chacun; si K > 0, alors la croissance linéaire de  $\xi$  est ralentie à mesure que le duo progresse vers le sud, tandis que dans la situation inverse K < 0 la distance  $\xi$  croit plus rapidement que linéaire. Ces trois situations sont illustrées schématiquement sur la Figure 5.3. Une mesure de  $\xi(s)$  permet donc de determiner la présence et signe de la courbure de l'espace (ici 2D).

Si on intègre l'éq. (5.21) en  $\phi$  on trouve que la circonférence C du cercle (parallèle géographique) situé à distance s du pôle est donné par:

$$C = 2\pi \left( s - \frac{1}{6} K s^3 + \dots \right) , \qquad (5.23)$$

et l'intégrale de cette expression de 0 à s donne l'aire délimitée par ce cercle:

$$A = \pi \left( s^2 - \frac{1}{12} K s^4 + \dots \right) \; ; \tag{5.24}$$

d'où on trouve que la courbure Gaussienne K peut être déterminée à partir de mesures de la



Figure 5.3: Divergence de trajectoires sur des surfaces de courbures (A) positive, (B) nulle, et (C) négative, telle que décrite par l'évolution de la séparation  $\xi$ . Le diagramme est tracé ici dans un plan tangent au pôle, et la déformation par rapport aux trajectoires rectilignes est exagérée.

circonférence ou aire selon:

$$K = \frac{3}{\pi} \lim_{s \to 0} \frac{2\pi s - C}{s^3} , \qquad (5.25)$$

$$K = \frac{12}{\pi} \lim_{s \to 0} \frac{\pi s^2 - A}{s^4} .$$
 (5.26)

Ces deux expression s'avèrent à tenir la route à l'ordre  $s^3$  pour des surfaces courbes autres que sphériques, avec cependant la valeur de K pouvant varier d'un point à l'autre, contrairement à la sphère où  $K = 1/R_{\oplus}^2$  partout.

Mathématisons tout ça plus formellement en termes de géodésiques; plaçons Nansen à la position  $\mathbf{x}$  et Johanssen à  $\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}$ , et écrivons l'équation géodésique pour chacun:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(\mathbf{x}) \frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau} = 0 , \qquad [\mathrm{Nansen}] \qquad (5.27)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2(x+\xi)^{\mu}}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi})\frac{\mathrm{d}(x+\xi)^{\nu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}(x+\xi)^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau} = 0 . \qquad \text{[Johanssen]}$$
(5.28)

Travaillons un peu la géodésique de Johanssen. Tout d'abord développons les dérivées:

$$\frac{\mathrm{d}(x+\xi)^{\nu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}(x+\xi)^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\xi^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{d}\xi^{\nu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{d}\xi^{\nu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\xi^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau} , \qquad (5.29)$$

$$\frac{d^2(x+\xi)^{\mu}}{d\tau^2} = \frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + \frac{d^2\xi^{\mu}}{d\tau^2} .$$
 (5.30)

Ensuite, tronquant la version tensorielle du développement en série de Taylor au premier terme, on peut écrire:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) \simeq \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(\mathbf{x}) + \xi^{\rho} \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(\mathbf{x})}{\partial x^{\rho}} + \dots \qquad [\xi^{\rho} \text{ petit}]$$
(5.31)

Cette forme tronquée est justifiable si la magnitude de  $\boldsymbol{\xi}$  est beaucoup plus petite que les autres longueurs caractéristiques du problème<sup>1</sup>; dans un tel cas on peut considérer que  $\mathbf{x}$  est

 $<sup>^1 \</sup>mathrm{Dans}$  notre exemple polaire, la distance initiale entre Nansen et Johanssen devrait être beaucoup plus petite que le rayon de la Terre.

de magnitude ~ 1, tandis que  $\boldsymbol{\xi}$  est de magnitude ~  $\epsilon \ll 1$ . Donc les termes subséquents du développement varieraient en  $(\xi^{\nu})^2$ ,  $(\xi^{\nu})^3$ , etc, et deviennent rapidement minuscules si  $\xi^{\nu} \ll 1$ . On substitue tout ceci dans l'équation (5.28):

$$\frac{\mathrm{d}^{2}x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau^{2}} + \frac{\mathrm{d}^{2}\xi^{\mu}}{\mathrm{d}\tau^{2}} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\underbrace{\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau}}_{\mathrm{ordre 0}} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\underbrace{\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau}}_{\mathrm{ordre 1}} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\underbrace{\frac{\mathrm{d}\xi^{\nu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau}}_{\mathrm{ordre 1}} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\underbrace{\frac{\mathrm{d}\xi^{\nu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau}}_{\mathrm{ordre 2}} + \frac{\partial\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}}{\frac{\mathrm{d}\xi^{\nu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau}} + \frac{\partial\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}}{\frac{\mathrm{d}\xi^{\nu}}{\mathrm{ordre 2}}}\underbrace{\xi^{\rho}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau}}_{\mathrm{ordre 2}} + \frac{\partial\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}}{\frac{\mathrm{d}\xi^{\nu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau}} + \frac{\partial\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}}{\frac{\mathrm{d}\xi^{\nu}}{\mathrm{ordre 2}}} \underbrace{\xi^{\rho}\frac{\mathrm{d}\xi^{\nu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau}}_{\mathrm{ordre 2}} + \frac{\partial\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}}{\frac{\mathrm{d}\xi^{\nu}}{\mathrm{ordre 2}}} \underbrace{\xi^{\rho}\frac{\mathrm{d}\xi^{\nu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau}}_{\mathrm{ordre 3}} + \frac{\partial\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}}{\mathrm{ordre 3}} \underbrace{\xi^{\rho}\frac{\mathrm{d}\xi^{\nu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\xi^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau}}_{\mathrm{ordre 3}} = 0 . \quad (5.32)$$

On a indiqué ici l'ordre des différents termes, en fonction des puissances de  $\xi$  impliquées; un terme d'ordre 0, comme le troisième sur la première ligne, n'implique aucun  $\xi$ ; un terme d'ordre 1, comme le quatrième ou le cinquième, n'implique qu'un seul  $\xi$ —ou, comme ici, sa dérivée—tandis qu'un terme d'ordre 2 implique un produit de  $\xi$  et d'une de ses dérivées, ou encore de deux dérivées de  $\xi$ , comme le sixième terme de la première ligne.

Invoquant le fait que les  $\xi^{\nu} \ll 1$ , il s'agit maintenant d'éliminer de l'expression ci-dessus tous les termes d'ordre 2 et plus, réduisant alors le tout à:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{\mathrm{d}^2 \xi^{\mu}}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}\xi^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{\mathrm{d}\xi^{\nu}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}} \xi^{\rho} \frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau} = 0 \quad (5.33)$$

Prochaine étape: on soustrait de cette expression l'équation (5.27), pour obtenir:

$$\frac{\mathrm{d}^{2}\xi^{\mu}}{\mathrm{d}\tau^{2}} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\xi^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\frac{\mathrm{d}\xi^{\nu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}}\xi^{\rho}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau} = 0.$$
(5.34)

Maintenant on utilise de nouveau notre **meilleur truc**: passage à un repère en chute libre où les coefficients de connexion (mais pas leur dérivées!) s'annulent! L'expression ci-dessus se réduit encore plus, prenant maintenant la forme:

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^{\mu}}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{\partial\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}}\xi^{\rho}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau} = 0.$$
(5.35)

On veut maintenant remplacer la dérivée seconde au membre de gauche par une dérivée covariante, afin de finir avec une relation tensorielle véritable. Revenant à la définition de la dérivée covariante on peut écrire:

$$\frac{D^{2}\xi^{\mu}}{D\tau^{2}} = \frac{D}{D\tau} \left( \frac{D\xi^{\mu}}{D\tau} \right)$$

$$= \frac{D}{D\tau} \left( \frac{d\xi^{\mu}}{d\tau} + \Gamma^{\mu}_{\rho\lambda}\xi^{\rho} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \right)$$

$$= \frac{d^{2}\xi^{\mu}}{d\tau^{2}} + \frac{d\Gamma^{\mu}_{\rho\lambda}}{d\tau}\xi^{\rho} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} + (...)$$

$$= \frac{d^{2}\xi^{\mu}}{d\tau^{2}} + \frac{\partial\Gamma^{\mu}_{\rho\lambda}}{\partialx^{\nu}}\xi^{\rho} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} + (...)$$
(5.36)

où les parenthèses (...) incluent tous les autres termes résultant de l'application de la dérivée covariante, qui impliquent les  $\Gamma$  mais pas leurs dérivées; car ces termes s'annulent ( $\Gamma = 0$ ) dans un repère en chute libre! Utilisant cette relation pour se débarasser du terme  $d^2\xi^{\mu}/d\tau^2$  dans l'expression précédente, on arrive  $\dot{a}^2$ :

$$\frac{D^{2}\xi^{\mu}}{D\tau^{2}} + \underbrace{\left(\frac{\partial\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial\Gamma^{\mu}_{\rho\lambda}}{\partial x^{\nu}}\right)}_{R^{\mu}_{\nu\rho\lambda}} \xi^{\rho} \frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau} = 0 .$$
(5.37)

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Lecteurs de Barrau & Grain 2006 attention: erreur d'indice dans leur équation (5.23), au coté gauche ce doit être un  $\xi^{\mu}$  plutôt que  $\xi^{\nu}$ 

Mais, se rappelant que les coefficients de connexion sont symétriques par rapport à leurs indices covariants, la quantité entre parenthèses est notre tenseur de Riemann dans un repère en chute libre! Donc, au final:

$$\frac{\mathrm{D}^2 \xi^{\mu}}{\mathrm{D}\tau^2} + R^{\mu}_{\nu\rho\lambda} \xi^{\rho} \frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau} = 0$$
(5.38)

C'est l'équation de la déviation géodésique. Bien que sa dérivation ait invoqué le passage dans un repère en chute libre, c'est une équation tensorielle véritable, qui est donc valide sous cette forme dans tout repère. De plus cette forme montre bien que dans un espace plat, où toutes les composantes du tenseur de Riemann sont nulles, la distance entre deux géodésiques (lignes droites) parallèles demeure constante; nous ramenant ainsi au cinquième postulat d'Euclide!

Un exemple devrait clarifier le sens de l'équation (5.38). Revenons à nos deux vaillants explorateurs, Nansen et Johanssen; chacun se dirige franc sud sur sa géodésique. Si on travaille à la surface d'une sphère 2D avec coordonnées  $(x^1, x^2) \equiv (\theta, \phi)$ , alors leur déplacement est dans la direction  $\theta \equiv x^1$ , tandis que leur vecteur de déviation géodésique  $\boldsymbol{\xi}$  n'a qu'une composante dans la direction  $\phi \equiv x^2$  La composante  $\mu = \phi$  de l'équation géodésique devient ici:

$$\frac{\mathrm{D}^2 \xi^{\phi}}{\mathrm{D}\tau^2} + R^{\phi}_{\theta\phi\theta} \xi^{\phi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} = 0 \ . \tag{5.39}$$

Les coefficients de connexion sur la sphère 2D ayant été calculés précédemment à la §3.5.1, il est facile de montrer (faites-le!) que la composante requise du tenseur de Riemann (voir l'éq. (5.11)) se réduit ici à:

$$R^{\phi}_{\theta\phi\theta} = -\frac{\mathrm{d}\Gamma^{\phi}_{\theta\phi}}{\mathrm{d}\theta} - (\Gamma^{\phi}_{\theta\phi})^2 \ . \tag{5.40}$$

Représentons maintenant la trajectoire à l'aide d'un nouveau paramètre

$$s(\tau) = R_{\oplus}\theta(\tau) \qquad \rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau} = R_{\oplus}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} ;$$
 (5.41)

où  $R_{\oplus}$  est le rayon terrestre. La variable de trajectoire *s* mesure ainsi la distance parcourue le long du méridien à partir du pôle, comme sur la Fig. 5.2. Il est facile de démontrer que notre composante  $\phi$  de l'équation de la déviation géodésique devient alors

$$\frac{\mathrm{D}^2 \xi^{\phi}}{\mathrm{D}s^2} + R^{\phi}_{\theta\phi\theta} \frac{\xi^{\phi}}{R^2_{\oplus}} = 0 \ . \tag{5.42}$$

(Si le passage de  $D^2/D\tau^2$  à  $D^2/Ds^2$  vous tracasse, retournez examiner la définition de la dérivée covariante). Il s'agit plus maintenant que de développer la dérivée seconde covariante, ce que je vous laisse en exercice (seconde série), conduisant finalement à:

$$\frac{l^2\xi^{\phi}}{\mathrm{d}s^2} = 2\left(\frac{\xi^{\phi}}{R_{\oplus}^2}\right)\cot^2\theta \ . \tag{5.43}$$

Imaginons que Nansen et Johanssen, alimentés par une solide réserve de Cliff Bars, approchent de l'équateur ( $\theta = \pi/2$ ); la distance les séparant dans la direction azimutale augmente toujours  $(d^2\xi^{\phi}/ds^2 > 0)$ , mais à un taux qui chute inexorablement, jusqu'à atteindre zéro à l'équateur même. Leurs trajectoires sont alors parallèles, et une fois l'équateur franchi  $\cot \theta < 0$ , ce qui indique que la distance les séparant va commencer à décroitre  $(d^2\xi^{\phi}/ds^2 < 0)$ , comme il se doit<sup>3</sup>. Notons qu'encore ici ici l'accélération relative varie en  $\xi^{\phi}/R^2$ .

Ca §3.10

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Il ne faut cependant pas confondre l'éq. (5.43) avec l'éq. (5.22) obtenue précédemment; cette dernière résulte d'une construction géométrique valide pour de très petits déplacements s, décrivant "l'accélération" relative de deux trajectoires initialement divergentes du pôle, tracées dans un plan tangent au pôle; tandis que (5.43) est une expression valide *localement* mais (presque) n'importe où sur la sphère, et mesure la divergence de deux géodésiques orientées latitudinalement. Notons par ailleurs que (5.43) diverge aux pôles, une conséquence du comportement singulier du système de coordonnées sphériques polaires à  $\theta = 0, \pi$ , où le vecteur unitaire  $\mathbf{e}_{\phi}$  ne peut être défini.

## 5.1.3 La déviation géodésique dans un repère en chute libre

Considérons un observateur au repos dans un repère en chute libre; Puisque la coordonnée temporelle dans ce repère coincide avec le temps propre  $\tau$ , sa quadrivitesse dans ce repère est:

$$\frac{\mathrm{d}x^{\hat{\alpha}}}{\mathrm{d}\tau} \equiv u^{\hat{\alpha}} = (1, 0, 0, 0) , \qquad [\mathrm{RCL}]$$
(5.44)

L'ajout du " $\wedge$ " sur l'indice  $\alpha$  sert à indiquer que les quadricoordonnées sont mesurées dans le repère en chute libre. Dans ce repère localement Minkowskien, tous les coefficients de connexion sont nuls, et l'équation de la déviation géodésique prend donc une forme simplifiée:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \xi^{\hat{\alpha}}}{\mathrm{d}\tau^2} + R^{\hat{\alpha}}_{\hat{t}\hat{\beta}\hat{t}}\xi^{\hat{\beta}} = 0 , \qquad [\mathrm{RCL}]$$
(5.45)

Attention,  $\hat{t}$  indique ici une composante, il y a donc ici sommation implicite seulement sur les  $\hat{\beta}$  dans le second terme.

Revenons à notre ami Buck chutant radialement vers un trou noir, les pieds devant et le corps aligné avec la direction radiale. Même si les pieds et la tête de Buck suivent la même trajectoire spatiale, ces extrémités suivent deux géodésique distinctes *dans l'espace-temps*. Définissons un vecteur de déviation géodésique  $\xi^r$  connectant les pieds de Buck à sa tête. Son évolution, dans le repère en chute libre de Buck, est alors donnée par:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \xi^{\hat{r}}}{\mathrm{d}\tau^2} + R^{\hat{r}}_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}} \xi^{\hat{r}} = 0 , \qquad [\mathrm{RCL}]$$
(5.46)

Il ne s'agit plus que d'évaluer une seule composante du tenseur de Riemann! Mais attention, cette composante doit être évaluée dans le repère en chute libre. Les étapes requises sont les suivantes:

- Calculer  $R_{trt}^r$  dans les coordonnées de Schwarzschild;
- Construire un système de coordonnées orthonormal, donc localement Minkowskien à la position (r, t);
- Transformer la composante  $R_{trt}^r$  dans ce repère localement Minkowskien;
- Évaluer/solutionner l'éq. (5.46).

Ce sera le menu du jour pour une de vos séances de TP! Le résultat est:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \xi^{\hat{r}}}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{2M}{r^3} \xi^{\hat{r}} , \qquad (5.47)$$

et il vous sera laissé en exercice (seconde série) de démontrer que pour une déviation géodésique orientée dans les direction  $\hat{\theta}$  ou  $\hat{\phi}$  du repère en chute libre, on a:

$$\frac{\mathrm{d}^{2}\xi^{\hat{\theta}}}{\mathrm{d}\tau^{2}} = -\frac{2M}{r^{3}}\xi^{\hat{\theta}} , \qquad \frac{\mathrm{d}^{2}\xi^{\hat{\phi}}}{\mathrm{d}\tau^{2}} = -\frac{2M}{r^{3}}\xi^{\hat{\phi}}.$$
(5.48)

Le membre de droite est une accélération, qui dans le repère en chute libre (localement inertiel) ne peut qu'être interprétée comme étant dûe à l'action d'une force. C'est une force que vous connaissez déjà, soit la **force de marée**, comme l'indique sa dépendance en  $r^{-3}$ . Si la gravité de la dynamique Newtonienne est due à la courbure, alors la force de marée aussi, et elle est "contenue" dans le tenseur de Riemann. Comme si ce n'était pas déjà assez troublant de chuter pieds premiers vers un trou noir, notre pôvre Buck se retrouve en plus étiré dans la direction verticale  $(d^2\xi^{\hat{r}}/d\tau^2 > 0)$ , et compressé latéralement  $(d^2\xi^{\hat{\theta}}/d\tau^2 < 0 \text{ et } d^2\xi^{\hat{\phi}}/d\tau^2 < 0)$ .

Comme la force de marée varie en  $1/r^3$ , les forces d'étirement vertical et de compression latérale deviennent de plus en plus grandes à mesure que Buck approche du trou noir, et infinies

**TB§25.5** 

à r = 0. Je n'en ai aucune idée comment exactement (et je veux pas vraiment le savoir), mais quelqu'un quelque part a déterminé (expérimentalement...?) que le corps humain ne peut demeurer structurellement intègre si une force d'étirement ou de compression dépasse  $\simeq 10^4$  N. Quand cette limite est atteinte, on observe un phénomène parfois appelé *spagghettification*, tel qu'illustré —artistiquement— sur la Figure 5.4.

MTW §3.2.6



Figure 5.4: Spaghettification de Buck par la force de marée à l'approche d'un trou noir.

Pour un trou noir de masse stellaire (disons  $1 M_{\odot}$  pour les besoins de la cause) et un Buck costaud de 100 kg, ceci se produira passablement loin du rayon de Schwarzschild, comme vous aurez à le calculer en exercice. Mais pour un trou noir supermassif à la Gargantua (~  $10^8 M_{\odot}$ ), vous vérifierez aussi que Buck ne ressentirait vraiment pas grand chose à la traversée de l'horizon.

## 5.2 La source de la courbure: le tenseur de stress-énergie

En gravité Newtonienne, la masse est la source du champ gravitationnel. Ceci est décrit par l'équation de Poisson (5.2); avec le champ gravitationnel donné par le gradient du potentiel  $\Phi$ , on y reconnait ici la structure de la Loi de Gauss en électrostatique:

$$\nabla^2 \Phi \equiv \underbrace{\nabla \cdot \left( \overbrace{\nabla \Phi}^{\text{Champ gravitationnel}} \right)}_{\text{divergence du champ}} = \underbrace{4\pi G\rho}_{\text{Source des lignes de champ}}$$
(5.49)

exprimant ainsi clairement qu'en gravitation Newtonienne, la matière agit comme source de lignes du champ gravitationnel<sup>4</sup>.

Déjà en relativité restreinte, la masse, l'impulsion et l'énergie de la mécanique classique deviennent inextricablement interreliées via la norme (invariante!) du quadrivecteur impulsion:  $E^2 = p^2 + m^2$ ; se rappelant qu'un changement de repère (transformation de Lorentz) mélange les composantes des quadrivecteurs, on peut s'attendre à ce qu'en plus de la masse (au repos), **l'énergie et l'impulsion contribuent comme source de courbure !** 

 $<sup>{}^{4}</sup>$ Le signe moins manquant reflète ici le fait que des charges de même signe se repoussent, tandis que les Ha32 masses s'attirent.

### 5.2.1 Le flux de masse

Revenant temporairement à l'espace 3D, on considère le flux de masse transporté par l'écoulement U d'un fluide de densité massique  $\rho$  (voir la Figure 5.5). Puisque  $U^k = \partial x^k / \partial t$ , la masse dm



Figure 5.5: Flux de masse dû à un écoulement **U** à travers une surface fermée S délimitant un volume V dans l'espace 3D. Par convention la normale  $\hat{\mathbf{n}}$  est orientée vers l'extérieur du volume V.

traversant un élément de surface dS par unité de temps est donnée par

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \rho U^k n_k \mathrm{d}S \;, \tag{5.50}$$

où ici  $U^k n_k$  correspond à la projection de **U** sur la normale à l'élément de surface dS, soit  $\mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  en notation vectorielle. La conservation de la masse s'exprime alors sous la forme d'une équation de bilan: la masse totale contenue dans V change à un taux donné par le flux net à travers l'ensemble de la surface S; mathématiquement:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V} \rho \mathrm{d}V = -\oint_{S} \rho U^{k} n_{k} \mathrm{d}S , \qquad (5.51)$$

où le signe "-" au membre de droite est une simple conséquence de la convention d'orientation extérieure de la normale. Pour un volume fixe dans l'espace la dérivée temporelle commute avec l'intégration sur V. Appliquant le théorème de la divergence au membre de droite et pour un volume de forme arbitraire, on doit donc avoir

$$\int_{V} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^{k}} (\rho U^{k}) \right] dV = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^{k}} (\rho U^{k}) = 0 .$$
 (5.52)

La variation temporelle de la densité est donc donnée par la divergence de son flux. C'est l'expression classique d'une loi de conservation en dynamique des milieux continus.

## 5.2.2 Le flux d'impulsion

On peut évidemment appliquer la même logique au transport de quantités autres que la masse, y compris des quantités vectorielles. Toujours dans l'espace 3D, considérons par exemple le transport de l'impulsion  $\mathbf{P}$ . La quantité transportée par unité de temps à travers un élément de surface dS s'écrit maintenant:

$$\frac{\mathrm{d}P^{j}}{\mathrm{d}t} = P^{j}U^{k}n_{k}\mathrm{d}S , \qquad j = 1, 2, 3 .$$
(5.53)

La Figure 5.6 illustre l'idée, ici avec dS dans le plan yz. Les flèches vertes indiquent la composante-y de l'impulsion, transportée ici à travers la surface bleue le long de la ligne d'écoulement (ou trajectoire) tracée en rouge; donc  $j \equiv y$  et  $k \equiv x$  dans l'éq. (5.53). C'est la même logique que pour le flux masse considéré précédemment (qui ici s'écrirait  $\rho U^x n_x$ ). Dans un contexte d'écoulement fluide, la composante  $P_y$  transportée est associée à la composante  $U_y$  de la vitesse de l'écoulement, soit tangentielle à la surface. La viscosité du fluide produirait alors une forme de "friction" qui exercerait une force sur la surface en bleu dans la direction positive des y; le flux d'impulsion mesure bien l'action d'une force. Pour des orienta-



Figure 5.6: Représentation schématique du flux d'impulsion  $P_y$  (flèches vertes) produit par un écoulement ou trajectoire (en rouge) traversant une surface de dimension  $\Delta y \times \Delta z$  orientée dans le plan yz. Ce flux d'impulsion à travers la surface bleue est donnée par le produit  $U^x P^y$ , la normale **n** étant orientée ici dans la direction-x négative (voir texte).

tions arbitraires de  $\mathbf{U}$  (et donc  $\mathbf{P}$ ) par rapport à la surface, on aura en général trois composantes transportées à travers cette surface. Définissons

$$T^{jk} = P^j U^k , \qquad j,k = 1,2,3 .$$
 (5.54)

Physiquement, ceci correspond à la quantité de la *j*-ième composante de l'impulsion transporté à travers une surface perpendiculaire à la direction  $x^k$  par unité de temps; cet objet géométrique doit être un tenseur de rang deux car deux directions spatiales sont impliquées: l'orientation du vecteur impulsion et celui de la trajectoire. Le taux de variation de l'impulsion totale du volume se calculerait alors encore une fois en intégrant la projection de  $T^{jk}$  sur la normale locale en chaque point de la surface:

$$\int_{V} \frac{\partial P^{j}}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V} P^{j} dV = -\oint_{S} T^{jk} n_{k} dS , \qquad j = 1, 2, 3 .$$
(5.55)

Une variation temporelle de l'impulsion indique l'action d'une force, donc le membre de droite est une force, mesurée en Newton. La quantité  $T^{jk}$  est donc une force par unité de surface, appelée **stress** en mécanique des milieux continus. Notons déjà que les composantes diagonales de ce tenseur déterminent la force agissant perpendiculairement à la surface, soit ce qu'on appelle habituellement en hydrodynamique la **pression**.

## 5.2.3 Le tenseur de stress-énergie

Revenant finalement à l'espace-temps, on suit la même logique, mais cette fois en termes des quadrivecteurs vitesse et impulsion. En anticipation de ce qui va suivre, il est préférable de travailler en terme de la densité d'impulsion, soit l'impulsion par unité de volume:  $\mathbf{p} = \rho \mathbf{u}$ . On définit donc  $T^{\mu\nu}$  comme étant le flux de la  $\mu$ -ième composante de cette quadri-impulsion par unité de surface à travers une hypersurface (3D) perpendiculaire à la direction  $x^{\nu}$  de l'espace-temps:

$$T^{\mu\nu} = p^{\mu}u^{\nu}$$
,  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ . (5.56) **TB §2.13**

Cette quantité est encore une fois un tenseur (objet de rang géométrique 2), car sa grandeur dépend comme auparavant de l'orientation du vecteur quadri-impulsion et de celle de la trajectoire, telle que décrite par la quadrivitesse.

Notons déjà que puisque  $\mathbf{p} = \rho \mathbf{u}$ , le tenseur  $T^{\mu\nu}$  est clairement symétrique par définition, et que ses 9 composantes purement spatiales ( $\mu, \nu = 1, 2, 3$ ) correspondent à la version relativiste du tenseur des stress mécaniques introduit précédemment.

Il est important de bien saisir le sens des composantes "0" de ce tenseur<sup>5</sup>; comme  $\mathbf{u} = (\gamma, \gamma \mathbf{U})$ ,

- $T^{00} = p^0 u^0 = \rho \gamma^2$  est la densité de masse/énergie
- $T^{0k} = p^0 u^k = \rho \gamma u^k$  est le flux de masse/énergie à travers une surface perpendiculaire à  $x^k$ ;
- $T^{k0} = p^k u^0 = \rho u^k \gamma$  est la densité de la composante k de l'impulsion
- $T^{jk} = p^j u^k = \rho u^j u^k$  (=  $T^{kj}$ ) demeure le flux de la composante j de l'impulsion à travers une surface perpendiculaire à  $x^k$ ;

On peut demeurer perplexe quant au fait que les sens physiques de  $T^{0k}$  et  $T^{k0}$  soient différents, puisque  $T^{\mu\nu}$  est symétrique. Il faut se rappeler que  $T^{\mu\nu}$  décrit le flux de la  $\mu$ -ième composante de la quadri-impulsion à travers une hypersurface perpendiculaire à la direction  $x^{\nu}$ , comme le montre schématiquement la Figure 5.7 sous la forme de deux tranches 2D dans l'espace-temps. En haut, à  $x^1$  fixe, l'intégrale (somme) des trajectoires traversant la surface donne bien le nombre de trajectoires traversant une surface ( $\Delta x^2 \times \Delta x^3$ ) par unité de temps ( $\Delta x^0$ ); c'est la composante  $T^{01}$  du tenseur. La situation sur le diagramme du bas correspond à la composante  $T^{10}$ , soit le "flux" des trajectoires à travers une hypersurface  $x^0 \equiv t =$ constante, soit un volume spatial 3D. À t fixe, il n'y a pas de transport, et c'est ainsi que  $T^{10}$  mesure la densité de  $p^1$  dans un volume  $\Delta x^1 \times \Delta x^2 \times \Delta x^3$  à un temps  $x^0$  (= ct) donné.

Une vision plus heuristique de cette équivalence  $T^{01} = T^{10}$  résultant de la symétrie du tenseur de stress-énergie peut être approchée en reparamétrant comme suit la densité d'impulsion (pour  $k \equiv x$ ); posant  $\rho = m/(dxdydz)$ , on peut ainsi écrire:

$$T^{x0} = \text{densite impulsion} = \overbrace{\left(\frac{m\gamma dx/d\tau}{dx dy dz}\right)}^{p^x} \times \overbrace{\left(\gamma\right)}^{u^0} \equiv \underbrace{\underbrace{\left(\frac{m\gamma^2}{m\gamma^2}\right)}_{\text{Surf} \perp x}}_{\text{Surf} \perp x} = \text{flux energie} = T^{0x} ; \quad (5.57)$$

Avec un oeil sur la Fig. 5.6 pour la géométrie, examinez bien le premier terme à droite du " $\equiv$ ": on a une masse/énergie ( $m\gamma^2 = p^0 u^0$ ) divisée par une surface  $dy \times dz$  perpendiculaire à la direction x, et divisée par un intervalle de temps dt; c'est bien là un flux de masse/énergie à travers une surface perpendiculaire à la direction x. Voilà.

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Lecteurs de Schutz attention, la troisième ligne de son équation (4.21) devrait être  $\rho v^i/(1-V^2)$ ; notez aussi notre  $u^k$  correspond, dans sa notation, à son  $\gamma U^k$ .



Figure 5.7: Deux tranches bidimensionnelles de l'espace-temps montrant les trajectoires d'un groupe de particules (ou d'éléments de "fluide") de déplaçant à vitesse constante dans la direction  $x^1$ . Sur le diagramme du haut, le nombre de ligne intersectant la surface  $x^1$  =constante regroupe toutes les trajectoires qui croiseront cette surface dans un intervalle temporel  $\Delta x^0$ ; il s'agit bien ici d'un flux (quantité de quelque chose par unité de surface et de temps). En bas, la surface est à coordonnée temporelle  $x^0$  =constante. L'intersection des trajectoires avec cette surface, soit la quantité  $T^{k0}n_k dS$ , donne le nombre de particules (ou masse) présente dans le volume spatial 3D (ici  $dS = \Delta x^1 \times \Delta x^2 \times \Delta x^3$ ) à cette coordonnées temporelle;  $T^{k0}$  est donc bien d'une densité (quantité de quelque chose par unité de volume).

## 5.2.4 Exemple: un fluide froid au repos

Tout ça peut paraitre assez abstrait; travaillant pour le moment dans l'espace-temps pseudo-Euclidien de Minkowski (courbure nulle), considérons un nuage de poussière au repos (donc  $\gamma = 1$ ) auquel on peut associer une densité de masse  $\rho = Nm/\Delta V$ , pour N grains de masse m par unité de volume  $\Delta V$ . Dans ce repère, on a  $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 0)$  et donc  $\mathbf{p} = (\rho, 0, 0, 0)$ , et donc le seul élément non-nul du tenseur  $T^{\mu\nu}$  est

$$T^{00} = \rho \ . \tag{5.58}$$

Effectuons maintenant une transformation de Lorentz vers un repère prime se déplaçant à vitesse  $v/c \equiv \beta$ ; vu de ce repère, l'élément de volume subira une contraction de Lorentz dans la direction du déplacement, donc  $\Delta V' = \gamma^{-1} \Delta V$ ; le nombre de grains et leur masse au repos ne changent pas, mais vu du repère prime la masse augmente d'un facteur  $\gamma$ . Donc la densité mesurée du repère prime devient  $\rho' = \rho \gamma^2$ , et donc:

$$(T^{00})' = \rho \gamma^2 = T^{00} \gamma^2 , \qquad (5.59)$$

ce qui est exactement la transformation de Lorentz attendue pour l'élément  $T^{00}$  du tenseur  $T^{\mu\nu}$  si tous ses autres éléments sont nuls.

Dans cet exemple le seul effet de la poussière est sa contribution à la densité de masse-énergie; c'est une bonne approximation si les interactions (collisions) entre les grains de poussière sont rares, et donc n'affectent pas sa dynamique. Ce sera en général le cas pour un "fluide" très froid. Si les collisions entre les constituants microscopiques du fluide sont importantes, un effet additionnel fait son apparition: la pression (force par unité de surface). Sans le démontrer (voir références en fin de chapitre), si les processus dissipatifs sont négligés (conductivité thermique, viscosité, etc, définissant le **fluide parfait**), le tenseur de stress-énergie dans un repère au repos comme auparavant, devient:

$$T^{00} = \rho$$
,  $T^{11} = T^{22} = T^{33} = p$ , (5.60)

où p est la pression (pas l'impulsion!), en principe exprimable en fonction de la densité et de la température via une équation d'état. Toujours sans le démontrer (voir références en fin de chapitre), dans le cas le plus général d'un fluide toujours parfait mais maintenant en mouvement (possiblement à une vitesse relativiste), on écrirait:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^{\mu}u^{\nu} + p\eta^{\mu\nu} .$$
 (5.61)

Nous n'aurons pas à utiliser cette forme générale dans ce cours, on verra que ce sera déjà assez compliqué avec seulement la forme (5.60) ou même (5.58). En espace courbe, cette expression devient simplement:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^{\mu}u^{\nu} + pg^{\mu\nu} .$$
(5.62)

#### 5.2.5 Loi de conservation

Il s'agit maintenant d'écrire une loi de conservation sous forme tensorielle, valable dans un espace-temps courbe (ou pas). Travaillant d'abord dans l'espace pseudo-Euclidien de Minkowski, et en coordonnées cartésiennes, suivons la logique de notre équation de bilan de masse (§5.2.1), et considérons un volume V de forme arbitraire traversé par un "fluide" en mouvement. Dans un repère au repos par rapport au volume V, le contenu de masse-énergie  $\mathcal{E}$  de cet élément de volume est

$$\mathcal{E} = \int_V T^{00} \mathrm{d}V \ . \tag{5.63}$$

La variation temporelle de cette quantité,

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int T^{00} \mathrm{d}V = \int_{V} \frac{\partial T^{00}}{\partial t} \mathrm{d}V , \qquad (5.64)$$

ne peut encore provenir de qu'il y ait un flux net qui entre ou sorte du volume à cause du mouvement du fluide; on a vu que ce flux est décrit par les composantes  $T^{0k}$  du tenseur de stress-énergie. Encore une fois on écrirait donc une équation de bilan sous la forme:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = -\oint_{S} T^{0k} n_k \mathrm{d}S , \qquad (5.65)$$

où le signe "–" reflète l'orientation de la normale **n**, pointant par convention vers l'extérieur de la surface S délimitant le volume V. L'intégrand  $T^{0k}n_k$  correspond ici à la projection du flux sur cette normale. Appliquant le théorème de la divergence au membre de droite, et ramenant l'éq. (5.64) dans le portrait:

$$\int_{V} \left( \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0k}}{\partial x^{k}} \right) \mathrm{d}V = 0 , \qquad (5.66)$$

avec la somme implicite en k = 1, 2, 3. On retrouve ici l'équation de bilan exprimant la conservation de la masse obtenue à la §5.2.1, mais en version relativiste. Mais relativiste ou pas, encore une fois ici le volume V est de forme complètement arbitraire, et donc cette expression ne pourra en général être satisfaite que si l'intégrand lui-même est égal à zéro. Comme  $\partial T^{00}/\partial t \equiv \partial T^{00}/\partial x^0$ , on peut donc écrire:

$$\frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = 0 \ . \tag{5.67}$$

avec maintenant la somme implicite en  $\alpha = 0, 1, 2, 3$ . La même procédure peut être suivie pour établir des équations de bilan pour chacune des trois composantes spatiales de la quadriimpulsion, conduisant similairement à

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0 , \qquad i = 1, 2, 3 . \tag{5.68}$$

Combinant ceci à l'expression précédente on obtient finalement:

$$\frac{\partial T^{\beta\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = 0 , \qquad \beta = 0, 1, 2, 3 , \qquad [\text{Minkowski}]$$
(5.69)

La divergence du tenseur de stress-énergie est donc nulle, ce qui exprime la conservation de l'énergie-impulsion dans l'espace-temps Minkowskien<sup>6</sup>.

Et nous voici finalement arrivés à l'apothéose de tout ce long argument. La généralisation de l'expression ci-dessus à un espace courbe s'effectue tout simplement en remplaçant la dérivée partielle par la dérivée covariante:

$$\frac{\mathbf{D}T^{\beta\alpha}}{\mathbf{D}x^{\alpha}} = 0 \ . \tag{5.70}$$

Cette expression est non seulement valide dans les espaces courbes<sup>7</sup>, mais de surcroit c'est maintenant une équation tensorielle véritable, et donc valide dans tous les repères; et elle exprime toujours la conservation de l'énergie, cette fois en espace courbe !

$$T_{\rm EM}^{\beta\alpha} = \frac{1}{\mu_0} \left( F^{\beta\mu} F^{\alpha}_{\ \mu} - \frac{1}{4} g^{\beta\alpha} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \,,$$

TB §25.7

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>En présence de charges et courants électriques, en donc de champs électrique et magnétique, on devrait ajouter à  $T^{\beta\alpha}$  une contribution proportionnelle au tenseur des stress électromagnétique:

où  $mu_0$  est la perméabilité du vide, et  $F^{\mu\nu}$  le tenseur du champ électromagnétique (ou tenseur de Faraday). Mais nous ne considérerons pas ceci dans tout ce qui suit, c'est déjà assez compliqué comme ça...

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>On doit en fait composer ici avec une subtilité technique qui est loin d'être triviale si on veut établir une équation de bilan sous forme intégrale du genre de l'éq. (5.65), en espace courbe. Une intégrale de volume ou de surface est *non-locale*, et impliquerait ici le transport parallèle de  $T^{0k}$  le long de la surface. Ceci complique sérieusement non seulement le calcul, mais l'interprétation physique qu'on lui attribue. Voir l'excellente discussion à la section 25.7 de l'ouvrage de Thorne & Blanford cité en bibliographie du chapitre 1 pour en apprendre plus là-dessus.

## 5.3 L'équation du champ d'Einstein

Nous avons maintenant (et finalement) en main tous les morceaux requis pour écrire l'équation du champ d'Einstein. J'aimerais tant vous présenter une dérivation formelle de l'équation du champ d'Einstein à partir de "principes premiers", mais c'est impossible; l'équation du champ d'Einstein **est** le principe premier gouvernant la structure de l'espace-temps !

La recherche en histoire des sciences a bien démontré qu'oncle Albert lui-même est arrivé à sa **BG§5.3** justement fameuse équation du champ via a un processus très intuitif, et incluant un fort élément "esthétique" donnant souvent primauté à la (relative) simplicité physique et mathématique<sup>8</sup>. L'idée est d'écrire une équation ayant une mesure de la courbure au membre de gauche, et le tenseur de stress-énergie  $T^{\mu\nu}$  au membre de droite.

Revenant à l'équation de Poisson avec laquelle nous avons ouvert ce chapitre; il existe une analogie conceptuelle entre le potentiel gravitationnel de la mécanique Newtonienne, et notre tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  qui en absorbe le rôle en relativité générale, donc on veut un objet géométrique bâti en fonction du tenseur métrique, et de ses dérivées au moins jusqu'aux dérivées secondes. Le tenseur de Riemann satisfait à cette contrainte, mais est un tenseur de rang 4, tandis que  $T^{\mu\nu}$  est de rang deux. Listons nos contraintes; le tenseur recherché:

- 1. doit s'annuler en espace-temps Minkowskien
- 2. doit être construit à partir du tenseur de Riemann et possiblement du tenseur métrique
- 3. doit être linéaire par rapport à Riemann et à la métrique.
- 4. doit être de rang deux et symétrique
- 5. doit être de divergence nulle

On ne le démontrera pas ici, mais la quantité suivante est la plus générale satisfaisant à ces conditions:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$
, (5.71) **MTW§17.1**

où  $R_{\mu\nu}$  est le **tenseur de Ricci**, résultant de la contraction du tenseur de Riemann:

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} , \qquad (5.72)$$

et R est le scalaire de Ricci, obtenu en contractant le tenseur de Ricci:

$$R = R^{\alpha}_{\alpha} , \qquad (R^{\alpha}_{\beta} = g^{\alpha\gamma} R_{\gamma\beta}) . \tag{5.73}$$

Le tenseur de Riemann étant symétrique par rapport à ses premier et troisième indices, le tenseur de Ricci s'en retrouve lui aussi symétrique. On définit donc le **tenseur d'Einstein** comme:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R . \qquad (5.74)$$

Avec la forme covariante du tenseur de stress-énergie donnée par

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}T^{\alpha\beta} , \qquad (5.75)$$

on écrit finalement:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} , \qquad (5.76)$$

où  $\kappa$  est la dernière constante à spécifier. On le fera en exigeant que dans la limite de faible gravité, on retombe sur notre équation Newtonienne (5.2). Cette contrainte impose  $\kappa = 8\pi$  (en

Ha§22.3 TB§25.1 BC85.3

 $<sup>^{8}</sup>$ Le mathématicien David Hilbert (1842–1943) a obtenu, indépendamment d'Einstein, et publié trois jours avant ce dernier, ce qu'on appelle maintenant l'équation de champ d'Einstein; sa dérivation était mathématiquement rigoureuse et basée sur un principe de moindre action. Les choix "intuitifs" ou "esthétiques" se transposent maintenant vers la définition de ladite action.

unités géométriques;  $\kappa = 8\pi G/c^4$  en unités physiques). On le démontrera sous peu<sup>9</sup>. La forme finale de notre **équation du champ d'Einstein** est ainsi:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{5.77}$$

Cette équation relie la courbure de l'espace-temps (coté gauche) à son contenu (coté droit) Misner Thorne et Wheeler ont introduit le terme **géométrodynamique** pour en capturer étymologiquement l'essence. Les  $G_{\mu\nu}$  et  $T_{\mu\nu}$  étant des tenseurs symétriques, il s'agit en fait ici d'un système de dix équations différentielles couplées pour les dix composantes indépendantes du tenseur métrique; très sportif à solutionner de manière générale! Cependant le tenseur d'Einstein satisfait aux **identités de Bianchi**:

$$\frac{\mathbf{D}G^{\mu\nu}}{\mathbf{D}x^{\nu}} = 0 \ . \tag{5.78}$$

Ceci pose quatre contraintes différentielles ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) qui permettent de réduire à six équations différentielles au lieu de dix.

Les identités de Bianchi assurent également que la divergence du tenseur de stress-énergie (voir éq. (5.70)) sera nulle, comme il se doit. Mais elles expriment quelque chose d'autre au moins aussi profond. L'équation de champ d'Einstein fournit 10 équations différentielles pour les 10 composantes indépendantes de  $g_{\mu\nu}$ . Mais la forme des composantes du tenseur métrique dépend du repère (système de quadri-coordonnées) choisi; cependant l'équation de champ est une équation tensorielle, qui n'a rien à cirer des systèmes de coordonnées: elle demeure valide dans tous les repères. Mais ce sont justements les quatre composantes "éliminées" via les identités de Bianchi qui nous donnent la liberté de spécifier librement le système de (quadri)coordonnées, sans contraindre les six composantes restantes, i.e., sans changer la physique! On verra comment au chapitre suivant, dans le contexte d'un exemple spécifique, soit la propagation des ondes gravitationnelles.

Néanmoins, et même en passant de 10 à 6 équations différentielles (nonlinéaires et couplées), la solution de (5.77) demeure passablement sportive, et les quelques solutions analytiques connues correspondent à des systèmes possédant des niveaux de symétrie très élevés; on étudiera en détail trois de ces solutions aux chapitres 7 et 8.

Un des exercices de la seconde série vous conduit à démontrer qu'une forme alternative mais équivalente de l'équation du champ d'Einstein peut s'écrire comme:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) , \qquad (5.79)$$

toujours en unités géométriques, et où  $T = T^{\alpha}_{\alpha}$  est la trace du tenseur de stress-énergie. Cette expression est surtout utile pour démontrer que dans le vide (tous les  $T_{\mu\nu} = 0$ , et donc T = 0 aussi), l'équation du champ se réduit ainsi à:

$$R_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{[dans le vide]} \tag{5.80}$$

## 5.4 La limite Newtonienne

La limite dite **Newtonienne** de la relativité générale (codée "LimN" dans ce qui suit) combine en fait deux situations limites:

- faible gravité,
- vitesses non-relativistes.

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Lecteurs de Barrau & Grain prenez note: ces auteurs utilisent c = 1 mais ne travaillent pas en unités géométriques, donc pour eux  $\kappa = 8\pi G$ .

La première de ces limites revient à dire que l'espace-temps n'est que très légèrement courbé; on écrira donc le tenseur métrique sous la forme:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} , \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1 , \qquad (5.81)$$

où  $\eta_{\mu\nu}$  est notre bon vieux tenseur de Minkowski.

La limite des vites ses non-relativistes implique  $\beta \equiv V/c \ll 1$  et  $\gamma \simeq 1.$  La quadrivites se devient donc

$$\lim_{\beta \to 0} (\gamma, \gamma \mathbf{V}) = (1, \epsilon, \epsilon, \epsilon) , \qquad \epsilon \ll 1$$
(5.82)

ce qui implique la hiérarchie:

$$u^{i} \ll u^{0} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}x^{i}}{\mathrm{d}\tau} \ll \frac{\mathrm{d}x^{0}}{\mathrm{d}\tau} \qquad i = 1, 2, 3, \qquad [\mathrm{LimN}]$$
(5.83)

et donc également

$$\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau} \equiv \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \simeq 1 \ . \qquad [\mathrm{LimN}] \tag{5.84}$$

Ceci conduit également à une hiérarchie spécifique au niveau des composantes du tenseur de stress-énergie (7.19):

$$T^{00} \gg (T^{0i}, T^{i,0}) \gg T^{ij} \qquad i, j = 1, 2, 3 \qquad [LimN]$$
(5.85)

d'où on conclut que dans la limite non-relativiste le tenseur de stress-énergie est dominé par sa composante  $T^{00}$ , qui se réduit à celle obtenue précédemment pour de la "poussière" au repos:  $T^{00} = \rho$ . Autrement dit, le contenu énergétique de la masse au repos domine toutes les autres contributions au tenseur de stress-énergie.

Écrivons la seconde Loi de Newton  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  avec la force donnée par le gradient du potentiel gravitationnel  $\Phi$ :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} , \qquad i = 1, 2, 3 .$$
(5.86)

Du point de vue géométrodynamique maintenant, et sans force extérieure additionnelle, la seconde Loi de Newton s'exprime via notre équation géodésique (3.68). Celle-ci se simplifie grandement dans la limite Newtonienne. Allons-y par étape:

$$= -\Gamma^{i}_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} \qquad \text{[equation geodesique]} \tag{5.88}$$

$$-\Gamma_{00}^{i} \qquad \qquad [\operatorname{car} \, \mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau \simeq 1 \text{ et } \, \mathrm{d}x^{j}/\mathrm{d}\tau \ll 1] \qquad (5.89)$$

$$= -\Gamma_{i00} \qquad [\operatorname{car} g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}] \qquad (5.90)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial h_{0i}}{\partial x^{0}} \qquad [\text{Def } \Gamma_{\nu\mu\lambda} \text{ avec Eq } (5.81)] \qquad (5.91)$$
$$= \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{0}} \qquad [\text{car } d/d(ct) \ll d/dx^{i} \text{ si } v \ll c] \qquad (5.92)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial n_{00}}{\partial x^i} \qquad \qquad [\operatorname{car} d/d(ct) \ll d/dx^i \text{ si } v \ll c] \qquad (5.92)$$

Comparant le résultat de cette longue cascade à (5.86), on en conclut que

=

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} ; \qquad (5.93)$$

si on exige que

$$\lim_{r \to \infty} \Phi = 0 \qquad [\text{Point zero du potentiel}] \tag{5.94}$$

$$\lim_{r \to \infty} h_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{[espace - temps Minkowskien]} \tag{5.95}$$

MTW§17.4

alors (5.93) s'intègre à:

$$h_{00} = -2\Phi , \qquad (5.96)$$

et donc

$$g_{00} = -1 - 2\Phi \ . \tag{5.97}$$

Revenant aux unités physiques, à la surface de la Terre, on a  $\Phi/c^2 \sim 10^{-9}$ , et à la surface du Soleil  $\sim 10^{-6}$ . Clairement  $h_{00} \ll 1$  dans les deux cas, et on est donc confortablement dans la limite Newtonienne.

Nous avons donc réglé l'aspect cinématique de la limite Newtonienne. Passons maintenant au coté dynamique. En dynamique Newtonienne l'accélération relative entre deux particules situées à  $x^i$  et  $x^i + \xi^i$  s'écrirait comme

$$\frac{d^{2}\xi^{i}}{dt^{2}} = \frac{d^{2}(x^{i} + \xi^{i})}{dt^{2}} - \frac{d^{2}x^{i}}{dt^{2}} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^{i}}\Big|_{x^{j} + \xi^{j}} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^{i}}\Big|_{x^{j}} \qquad \text{[par eq. (5.86)]} = -\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial x^{j}\partial x^{i}}\xi^{j}.$$
(5.98)

Tandis qu'en espace-temps courbe, la même accélération relative est donnée par l'équation de la déviation géodésique (5.38); je vous laisse le soin de vérifier que dans la limite de faible gravité introduite ci-dessus, la dérivée covariante se réduit à la dérivée habituelle, et donc on a

$$\frac{D^2 \xi^{\mu}}{D\tau^2} \simeq \frac{d^2 \xi^i}{dt^2} \simeq -R^i_{0j0} \xi^j .$$
 (5.99)

Comparant à (5.98), on en conclut

$$R_{0j0}^{i} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^i} , \qquad (5.100)$$

et en contractant pour obtenir la composante 00 du tenseur de Ricci:

$$R_{00} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^i} \equiv \nabla^2 \Phi . \qquad (5.101)$$

Un exercice de la troisième série vous conduit à démontrer que dans la limite Newtonienne, la composante 00 de l'équation de champ (5.79) se réduit à

$$R_{00} = \frac{1}{2}\kappa\rho \ . \tag{5.102}$$

On déduit alors directement par la comparaison de ces deux dernières expressions:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{2} \kappa \rho \,\,, \tag{5.103}$$

ce qui nous ramène à l'équation de Poisson habituelle pour le potentiel gravitationnel  $\nabla^2 \Phi = 4\pi\rho$  (n'oublions pas G = 1 dans nos unités géométriques) en autant que l'on pose

$$\kappa = 8\pi \ . \tag{5.104}$$

C'est ainsi que le passage à limite Newtonienne fixe la constate apparaissant dans l'équation de champ d'Einstein. Caramba ! Et tiens justement, en parlant de constantes, on doit discuter d'une autre...

## 5.5 La constante cosmologique

La dérivation de l'équation du champ (5.77) est fondamentalement déterminée par les cinq contraintes énumérées en entrée de jeu à la §5.3. Il s'avère que si l'on omet la première de ces contraintes (la limite Minskowskienne), les quatre autres se retrouvent satisfaites par une quantité tensorielle ressemblant à un terme près à ce que nous avions écrit précédemment:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} , \qquad (5.105)$$

où  $\Lambda$  est appelée **constante cosmologique** (unités:  $1/L^2$ ). On se retrouve alors avec une équation géométrodynamique de la forme:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \;.$$
 (5.106)

Si on recalcule la limite Newtonienne de cette l'équation du champ avec constante cosmologique, au lieu de (5.102) on arrive à:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{2} \kappa \rho + \Lambda . \qquad (5.107)$$

Travaillant en coordonnées sphériques polaires, posant  $\Phi = 0$  à r = 0, et en l'absence de masse-énergie ( $\rho = 0$ ), cette expression s'intègre à:

$$\Phi(r) = \frac{\Lambda}{6}r^2 \ . \tag{5.108}$$

À ce potentiel correspond donc une force

$$\mathbf{F}_{\Lambda} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{\Lambda}{3} r \,\mathbf{e}_r \,\,. \tag{5.109}$$

Cette force représente une déviation par rapport au comportement en  $1/r^2$  de la gravité Newtonienne, devenant en principe de plus en plus prononcée à mesure que r est grand. L'observation de galaxies binaires indique que cette loi en  $1/r^2$  tient la route au niveau de précision des mesures jusqu'à des échelles de distances de l'ordre de  $10^{21}$  m; ce résultat se traduit en une limite très stricte sur la grandeur de la constante cosmologique:  $|\Lambda| < 10^{-50}$  m<sup>-2</sup> ! L'effet serait absolument négligeable et indétectable par mesure de la gravité dans le système solaire (ou même autour d'un trou noir); mais on verra que son effet peut être ressenti —et peut-être même mesuré— aux échelles cosmologiques.

Reécrivons l'éq. (5.106) sous la forme trivialement équivalente:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \left( T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{8\pi} g_{\mu\nu} \right) \tag{5.110}$$

et assignons une interprétation physique du terme en  $\Lambda$ : même dans le vide ( $T_{\mu\nu} = 0$  au coté droit), on mesure une courbure (coté gauche) non-nulle! Fidèle à l'esprit de la géométrodynamique, on ne peut alors que conclure que l'on doive associer un contenu énergétique au vide, plus spécifiquement une densité d'énergie donnée par:

$$\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi} \ . \tag{5.111}$$

Aussi ridicule que ceci puisse sembler à prime abord, les observations cosmologiques discutées au chapitre 7 suggèrent  $\Lambda \neq 0$ , mais très petit: ~  $10^{-53} \text{ m}^{-2}$  !! Ceci correspond à une densité de masse (au repos) d'un proton par mètre cube, ce qui est  $10^6$  fois moins que la densité du milieu interstellaire<sup>10</sup>.

La version 1915 de l'équation de champ introduite par Einstein était sans constante cosmologique. Mais en 1917 Einstein lui-même a opté de l'introduire dans le portrait, pour une raison que nous discuterons en détail au chapitre 7. C'était une très très mauvaise décision, qu'il a subséquemment vraiment beaucoup beaucoup regretté; ça aussi on y reviendra au chapitre 7.

Ca §4.5

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>Ce qui précède offre un excellent petit exercice de conversion des unités géométriques au unités SI; essayez!

## 5.6 Lentilles gravitationnelles

Parmi les test classiques de la relativité générale discutés au chapitre 4, la déviation de la lumière est certainement celui qui démontre le plus clairement la courbure de l'espace-temps. La déviation de la lumière est également observée aux échelles beaucoup, beaucoup plus grandes que le système solaire, via le phénomène des lentilles gravitationnelles. Il s'agit encore ici d'une spectaculaire démonstration de la courbure de l'espace-temps. Une autre des grandes prédiction de la théorie, soit les ondes gravitationnelles, est traitée en détail au prochain chapitre.

Les grands relevés contemporains de l'univers comme le SDSS (Sloan Digital Sky Survey) ont bien démontré que l'univers est rempli de galaxies, regroupées en amas de tailles diverses<sup>11</sup>. Chaque amas et chaque galaxie induit une courbure dans l'espace temps, parfois très substantielle dans le cas de galaxies massives et/ou d'amas compacts de galaxies. Il existe donc une probabilité relativement élevée que des galaxies ou des amas d'avant-plan agissent comme **lentilles gravitationnelles** concentrant vers la Terre la lumière provenant de galaxies d'arrière-plan, via l'effet de déviation de la lumière que nous avons déjà étudié dans la métrique de Schwarzschild (Fig. 4.9).

Le calcul des images produites par effet de lentille gravitationnelle est très exigeant au niveau du temps de calcul, car il exige de solutionner l'équation géodésique pour tous les rayons lumineux provenant de l'objet imagé qui se retrouvent dans la ligne de visée de l'observateur une fois que la lumière a été déviée par l'objet courbant l'espace-temps pour produire l'effet de lentille. Deux conditions géométriques/physiques permettent cependant de simplifier grandement le calcul tout en produisant des résultats approximatifs mais très près des calculs exacts:

- 1. L'objet imageur (causant l'effet de lentille) est très compact, genre trou noir; et
- La distance entre l'objet imagé et l'objet imageur, et entre ce dernier et l'observateur, est beaucoup, beaucoup plus grande que la dimension (projetée sur le plan du ciel) de l'objet imagé.

La Figure 5.8 illustre la géométrie du problème. Deux objets d'arrière plan (A et B, cercles noirs) sont situés à une distance d d'un objet massif —disons ici un trou noir— déviant la lumière provenant de l'objet dans la direction de la ligne de visée (ligne pointillée) d'un observateur observant le trou noir de très très loin à droite. On a donc ici:

- 1. Un objet imageur situé à (x, y, z) = (0, 0, 0);
- 2. Un objet imagé A situé à (x, y, z) = (-d, 0, 0);
- 3. Un objet imagé B situé à (x, y, z) = (-d, r, 0);
- 4. Un observateur situé à (x, y, z) = (a, 0, 0), avec  $a \to \infty$ .

Considérons tout d'abord une situation où l'objet imagé (ici le A) est exactement sur la ligne de visée définie par l'observateur et l'objet imageur. Les deux rayons lumineux parvenant à l'observateur sont tracés en bleu et résultent d'une intégration de l'équation géodésique dans la métrique de Schwarzschild (voir §4.3.5). Ce sont ici les deux rayons originant en A qui, se déplaçant vers la droite, se retrouvent parallèles après leur déviation. Un observateur situé à très très grande distance à droite verrait donc, dans le plan du ciel, les deux images de l'objet indiquées par les deux points bleus suivant les projections rectilignes indiquées par les droites en tirets bleus. Mais on a ici symétrie sous rotation autour de la ligne de visée; en conséquence de quoi, dans le plan [y, z], l'image prendra la forme d'un anneau centré sur l'objet imageur. Les télescopes spatiaux permettent l'observation de ces structures annulaires, qui sont appelées **anneaux d'Einstein**. La Figure 5.9 en montre un exemple particulièrement frappant.

La symétrie axiale conduisant à la formation de l'anneau d'Einstein est perdue si l'objet imagé n'est pas sur la ligne de visée, comme l'objet B sur la Fig. 5.8, qui est situé à une distance r perpendiculairement à la ligne de visée. Il existe encore, dans le plan [x, y], deux trajectoires

 $<sup>^{11}\</sup>mathrm{Voir}$  l'animation des données SDSS dont un lien est fourni sur la page web du cours.



Figure 5.8: Géométrie de la formation d'image multiples par effet de lentille gravitationnelle, ici dûe à un trou noir situé à (x, y, z) = (0, 0, 0). Deux faisceaux lumineux émanant de chacun des objets A et B (cercles noirs) sont déviés de manière à devenir parallèles une fois passé le trou noir, et sont détectés par un observateur situé ici très très loin à droite le long de la ligne de visée (ligne pointillée horizontale). Les traits en tirets indiquent les positions apparentes des objets, telles que perçues par l'observateur. Si l'objet imagé est exactement sur la ligne de visée (comme le A), l'image prendra la forme d'un anneau concentrique à l'objet imageur, tandis que pour un objet situé hors de la ligne de visée (comme le B), deux images distinctes seront perçues (voir texte)

devenant parallèles à la ligne de visée après déviation, tracées ici en vert (image primaire) et en rouge (image secondaire). L'observateur situé à très très grande distance à droite verrait deux images distinctes de l'objet B, tel qu'indiqué par les points vert et rouge.

Dans la limite  $d \gg r$  où la distance entre l'objet causant l'effet lentille est beaucoup plus grande que la distance perpendiculaire r entre l'objet imagé et la ligne de visée (en pointillés sur la Fig. 5.8), les angles de déviation associés à la formation des images primaire et secondaire peuvent être approximés par:

$$\tan(\delta\phi) \simeq \frac{b-r}{d} \quad \text{image primaire}$$
(5.112)

$$\tan(\delta\phi) \simeq \frac{b+r}{d} \quad \text{image secondaire}$$
(5.113)

ceci revient effectivement à supposer que le rayon vecteur des périastres coincide avec celui du paramètre d'impact. Les paramètres d'impact correspondant aux deux trajectoires sont donc donnés par la solution des deux problèmes de recherche de racine suivants:

 $b - r - d \tan(\delta \phi) = 0$  image primaire (5.114)

$$b + r - d\tan(\delta\phi) = 0$$
 image secondaire (5.115)

Ces expressions sont en fait très nonlinéaires, en raison du fait que l'angle de déviation  $\delta \phi$  est lui-même fonction du parametre d'impact *b*; mais on a déjà calculé ça (voir §4.7 et Figure 4.16). On peut donc simplement interpoler ces résultats pour calculer  $\delta \phi(b)$  en fonction de *b*. Il faut cependant noter, que pour la configuration géométrique de la Fig. 5.8, l'angle de déviation ainsi calculé correspond à la moitié de l'angle de déviation  $\delta \phi_{dev}$  tel que défini sur la Figure 4.14.



Figure 5.9: Un anneau d'Einstein produit par la galaxie LRG 3-757, l'objet diffus jaunâtre au centre de l'image. L'objet transformé en anneau est une galaxie située loin derrière LRG 3-757, et presqu'exactement dans la ligne de visée. Image du télescope Hubble, en domaine public; téléchargée 02/18 depuis la page Wikipedia sur les lentilles gravitationnelles.

En Python, la fonction root\_scalar du module scipy.optimize fait l'affaire ici. La recherche de racines est ici simplifiée par le fait que le paramètre d'impact est bien borné:  $r < b < \infty$  pour l'image primaire, et  $\sqrt{27} < b < \infty$  pour l'image secondaire. La courbe de déviation de la Figure 4.16 étant très lisse, une interpolation de type spline cubique fonctionne très bien. La fonction CubicSpline du module Python scipy.interpolate est tout à fait appropriée ici.

En guise d'un premier exemple (artificiel mais très instructif), la Figure 5.10 montre l'image produite (en bas) quand un trou noir est placé devant un damier coloré (image du haut). La géométrie est ici la même que sur la Fig. 5.8, avec le trou noir situé sur la ligne de visée (x, 0, 0) allant de l'observateur au centre du damier, ce dernier étant perpendiculaire à la ligne de visée, soit dans le plan [y, z]. Deux images du damier apparaissent ici. L'image primaire est une distorsion du damier dans la direction radiale extérieure. L'image secondaire est formée plus près du trou noir, comme il se doit. Il est à noter que les imges des cases du damier situées le plus près du centre se retrouvent fortement étirées dans la direction angulaire (i.e. perpendiculaire à la direction radiale dans le plan [y, z]). Notons également que dans l'image secondaire, la périphérie du damier se retrouve le plus près du trou noir, i.e., l'image est inversée radialement. L'espace laissé en blanc entre l'image secondaire et l'ombre du trou noir contiendrait des anneaux concentriques de plus en plus petits rayons et largeur, correspondant aux images ternaires, quaternaires, etc., du damier; ces images n'ont pas été calculées ici.

La Figure 5.11 offre un second exemple, illustrant cette fois la distorsion d'un champ d'étoiles en arrière-plan par un trou noir en avant plan (d = 200M ici). L'étendue de l'horizon (r = 2M) est indiquée par le cercle gris. Les étoiles, positionnées ici aléatoirement à l'intérieur du carré en pointillés, sont indiquées par des cercles colorés vides, et leurs images par des cercles pleins de la même couleur. Pour un sous-ensemble d'étoiles, un trait vert relie l'étoile à son image primaire, et un trait rouge la relie à son image secondaire. On constate que la déviation des images primaire et secondaire conduit à une alternance d'anneaux plus brillants ou plus sombres



Figure 5.10: Déformation (image du bas) d'un damier (image du haut) placé dans le plan [y, z]à x = -d, en présence d'un trou noir en avant-plan à (x, y, z) = (0, 0, 0). La géométrie est la même que sur la Figure 5.8, avec ici d = 100M et un damier de largeur  $\pm 10M$  en y et z. Le disque gris indique l'horizon du trou noir. Notez l'inversion radiale de l'image secondaire (voir texte).



Figure 5.11: Déformation d'un champ d'étoiles d'arrière plan (cercles colorés vides, qui seraient invisibles ici) par un trou noir en avant-plan (horizon indiqué par le disque gris). Les étoiles sont positionnées aléatoirement à l'intérieur du carré en pointillés. On a relié un sous-ensemble d'étoiles (cercles vides plus épais) à leurs images par un trait vert (image primaire) et rouge (image secondaire), en assignant la même couleur à l'étoile et ses deux images. Noter comment les images secondaires se retrouvent presque toutes concentrées en un anneau circulaire centré sur le trou noir (voir texte). Voir aussi l'animation sur la page web du cours.

que l'arrière plan l'aurait été en l'absence du trou noir.

La Figure 5.12 offre un troisième exemple illustrant maintenant la distorsion des images primaires et secondaire d'une "galaxie spirale" par un trou noir en avant plan. Plus la galaxie est proche du trou noir, plus ses images sont compressées dans la direction radiale (ligne joignant la galaxie au trou noir), et étirée dans la direction angulaire (perpendiculairement à la ligne susmentionnée). Quand l'alignement est presque parfait (en A), on forme une structure annulaire correspondant à l'anneau d'Einstein (voir Fig. 5.9).

La Figure 5.13 illustre un autre effet de lentille gravitationnelle intéressant, soit le mouvement apparent, sur le plan du ciel, d'étoiles d'arrière-plan quand un trou noir (ou autre objet compact très massif) traverse le champ de vision. Les trajectoires apparentes pour les images primaires sont tracées pour une traversée diagonale du champ de vision par un trou noir (disque gris) en avant-plan. Les points colorés indiquent la position de chaque image primaire sur sa trajectoire apparente, au moment où le trou noir est en plein centre du champ de vision. Pour les étoiles dont la ligne de visée est située à plus d'une dizaine de rayons de Schwarzschild, la trajectoire apparente est quasi-circulaire, avec le rayon décroissant avec la distance perpendiculaire à la trajectoire du trou noir (trait gris). Cet effet de déplacement apparent est maintenant mesurable, et a été mesuré à quelques reprises, par les satellites astrométriques de haute précision. Voir l'article de Sashu et al. cité en bibliographie à la fin du chapitre pour un exemple spécifique à saveur locale.

Terminons avec la Figure 5.14, qui montre un autre exemple de lentille gravitationnelle observée aux échelles extragalactiques, baptisé bonhomme-sourire cosmique pour des raisons évidentes j'espère. Ici l'effet de lentille est produit par un amas de galaxies, dont la masse visible est dominée par les deux galaxies massives formant les yeux du bonhomme sourire. Il est alors un peu bizarre que les arcs lumineux soient si circulaires, et approximativement centrés sur un point quelquepart entre les deux galaxies. Qui plus est, la mesure du rayon apparent de l'anneau d'Einstein indique une masse plus de dix fois plus grande que les estimés les plus élevés des masses galactiques visibles, sur la base de leur luminosité observée.

On ne peut qu'en conclure que la majorité de la masse dans les amas de galaxies créant l'effet de lentille est sous la forme d'un halo approximativement sphérique de **matière sombre**. La nature physique de la matière sombre demeure un des grands mystères de l'astrophysique contemporaine; tout ce qu'on sait, c'est qu'elle contribue à la courbure de l'espace, mais est insensible aux interactions électromagnétiques, puisque les observations astronomiques indiquent clairement qu'elle n'absorbe ou disperse pas la lumière la traversant.

Revenant à la Figure 4.9, examinons (par exemple) la paire de rayons lumineux contigus rose et orange. Les suivant de la gauche vers la droite, on voit bien que le secteur angulaire défini par ces deux rayons se rétrécit de manière importante au passage du trou noir. Autrement dit, la lumière émise par un objet diffus (comme une galaxie) se retrouve concentrée dans une plus petite surface apparente sur le plan du ciel, tout comme le ferait une lentille optique habituelle; la luminosité apparente de l'objet émettant la lumière est donc amplifiée. Il devient donc possible d'observer des galaxies éloignées qui sinon seraient sous la limite de détection d'un instrument.

Cet effet d'amplification de la luminosité peut se produire entre des objets beaucoup plus petits que des galaxies. On parle alors de "**microlensing**", et ceci est observé dans notre galaxie, lorsqu'une étoile passe derrière un objet massif inobservable directement (trou noir, étoile à neutron, naine blanche, planète, etc.). La Figure 11.6 du Hartle montre un exemple d'un tel événement. Il y a espoir de peut-être détecter la matière sombre de cette manière, et en déduire certaines de ses propriétés. Également, des simulations montrent qu'il serait aussi possible de détecter des exoplanètes par effet de microlensing. Voir le site Web du NASA Exoplanet Science Institute, listé en bibliographie en fin de chapitre.

#### **Bibliographie:**

Plusieurs des développements tensoriels présentés dans ce chapitre suivent de près leur présentation au chapitre 5 du bouquin de Barrau & Grain (2006). Les aspects plus physiques de la discus-



Figure 5.12: Images déformées d'une pseudo-galaxie (cercles colorés vides, qui seraient ici invisibles) par effet de lentille gravitationelle dûe à un trou noir, pour différentes positions de la galaxie. Les images primaires et secondaires se forment le long de la ligne joignant le centre de la galaxie à celui du trou noir, l'image secondaire se formant du coté du trou noir opposée à celui de la galaxie et de l'image primaire. Si le trou noir est aligné avec la galaxie, les deux images forment un anneau circulaire centré sur le trou noir. Dans la limite où la galaxie est très éloignée du trou noir, l'image primaire fusionne avec la galaxie, et l'image secondaire disparait. Voir aussi l'animation sur la page web du cours.



Figure 5.13: Déplacement apparent des images primaires d'étoiles d'arrière plan suite au passage d'un trou noir (disque gris) en avant-plan. La géométrie est toujours la même que sur la Figure 5.8, avec ici d = 100M. Les points colorés indiquent la position apparente de chaque étoile au moment où le trou noir, se déplaçant du coin inférieur gauche au coin supérieur droit dans le plan [0, y, z], atteint le centre du diagramme (voir texte).

sion empruntent à diverses sections éparpillées dans le Hartle ou le Misner, Thorne & Wheeler, ou sont carrément de mon cru; y compris tous les petits calculs de lentilles gravitationnelles présentés à la §5.6.

La construction du tenseur de stress-énergie est discutée dans Hartle ainsi que dans Barrau & Grain (sections indiquées en marge des notes). Cependant j'ai particulièrement apprécié la présentation faite au chapitre 4 de l'ouvrage de Schutz cité au chapitre 1.

Pour une démonstration du fait que le tenseur d'Einstein  $G_{\mu\nu}$  est le seul tenseur de rang deux satisfaisant aux cinq contraintes énumérées d'entrée de jeu à la §5.3, voir:

Lovelock, D., J. Math. Phys., 13(6), 874 (1972).

Mon collègue Viktor Zacek a écrit il y a quelques années un excellent petit article de revue sur la matière sombre et sa détection, avec emphase sur les aspects reliés à la physique des particules, à un niveau très accessible. Publié dans un acte de congrès difficile à trouver, l'article est cependant disponible sur ArXiv:



Figure 5.14: Ce "bonhomme sourire" capturé en flagrant délit par le télescope Hubble résulte d'un effet de lentilles gravitationnelles multiples produites l'amas galactique J1038+4849. La masse visible de l'amas est dominé par la paire de galaxies elliptiques formant les yeux du bonhomme, mais sa masse totale est dominée par le halo de matière sombre dans lequel baigne l'amas. Les arcs lumineux sont des images, parfois multiples, de galaxies en arrière plan. Image Hubble en domaine public; téléchargée 02/18 depuis la page Wikipedia sur les lentilles gravitationnelles.

#### https://arxiv.org/pdf/0707.0472.pdf

Plus récent et un peu plus technique, et aussi recommandé par Viktor et disponible sur ArXiv, l'article de revue suivant par K. Garrett et G. Düda:

#### https://arxiv.org/pdf/1006.2483.pdf

La pages Wikipedia (en anglais) sur les lentilles gravitationnelles est intéressante, bien illustrée et inclut de nombreuses références, y compris à caractère historique:

### https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational\_lens

Malheureusement, en date de décembre 2018 son équivalent en français est beaucoup moins étoffé. Sur la détection des exoplanètes par microlensing, voir:

```
nexsci.caltech.edu
```

Terminons cet Annexe avec une autre petite "plug" locale, soit la mesure astrométrique de la déviation de la lumière provenant d'une étoile d'arrière plan non pas par un trou noir, mais par une naine blanche:

Sahu, K.C., Anderson, J., Casertano, S., et 12 co-auteurs (dont Pierre Bergeron Yé!), Science, **356**, 1046–1050 (2017).



Albert Einstein (1879-1955)



Joseph Weber (1919–2000)



Kip Thorne (1940–)

R223.tex, May 6, 2023

## Chapitre 6

# Les ondes gravitationnelles

Prédites mais jugées indétectables par Oncle Albert lui-même en 1918, la détection des ondes gravitationnelles par l'expérience LIGO (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory) en 2015 a valu aux architectes du projet le Prix Nobel de physique en 2017. Votre lecture de la semaine couvre (entre autre) les aspects historiques de cette découverte, qui, littéralement, ouvre une nouvelle fenêtre sur l'Univers.

## 6.1 Linéarisation des équations du champ

La procédure de linéarisation introduite dans ce qui suit reprend effectivement, mais de manière plus formelle, la définition du régime de faible gravité déjà rencontré à la §5.4.

### 6.1.1 Le tenseur métrique

Le point de départ consiste à exprimer le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  encore une fois sous la forme

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} , \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1 ,$$
 (6.1)

où  $\eta_{\mu\nu}$  est notre bon vieux tenseur de Minkowski. Il faut maintenant voir ceci comme **linéarisation** du tenseur métrique; l'idée est de substituer l'expression ci-dessus dans l'équation de champ d'Einstein, et d'en éliminer tous les termes d'ordre 2 ou plus en  $h_{\mu\nu}$ ; ceci a l'immense avantage de rendre les équation du champ **linéaires** en  $h_{\mu\nu}$ .

Notons que sous cette approximation, monter ou descendre un indice sur une quantité impliquant  $h_{\mu\nu}$  se fait à l'aide du tenseur de Minkowski, puisque (e.g.):

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}h_{\nu}^{\alpha} \tag{6.2}$$

$$= \eta_{\mu\alpha}h_{\nu}^{\alpha} + \underbrace{h_{\mu\alpha}h_{\nu}^{\alpha}}_{\text{ordre 2}}$$
(6.3)

$$= \eta_{\mu\alpha}h_{\nu}^{\alpha} . \tag{6.4}$$

Rappelons également que dans le cas du tenseur de Minkowski,  $\eta^{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu}$ , i.e., les formes contravariante et covariante sont identiques au niveau de la valeur des composantes.

## 6.1.2 Les coefficients de connexion

Remontant à la définition des coefficients de connexion en fonction du tenseur métrique, soit l'éq. (3.52), on en déduit assez immédiatement que

$$\eta^{\lambda\alpha}\Gamma_{\alpha\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\eta^{\lambda\alpha}}{2} \left[ \frac{\partial h_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial h_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right]$$

PHY-3070, Relativité 2, Paul Charbonneau, Université de Montréal

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial (\eta^{\lambda \alpha} h_{\alpha \mu})}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial (\eta^{\lambda \alpha} h_{\alpha \nu})}{\partial x^{\mu}} - \eta^{\lambda \alpha} \frac{\partial h_{\mu \nu}}{\partial x^{\alpha}} \right]$$
$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial h_{\mu}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial h_{\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h_{\mu \nu}}{\partial x_{\lambda}} \right] . \quad [\text{ordre 1}]$$
(6.5)

### 6.1.3 Tenseurs de Riemann et de Ricci

Le tenseur de Riemann à l'ordre 1 suit immédiatement de l'équation (5.17):

$$\begin{aligned}
R^{\lambda}_{\mu\sigma\nu} &= \eta^{\lambda\alpha}R_{\alpha\mu\sigma\nu} \\
&= \frac{\eta^{\lambda\alpha}}{2} \left( \frac{\partial^2 h_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\sigma}} + \frac{\partial^2 h_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\sigma}} - \frac{\partial^2 h_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\alpha}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 (\eta^{\lambda\alpha} h_{\alpha\mu})}{\partial x^{\nu} \partial x^{\sigma}} + \frac{\partial^2 (\eta^{\lambda\alpha} h_{\alpha\nu})}{\partial x^{\mu} \partial x^{\sigma}} - \frac{\partial^2 (\eta^{\lambda\alpha} h_{\alpha\sigma})}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \eta^{\lambda\alpha} \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\alpha}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 h^{\lambda}_{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\sigma}} + \frac{\partial^2 h^{\lambda}_{\nu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\sigma}} - \frac{\partial^2 h^{\lambda}_{\sigma}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma} \partial x_{\lambda}} \right) , \quad \text{[ordre 1]} \quad (6.6)
\end{aligned}$$

et le tenseur de Ricci de la contraction de ce dernier par rapport aux indices  $\lambda$  et  $\sigma$ :

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$$
  
=  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 h^{\lambda}_{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} + \frac{\partial^2 h^{\lambda}_{\nu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 h^{\lambda}_{\lambda}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda} \partial x_{\lambda}} \right) .$  [ordre 1] (6.7)

## 6.1.4 Équation du champ d'Einstein

Un des exercices de la seconde série vous a conduit à démontrer que l'équation du champ peut s'exprimer sous la forme alternative donnée par l'éq. (5.79). Sous sa forme covariante cette expression devient (en unités géométriques):

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \underbrace{\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}g_{\mu\nu}\right)}_{S_{\mu\nu}} .$$
(6.8)

Si on utilise l'équation (6.7) pour le membre de gauche, alors on doit supposer qu'ici  $T_{\mu\nu}$  et  $T = T^{\alpha}_{\alpha}$  sont également des quantités d'ordre 1; et donc, à l'ordre 1, on est en droit d'écrire

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \underbrace{\frac{T}{2} \eta_{\mu\nu}}_{\text{ordre 1}} - \underbrace{\frac{T}{2} h_{\mu\nu}}_{\text{ordre 2}}$$
$$= T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} \eta_{\mu\nu} . \quad \text{[ordre 1]}$$
(6.9)

L'équation de champ d'Einstein à l'ordre 1 est donc:

$$\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda} \partial x_{\lambda}} + \frac{\partial^2 h_{\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 h_{\mu}^{\lambda}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 h_{\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} = -16\pi S_{\mu\nu} , \qquad \text{[ordre 1]} . \tag{6.10}$$

Notez le changement dans l'ordre des termes au coté gauche par rapport à (6.7), responsable de l'apparition du signe "–" sinon suspect au coté droit ! Le second terme au membre de gauche est une dérivée seconde d'un scalaire (la trace du tenseur  $h^{\nu}_{\mu}$ ). Le théorème de Schwarz

nous permet d'inverser l'ordre des dérivées comme bon nous semble. Ceci permet de réécrire l'éq. (6.10) sous la forme équivalente:

$$\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda} \partial x_{\lambda}} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left( \frac{\partial h_{\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left( \frac{\partial h_{\mu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} \right) = -16\pi S_{\mu\nu} . \quad \text{[ordre 1]} \quad (6.11)$$

Supposons pour l'instant que l'on puisse poser

$$\frac{\partial h_{\mu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} = 0 , \qquad \text{[ordre 1, jauge harmonique]}$$
(6.12)

ceci demeurant valide sur  $\mu \rightarrow \nu$ ; Si cette expression tient la route, alors les deux termes entre parenthèses au membre de gauche de l'équation de champ (6.11) s'annulent! Ce qui nous laisse:

$$\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda} \partial x_{\lambda}} = -16\pi S_{\mu\nu} , \qquad \text{[ordre 1, jauge harmonique]}$$
(6.13)

ce qui représente une substantielle simplification par rapport à l'éq. (6.11). L'imposition de l'éq. (6.12), en fait ici un système de quatre équation couplées ( $\mu$  étant un indice libre), revient à faire un choix de jauge, dans le cas présent la jauge dite harmonique (ou parfois de Lorenz<sup>1</sup>).

### 6.1.5 Choix de jauge

Vous avez déjà rencontré la notion de jauge en électromagnétisme. Partons, comme il se doit, des équations de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_e / \varepsilon_0 , \qquad (6.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad (6.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \qquad (6.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} . \qquad (6.17)$$

Un champ magnétique **B** peut toujours s'exprimer en terme d'un potentiel vecteur **A** via  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . L'équation (6.15) est alors automatiquement satisfaite. La Loi de Faraday (6.16) devient

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 , \qquad (6.18)$$

qui sera automatiquement satisfaite si le terme entre parenthèses est le gradient d'une fonction scalaire: () =  $-\nabla\varphi$ , le "-" assurant que dans la limite électrostatique on retrouve bien la relation habituelle  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ . Substituant l'expression ci-dessus dans la Loi de Gauss (6.14) et dans la Loi d'Ampère (6.17), on arrive après un peu d'algèbre à

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\rho_e / \varepsilon_0 , \qquad (6.19)$$

$$\left(\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}\right) - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0 \mathbf{J} \ . \tag{6.20}$$

Ces deux équations ont l'air plutôt méchantes, mais il faut tout de même apprécier le fait qu'on est passé d'une représentation des équations de Maxwell impliquant deux champs vectoriels, **E** 

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Attention: Le Lorenz en question est le physicien/mathématicien danois Ludvig Lorenz (1829–1891), et non le physicien Néerlandais Hendrik Lorentz (1853–1928), co-récipiendaire du prix Nobel de physique 1902 et célèbre pour sa transformation.

et **B**, à un seul champ vectoriel **A** plus une fonction scalaire  $\varphi$ . Ah, si seulement on pouvait poser

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 , \qquad (6.21)$$

alors (6.20) et (6.19) se découplerait en deux équations d'onde, la première pour **A** avec **J** comme terme source, et la seconde pour  $\varphi$  avec  $\rho_e$  comme terme source. Ce qui serait une énorme simplification. Mais est-il possible d'imposer (6.21) ? Considérons les redéfinitions suivantes de **A** et  $\varphi$ :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\alpha} , \qquad \varphi' = \varphi + \beta .$$
 (6.22)

Pour que le champ physique **B** demeure inchangé, on doit avoir  $\nabla \times \boldsymbol{\alpha} = 0$ , d'où  $\boldsymbol{\alpha} = \nabla \lambda$ ; similairement, pour que **E** demeure inchangé, on doit avoir

$$\nabla \beta + \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \nabla \left( \beta + \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) = 0 , \qquad (6.23)$$

qui s'intègre à  $\beta = -\partial \lambda / \partial t$ , la constante d'intégration pouvant être absorbée dans  $\lambda$  sans changer  $\nabla \lambda$ . Donc nos redéfinitions deviennent:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \lambda , \qquad \varphi' = \varphi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} , \qquad (6.24)$$

formes valides pour n'importe quelle fonction  $\lambda$ . Substituant ces redéfinitions dans (6.21) on arrive à:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \left( \nabla^2 \lambda - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \right) = 0 .$$
 (6.25)

Ceci indique que si (6.21) n'est **pas** satisfaite (son membre de droite =  $f(\mathbf{x}, t)$ , disons, plutôt que zéro), il est toujours possible de redéfinir **A** et  $\varphi$  sans changer **E** ou **B** via une fonction scalaire satisfaisant encore une équation d'onde avec  $f(\mathbf{x}, t)$  comme source<sup>2</sup>:

$$\nabla^2 \lambda - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} = f(\mathbf{x}, t) . \qquad (6.26)$$

On se rappelle que la forme exacte de  $\lambda$  est arbitraire et que les champs physiques **E** et **B** n'en dépendent pas; donc on a pas vraiment besoin de solutionner cette équation, on n'a qu'à s'assurer que sa solution est possible; c'est le cas ici, car même pour un terme source dépendant explicitement du temps il est possible d'exprimer la solution de l'équation d'onde inhomogène en terme de la fonction de Green, ce qui fera apparaître une intégrale du terme source sur tout l'espace, avec l'intégrand évalué au temps retardé  $t - dr/c.^3$ .

L'analogie au développement de l'équation du champ en faible gravité devrait maintenant être apparent. Commencez par me comparer la structure des éqs. (6.11) et (6.20)! Supposer la validité de (6.12) est équivalent au choix de jauge (6.21) ci-dessus; et l'équivalent des redéfinitions (6.24) est un changement de coordonnées infinitésimal du genre:

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x) , \qquad (6.27)$$

où, en terme de magnitude, les fonctions  $\xi^{\alpha}(x)$  sont du même ordre que les  $h_{\mu\nu}$ , soit  $\ll 1$ . Sous une telle transformation le tenseur métrique se transformerait, comme d'habitude, selon:

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x^{\nu'}} g_{\gamma\delta}(x) . \qquad (6.28)$$

La substitution de (6.1) et (6.27) dans (6.28) conduit à:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\partial\xi_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\xi_{\nu}}{\partial x^{\mu}} . \qquad (6.29)$$

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>C'est d'ailleurs pour ça que le choix d'imposer (6.21) définit la jauge dite harmonique.

 $<sup>^{3}</sup>$ Merci à mon collègue Tom Bogdan pour avoir éclairé ma lanterne sur ce point plutôt technique.
qui est l'équivalent de (6.24) en électromagnétisme, avec les  $\xi^{\mu}$  jouant ici le rôle de  $\lambda$ . Tant que les  $\xi^{\mu}$  sont du même ordre que les  $h_{\mu\nu}$  ( $\ll$  1), l'éq. (6.29) nous indique que la linéarisation sera préservée.

L'idée sera donc de choisir ces  $\xi^{\mu}$  de manière à satisfaire à l'équation (6.12). Ce changement de coordonnées, décrit par le quadrivecteur  $\xi^{\mu}$  dans l'éq. (6.27) nous offre quatre degrés de liberté, précisément ce qui est requis pour pouvoir satisfaire aux quatre équations différentielles ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) décrites par les équations (6.12), qui lient linéairement les composantes du tenseur  $h_{\mu\nu}$ . Plus spécifiquement, il s'agit de substituer (6.29) dans (6.12), pour obtenir un système de 4 équations différentielles couplées impliquant les dérivées secondes des quatres  $\xi^{\mu}$ ; encore des équations d'onde! La solution de ce système revient donc à **choisir** le système de coordonnées dans le cadre duquel la linéarisation est effectuée, de manière à satisfaire les éqs. (6.12).

La solution d'un tel système d'EDP couplées, même si elles sont linéaires en  $\xi^{\mu}$ , en général c'est du sport. Mais en pratique, comme dans le cas électromagnétique on a pas vraiment besoin de solutionner ce système; on n'a qu'à s'assurer qu'il soit possible de le faire, et que l'équation (6.12) est satisfaite.

Et c'est ainsi qu'on arrive à l'équation (6.13). Il ne faut jamais perdre de vue que cette forme linéarisée simplifiée de l'équation du champ d'Einstein est maintenant liée à un choix spécifique de coordonnées, tel que fixé par la combinaison des éqs. (6.29) et (6.12). À partir de maintenant, on ne peut plus changer de repère comme bon nous semble!

## 6.2 Solutions ondulatoires

Revenons à nos moutons et considérons de plus près le membre de droite de l'équation (6.13); la sommation implicite sur l'indice  $\lambda$  implique que:

$$\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda} \partial x_{\lambda}} = -\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial (x^0)^2} + \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial (x^4)^2}$$
$$\equiv \Box h_{\mu\nu} , \qquad (6.30)$$

où  $\Box$  est l'opérateur D'Alembertien<sup>4</sup>, équivalent 4D du Laplacien habituel de l'espace 3D ( $\nabla^2$ ). Revenant aux coordonnées cartésiennes et temporairement aux unités physiques complètes:

$$\Box = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 .$$
(6.31)

Clairement l'action de l'opérateur D'Alembertien sur une quantité dépendant des (quadri)coordonnées produira quelque chose ressemblant dangereusement à une équation d'onde! L'éq. (6.13) est donc une équation d'onde avec  $S_{\mu\nu}$  agissant comme une source. Loin (dans l'espace-temps) de la source, on aura donc:

$$\Box h_{\mu\nu} = 0 \ . \tag{6.32}$$

Notez bien que ceci n'est pas une équation tensorielle véritable! On pose maintenant une solution de type onde plane:

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(ik_{\alpha}x^{\alpha}) , \qquad (6.33)$$

où le **tenseur de polarisation**  $A_{\mu\nu}$  mesure l'amplitude de l'onde, et de dépend donc pas des  $x^{\alpha}$ . Comme le facteur exponentiel est une quantité scalaire, cette expression *est* une équation tensorielle véritable, contrairement à (6.32). Il s'agit maintenant de substituer ceci dans (6.32).

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Si le signe "–" devant la dérivée temporelle vous tracasse, rappelez-vous que  $dx_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta} dx^{\beta}$ , d'où  $\partial x_0 = -\partial x^0$ .

Il faut bien faire attention ici à la forme de coordonnées par rapport auxquelles on dérive, c.-à-d. covariante vs contravariante; le résultat de cette substitution conduit à

$$k^{\alpha}k_{\alpha} = 0 av{6.34}$$

indiquant que le vecteur d'onde est de mesure nulle, comme celui d'un photon:

#### L'onde gravitationnelle se déplace à la vitesse de la lumière

#### 6.2.1 Relation de dispersion

Comme avec la lumière, on identifie la composante "0" du quadrivecteur d'onde avec la fréquence  $\omega$  de l'onde, et les 3 composantes spatiales avec le vecteur d'onde habituel **K**; la mesure nulle  $k^{\alpha}k_{\alpha} = 0$  implique donc (avec un bref retour aux unités physiques):

$$\omega^2 = c^2 K^2 , \qquad K^2 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} . \tag{6.35}$$

Cette **relation de dispersion** indique que toutes les longueurs d'ondes se déplacent à la vitesse de la lumière. Cette onde est ici non-dispersive, car

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}K} = \text{constante} ; \qquad (6.36)$$

La forme d'un train d'onde est donc conservée durant sa propagation.

#### 6.2.2 États de polarisation

L'amplitude de l'onde, telle que décrite par le tenseur  $A_{\mu\nu}$ , implique potentiellement 10 coefficients (complexes), car ce tenseur se doit d'être symétrique puisque  $h_{\mu\nu}$  l'est aussi. Cependant notre choix de jauge est associé à une transformation (6.27) impliquant les quatre "degrés de liberté"  $\xi^{\mu}$ . Le choix spécifique des  $\xi^{\mu}$  associé à notre choix de jauge supprime donc quatre degrés de liberté, ce qui impose déjà que le tenseur de polarisation ne puisse impliquer plus que 10 - 4 = 6 coefficient indépendants.

De surcroit, notre solution en onde plane (6.33) est une équation tensorielle véritable, mais on veux l'utiliser comme solution à une équation d'onde (6.32) qui elle ne l'est pas; il faut donc restreindre l'espace des solutions au sous-ensemble satisfaisant à l'équation de jauge. Cette contrainte est obtenue en substituant (6.33) dans (6.12), ce qui conduit à la relation

$$k_{\alpha}A^{\alpha}_{\mu} - \frac{1}{2}k_{\mu}A^{\alpha}_{\alpha} = 0$$
,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . (6.37)

Ceci représente quatre équations de contraintes, qui conjointement suppriment quatre autres degrés de liberté dans le tenseur de polarisation  $A_{\mu\nu}$ ; ce dernier ne peut plus compter que 6-4=2 coefficient indépendants.

À ce stade la **direction** de propagation de l'onde peut être spécifiée à notre guise (rien à voir avec le choix de jauge); supposons que l'onde se déplace dans la direction-z; on a donc

$$k^{\alpha} = (\omega, 0, 0, k) . \tag{6.38}$$

L'idée est maintenant de substituer ceci dans (6.37), et de spécifier arbitrairement 4 composante  $A^{\alpha}_{\mu}$ , fixant ainsi les quatre degrés de libertés associés à  $(6.37)^5$ . Tel que démontré au tableau en classe, si on pose

$$A^0_{\mu} = 0 , \qquad \mu = 0, 1, 2, 3 , \qquad (6.39)$$

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Conceptuellement, ceci est équivalent à solutionner formellement le système de 4 EDOs couplées d'ordre 1 décrit par (6.12), qui impliquerait 4 constante d'intégrations; la spécification de celles-ci est équivalente à choisir 4  $A^{\alpha}_{\mu}$  parmi les 10 apparaissant dans (6.37).

l'éq. (6.37) nous conduit à conclure que la forme la plus générale du tenseur de polarisation devient:

$$A_{\mu\nu} = \begin{cases} t & x & y & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ y \\ z \\ z \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \end{cases}$$
(6.40)

où les coefficients a et b—nos deux derniers degrés de liberté irréductibles— décrivent l'amplitude des deux états de polarisation de l'onde gravitationnelle, traditionnellement dénotés "+" pour le coefficient a, et "×" pour le coefficient b:

$$A_{\mu\nu}^{(+)} = \begin{pmatrix} t & x & y & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ y \\ z & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_{\mu\nu}^{(\times)} = \begin{pmatrix} t & x & y & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
 (6.41)

Notons également que dans le deux cas la trace  $A^{\lambda}_{\lambda}$  de ces tenseur est nulle, de telle sorte que l'éq. (6.37) se réduit à

$$k_{\alpha}A^{\alpha}_{\mu} = 0 , \qquad (6.42)$$

indiquant que le produit intérieur du quadrivecteur onde et du tenseur de polarisation est nul; donc,

#### l'onde gravitationnelle est transverse

Avoir choisi un nombre d'onde  $k_{\alpha}$  orienté arbitrairement dans l'espace aurait conduit à une forme différente (et avec moins de zéros!) pour les tenseurs  $A^+_{\mu\nu}$  et  $A^{\times}_{\mu\nu}$ , mais ils n'auraient toujours impliqué que 2 degrés de liberté et auraient tous deux une trace nulle, de telle sorte que (6.42) demeurerait satisfaite, et ce comme il se doit: le caractère transverse d'une onde n'a rien à voir avec l'orientation de son vecteur d'onde !

Bref; une onde gravitationnelle de faible amplitude se déplaçant dans la direction-z produit une variation du tenseur métrique décrite en toute généralité par:

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \begin{cases} t & x & y & z \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & -a & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{i(kz - \omega t)} .$$
(6.43)

Les Figures 6.1 et 6.2 illustrent le déplacement d'une série de 16 masses test distribuées uniformément le long d'un cercle dans le plan [x, y], lors du passage d'une onde gravitationnelle de faible amplitude se déplaçant dans la direction-z, polarisée selon les modes + et ×, respectivement.

Ce qui oscille ici, c'est le tenseur métrique, en autres mots, c'est l'espace-temps même qui est déformé par le passage de l'onde. Les masses-test étant au repos et sujette à aucune autre force extérieure, elle demeurent chacune "fixées" à leurs quadricoordonnées  $x^{\alpha}$ , mais ces dernières oscillent au passage de l'onde!

Les deux états de polarisation + et  $\times$  définissent une base orthogonale qui peut être utilisée pour représenter n'importe quelle onde gravitationnelle plane (mais toujours de faible amplitude!) se déplaçant dans la direction-z.



Figure 6.1: Le mode de polarisation "+" des ondes gravitationnelles planes. L'onde se déplace ici dans la direction-z (perpendiculaire au plan de la page), et induit un déplacement des massestest dans le plan [x, y]. Le patron de déformation est illustré ici sur une période complète d'oscillation, en intervalle de phase  $\pi/4$ . Les traits rouge et vert indiquent la variation du chemin optique que mesurerait un interféromètre dont les bras seraient alignés avec les axes de polarisation de ce mode +.

## 6.3 La détection des ondes gravitationnelles

La détection des ondes gravitationnelles nous met face à un paradoxe (apparent): si tout l'espace-temps subit un cycle de contraction/expansion au passage d'une onde gravitationnelle, tous nos instruments de mesure subiront la même contraction/expansion, et cette dernière ne pourra donc pas être détectée !

Le paradoxe n'est apparent car en réalité, un instrument de mesure (comme une simple règle graduée) tient sa cohésion de la force électrostatique, qui domine grandement la force gravitationnelle; le passage d'une onde gravitationnelle va exercer un **stress mécanique** sur la règle, mais les force électrostatique y résisteront facilement, et la règle conservera ses dimensions.

En absence de forces extérieures cependant, le passage de l'onde produira une déformation de l'espace-temps en principe mesurable par interférométrie, en prenant avantage de la constance de la vitesse de la lumière. Il est cependant essentiel que les miroirs de l'interféromètre ne soient



Figure 6.2: Le mode de polarisation "×" des ondes gravitationnelles planes. Il s'agit du même patron de déformation que pour le mode +, mais pivoté de 45 degrés dans le plan [x, y]. Ici les traits colorés tracent le déplacement des deux masses test correspondantes. On voit bien que le déplacement des masses est orthogonal à celui associé au mode + (cf. Fig. 6.1).

**pas** fixés rigidement aux bras de l'interféromètre sinon, comme dans le cas de la règle décrit précédemment, la rigidité mécanique du système résistera à la variation du chemin optique qui serait autrement induite par le passage de l'onde gravitationnelle.

Pour éviter ce problème, on utilise des miroirs en suspension aux bouts des bras de l'interféromètre. Au passage de l'onde gravitationnelle, chaque miroir subit un déplacement harmonique déphasé, comme les points rouge et vert sur les Figs. 6.1; les traits indiquent la variation correspondante du chemin optique dans chaque bras de l'interféromètre. Ceci conduit à un déplacement mesurable du patron d'interférence.

Le déplacement des masses test est décrit mathématiquement par l'équation de la déviation géodésique (5.38), avec le tenseur de Riemann (à l'ordre 1) dépendant maintenant du temps via les éqs. (6.1) et (6.33).

## 6.4 Évidences et scénarios astrophysiques

Les premières tentatives sérieuses de détection d'ondes gravitationnelles remontent au début des annés 1960, et furent basées sur l'excitation résonante dans d'énormes cylindres métalliques suspendus. Piloté par Joseph Weber (1919–2000), l'idée était de détecter le pattern périodique de stress induit par le passage d'un train d'ondes gravitationnelles produit au moment de la formation d'une étoile à neutron ou trou noir lors d'une supernova. Les quelques détections proclamées par Weber se sont révélées être causées par des effets instrumentaux. Les détecteurs comme LIGO et LISA (voir ci-dessous), cependant, pourraient maintenant en principe détecter les ondes gravitationnelles produites par une supernova (relativement) rapprochée, c'est-à-dire dans notre groupe local de galaxies.

#### 6.4.1 Ralentissement orbital de pulsars binaires

La première détection des ondes gravitationnelles, indirecte mais néanmoins convaincante, a été effectuée sur la base d'observations du pulsar binaire PSR B1913+16. La découverte de ce système binaire extrême a éventuellement mérité le Prix Nobel de Physique 1993 à ses deux protagonistes, Russel Hulse et Joseph Taylor. Chaque membre du système binaire est une étoile à neutron, un objet de masse stellaire mais extrêmement compact, produisant donc une courbure substantielle dans l'espace temps (viz. la Fig. 4.10!). L'étude du système, et en particulier le délai temporel (voir §4.7 des notes de cours) du signal radio émis par un des deux pulsar passant au voisinage du second, a permi d'en établir les paramètres orbitaux avec grande précision. Un suivi sur une trentaine d'années a démontré par la suite une variation de la période orbitale en accord quasi-parfait avec la perte d'énergie associée à l'émission d'ondes gravitationnelles dans un tel système. Voir la §23.7 du Hartle pour plus de détails.

#### 6.4.2 Coalescence d'objets compacts

Comme vous avez pu le lire dans le document de l'Académie des Sciences de Suède, l'émission d'ondes gravitationnelles durant les derniers instants précédant la coalescence de deux trous noirs en un seul, représente la première détection directe confirmée d'ondes gravitationnelles (voir la Figure 6.3). Le meilleur ajustement aux données de la première détection en septembre 2015 conduit à des masses de  $36^{+5}_{-4}$  et  $29^{+4}_{-4} M_{\odot}$ , résultant en la formation d'un trou noir de  $62^{+4}_{-4} M_{\odot}$ ; le tout à une une distance de 1.3 milliard d'années-lumière, ce qui est pas mal loin de la Voie Lactée! La différence entre les masses totales avant et après l'événement indique que l'énergie irradiée durant le processus de coalescence, la grande majorité sous la forme d'ondes gravitationnelles, est équivalente à environ  $3 \pm 0.5 M_{\odot}$  de masse au repos. L'augmentation en fréquence et amplitude est causée par l'inexorable rapprochement des deux trous noirs, l'énergie orbitale étant perdue dans l'émission d'ondes gravitationnelles. La fréquence du train d'ondes gravitationnelles est égale à deux fois la fréquence orbitale, et au moment de la coalescence on estime la puissance irradiée en ondes gravitationnelles à  $\sim 10^{52}$  W, soit passablement plus que la puissance émise en énergie électromagnétique par toutes les étoiles de l'Univers visible.

Le calcul de la forme du train d'onde est excessivement complexe, l'émission des ondes se faisant dans un régime hautement nonlinéaire, i.e. de très forte courbure, pour lequel la linéarisation des équations du champ ne tient vraiment pas la route; le calcul doit se faire par solution numérique des équations du champ d'Einstein, avec un terme source dépendant du temps en raison du mouvement orbital des deux objets s'apprêtant à coalescer.

Cette spectaculaire découverte rendue possible par le projet LIGO a été suivie par d'autres détections semblables, impliquant soit des trous noirs soit des étoiles à neutron. En date de janvier 2022, on compte sept de ces détections jugées significatives à un très haut niveau de confiance (voir site web ci-dessous). Il reste maintenant à souhaiter que ce succès facilite le financement d'une version spatiale, le projet LISA, également basé sur l'interférométrie, les miroirs suspendus de LIGO étant maintenant remplacés par une constellation de trois satellites orbitant en formation. Voir les sites webs listés en bibliographie ci-dessous.



Figure 6.3: La première détection, le 14 septembre 2015, d'un train d'ondes gravitationnelles produites par la coalescence de deux trous noirs. La détection du même train d'onde aux deux sites LIGO ne laisse aucun doute qu'il s'agit ici d'une détection positive. Les deux panneaux du haut montrent les signaux mesurés, ceux du centre les signaux prédits, ceux du bas les résidus (panneaux du haut moins ceux du centre). Image tirée de l'article par B.P. Abbott et al., *Phys. Rev. Lett.*, **116**, 061102 (2016).

#### **Bibliographie:**

Ce chapitre est basé en partie sur la section 5.4 de Barrau & Grain, ainsi que plusieurs sections et sous-sections éparpillées dans les chapitres 16, 21 et 22 de Hartle. J'y ai également introduit des éléments et élaborations supplémentaires, certaines de mon cru et d'autres tirées de l'ouvrage de Schutz cité en bibliographie au chapitre 1.

La page web suivante offre une liste, s'allongeant graduellement, de détections LIGO jugées significative de trains d'ondes gravitationnelles associées à la coalescence de paires de trous noirs et/ou étoiles à neutron:

https://www.ligo.org/detections.php

Sur lie projet d'une version spatiale de LIGO (LISA), voir le site web:

lisa.nasa.gov



Aleksandr Friedman (1888–1925)



Georges Lemaitre (1894–1966)



Howard Percy Robertson (1903–1961)

## Chapitre 7

# Cosmologie

"L'Univers [...] est une sphère infinie dont le centre est partout et la circonférence nulle part."

#### Giordano Bruno

*De immenso* (1591), paraphrasant Nicolas de Cues (*La Docte Ignorance*, 1440), luimême paraphrasant le *Livre des XXIV Philosophes*, par un auteur anonyme du 13<sup>e</sup> siècle.

Avec quatre siècles de recul cet énoncé, se retrouvant dans ouvrage polémique publié en l'an de grâce 1591, et ayant contribué à envoyer son auteur, Giordano Bruno (1548–1600), au bûcher de l'Inquisition romaine neuf ans plus tard, est préscient à un niveau presque troublant. Non content de poser un Univers infini, Bruno pousse l'audace à postuler l'existence d'une infinité de "mondes", peuplés d'entités pensantes, en complète analogie avec la Terre. Disons simplement que tout ça a plutôt mal passé lorsque confronté au narratif biblique de la création du monde, ou du moins à l'interprétation qui en était faite par les autorités ecclésiastiques du temps.

La Révolution Copernicienne, mise en branle en 1543 par la publication du modèle planétaire de Nicolas Copernic (1473–1543), n'avait rien changé à la taille supposée finie de l'Univers. Le modèle mathématique du mouvement planétaire de Claudius Ptolémé (ca. 100–170; rien à voir avec la dynastie pharaonique du même nom), fondation de l'astronomie mathématique pendant plus d'un millénaire, avait été élaboré sur les bases du modèle cosmologique d'Aristote (384– 322). Ce dernier positionnait la Terre immobile au centre de l'Univers, fixant les planètes (et le Soleil) sur des sphères concentriques rigides en rotation, cette rotation perdurant jusqu'à la dernière sphère extérieure où sont fixées toutes les étoiles (voir Figure 7.1). Avec la Terre supposée au repos au centre, cette sphère céleste doit donc tourner avec une période 24 heures afin d'expliquer le mouvement diurne de la voûte céleste. C'est d'ailleurs ce mouvement de révolution diurne qui, se transmettant par une forme de friction aux sphères planétaires intérieures, les entraine elles aussi en un mouvement de rotation autour de la Terre. Cet Univers fini n'en avait pas moins une taille assez substantielle; par exemple, au treizième siècle l'astronome Campanus de Navarre (ca. 1220–1296) estimait le ravon de la sphère céleste à l'équivalent de 100 million de kilomètres (un minuscule  $10^{-3}$  années-lumière!), valeur généralement acceptée par ses contemporains, et ce essentiellement jusqu'à Copernic, trois siècles plus tard.

Copernic chamboule tout ça en plaçant le Soleil au centre, et repositionne les planètes connues à l'époque en orbites concentriques selon leur ordre véritable. Il conserve cependant la sphère extérieure des étoiles fixes, délimitant la frontière de l'Univers (voir Figure 7.2). Un argument clef pour Copernic est de supposer que la Terre est imbue d'un mouvement de rotation diurne, ce qui élimine le besoin de faire tourner la sphère céleste en 24 heures, cette dernière étant maintenant supposée fixe. Copernic (et ses successeurs) apprécient particulièrement le fait que les périodes de rotation des sphères planétaires décroissent maintenant de manière



Figure 7.1: L'Univers d'Aristote, adopté par Ptolémé, et ayant formé la base cosmologique de la science Médiévale Européenne jusqu'à la Renaissance. Cet Univers est fini, la sphère externe des étoiles en marquant sa frontière. Dans ce système la Lune est la première "planète", et le Soleil la quatrième. Ce diagramme illustre également l'organisation concentrique des quatre éléments fondamentaux d'Aristote, Terre-Eau-Air-Feu.

continue du centre vers l'extérieur, tombant à zéro pour la sphère céleste. Kepler quantifie tout ça un siècle plus tard via sa troisième Loi, selon laquelle le carré de la période orbitale est proportionnel au cube de l'axe semi-majeur de l'orbite (maintenant elliptique, plutôt que circulaire de Ptolémé à Copernic inclusivement). La fixité de la sphère des étoiles est d'autant plus importante que Copernic doit supposer que le rayon de cette sphère est beaucoup plus grand que celui de l'orbite de Saturne, afin d'expliquer l'absence (à l'époque) de parallaxe stellaire que devrait causer le mouvement orbital de la Terre. L'échec de la détection de la parallaxe stellaire, même avec les instruments géants de Tycho Brahe dans la seconde moitié du seizième siècle, exige une sphère céleste d'un rayon au moins 1000 fois plus grand qu'estimé auparavant par les astronomes médiévaux sur la base du modèle d'Aristote/Ptolémé. Cet énorme rayon de la sphère stellaire aurait impliqué une vitesse de rotation gigantesque, si cette sphère se devait d'exécuter une révolution complète en 24 heures! Mais, malgré cette substantielle augmentation de la "taille" de l'Univers, il demeure fini chez Copernic autant que chez Aristote/Ptolémé.

Si le nouveau cosmos de Copernic demeure d'une étendue spatiale modeste par rapport aux déterminations modernes des distances des étoiles les plus rapprochées du Soleil, au niveau de son étendue temporelle le cosmos est d'une jeunesse difficile à concevoir aux standards modernes. Au dix-septième siècle, les estimés de l'âge de l'Univers jugés les plus fiables (du moins en Europe) relèvent encore d'une chronologie établie sur la base des grand textes sacrés. Ainsi en 1634 Jacques Auzolles de la Peyre (1571–1642), un des plus respectés chronologistes du



Figure 7.2: L'Univers de Copernic, dont les dimensions sont tout aussi finies que celui de Ptolémé. Cependant la sphère des étoiles, maintenant fixe, est supposée d'un rayon beaucoup plus grand que celui de la sphère externe de Ptolémé. On notera également la Lune orbitant la Terre.

siècle, fixe la création de l'Univers 5954 années auparavant. Avant de trop en rire, n'oublions pas que Newton lui-même, dans la seconde moitié de sa vie, a mis beaucoup d'efforts à établir une chronologie de l'Univers à partir de sources bibliques. Autres temps, autres moeurs...

L'idée de l'étendue infinie de l'Univers prédate Bruno, et de beaucoup. Bien que la majorité des cultures humaines anciennes aient généré des cosmologies où, explicitement ou implicitement, l'Univers est de dimensions finies, plusieurs courants de pensée alternatifs ont jonglé avec l'idée d'un Univers infini, en particulier en Inde et Grèce antiques. En Europe, l'idée est véhiculée jusqu'au 17ème siècle via les écrits des "écoles" philosophiques Pythagorienne et Épicurienne, et est aussi occasionnellement discutée dans l'astronomie de l'Islam médiéval. Déjà en 1576, un des premiers promoteurs de Copernic en Angleterre, Thomas Digges (1546–1595), propose une variation du modèle de Copernic dans le cadre duquel les étoiles, plutôt que d'être fixées sur une coquille sphérique, sont distribuées de manière homogène dans un volume extérieur à l'orbite de Saturne (voir Fig. 7.3).

Bien que la condamnation de Galilée en 1632 ait imposé un frein substantiel aux spéculations cosmologiques dans l'Europe catholique, l'étendue spatiale infinie de l'Univers et la pluralité des mondes trouvent néanmoins leur prochain ardent défenseur chez un bon catholique, éduqué chez les Jésuites de surcroit: René Descartes (1596-1650). Grand promoteur d'une vision mécaniste du monde, Descartes propose un modèle de l'Univers basé sur le concept de "vortex" entrainant les planètes autour de leur étoile, cette dernière située au centre du vortex. L'Univers est constitué d'une multitude de ces vortex, contigus mais ayant des axes de rotation orientés



Figure 7.3: L'Univers de Thomas Digges, identique à celui de Copernic, avec l'importante exception que les étoiles fixes ne sont plus positionnées sur une coquille sphérique, mais plutôt distribuées uniformément dans le volume extérieur à l'orbite de la sphère de Saturne, et "...IN-FINITELY VP EXTENDETH...". Source: R. Bradshear et D. Lewis, *Star Struck*, Huntington Library & University of Washington Press, p53 (2001).

arbitrairement dans l'espace (voir Figure 7.4). L'Univers de Descartes est donc infini, et contient une infinité de systèmes planétaires, notre système solaire (ici au centre de son diagramme pour des raisons purement didactiques) n'en étant qu'un parmi tant d'autres. De Copernic à Descartes, la Terre se voit donc complètement détrônée de son antique et vénérable rôle de "centre de l'Univers" !

Malgré sa grande popularité au dix-septième siècle, le système du monde de Descartes s'est rapidement vu éclipsé par celui de Newton, basé sur la gravitation universelle et sa formulation de la dynamique du mouvement, cette dernière incorporant la cinématique Galiléenne. Toute la cosmologie des deux siècles suivants s'est effectivement construite sur ces piliers, qui sont demeurés essentiellement incontestés jusqu'à la relativité d'Oncle Albert. L'Univers de Newton est résolument infini, l'espace est une structure fixe et absolue qui existe indépendamment de la matière, et le temps est universel.

Sur le front observationnel cependant les choses continuent de bouger, en bonne partie à cause de la construction de télescopes toujours de plus en plus puissants. Déjà en 1718 Edmund Halley (1656–1742) remarque que les positions des étoiles Sirius, Arcturus et Aldebaran diffèrent par plus d'un demi degré des positions indiquées par Hipparque quelques 1850 années



Figure 7.4: L'Univers de René Descartes, constitué d'un assemblage de "vortex" contigus, plusieurs centré sur une étoile (C, L, O, K et S pour le Soleil), et dont le mouvement de rotation entraine les planètes dans leurs orbites respectives autour de chaque étoile centrale. Il n'y plus de frontière à l'Univers, et la pluralité des mondes est ici considérée "naturelle". Source: *Principia philosophiae*, 1644.

auparavant, déboulonnant ainsi une fois pour toutes la supposée fixité des étoiles du firmament. Fin dix-huitième siècle William Herschel (1738–1822) et sa soeur Caroline (1750–1848) observent et cataloguent systématiquement un grand nombre de "nébuleuses", structures lumineuses diffuses connues depuis le dix-septième siècle mais dont la nature demeure mystérieuse; s'agit-il de nuages compacts de gaz ou de poussière situés dans la Voie Lactée ? d'étoiles très peu denses, dites "nébulaires" mais de très grandes dimensions ? ou encore d'amas d'étoiles de tailles normales, mais très très éloignés, si éloignés qu'on ne puisse y distinguer les étoiles les unes des autres ? En 1755 le philosophe Immanuel Kant (1724–1804) avait déjà articulé la troisième de ces hypothèses, dite des "Iles-Univers" structurellement semblables à la Voie Lactée et formées via ce qu'on appelle maintenant l'effondrement gravitationnel. Cependant la présentation de Kant n'est pas du tout mathématique, et l'idée de l'effondrement gravitationnel n'est pas particulièrement prise au sérieux par ses contemporains jusqu'à ce que Pierre-Simon de Laplace (1749–1827) l'élabore quantitativement en termes de la gravitation universelle Newtonienne, dans son monumental ouvrage Exposition du système du monde, publié en 1796. Laplace, cependant, applique cette idée à la formation des étoiles et des systèmes planétaires, mais ne reprend pas le concept d'Iles-Univers. Les astronomes du temps se partagent en deux clans, l'un supportant l'idée Kantienne des Iles-Univers, l'autre celle des systèmes stellaires/planétaires en



Figure 7.5: Dessins de nébuleuses par William Herschel, représentant selon lui diverses phases d'une séquence évolutive d'effondrement gravitationnel en une ou plusieurs étoiles, tel que proposé par Laplace. Source: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. **101**, 269–336 (1811); planche IV, p. 336.

formation de Laplace.

Au milieu du dix-neuvième siècle, la cartographie astronomique de la Voie Lactée a bien démontré sa forme en disque, et la structure en spirale de certaines de ces nébuleuses est bien acceptée. L'idée des "Iles-Univers" de Kant commence à s'imposer, et le terme "galaxie" fait son apparition dans le jargon scientifique. La mesure des distances de certaines de ces galaxies au début du vingtième siècle vient finalement clore ce nébuleux débat qui aura duré près de deux siècles; l'Univers est composé de galaxies, elles-même étant composées de gaz, poussière et étoiles.

Un résidu de l'Univers antique demeure cependant: son éternité temporelle et la fixité de sa structure aux grandes échelles. Même Saint Albert s'y est laissé prendre. Ce dernier bastion tombe cependant dans les annés 1920, par la découverte du mouvement d'expansion radiale des galaxies par Vesto Slipher (1875–1969), et l'accélération de cette expansion avec la distance par Edwin Hubble (1889–1953).

Fin de l'introduction historique et avancée rapide au présent; les observations astronomiques contemporaines démontrent clairement qu'aux plus grandes échelles observables (>  $10 \,\mathrm{Mpc^1}$ ), l'Univers est:

- 1. spatialement homogène,
- 2. spatialement isotrope,
- 3. en expansion.

Voir l'animation des données SDSS disponible sur la page Web du cours pour en avoir une démonstration visuelle plutôt fascinante. La considération des points (1) et (2) ci-dessus servira de départ à l'écriture d'une métrique décrivant la structure spatiotemporelle de l'Univers. Les équations de champ d'Einstein nous fourniront ensuite une équation d'évolution pour le **paramètre d'échelle** apparaissant dans les composantes de cette métrique; et la solution de ces équations nous conduira naturellement au point (3). C'est le programme !

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Le MégaParsec (1 Mpc= $3.0857 \times 10^{22}$  m) est l'unité de distance de choix en cosmologie. Histoire de bien saisir ce qu'implique ce chiffre, l'année-lumière équivaut à 0.3pc; l'étoile la plus rapprochée du Soleil, Proxima Centauri, est à une distance de 1.3pc; notre galaxie a un diamètre de  $\simeq 30$  kpc; et la distance à la galaxie d'Andromède (M31) est de  $\simeq 780$  kpc.

## 7.1 La métrique de Robertson-Walker-Friedmann

L'idée générale est de formuler un intervalle métrique dont la partie spatiale  $(dl^2)$  est homogène et isotrope, mais pouvant évoluer dans le temps. La forme la plus générale d'un intervalle invariant satisfaisant à ces contraintes est:

$$\mathrm{d}s^2 = -\alpha(t)\mathrm{d}t^2 + \beta(t)\mathrm{d}l^2 ; \qquad (7.1)$$

mais on peut clairement définir une nouvelle coordonnée temporelle telle que  $(dt')^2 = \alpha(t)dt^2$ , de telle sorte que l'intervalle ci-dessus devient:

$$ds^{2} = -(dt')^{2} + \beta(t')dl^{2}; \qquad (7.2)$$

Une fonction arbitraire (à ce stade) de t' en vaut bien une autre de t; rebaptisons donc  $t' \to t$  et  $\beta(t') \to a^2(t)$ . Notre intervalle invariant se réduit finalement à:

$$ds^{2} = -dt^{2} + a^{2}(t)dl^{2} . (7.3)$$

Imaginons maintenant la partie spatiale (3D) de la métrique comme une hypersurface potentiellement courbée— dans un espace de représentation Euclidienne ayant une dimensionalité 3+1—comme quand on se représente une surface 2D sphérique (courbe) comme la surface d'un ballon dans l'espace Euclidien 3D. Paramétrons la courbure de cette hypersurface comme k/a(t), où a(t) devient un **facteur d'échelle**, et la constante k = -1, 0 ou +1 fixe le signe de la courbure. Dans un espace 3D, il n'existe en fait que **trois** types d'espaces à courbure homogène et isotrope, comme l'illustre la Figure 7.6. On y a porté en graphique des surfaces 2D de courbure constante positive (à gauche), nulle (au centre) et négative (à droite), telles qu'elles peuvent être représentées dans un espace 3D cartésien plan via une relation du genre z = f(x, y). La dimension verticale (coordonnée z) n'est utilisée ici que comme **dimension** 



Figure 7.6: Trois surfaces à courbure homogène et isotrope: à gauche, une surface de courbure constante et positive; au centre, une surface plane, i.e., de courbure nulle; à droite, une surface de courbure négative. Une extension spatiale de ces surfaces conduit à une surface fermée (une sphère!) dans le premier cas, mais ouverte dans les deux autres (voir texte).

de représentation, l'espace courbe "physique" étant ici de dimensionalité 2. La surface de courbure positive peut donc être représentée comme une partie d'une sphère en 3D, définie par:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 {,} {(7.4)}$$

où le rayon R de la sphère joue ici le rôle de facteur d'échelle. Similairement, pour la surface de courbure constante négative sur la Figure 7.6 (à droite), on écrirait:

$$-x^2 + y^2 + z^2 = R^2 av{7.5}$$

Il s'agit maintenant de généraliser cette procédure à un espace 3D à courbure spatialement constante mais pouvant varier dans le temps, représentée sous la forme d'une hypersurface 3D dans un espace de représentation de dimensionalité 3 + 1.

Considérons tout d'abord une hypersurface 3D de courbure positive (k = +1 sur la Fig. 7.6), dans lequel cas notre hypersurface 3D courbe est représentable comme la la surface d'une sphère en 4 dimensions spatiales. Son rayon étant donné par le facteur d'échelle a(t), on peut définir cette "hypersphère" par la relation:

$$x^{2} + y^{2} + z^{2} + u^{2} = a^{2}(t) , \qquad (7.6)$$

où la coordonnée u est associée à la dimension (supplémentaire) dans l'espace (4D et plan) de représentation. On peut définir comme d'habitude un "rayon" dans l'espace 3D comme  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , l'expression ci-dessus devenant alors:

$$r^2 + u^2 = a^2(t) , (7.7)$$

et d'où on tire

$$2r\mathrm{d}r + 2u\mathrm{d}u = 0. \tag{7.8}$$

Ceci permet d'écrire:

$$u^{2}du^{2} = r^{2}dr^{2} \rightarrow du^{2} = \frac{r^{2}dr^{2}}{u^{2}}$$
  
=  $\frac{r^{2}dr^{2}}{a^{2}(t) - r^{2}}$ . (7.9)

La partie spatiale de la métrique devient donc:

 $\mathrm{d}l$ 

$${}^{2} = dr^{2} + du^{2} + r^{2} d\Omega^{2}$$

$$= dr^{2} + \frac{r^{2} dr^{2}}{a^{2}(t) - r^{2}} + r^{2} d\Omega^{2}$$

$$= \frac{a^{2}(t) dr^{2}}{a^{2}(t) - r^{2}} + r^{2} d\Omega^{2} .$$

$$(7.10)$$

avec l'élément d'angle solide

$$\mathrm{d}\Omega^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2 \ . \tag{7.11}$$

Introduisant maintenant la variable  $\sigma = r/a(t)$ , la métrique complète devient:

$$ds^{2} = -dt^{2} + a^{2}(t) \left(\frac{d\sigma^{2}}{1 - \sigma^{2}} + \sigma^{2} d\Omega^{2}\right) .$$
 (7.12)

Notons que la quatrième (pseudo)dimension spatiale de représentation, associée à la variable u, n'apparait plus explicitement ici.

Cette métrique a été obtenue dans le contexte d'une hypersurface de courbure positive; un exercice de la troisième série vous conduit à vérifier que pour une hypersurface de courbure négative, l'intervalle prend une forme semblable, mais avec  $1 + \sigma^2$  au dénominateur du second terme au membre de droite plutôt que  $1 - \sigma^2$ . La forme générale de la métrique peut donc s'écrire:

$$ds^{2} = -dt^{2} + a^{2}(t) \left(\frac{d\sigma^{2}}{1 - k\sigma^{2}} + \sigma^{2} d\Omega^{2}\right) , \qquad (7.13)$$

avec k = +1 pour la courbure positive, k = -1 pour la courbure négative, et k = 0 pour un espace plan. Cet intervalle invariant (7.13) définit la métrique dite de **Robertson-Walker-Friedmann**<sup>2</sup>. Ses composantes individuelles sont:

$$g_{00} = 1/g^{00} = -1 , \qquad (7.14)$$

$$g_{11} = 1/g^{11} = \frac{a^2}{1-k\sigma^2},$$
 (7.15)

$$g_{22} = 1/g^{22} = a^2 \sigma^2 , \qquad (7.16)$$

$$g_{33} = 1/g^{33} = a^2 \sigma^2 \sin^2 \theta . \tag{7.17}$$

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Curieusement, le nom apposé à cette métrique demeure sujet à des résidus de nationalisme; on verra parfois Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (Europe francophone), Friedmann-Robertson-Walker (Europe germanique et slave), Robertson-Walker-Friedmann ou Robertson-Walker tout court (USA), etc...

Pour un point "fixe dans l'espace", dans le sens que ses coordonnées spatiales ne changent pas même si le facteur d'échelle varie dans le temps, la métrique se réduit à:

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 \;, \tag{7.18}$$

indiquant ici que le "temps cosmique" t correspond au temps propre mesuré par des horloges dites **comobiles**, c.-à-d. dont les coordonnées spatiales ne changent pas, même si les distances spatiales  $dl^2$  entre ces horloges, elles, peuvent varier, en fonction de la variation temporelle du facteur d'échelle a(t).

Un exercice de la troisième série vous conduit à vérifier qu'en l'absence de force extérieure, un observateur (ou horloge) comobile satisfait à l'équation géodésique, et qu'un tel observateur, fixe par rapport aux coordonnées spatiales, est effectivement en "chute libre" dans l'Univers en expansion (ou contraction). Ce résultat confirme également qu'un observateur au repos dans l'espace (i.e., coordonnées spatiales fixes) demeurera "fixé" à ces valeurs de coordonnées même si le facteur d'échelle varie au cours du temps cosmique.

Finalement, et revenant à la Figure 7.6, imaginons maintenant étendre spatialement les trois surfaces; la surface de courbure positive se refermera en une sphère, tandis que les deux autres s'étendront à l'infini. Un Univers homogène et isotrope de courbure positive est donc de taille finie, tandis qu'un Univers homogène et isotrope de courbure nulle ou négative est infini.

## 7.2 Les équations de Friedmann-Lemaitre

L'étape suivante est d'utiliser les équations de champ d'Einstein pour spécifier l'évolution temporelle du facteur d'échelle a(t).

**BG§7.2** 

Exercice

#### 7.2.1 Le fluide cosmologique

Aux grandes échelles (> 10 Mpc), on considère la densité des galaxies comme constante (homogénéité), et donc on en représentera la contribution énergétique par une densité  $\rho$  et pression p spatialement constante, mais pouvant dépendre du temps cosmique t. Les galaxies sont donc les "constituants microscopiques" du "fluide cosmologique". De plus, les galaxies étant considérées comme **comobiles** (coordonnées spatiales demeurent fixes quand t augmente), elles sont donc "au repos" dans le fluide cosmologique; la forme "poussière" du tenseur de stressénergie, soit l'éq. (7.19), est donc appropriée ici:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^{\mu}u^{\nu} + pg^{\mu\nu} .$$
(7.19)

(revoir la §5.2.4 au besoin). De surcroit ici la comobilité implique de poser les quadrivitesse comme étant égale à  $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 0)$ , d'où:

$$T_{00} = (p+\rho)u_0u_0 + pg_{00} = \rho , \qquad (7.20)$$

$$T_{11} = (p+\rho)u_1u_1 + pg_{11} = pa^2(t)/(1-k\sigma^2) , \qquad (7.21)$$

$$T_{22} = (p+\rho)u_2u_2 + pg_{22} = pa^2(t)\sigma^2 , \qquad (7.22)$$

$$T_{33} = (p+\rho)u_3u_3 + pg_{33} = pa^2(t)\sigma^2\sin^2\theta .$$
(7.23)

Comme on considère les galaxies strictement au repos (dans un espace en expansion), elles n'ont aucun mouvement "thermique", et donc on doit leur assigner une pression nulle. C'est l'équivalent de la "poussière froide" invoquée à la §5.2.4 dans la construction du tenseur de stress-énergie. Dans ce qui suit on conserve cependant le terme de pression dans le tenseur de stress-énergie, car la radiation peut également contribuer à la pression totale, et cette contribution s'avèrera importante dans certains des modèles cosmologiques construits dans ce qui suit.

#### 7.2.2 Dérivation générale

Il s'agit maintenant de calculer les composantes du tenseur d'Einstein  $G_{\mu\nu}$  associé à la métrique de Robertson-Walker-Friedmann. La procédure est simple en principe, mais un tantinet fastidieuse dans l'exécution. Il faut tout d'abord, dans l'ordre:

- 1. calculer les coefficients de connexion,
- 2. calculer les composantes non-nulles du tenseur de Riemann,
- 3. contracter le tenseur de Riemann pour obtenir le tenseur de Ricci,
- 4. contracter le tenseur de Ricci pour obtenir le scalaire de Ricci,
- 5. assembler les 4 composantes diagonales de  $G_{\mu\nu}$ .

Tel que démontré en classe au tableau, la composante "00" du tenseur de Ricci est donnée par

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a} , \qquad (7.24)$$

où on a introduit la notation

$$\dot{a} \equiv \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} , \qquad \ddot{a} \equiv \frac{\mathrm{d}^2 a}{\mathrm{d}t^2} ;$$
(7.25)

et vous démontrerez vous même (série 3!) que

$$R_{11} = \frac{2k + a\ddot{a} + 2\dot{a}^2}{1 - k\sigma^2} , \qquad (7.26)$$

$$R_{22} = (2k + a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)\sigma^2 , \qquad (7.27)$$

$$R_{33} = (2k + a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)\sigma^2 \sin^2\theta .$$
 (7.28)

On peut maintenant calculer le scalaire de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$
  
=  $g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}$   
=  $\frac{6}{a^2}(k + a\ddot{a} + \dot{a}^2)$ . (7.29)

On notera que R ne dépend pas des coordonnées spatiales; la courbure scalaire est la même en tout point de l'espace, comme on l'exigerait d'un espace homogème et isotrope.

On peut maintenant calculer les composantes du tenseur d'Einstein, directement via sa définition  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}R$ :

$$G_{00} = \frac{3(k+\dot{a}^2)}{a^2} , \qquad (7.30)$$

$$G_{11} = -\frac{k + 2a\ddot{a} + \dot{a}^2}{1 - k\sigma^2} , \qquad (7.31)$$

$$G_{22} = -(k + 2a\ddot{a} + \dot{a}^2)\sigma^2 , \qquad (7.32)$$

$$G_{33} = -(k + 2a\ddot{a} + \dot{a}^2)\sigma^2 \sin^2\theta .$$
(7.33)

Nous avons maintenant tous les morceaux requis pour calculer explicitement les composantes de l'équation de champ d'Einstein<sup>3</sup>. On traite ici sa forme la plus générale, i.e., avec une constante cosmologique:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} . \qquad (7.34)$$

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Lecteurs de Barrau & Grain attention: ces auteurs indiquent que  $G_{22} = G_{33} = 0$ ; aucune idée comment ils trouvent ça... De surcroit, ces auteurs travaillent avec une convention métrique où la composante temporelle de la métrique est > 0; ceci n'affecte pas le signe des  $G_{\mu\nu}$ , mais change le signe des termes impliquant la constante cosmologique  $\Lambda$  dans toutes les expressions mathématiques qui suivent.

Écrivons-en la composante "00"; on obtient presque directement (sans oublier que  $g_{00} = -1$ ):

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3k}{a^2} - \Lambda = 8\pi\rho , \qquad (7.35)$$

d'où

$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{8\pi\rho a^2}{3} - k + \frac{\Lambda a^2}{3} \tag{7.36}$$

Et maintenant la composante "11":

$$-\frac{k+2a\ddot{a}+\dot{a}^2}{1-k\sigma^2} + \Lambda\left(\frac{a^2}{1-k\sigma^2}\right) = 8\pi \frac{pa^2}{1-k\sigma^2} , \qquad (7.37)$$

et après quelques manipulations algébriques simples:

$$-\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} + \Lambda = 8\pi p \ . \tag{7.38}$$

Les composantes "22" et "33" de l'équation de champ conduisent à des expressions identiques à celles-ci-dessus, et donc ne sont plus considérées dans ce qui suit. Comment peut-on "perdre" ainsi deux équations ? Simplement en raison de notre hypothèse d'homogénéité en d'isotropie au niveau de la partie spatiale de la métrique.

Les expressions (7.35) et (7.38) sont les **équations de Friedmann-Lemaitre**, en l'honneur d'Alexandre Friedmann (1888–1925) et Georges Lemaitre (1894–1966). Ces deux joyeux lurons ont été les premiers à démontrer, indépendamment, que les solutions aux équations du champ d'Einstein appliquées au fluide cosmologique prédisent une expansion de l'Univers.

Il sera utile pour ce qui suit de transformer un peu l'équation (7.38) en une forme alternative mais tout à fait équivalente. On prend la dérivée temporelle de (7.35):

$$\frac{6a\dot{a}\ddot{a} - 6\dot{a}^3 - 6k\dot{a}}{8\pi a^3} = \dot{\rho} \ . \tag{7.39}$$

Maintenant on multiplie (7.38) par  $3\dot{a}/(8\pi a)$ , et on additionne l'expression résultante à celle ci-dessus, pour obtenir:

$$\dot{\rho} + \frac{3p\dot{a}}{a} = -\frac{3\dot{a}}{8\pi a} \underbrace{\left(\frac{3\dot{a}^2 + 3k}{a^2} - \Lambda\right)}_{=8\pi\rho} , \qquad (7.40)$$

où le terme entre parenthèses suit de (7.35). Donc on a

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 , \qquad (7.41)$$

que l'on peut finalement réécrire sous la forme:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho a^3) + p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a^3) = 0.$$
(7.42)

Comme *a* est le facteur d'échelle fixant la "dimension linéaire" de l'Univers, la quantité  $a^3$  peut être interprétée comme proportionnelle à son "volume"; et donc la quantité  $\rho a^3$  correspond à l'énergie totale de l'Univers. L'équation ci-dessus devient une forme "dE = p dV" de première loi de la thermodynamique cosmique!

Par ailleurs, en multipliant (7.35) par  $a^3$  et dérivant le tout par rapport à t, quelques lignes d'algèbre conduisent à:

$$3a^{2}\dot{a}\left(\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^{2}}{a^{2}} + \frac{k}{a^{2}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(8\pi\rho a^{3}\right) \ . \tag{7.43}$$

Notons que pour un Univers de "poussière" (p = 0) et où  $\Lambda = 0$ , l'éq. (7.38) indique que le terme entre parenthèse au membre de gauche est égal à zéro; l'expression ci-dessus peut alors se réécrire sous la forme:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{4\pi}{3}\rho a^3\right) = 0 , \qquad [p = \Lambda = 0] \tag{7.44}$$

exprimant la conservation de la masse-énergie de l'Univers!

#### 7.2.3 Équation d'état pour le fluide cosmologique

Nos deux équations de Friedmann-Lemaitre (7.36) et (7.42) impliquent les trois quantités a(t),  $\rho(t)$  et p(t). Une troisième équation est requise pour permettre une solution; ce sera une **équation d'état** pour le fluide cosmologique, soit une relation permettant d'exprimer la pression p en fonction de la densité  $\rho$ .

Nous avons déjà (implicitement) introduit une telle équation d'état dans le contexte d'un fluide de type "poussière", où les mouvements sont non-relativistes:

$$p = 0$$
, [poussiere] (7.45)

L'équation (7.42) impose alors que

$$\rho(t) = \rho(t_0) \left(\frac{a(t_0)}{a(t)}\right)^3 .$$
(7.46)

Pour un Univers dominé par la radiation dans le régime corps noir, on aurait plutôt

$$p_r = \frac{1}{3}\rho_r$$
, [radiation] (7.47)

avec (retour temporaire aux unités physiques):

$$\rho_r = \frac{\pi^2}{15} \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} \ . \tag{7.48}$$

Substituant (7.47) dans (7.42) conduit à:

$$\rho_r(t) = \rho_r(t_0) \left(\frac{a(t_0)}{a(t)}\right)^4 , \qquad (7.49)$$

et donc, via (7.48):

$$T(t) = T(t_0) \left(\frac{a(t_0)}{a(t)}\right) .$$

$$(7.50)$$

On verra sous peu que le terme dans les équations de Friedmann-Lemaitre qui est proportionnel à la constante cosmologique  $\Lambda$  peut être interprété comme une densité d'énergie associée au vide même; la pression associée à cette énergie du vide est négative, ce qui correspond à une "tension" dans la structure de l'espace qui, comme on le verra plus loin, résistera ou favorisera l'expansion, dépendant du signe de  $\Lambda$ . L'équation d'état pour ce genre de comportement est donnée par:

$$p_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda}$$
, [vide] (7.51)

#### 7.2.4 Le paramètre de Hubble

Introduisons le paramètre de Hubble:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \tag{7.52}$$

C'est une quantité dépendante du temps t, mais dont la valeur actuelle (à  $t_0$ ) peut être déterminée sur la base d'observations astronomiques, spécifiquement les vitesses d'éloignement des galaxies en fonction de leur distance. Cette valeur présente est

$$H_0 \equiv H(t_0) = 71 \pm 4 \,\mathrm{km \, s^{-1} \, Mpc^{-1}} , \qquad (7.53)$$

dans les unités bizarroides typique des constantes astronomiques. Clairement  $H_0$  a des unités de  $t^{-1}$ , et plus précisément:

$$H_0 = (2.3 \pm 0.1) \times 10^{-18} \,\mathrm{s}^{-1} \,. \tag{7.54}$$

L'inverse de  $H_0$  est un temps, dit **temps de Hubble**, qui correspondrait à l'âge de l'Univers si le taux d'expansion de ce dernier était demeuré constant dans le temps (il ne l'est définitivement pas). Exprimé en milliard d'années:

$$t_H = \frac{1}{H_0} \simeq 14 \,\text{Gyr} \;.$$
 (7.55)

Ceci nous offre un premier estimé de l'âge de l'Univers! Et comme on le verra plus loin, cet estimé est en fait remarquablement près de la valeur déterminée observationnellement.

#### 7.2.5 Courbure et densité critique

La définition du paramètre de Hubble permet d'écrire (7.36) sous la forme

$$-k = a^2 H^2 \left( 1 - \frac{8\pi\rho}{3H^2} - \frac{\Lambda}{3H^2} \right) .$$
 (7.56)

Définissions maintenant une densité  $\rho_{\Lambda}$  associée au terme impliquant la constante cosmologique, et une **densité critique**  $\rho_c$ :

$$\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi}, \qquad (7.57)$$

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi} , \qquad (7.58)$$

de telle sorte que notre expression ci-dessus devient<sup>4</sup>:

$$-k = a^2 H^2 \left( 1 - \frac{\rho + \rho_\Lambda}{\rho_c} \right) . \tag{7.59}$$

Distinguons maintenant spécifiquement les contribution massiques  $(\rho_M)$  et radiatives  $(\rho_R)$  à la densité de masse-énergie, i.e.,  $\rho = \rho_M + \rho_R$ , et normalisons toutes ces densités à la densité critique:

$$\Omega_M = \frac{\rho_M}{\rho_c} , \qquad \Omega_R = \frac{\rho_R}{\rho_c} , \qquad \Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} , \qquad (7.60)$$

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Avec H ayant des unités de s<sup>-1</sup>, on pourrait trouver suspect que ces expressions correspondent à des densités d'énergie; il faut se rappeler qu'on travaille ici dans un système d'unités où c = G = 1. Voici donc un petit défi: déduire les unités SI pour la constante cosmologique  $\Lambda$ !

d'où on arrive finalement à:

$$-k = a^2 H^2 \left( 1 - \left( \Omega_M + \Omega_R + \Omega_\Lambda \right) \right) .$$
(7.61)

Comme  $a^2 H^2$  est une quantité toujours positive, on voit immédiatement que la valeur de  $\Omega_{\text{tot}} \equiv \Omega_M + \Omega_R + \Omega_\Lambda$  se retrouve à déterminer le signe k de la courbure. Il faut bien comprendre que le paramètre de courbure k, qui dans la métrique de Robertson-Walker était apparu comme un paramètre libre du point de vue de notre développement mathématique, ne l'est pas du tout du point de vue physique: k est fixé par  $\Omega_{\text{tot}}$ . Le message important est donc que

#### La densité totale détermine la courbure de l'Univers

La densité normalisée actuelle de l'Univers, dénotée  $\Omega_0$ , est (en principe) déterminable astronomiquement. On y reviendra plus bas.

## 7.3 Univers d'Einstein-de Sitter: $p = k = \Lambda = 0$

Il est temps de calculer comment varie a avec t; considérons pour commencer un Univers de "poussière" (p = 0), plat (k = 0), et sans constante cosmologique  $(\Lambda = 0)$ ; La première équation de Friedmann (7.36) se réduit alors à:

$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{8\pi\rho a^2}{3} \ . \tag{7.62}$$

D'autre part on a vu aussi que si  $\Lambda = 0$  la seconde équation de Friedmann conduit à (7.44), autrement dit  $\rho a^3$  =constante; utilisant les valeurs  $\rho_0$  et  $a_0$  du temps présent pour spécifier la constante en question, on peut donc écrire

$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{8\pi a^2}{3} \times \frac{\rho_0 a_0^3}{a^3} \tag{7.63}$$

d'où on tire

$$a^{1/2} da = \left(\frac{8\pi\rho_0 a_0^3}{3}\right)^{1/2} dt$$
(7.64)

ce qui s'intègre facilement:

$$a(t) = a_0 (6\pi\rho_0)^{1/3} t^{2/3} , \qquad (7.65)$$

où on a supposé a = 0 à t = 0. Le sens de cette expression ne pourrait être plus clair:

#### L'Univers est en expansion

Et, corollaire tout aussi remarquable:

#### L'Univers a un début

De plus, de concert avec (7.65) la contrainte  $\rho(t)a^3(t) = \rho_0 a_0^3$  conduit à

$$\rho(t) = \frac{1}{6\pi t^2} , \qquad \rightarrow \qquad \lim_{t \to 0} \rho(t) \to \infty .$$
(7.66)

Cette expression indique que l'état initial de l'Univers est une **singularité**<sup>5</sup>; toute la masseénergie se retrouve concentrée dans un Univers dont le volume tends vers zéro quand  $t \rightarrow 0$ .

Ha§18.7

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Oncle Albert, et son fidèle co-aventurier cosmologique Willem de Sitter (1872–1934), n'ont accepté qu'à reculons l'idée de l'expansion de l'Univers émergeant des solutions de Friedmann et Lemaitre. C'est d'ailleurs ce dernier qui a le premier proposé le concept du Big Bang, sous l'appellation "atome primitif". Popularisé plus tard par George Gamov (1904–1968), le terme "Big Bang" remonte au surnom péjoratif attribué par Fred Hoyle (1915–2001) à Lemaitre; Hoyle, à l'époque grand partisan d'un Univers en expansion mais de densité constante (la théorie dite de la "création continue"), référait parfois publiquement à Lemaitre comme "the Big Bang Man".

Tout ceci dépend évidemment d'avoir choisi de travailler dans le contexte d'un Univers plat, k = 0; ceci peut paraître très arbitraire, mais les observations cosmologiques (discutées plus loin) suggèrent  $\Omega_0 \simeq 1$ , et donc k = 0 !!

La forme de l'équation (7.65) peut paraitre paradoxale: plus la densité de matière dans l'Univers est grande, plus l'expansion est rapide. On aurait pu s'attendre que l'attraction gravitationnelle de la matière avec elle-même tende à freiner l'expansion, et ce plus efficacement quand  $\rho$  est élevé. Mais l'expansion de l'Univers n'est pas une expansion de la matière **dans** l'espace, mais bien une expansion **de** l'espace! Donc il n'y a pas de paradoxe ici.

Le diagramme (A) sur la Figure 7.7 montre les trajectoires d'un groupe de galaxies équidistantes dans l'Univers d'Einstein-de Sitter, tracées sur un diagramme espace-temps construit en terme des coordonnées physiques [r, t]. L'expansion, ainsi que le ralentissement de l'expansion en fonction du temps, sont clairement visibles ici. En passant à la coordonnée spatiale conforme  $\sigma = r/a(t)$  on obtient le diagramme en (B). Les trajectoires sont maintenant verticales, comme on aime les voir dans un diagramme espace-temps pour des objets au repos. Cependant, l'étirement horizontal diminuant à mesure que le temps cosmologique t augmente a comme conséquence que l'ouverture des cônes de lumière croit quand t décroit, et tend vers  $\pi$  dans la limite  $t \to 0$ ; la lumière ne se déplace pas le long de droites inclinées à 45°, comme on préfère habituellement le voir dans un diagramme espace-temps.

Il est donc avantageux de définir un **temps conforme**  $\eta$  selon la relation

$$dt = a(t)d\eta . (7.67)$$

La métrique de Robertson-Walker pour l'espace plat (k = 0) peut alors s'écrire

$$ds^{2} = a^{2}(t)(-d\eta^{2} + d\sigma^{2} + \sigma^{2}d\Omega^{2}) .$$
(7.68)

La lumière se déplaçant le long de géodésiques de mesure nulle,  $ds^2 = 0$ , l'expression ci-dessus implique  $d\eta = d\sigma$  dans le cas d'une géodésique orientée dans une direction purement radiale  $(d\Omega^2 = 0)$ ; donc à ±45° dans le plan  $[\sigma, \eta]$ . La Figure 7.7C illustre les trajectoires de nos galaxies comobiles dans ce plan conforme, avec quelques cônes de lumières tracés à différents t.

Sur les trois diagrammes de la Fig. 7.7, les traits pointillés horizontaux sont séparés par des intervalles constants en temps cosmologique t; ces intervalles constant en t ne le sont cependant pas en  $\eta$ , comme on peut le constater en (C); le passage au temps conforme  $\eta$  "étire" verticalement les  $\Delta t$ , ici d'un facteur  $\propto 1/t^{1/3}$  pour l'Univers Einstein-de Sitter où a(t) évolue selon l'éq. (7.65), résultat suivant directement de l'intégration de l'équation (7.67).

L'Univers visible de notre position spatiotemporelle présente a donc une étendue qui se calcule facilement en fonction du temps conforme:

$$\sigma_h = \int_0^{\eta} \mathrm{d}\eta = \int_0^t \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')} . \tag{7.69}$$

Ceci définit l'horizon cosmologique. Il est exprimé ici en terme de la coordonnée comobile  $\sigma$ ; la distance physique de l'horizon est donnée par une intégrale semblable:

$$d_h = a(t)\sigma_H(t) = a(t)\int_0^t \frac{dt'}{a(t')} .$$
(7.70)

Vous aurez à vérifier (troisième série d'exercices) que pour l'Univers Einstein-de Sitter, l'horizon a une étendue de ~ 8 Gpc; les observations cosmologiques suggèrent plutôt ~ 14 Gpc. Ceci suggère que soit (1) l'Univers n'est pas plat, et/ou (2) quelque chose d'autre que la masseénergie contribue au membre de droite de l'équation du champ. Les deux sections qui suivent explorent et quantifient ces deux options.



Figure 7.7: Trois diagrammes espace-temps montrant l'expansion de l'Univers Einstein-de Sitter. Dans les trois cas les traits pleins indiquent les trajectoires de galaxies comobiles, i.e., au repos dans l'Univers en expansion. (A) Dans le plan [r, t], les trajectoires sont courbes; (B) dans le plan  $\sigma = r/a(t)$ , les trajectoires deviennent des lignes droites, mais les cônes de lumière ont une ouverture qui croit quand on recule dans le temps vers t = 0; (C) Dans le plan  $[\sigma, \eta]$ , où  $\eta$  est le temps conforme défini via l'éq. (7.67), tous les cônes de lumière ont une ouverture de  $\pm \pi/4$ , i.e., les photons s'y déplacent sur des droites inclinés de 45° par rapport à la verticale, comme on aime les voir dans un diagramme espace-temps.

R223.tex, May 6, 2023

## 7.4 Univers courbes: $p = \Lambda = 0$ et $k = \pm 1$

Commençons par le cas à courbure positive (k = +1), toujours sans constante cosmologique  $(\Lambda = 0)$ . La première équation de Friedmann-Lemaitre (7.36) devient:

$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{8\pi\rho a^2}{3} - 1 \ . \tag{7.71}$$

Sans même solutionner quoique ce soit, on voit déjà qu'il existe une taille maximale  $(a_{\text{max}})$  à l'Univers, à laquelle l'expansion s'arrête (membre de gauche = 0):

$$a_{\max} = \frac{8\pi\rho_0 a_0^3}{3} , \qquad (7.72)$$

où on a encore invoqué  $\rho_0 a_0^3 = \rho a^3$ . On peut donc réécrire (7.71) sous la forme:

$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2 = a_{\max}\frac{\rho a^2}{\rho_0 a_0^3} - 1 = \frac{a_{\max}}{a} - 1 \ . \tag{7.73}$$

Un des exercices de la troisième série vous conduit à démontrer que cette expression est satisfaite par la paire de relations paramétriques:

Exercice

$$a(\eta) = \frac{a_{\max}}{2} (1 - \cos \eta) , \qquad (7.74)$$

$$t(\eta) = \frac{a_{\max}}{2}(\eta - \sin \eta) . \qquad (7.75)$$

La Figure 7.8 montre trois cas types de ces solutions, pour des densités totales normalisées  $\Omega_0 = 1.5$ , 2 et 2.5. Tous ces Univers débutent par un "Big Bang", mais atteignent par la suite une taille maximale avant de se recontracter vers un "Big Crunch". La taille maximale ainsi que la durée de vie de ces Univers décroissent rapidement à mesure que la densité totale augmente. La production d'une séquence périodique d'Univers en expansion/contraction (traits pointillés) est une pure conséquence de la périodicité de la solution paramétrique; rien ne permet de penser que l'Univers pourrait survivre au "Big Crunch"...

Exprimé en terme de quantités mesurables aujourd'hui, le facteur d'échelle maximal est donné par

$$a_{\max} = \frac{\Omega_0}{H_0(\Omega_0 - 1)^{3/2}}$$
.  $[k = +1]$  (7.76)

Le passage à cette expression à partir de la précédente vous est laissé en exercice (toujours la série 3!). Pour un Univers de courbure positive (k = +1, impliquant  $\Omega_0 > 1$  ne l'oublions pas...), l'âge de l'Univers est donné par l'impressionnante expression:

BG §7.3.2

**Exercice** 

$$t_0 = \frac{\Omega_0}{H_0(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \left( \arcsin(1 - \Omega_0^{-1}) - \frac{\sqrt{\Omega_0 - 1}}{\Omega_0} \right) .$$
 (7.77)

Passons maintenant au cas de courbure négative, k = -1, toujours sans constante cosmologique. La première équation de Friedmann-Lemaitre (7.36) devient cette fois:

$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{8\pi\rho a^2}{3} + 1 \qquad [k = -1] \tag{7.78}$$

Il est clair ici que le membre de droite sera toujours positif: l'expansion d'un Univers de courbure négative est inexorable. Un exercice de la série 3 vous conduit à démontrer que la solution paramétrique prend maintenant la forme:



Figure 7.8: Variation temporelle du facteur d'échelle a(t) pour trois modèles cosmologiques ayant  $p = \Lambda = 0$  et des densité dépassant la densité critique:  $\Omega_0 = \Omega_{\text{tot}} > 1$ , tel qu'indiqué pour chaque courbe. Ces Univers atteignent une taille maximale  $(a_{\text{max}})$  pour se recontracter par la suite vers  $a \to 0$  (le "Big Crunch"). L'existence d'un "rebond" conduisant à un cycle éternel d'expansion/contraction (tracé en traits pointillés) est permise mathématiquement, mais complètement impossible à vérifier observationnellement.

$$a(\eta) = \frac{a_{\max}}{2} (\cosh \eta - 1) ,$$
 (7.79)

$$t(\eta) = \frac{a_{\max}}{2} (\sinh \eta - \eta) . \qquad (7.80)$$

avec cette fois

(

$$a_{\max} = \frac{\Omega_0}{H_0 (1 - \Omega_0)^{3/2}} .$$
 [k = -1] (7.81)

Notons que cette définition n'est utilisée ici que pour permettre une comparaison facile aux éqs. (7.74)-(7.75); il n'y a pas de valeur du facteur d'échelle ici où le taux d'expansion tombe à zéro!

La Figure 7.8 montre quelques évolutions pour différentes valeurs de la densité normalisée  $\Omega_{tot}$ , toutes sous la densité critique, comme il se doit pour avoir une courbure négative. On voit bien que dans tous les cas, l'expansion est continue. Le taux d'expansion augmente avec la densité et devient asymptotiquement constant quand  $H_0 t > 1$ .

## 7.5 Univers courbes à constante cosmologique $\Lambda \neq 0$

Revenons à la première équation de Friedmann (7.36), cette fois en conservant la constante cosmologique:

$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{8\pi\rho a^2}{3} - k + \frac{\Lambda a^2}{3} \ . \tag{7.82}$$



Figure 7.9: Variation temporelle du facteur d'échelle a(t) pour quatre modèles cosmologiques ayant  $p = \Lambda = 0$  et des densité sous la densité critique:  $\Omega_{tot} < 1$ , tel qu'indiqué pour chaque courbe. Ces Univers sont éternellement en expansion.

On doit tout d'abord noter que quand l'expansion devient très grande, le terme en constante cosmologique domine au membre de droite, et ce même sur le premier terme puisque  $\rho \to 0$  quand  $a \to \infty$ . On a alors, asymptotiquement:

$$(\dot{a})^2 \simeq \frac{\Lambda a^2}{3} \longrightarrow a(t) \propto \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right) , \quad [a \text{ grand}] .$$
 (7.83)

Le facteur d'échelle croit exponentiellement dans le temps, impliquant une inexorable expansion accélérée. Cependant, comme on le verra plus bas, il est possible que ce régime ne soit jamais atteint, dépendant du signe de la courbure.

#### 7.5.1 Solutions numériques

La solution de l'équation de Friedmann dans le cas général  $k \neq 0$  et  $\Lambda \neq 0$  s'effectue numériquement. Hartle (§18.7) décrit une approche quelque peu tarabiscotée qui, en bout de ligne, se termine par l'évaluation numérique d'une intégrale. Il est cependant beaucoup plus logique de solutionner l'équation de Friedmann comme ce qu'elle est, soit une équation différentielle ordinaire nonlinéaire. C'est plus propre, et même plus facile (à mon humble avis...).

Nous travaillons toujours dans le contexte d'un Univers de poussière (p = 0), mais qui peut inclure la radiation. La densité  $\rho$  dans (7.36) inclut donc une contribution dûe à la matière, et une dûe à la radiation. Les deux densités correspondantes doivent d'abord être reliées au paramètre d'échelle a. Heureusement nous avons déjà fait ce travail à la §7.2.3, qui nous fournit les éqs. (7.46) et (7.49), cette dernière incluant l'effet de la pression de radiation  $p_r$ , présente même dans un Univers de poussière (revoir la §7.2.3 au besoin). Il vous est laissé en exercice de démontrer que sous substitution de ces expressions dans l'éq. (7.36), et en utilisant  $H_0^{-1}$ comme unité de temps et le facteur d'échelle présent  $a_0$  comme unité de longueur, on obtient

Exercice

la forme adimensionnelle suivante:

$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \Omega_\Lambda a^2 + \frac{\Omega_M}{a} + \frac{\Omega_R}{a^2} - \frac{k}{H_0^2 a_0^2} , \qquad (7.84)$$

où toutes les densités sont maintenant exprimées en unités de la densité critique au moment présent, soit  $\rho_c = 3H_0^2/8\pi$ . La seconde étape consiste à dériver (7.84) par rapport au temps. Il est facile de vérifier que ceci conduit à:

$$\frac{\mathrm{d}^2 a}{\mathrm{d}t^2} = \Omega_\Lambda - \frac{\Omega_M}{2a^2} - \frac{\Omega_R}{a^3} \ . \tag{7.85}$$

Remarquons déjà que le terme de courbure a disparu! Cependant il refera son apparition au moment de spécifier la condition initiale, et de surcroit est implicitement présent dans la valeur de la densité totale, qui comme on l'a vu implique k = +1 si  $\Omega_{tot} > 1$ , et k = -1 si  $\Omega_{tot} < 1$ . Il est ensuite avantageux d'introduire une variable "secondaire":

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = w \ , \tag{7.86}$$

l'équation (7.85) devenant ainsi:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \Omega_{\Lambda} - \frac{\Omega_M}{2a^2} - \frac{\Omega_R}{a^3} \ . \tag{7.87}$$

Le problème se ramène donc à solutionner le système de deux équations différentielles couplées nonlinéaires d'ordre 1 défini par (7.86) et (7.87), qui peut se réécrire sous forme synthétique comme:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} w\\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_{\Lambda} - \Omega_M / (2a^2) - \Omega_R / a^3\\ w \end{pmatrix} .$$
(7.88)

C'est un système de la forme générale:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = g(\mathbf{u}, t) , \qquad \mathbf{u} = (w, a) , \qquad (7.89)$$

qui encore une fois se solutionne très bien avec la méthode de Runge-Kutta, comme on l'avait fait à la §4.3.5 pour les équations géodésiques dans la métrique de Schwarzschild. La Figure 7.10 montre un fragment de code Python qui inclut maintenant une fonction g(s0,u) (lignes 10–16) qui code maintenant le membre de droite de (7.88). La fonction rk, effectuant un pas Runge-Kutta, demeure identique à celle listée à la Figure 4.5 (lignes 21–28).

Cependant il nous est impossible ici de spécifier une condition initiale du genre a(t = 0) = 0; le membre de droite de (7.87) diverge dans la limite  $a \to 0$ . De plus, il n'est même pas clair *a priori* que tous les modèles cosmologiques décrits par l'équation de Friedmann sont caractérisés par un Big Bang. Nous adopterons donc la stratégie suivante: poser la condition "initiale" au moment présent! En terme de nos variables adimensionnelles:

$$H_0^{-1} \equiv t = 1$$
 :  $a_0 \equiv a = 1$ . (7.90)

La solution numérique se fait alors en deux étapes: d'abord pour t croissant à partir de cette condition initiale (lignes 32–37 sur la Fig. 7.10), ensuite pour t décroissant à partir de cette même condition initiale (lignes 41–46). Notez le critère d'arrêt (ligne 41) pour cette seconde intégration, la boucle conditionnelle se terminant une fois arrivé très près ( $10^{-5}$  ici) de a = 0; tandis que la première intégration roule jusqu'à un temps tmax devant être spécifié en initialisation (ici à la ligne 31). Dans les deux cas un décompte maximal d'itération empêchera ces boucles de rouler indéfiniment, en cas de fausse manoeuvre... ou de solutions ne débutant pas par un Big Bang!

N'oublions pas que nous devons également spécifier une condition initiale pour notre variable secondaire w. Cette condition nous sera fournie par l'équation de Friedmann adimensionnelle (7.84), mais normalisée:

$$t = 1$$
 :  $w = \sqrt{-k + \Omega_{\text{tot}}}$  . (7.91)

```
1 # SOLUTION DE L'EQUATION FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER, UNIVERS DE POUSSIERE
   import numpy as np
2
3
   # VARIABLES GLOBALES
  Omg_M=1./3.
                                         # densite normalisee masse
4
   Omg_R=1./3.
                                         # densite normalisee radiation
5
  Omg_L=1./3.
6
                                         # densite normalisee energie du vide
                                        # densite totale
# calcul du signe de la courbure
   Omg=Omg_M+Omg_R+Omg_L
7
8
   kk=np.sign(Omg-1.)
  #-----
                                 ------
9
10 # FONCTION CALCULANT LE COTE DROIT DU SYSTEME DE DEUX EDOS:
11 # variable dependantes: u[0]=w (=da/dt), u[1]=a
  def g(s0,u):
12
      gw=Omg_L*u[1]-Omg_M/(2.*u[1]**2)-Omg_R/u[1]**3 # RHS Eq (7.82)
13
      ga=u[0]
                                                   # RHS Eq (7.81)
14
     eval=np.array([gw,ga])
                                                   # vecteur RHS
15
     return eval
16
17
   # END FONCTION G
                          _____
18
  #-----
  # FONCTION CALCULANT UN SEUL PAS DE RUNGE-KUTTA D'ORDRE 4
19
20
   def rk(h,s0,uu):
                                          # Identique a fonction rk de la Fig 4.5
21
   # END FONCTION RK
^{22}
23 #-----
                                                   _____
24 # MAIN
25 nMax=10000
                                          # nombre maximal de pas de temps
                                          # autres initialisations, etc.
26
  . . .
   u=np.zeros([nMax,2])
                                          # tableau solution
27
28
29 u[0,:]=np.array([sqrt(-kk+0mg),1.])  # condition initiale
30 nn=0
                                         # compteur iterations temporelles
   tMax=2.0
                                         # etendue temporelle du calcul
31
   while (t[nn] < tMax) and (nn < nMax):
32
                                         # boucle de a=1 a tmax (t croissant)
33
       else:
                                          # on accepte le pas
34
35
         t[nn]=t[nn-1]+step
                                          # le nouveau pas de temps; t croit
36
   # fin premiere boucle temporelle
37
                                         # graphique premiere partie (1<a<tmax)</pre>
38
39 u[0,:]=np.array([-sqrt(-kk+Omg),1.])
                                          # condition initiale
                                          # reinitialisation du compteur
40
  nn=0
   while (u[nn,1] > 1.e-5) and (nn < nMax): # boucle de a=1 a a=0 (t decroissant)
41
^{42}
                                          # on accepte le pas
       else:
43
^{44}
         t[nn]=t[nn-1]-step
                                          # le nouveau pas de temps; t decroit
45
   # fin seconde boucle temporelle
46
                                          # graphique seconde partie (0<a<1)</pre>
47
   . . .
   # END MAIN
48
```

Figure 7.10: Squelette de code Python pour l'intégration de l'équation de Friedmann-Lemaitre par Runge-Kutta d'ordre 4 avec pas adaptif. Les parties manquantes, indiquée par des "...", sont identiques à ce qui se retrouve sur la Figure 4.5.



Figure 7.11: Solutions numériques illustrant la variation temporelle du facteur d'échelle a(t) pour trois modèles FRW plats (k = 0) mais constante cosmologique  $\Lambda > 0$ , tel qu'indiqué par le code couleur. La ligne pointillée correspond à un taux d'expansion constant donnée par la constante de Hubble à l'époque présente, correspondant à w = 1 dans nos unités adimensionnelles. Tous ces modèles coincident par construction à (t, a) = (1, 1), et sont à la densité critique  $\Omega = 1$  (voir texte).

#### 7.5.2 Les Univers $\Lambda > 0$

Commençons par nous calculer des modèles d'Univers plats (k = 0), impliquant  $\Omega_{tot} = 1$ . La Figure 7.11 en montre trois exemples pour trois combinaisons distinctes de  $\Omega_M$ ,  $\Omega_R$  et  $\Omega_\Lambda$ . Les trois solutions coincident par construction à (t, a) = (1, 1), où de surcroit  $w \equiv da/dt = 1$  dans les trois cas. La courbe en rouge correspond au cas  $\Lambda = 0$  des Univers Einstein-DeSitter de la §7.3, pour lequel on observe bien l'expansion en  $t^{2/3}$  qui avait été calculée analytiquement, viz. l'éq. (7.65), mais ici avec un décalage du point zéro de l'échelle temporelle. Et, soit dit en passant, ceci nous offre une première excellente validation de notre code Python! L'expansion exponentielle à grand a est ici clairement visible, et est d'autant plus rapide que  $\Lambda$  est grand, comme on s'y attendait. On remarque cependant que "l'âge de l'Univers" correspondant à l'intervalle de temps écoulé entre a = 0 et a = 1, est affecté par la grandeur de la constante cosmologique. À  $\Omega_{tot}$  égal, les Univers à grand  $\Omega_{\Lambda}$  sont plus vieux.

La courbe tracée en bleu correspond aux paramètres de densités normalisées qui fournissent le meilleur ajustement aux meilleures mesures contemporaines de l'expansion de l'Univers. Il est amusant de constater que pour ces valeurs, l'âge de l'Univers correspond presqu'exactement à l'inverse du taux d'expansion actuel, donné par la constante de Hubble  $H_0$ .

La Figure 7.12 montre maintenant trois solutions représentatives pour des modèles à courbure positive, avec  $\Omega_{tot} = 2$  dans tous les cas. Encore une fois la courbe en rouge correspond à un modèle  $\Lambda = 0$ , et sa comparaison avec la courbe correspondante pour les solutions analytiques de la Figure 7.8 nous offre un rassurant test de validation de notre approche numérique. Ici si  $\Lambda$  est suffisamment petit il est alors possible que le terme de courbure freine l'expansion, comme dans le cas  $\Lambda = 0$  traité précédemment, avant que la tendance à l'expansion associée à



Figure 7.12: Solutions numériques illustrant la variation temporelle du facteur d'échelle a(t) pour trois modèles FRW fermés (courbure k = +1) mais constante cosmologique  $\Lambda > 0$ , tel qu'indiqué par le code couleur. Le rectangle gris indique l'étendue de la Figure 7.11. Tous ces modèles sont à deux fois la densité critique, i.e.,  $\Omega_{\text{tot}} = 2$  (voir texte).

#### **7.5.3** Les Univers $\Lambda < 0$

Cette fois le terme en  $\Lambda$  s'opposera à l'expansion quand *a* devient suffisamment grand. Historiquement, c'est la possibilité de produire ainsi des univers statiques, dans le sens da/dt = 0, qui a poussé Oncle Albert à introduire la constante cosmologique dans son équation du champ, le privant ainsi de ce qui aurait été certainement la plus spectaculaire prédiction de la relativité générale: l'expansion de l'Univers! Mais bon, même les meilleurs en ratent parfois...

Un des exercices de la troisième série vous guide dans la construction de modèles cosmologiques dans ce régime  $\Lambda < 0$ . En bref, on distingue deux classes de solutions:

Exercice

- k = +1: l'expansion est toujours freinée
- k = -1 ou k = 0: l'Univers peut évoluer en cycles d'expansion/contraction

Je vous laisse le plaisir de préciser quantitativement ces énoncés par vos expérimentations numériques.



Figure 7.13: Le redshift cosmologique. Un observateur à la coordonnée comobile  $\sigma = 0$  (rouge) reçoit des signaux lumineux émis à  $\sigma/R = 1$  (vert). La cadence de réception  $\delta t_0$  diffère de la cadence d'émission  $\delta t_e$  en raison de la variation du facteur d'échelle, qui augmente inexorablement la distance physique que doit traverser la lumière (à vitesse constante!) entre les deux objets, tel que représenté schématiquement à la droite du graphique.

## 7.6 Évidences et scénarios astrophysiques

Du point de vue observationnel, la cosmologie est une branche de l'astronomie en soi, et on pourrait facilement y passer un cours complet. De surcroit, les conditions extrêmes au moment du Big Bang nous emmènent à l'intersection à la fois de la gravité, de la mécanique quantique, et de la physique des particules, et implique presque certainement ce que certains se plaisent à appeler de la "Nouvelle Physique". Cette brève section se limite aux évidences astronomiques pour l'expansion de l'Univers et d'un état initial singulier de type Big Bang, dans le contexte des modèles cosmologiques à la Friedmann-Lemaitre.

#### 7.6.1 Expansion de l'Univers: la Loi de Hubble

On considère un Univers d'Einstein-de Sitter, i.e., plat (k = 0) sans constante cosmologique  $(\Lambda = 0)$ . La métrique de Robertson-Friedmann-Walker se réduit à

$$ds^{2} = -dt^{2} + a^{2}(t)(d\sigma^{2} + \sigma^{2}d\Omega^{2}) , \qquad (7.92)$$

avec, comme on l'a vu à la §7.3,  $a(t)/a_0 = (t/t_0)^{2/3}$ . Plaçons un observateur à  $\sigma = 0$ , et un "émetteur" à  $\sigma = R$ , tous les deux comobiles dans l'Univers en expansion, i.e., leurs coordonnées spatiales demeurent donc fixes. La Figure 7.13 présente un diagramme espace-temps dans le plan  $[\sigma, t]$ , dans lequel les trajectoires des observateurs (rouge) et émetteur (vert) sont des lignes verticales. À cadence  $\delta t_e$ , l'émetteur envoie un pulse lumineux vers l'observateur. Les trajectoires (géodésiques) suivies par deux de ces pulses successifs sont tracées sur le diagramme, émis à  $t = t_e$  et  $t_e + \delta t_e$  de la position (comobile)  $\sigma = R$ .

Orientant notre système de coordonnées de manière à ce que la trajectoire spatiale des photons soit "radiale", la mesure nulle de la métrique  $(ds^2 = 0)$  implique que

$$\mathrm{d}t^2 = a^2(t)\mathrm{d}\sigma^2 \;, \tag{7.93}$$

d'où on tire, pour nos deux pulses lumineux:

$$R = \int d\sigma = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} , \qquad \text{[pulse 1]}$$
(7.94)

$$R = \int d\sigma = \int_{t_e+\delta t_e}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)} , \qquad [\text{pulse 2}]$$
(7.95)

Notons qu'on peut fragmenter la seconde intégrale ainsi:

$$\int_{t_e+\delta t_e}^{t_0+\delta t_0} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} \equiv \int_{t_e}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} \,. \tag{7.96}$$

Mais, mesuré en terme de la coordonnée comobile  $\sigma$ , l'intervalle de coordonnées demeure le même en tout temps car émetteur et observateur sont tous deux comobiles; donc les intégrales temporelles doivent être toutes deux égales à R. Cette égalité exige donc que

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} = 0 \ . \tag{7.97}$$

Si les intervalles  $\delta t_e$  et  $\delta t_0$  sont beaucoup plus petits que le temps de transit entre émetteur et observateur, alors a(t) peut être considéré constant dans chacun des intégrands ci-dessus; donc

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} - \frac{\delta t_e}{a(t_e)} = 0 . (7.98)$$

Si on interprète les  $\delta t$  comme l'inverse d'une fréquence angulaire  $\omega = 2\pi/\delta t$  d'un train d'ondes électromagnétiques de longueur d'onde  $\lambda$ , l'expression ci-dessus implique que

$$\frac{\omega_0}{\omega_e} = \frac{a(t_e)}{a(t_0)} = \frac{\lambda_e}{\lambda_0} . \tag{7.99}$$

Si maintenant la distance entre émetteur et observateur est suffisamment petite pour que temps de transit demeure beaucoup plus petit que le temps caractéristique d'expansion, alors on peut écrire (développement en série de Taylor):

$$a(t_0) = a(t_e) + d \times \dot{a} ,$$
 (7.100)

où d est la distance physique parcourue par les pulses lumineux, et est équivalente au temps de transit puisqu'on travaille avec c = 1. On a donc

$$\frac{\omega_0}{\omega_e} = \frac{a(t_0) - d\dot{a}}{a(t_0)} = 1 - d\underbrace{\frac{\dot{a}}{a(t_0)}}_{H_0} , \qquad (7.101)$$

où notre constante de Hubble est apparue dans le portrait!

En astronomie il est conventionnel de définir le redshift via un paramètre z tel que

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = 1 + z \ . \tag{7.102}$$

Si  $z \ll 1$ , on peut aussi écrire

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_0} = \frac{\omega_0}{\omega_e} = \frac{1}{1+z} \simeq 1-z .$$
(7.103)



Figure 7.14: Mesure astronomique de l'expansion de l'Univers par Edwin Hubble (1929). Sur ce diagramme original tel que publié par Hubble, l'axe vertical donne la vitesse de récession mesurée par décalage vers le rouge des raies spectrales dans d'une galaxie, l'axe horizontal la distance galactique, certaines (mais pas toutes!) déterminées par des observations d'étoiles pulsantes Céphéides, dont la période de pulsation est proportionnelle à la luminosité absolue. La pente de la droite est une mesure de  $H_0$ . Image téléchargée de www.pnas.org/content/101/1/8 (4/2018).

Notre expression (7.101) implique donc une relation linéaire entre z et d:

$$z = H_0 d \tag{7.104}$$

C'est la **Loi de Hubble**, établie observationnellement il y a un siècle par l'astronome du même nom. La Figure 7.14 reproduit son diagramme original, avec la vitesse d'éloignement (axe vertical) directement proportionnelle au paramètre z. L'évaluation visuelle de la pente sur la Fig. 7.14 suggèrerait  $H_0 \simeq 500 \,\mathrm{km \ s^{-1} \ Mpc^{-1}}$ , soit sept fois la valeur contemporaine acceptée,  $H_0 = 71 \pm 4 \,\mathrm{km \ s^{-1} \ Mpc^{-1}}$ . Le problème vient des estimés de distance utilisés par Hubble; en comparaison, la mesure spectroscopique du paramètre z était déjà passablement précise il y a un siècle.

#### 7.6.2 Masse sombre et énergie sombre

La Figure 7.15 présente une version contemporaire du diagramme de Hubble (avec les axes inversés, attention!). On couvre maintenant jusqu'à  $10^4$  Mpc et des redshifts  $z \simeq 1$ , et on a des barres d'erreur!

On se rappellera que la première équation de Friedmann pouvait s'écrire en termes des densités normalisées à la densité critique selon (7.61):

$$-k = a^2 H^2 (1 - \Omega_M - \Omega_R - \Omega_\Lambda) . \qquad (7.105)$$

Le meilleur ajustement aux observations de la Fig. 7.15 donne:

$$k = 0 , \qquad \Omega_M + \Omega_R = 0.3 , \qquad \Omega_\Lambda = 0.7 .$$
(7.106)

ce qui place notre Univers exactement à la densité critique, impliquant alors un Univers plat k = 0. C'est la solution en bleu sur la Figure 7.11, à laquelle correspond un âge de l'Univers de 13.8 milliard d'années, soit presqu'exactement  $H_0^{-1}$ .



Figure 7.15: Version moderne du diagramme de Hubble, montrant une très légère tendance d'accélération, tel que produirait une constante cosmologique non-nulle. Les diagrammes du bas montrent le résidu des observations et des modèles, après soustraction de la courbe d'expansion pour le modèle ayant  $\Omega_M = 0$  et  $\Omega_{\Lambda} = 0$  (trait plein bleu). Diagramme construit sur la base d'observations de supernovae de type 1a par deux groupes de recherche différents. Source: B. Leibundgut & S. Sollerman, *Europhysics News* **32**(4), 2001, Fig. 2; https://ww.eso.org/bleibund/papers/EPN/epn.html (12/2018).

Il n'y a aucune raison *a priori* pour que les diverses contributions à la densité d'énergie totale assument des valeurs telles que  $\Omega_{tot} = 1$ . Nous verrons un peu plus loin (§7.6.4) une semiexplication possible de ce qui doit être sinon considéré comme une spectaculaire coincidence cosmique.

La densité d'énergie associée au rayonnement électromagnétique fossile (prochaine section) indique que la contribution de celle-ci est négligeable dans l'Univers actuel:  $\Omega_R \simeq 10^{-4}$ . Les estimés de la masse baryonique (étoiles, poussière et gaz dans les galaxies) indique  $\Omega_{M,b} \simeq 0.04$ , le 0.26 restant étant attribué à la même **matière sombre** qui domine les effets de lentilles gravitationnelles galactiques (§5.6). Cette matière sombre contribue à la gravité mais n'interagit pas —ou de manière excessivement faible— avec la radiation électromagnétique. Sa nature physique demeure mystérieuse, mais ce ne sont pas les candidats qui manquent: particules élémentaires exotiques, mini-trous noirs, etc.

Quelle que soit la nature de cette matière sombre, il n'en demeure pas moins que nous semblons bien vivre dans un Univers où la densité totale d'énergie est dominée par la contribution associée à la constante cosmologique. C'est la soit-disant **énergie sombre**, qui serait associée au vide, rien de moins (Aristote, qui abhorrait l'idée même du vide, en ferait une syncope...). Mais, sur examen de la Figure 7.15, on constate que tout ceci dépend de la légère déviation vers le haut du nuage de points à haut z par rapport au modèle ayant  $\Lambda = 0$ , déviation qui semble être comparable aux barraes d'erreur associées aux mesures même. Tout ceci peut donc paraître bien peu convaincant, mais d'autres évidences observationnelles de l'existence de l'énergie sombre —ou plus précisément, d'une contribution substantielle de type constante cosmologique à l'expansion de l'univers— ressort d'un autre type d'observations cosmologiques, essentiellement indépendantes de la Loi de Hubble: le rayonnement de fond cosmologique, ou rayonnememnt fossile; plongeons nous-y !

#### 7.6.3 Le rayonnement fossile

L'état singulier de l'Univers au moment du Big Bang implique une histoire thermique qui a laissé des traces jusqu'à l'époque présente. Si la densité energétique de la radiation ( $\Omega_R$  dans nos modèles) est négligeable aujourd'hui par rapport à la densité massique, ce n'était pas toujours le cas durant toute l'histoire de l'Univers. En particulier, dans les phases initiale d'expansion de l'Univers, la dépendance de  $\rho_r$  en  $1/a^4$  (voir éq. (7.49)) garantit sa dominance sur la densité d'énergie massique ( $\propto 1/a^3$ ). En terme des unités normalisées utilisées dans le cadre de nos solutions numériques, les deux contributions deviennent égales à une valeur de *a* telle que:

$$\frac{\Omega_M}{a^3} = \frac{\Omega_R}{a^4} \qquad \to \qquad a = \frac{\Omega_R}{\Omega_M} \simeq 2.5 \times 10^{-4} , \qquad (7.107)$$

ce qui, pour la solution en bleu sur la Fig. 7.11, correspond à  $\simeq 4000$  années depuis le Big Bang. Antérieurement à cette époque, l'Univers est dominé par la radiation, et sa température varie donc en 1/a (cf. §7.2.3). Dans ces phases initiales d'expansion de l'Univers suivant le Big Bang, les températures et densités sont très élevées, rendant le milieu opaque à la radiation. Le fluide cosmologique est donc partout en état d'équilibre thermodynamique local, ce qui a comme conséquence que la distribution spectrale de la radiation prend la forme d'un corps noir.

À partir d'environ  $4 \times 10^4$  d'années après le Big Bang l'expansion devient dominée par la densité de masse-énergie. À environ  $4 \times 10^5$  yr, la température a chuté à  $T \simeq 3000$  K; les électrons et protons commencent à former des atomes d'Hydrogène, ce qui fait grandement chuter l'opacité radiative. Ceci conduit à un découplage de la radiation et de la matière, qui à partir de ce moment évolueront de manière distinctes: la matière commence à se condenser sous l'influence de la force gravitationnelle, tandis que le rayonnement cosmologique évolue simplement en réponse au redshift associé à l'expansion de l'Univers. Son spectre conserve sa forme corps noir, mais la même augmentation de la longueur d'onde produisant la Loi de Hubble décale le spectre vers les plus basses températures (et grandes longueurs d'onde). À l'époque actuelle, la température du rayonnement a chuté à  $T \simeq 2.275$  K, et le maximum du spectre s'est déplacé jusque dans le domaine micro-onde du spectre électromagnétique, soit aux


Figure 7.16: Spectre du rayonnement de fond cosmologique, tel que mesuré par la mission COsmic Background Explorer (COBE) de la NASA. Le trait bleu est le spectre d'un corps noir à T = 2.275 K. L'axe vertical donne l'intensité spécifique, exprimée ici en unités de 10<sup>6</sup> Jansky par sterradian (1 Jansky=  $10^{-26}$  W m<sup>-2</sup> Hz<sup>-1</sup>). Source: fr.wikipedia.org/wiki/Fond\_diffus\_cosmologique (3/2021).

longueurs d'ondes de l'ordre du centimètre. Dans l'Univers présent la densité d'énergie associée à ce rayonnement est de  $4 \times 10^{-14}$  J m<sup>-3</sup>, correspondant à  $\sim 4 \times 10^8$  photons par mètre cube.

Ce "fond" de rayonnement électromagnétique d'origine cosmologique a été détecté accidentellement en 1964 par Arno Penzias et Robert Wilson, et cette découverte leur a éventuellement valu le Prix Nobel de Physique en 1978. La Figure 7.16 en montre la distribution spectrale mesurée par le satellite astronomique COBE (COsmic Background Explorer, une mission de la NASA). L'ajustement des données (croix rouges) à un spectre corps noir de température T = 2.275 K (trait bleu) est pratiquement parfait !

Le rayonnement de fond cosmologique s'avère être extrêmement isotrope, c'est-à-dire qu'il est indépendant de la direction d'observation<sup>6</sup>. Mais "extrêmement" ne veut pas dire "parfaitement", et cette différence s'avère être cruciale. La Figure 7.17 montre la **distribution spatiale** de la température du rayonnement de fond cosmologique, en projection dite de Mollweide couvrant tout le ciel, telle que produite par le satellite astronomique WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), une autre mission de la NASA. L'échelle de couleur code en fait ici la *déviation* de la température du rayonnement par rapport à sa moyenne sur tout le ciel (2.275 K). Ces variations par rapport à la moyenne s'avèrent être minuscules, l'échelle de couleur ne couvrant de bout en bout que 200 microKelvin; on parle donc de variations relatives de l'ordre de quelques  $10^{-5}$ . Ces très petites inhomogénéités spatiales ont néanmoins servi de germe à la formation, par effondrement gravitationnel, des premières proto-galaxies et amas de galaxies, débutant ~ 0.5 Gyr après le Big Bang. Environ un milliard d'années après le Big

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Seulement une fois une fois qu'on a soustrait les décalages spectraux causés par le mouvement du système solaire dans la Voie Lactée, et le mouvement de cette dernière dans l'amas local, etc. Le repère où le rayonnement cosmologique est isotropes aux plus grandes échelles spatiales représente ainsi le repère inertiel ultime par rapport auquel on peut mesurer une vitesse dans l'Univers !



Figure 7.17: Le rayonnement de fond cosmologique, tel que mesuré par le satellite WMAP. L'échelle de couleur encode la fluctuation de température par rapport à la moyenne (2.275 K), et couvre  $\pm 200\mu$ K du bleu foncé au rouge; ces minuscules fluctuations ont néanmoins servi de germes pour la formation des galaxies. Image en domaine public téléchargée de https://map.gsfc.nasa.gov/media/121238/index.html (4/2018).

Bang, correspondant à  $z \simeq 6$ , Les galaxies se sont organisées en amas, et commencent enfin à ressembler à ce qu'on observe actuellement.

La "carte" de fluctuations de température du rayonnement de fond sur la Figure 7.17 peut être décomposée en harmoniques sphériques afin de produire un **spectre spatial** des fluctuations. La Figure 7.18 montre un tel spectre, où chaque point regroupe tous les modes m associée à une valeur de  $\ell$  donnée du développement multipolaire. La structure en pics multiples résulte d'oscillations acoustiques dans le plasma de baryons, dans les quelques première minutes de l'expansion de l'Univers, causées par l'interaction entre la matière et le champs de radiation. Les positions en fréquence spatiale, et les amplitudes relatives des pics, dépendent de manière très sensible des conditions physiques durant la phase évolutive de l'expansion ou matière et radiation étaient fortement couplées. Le spectre spatial du rayonnement devient ainsi un " stéthoscope" particulièrement fin des caractéristiques physiques de l'Univers, plus précisément de sa courbure (et donc densité totale), ainsi que des grandeurs relatives des densités d'énergie associées à la matière baryonique, matière sombre, radiation, et à la densité d'énergie associée à la constante cosmologique (la soi-disant "énergie sombre"). Le trait rouge correspond au "meilleur" modèle cosmologique actuel, soit le modèle " $\Lambda$ CDM" discuté à la §7.6.6 ci-dessous. L'accord entre modèle et observation est tout simplement sidérant.

#### 7.6.4 L'hypothèse inflationnaire

L'extrême homogénéité du rayonnement fossile s'avère être impossible à expliquer dans le cadre des divers modèles cosmologiques considérés jusqu'ici. Le problème est illustré sur la Figure 7.19, qui montre un diagramme espace-temps de l'Univers en coordonnées conformes  $[\sigma, \eta]$ (cf. Fig. 7.7). Le cône inversé indique notre passé causal, et le rayonnement cosmologique observé aujourd'hui provient de la tranche spatiale au moment où la radiation se découple de la matière, indiqué ici par la ligne horizontale en tiret; l'intersection de cette ligne avec notre passé causal est donc l'équivalent sur ce diagramme de ce qu'on voit sur la Figure 7.17. Si on remonte plus loin dans le temps, l'Univers est opaque à la radiation électromagnétique (région



Figure 7.18: Spectre angulaire des **fluctuations** du rayonnement de fond cosmologique, tel que mesuré par plusieurs satellites, incluant WMAP (points noirs). Le trait rouge est la prédiction du modèle dit  $\Lambda$ CDM, le modèle cosmologique accepté à l'heure actuelle. Source: NASA/WMAP Science team, en domaine public. (3/2021).

en gris), donc on ne peut pas "voir" le Big Bang<sup>7</sup>.

Considérons maintenant les points A, B et C situés sur cette hypersurface de découplage radiation-matière. Leur passés causaux respectifs sont également indiqués. Ceux de A et Bintersectent avant le Big Bang (région en gris foncé). On est alors en droit de supposer qu'un processus ait pu homogénéiser les conditions physiques avec une efficacité telle que A et B se retrouvent à quasi-exactement la même température, comme le suggère la Fig. 7.17. Cependant le passé causal du point C n'intersecte pas celui de A ou B; il n'y a donc aucune raison de croire que la température en C soit quasi-identique à celle en A ou B. Voilà ce qui doit être expliqué.

La **théorie inflationnaire** offre une solution possible à ce problème de causalité. L'inflation est en fait une hypothèse plutôt *ad hoc*, beaucoup plus qu'une théorie, du moins dans le sens habituel du terme. L'idée centrale est que très tôt dans l'histoire de l'Univers (genre,  $10^{-36}$  s après le Big Bang), mais pour une très très brève durée (genre,  $10^{-32}$  s), une constante cosmologique de magnitude très très élevée (genre,  $\sim 10^{17}$  m<sup>-2</sup> plutôt que sa valeur estimée actuelle de  $\sim 10^{-52}$  m<sup>-2</sup>) fait son apparition. L'expansion de l'Univers est alors complètement dominée par le terme en  $\Lambda$  dans la première équation de Friedmann (7.36), ce qui, comme on l'a vu (§7.5), conduit à une croissance exponentielle du facteur d'échelle:

$$a(t) \propto \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right)$$
, [inflation] (7.108)

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Sauf peut-être en observant les ondes gravitationnelles résiduelles du Big Bang!



Figure 7.19: Tranche 2D du diagramme espace-temps de l'Univers tracé dans le plan conforme  $[\sigma, \eta]$  (voir Fig. 7.7). La région en gris correspond à l'époque opaque aux photons, le trait horizontal en tirets indiquant sa fin, soit le soi-disant découplage radiation-matière, et donc la limite de l'Univers visible dans le passé. Ici les passés causaux des points A et B intersectent (gris foncé) après le Big Bang, mais ni l'un ni l'autre n'intersectent le passé causal du point C (voir texte).

Le paramètre de Hubble y correspondant est alors donné par:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \ . \tag{7.109}$$

La Figure 7.20 illustre schématiquement ce que devient la Figure 7.19 si on introduit une telle phase inflationnaire rapide dans les instants suivant le Big Bang. Même si cette phase est brève, son intensité a comme conséquence de produire une grande expansion du temps conforme, ce qui revient à "compresser" le temps cosmologique vers le haut. Mais le diagramme n'en demeure pas moins tracé dans le plan conforme  $[\sigma, \eta]$ , donc la lumière se déplace toujours sur des droites orientées à 45° de la verticale. Conséquamment, même les points A et C, situés à des positions diamétralement opposées sur la surface de découplage, ont maintenant des passés causaux qui intersectent avant le Big Bang (gris foncé), et leurs conditions physiques peuvent donc avoir été homogénéisées avant le découplage. C'est ainsi que l'inflation produit "naturellement" un rayonnement cosmologique fossile quasi-parfaitement isotrope.

Revenons maintenant à la première équation de Friedmann (7.36), en y posant  $\Lambda = 0$  puisque l'effet inflationaire est déjà "inclus" dans l'expansion exponentielle introduite comme hypothèse de travail. Insérons-y maintenant la définition de la densité critique  $\rho_c = 3H^2/8\pi = \Lambda/8\pi$ , la seconde égalité résultant de (7.109). Introduisant finalement la densité normalisée totale  $\Omega_{\text{tot}} = \rho/\rho_c$ , on arrive à:

$$\dot{a}^2 - \frac{\Lambda}{3}\Omega_{\rm tot}a^2 = -k , \qquad (7.110)$$

où  $\Omega_{\text{tot}}$  est la densité totale normalisée à la densité critique, comme auparavant. Substituant maintenant (7.108) dans cette expression, on trouve facilement que:

$$\Omega_{\rm tot}(t) = 1 + \frac{3k}{\Lambda} \exp\left(-2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right) . \qquad \text{[inflation]} \tag{7.111}$$

Il suffit donc que la phase inflationnaire ait une durée telle que  $\sqrt{\Lambda/3t} \sim 10$  —et rappelons nous qu'ici  $\Lambda$  est supposé très grand— pour que terme exponentiel deviennent minuscule, et donc  $\Omega_{tot} \rightarrow 1$ ; soit la densité critique. C'est ainsi que l'inflation produit "naturellement" un Univers de courbure nulle, k = 0.



Figure 7.20: Tranche 2D du diagramme espace-temps (conforme) de l'Univers, incluant cette fois une époque inflationnaire très rapide mais de très courte durée peu après le Big Bang, tel qu'indiqué par les traits rouges. Dans un diagramme  $[\sigma, \eta]$ , ceci compresse le temps cosmologique vers le haut, mais même dans ce diagramme ainsi déformé la lumière se déplace toujours le long de droites à 45° de la verticale. Les points A et C, aux limites opposées de l'Univers visible au moment du découplage photon-matière, ont maintenant des passés causaux qui intersectent durant une partie de la phase inflationnaire (voir texte).

La "théorie" inflationnaire a ainsi le mérite d'expliquer deux observations problématiques d'un coup: l'extrême homogénéité spatiale du rayonnement cosmologique, et la courbure nulle de notre Univers. L'origine physique de cette substantielle mais éphémère constante cosmologique demeure cependant un mystère complet. La page Wikipedia citée en bibliographie offre un bon survol des explications présentement à la mode; mais qui (à mon humble avis) ne dépassent que rarement le stade physico-mystique.

#### 7.6.5 La nucléosynthèse primordiale

Une autre contrainte très utile sur les paramètres cosmologiques provient de la **nucléosynthèse primordiale**, soit les réactions de fusion nucléaire ayant produit de petites quantités d'éléments légers (de l'Hydrogène au Bore, dans le tableau périodique). Cette nucléosynthèse débute une dizaine de secondes après le Big Bang, et ne dure que quelques minutes, après quoi les température et densité ont chuté sous les valeurs permettant aux protons et noyaux plus lourds fraichement produits de vaincre la barrière de Coulomb.

La Figure 7.21 illustre les principales réactions nucléaires impliquées dans la production des isotopes qui finiront les plus abondants. Trois autres isotopes légers produits en très faibles quantités, <sup>6</sup>Li, <sup>9</sup>Be et <sup>11</sup>B, ne sont pas inclus sur ce diagramme afin de ne pas trop l'alourdir. Rien de plus lourd que le Bore (charge atomique Z = 5) n'est produit en quantités significatives. La nucléosynthèse primordiale nous donne ainsi un tableau périodique de seulement cinq éléments! Tous les autres seront produits au coeur des premières étoiles, une fois que celles-ci auront commencé à se former, beaucoup plus tard dans l'évolution de l'Univers. À noter également, le neutron (libre) a une demie vie de  $\simeq 900 \, s$ ; si entre une seconde et une minute l'expansion avait été un peu plus rapide qu'elle ne l'a été dans le cas de notre Univers, les réactions de captures de proton et de neutron s'en seraient trouvés défavorisées. La majorité des neutrons seraient demeurés non-liés dans des noyaux de D et He, se seraient subséquemment désintégrés en protons, et la masse baryonique de l'Univers n'aurait été composé que d'Hydrogène jusqu'à ce que débute la nucléosynthèse stellaire.

La Figure 7.22 montre les séquences temporelles des abondances des isotopes primordiaux les plus abondants, tel que calculées dans un modèle cosmologique de courbure nulle, i.e.,  $\Omega_{\text{tot}} = 1$  imposant k = 0. Notez bien l'échelle verticale logarithmique! L'Hydrogène est de loin l'élément le plus abondant, suivi de l'Hélium avec une fraction de masse de  $\simeq 0.2$ . Mis à



Figure 7.21: La nucléosynthèse primordiale; ce diagramme montre les chaines de réactions impliquées. Les taux de ces réactions sont tous fortement dépendant des températures et densités. Image tirée de www.astro.ucla.edu/~wright/BBNS.html (4/2018).

part les autres isotopes de H et He, le prochain élément le plus abondant est le Beryllium, mais avec une fraction de masse de seulement ~  $10^{-9}$ , suivi du Lithium avec une fraction de masse ~  $10^{-10}$ . Des quantités encore plus faibles de <sup>9</sup>Be et <sup>10</sup>B sont également produites. Notons que le tritium (<sup>3</sup>H sur la Figure) et le <sup>7</sup>Be sont instables, avec des demie-vies de 12 ans et 53 ans, respectivement, et donc disparaissent rapidement durant l'évolution subséquente de l'Univers.

Malgré leur très faible fraction de masse, le Lithium, et le Beryllium (et à un degré moindre le Bore) jouent un rôle critique dans la contrainte des paramètres cosmologiques. Ces éléments sont thermonucléairement fragiles, et donc sont normalement détruits à l'intérieur des étoiles; contrairement à l'Hélium, qui y est produit en abondance. La mesure de abondances primordiales de Deuterium, d'Helium-3, de Li, Be et B dans les très vieilles étoiles de première génération, ainsi que dans certaines météorites, permet de fixer assez précisement la contribution baryonique à la densité massique à  $\Omega_{M,b} = 0.04$ .

Les abondances mesurées des isotopes produits par la nucléosynthèse primordiale permettent aussi de fortement contraindre, voire même infirmer, une vaste gamme de modèles cosmologiques alternatifs introduisant de nouvelles particules bizarroides dans les premières fractions de secondes suivant le Big Bang, ou des modifications plus ou moins *ad hoc* à l'équation de champ d'Einstein.



Figure 7.22: La nucléosynthèse primordiale; séquences temporelles de production des éléments légers pour un modèle cosmologique standard de courbure nulle. Les abundances produites à la fin de la période de nucléosynthèse, qui se termine environ trois minutes après le Big Bang, dépendent de manière sensible de la densité et du taux d'expansion, et donc permettent de contraindre les modèles cosmologiques. Notez l'échelle verticale logarithmique ouvrant 14 ordres de grandeur ! L'Hydrogène et l'Hélium sont de loin les produits dominants de la nucléosynthèse primordiale. Source: www.astro.ucla.edu/~wright/BBNS.html; 4/2018.

### 7.6.6 Le modèle $\Lambda CDM$

Au fil des dernières décennies, la combinaison d'observations cosmologiques aux modèles théoriques a permi de dégager un modèle cosmologique "standard" de l'évolution de notre Univers. Ce modèle, dit  $\Lambda$ CDM (CDM pour "Cold Dark Matter"), avec l'ajout d'une phase inflationnaire ayant débuté à environ  $t = 10^{-36}$  s après le Big Bang, et duré jusqu'à quelque part entre  $t \simeq 10^{-33}$  s et  $t \simeq 10^{-32}$  s, explique la quasi-totalité des observations cosmologiques actuelles. Les paramètres physiques le définissant sont résumés au tableau 7.1 ci-dessous. Ici on a subdi-

			1 /
Densité	Symbole	Valeur	
Radiation	$\Omega_B$	$8 \times 10^{-5}$	
Masse baryonique	$\Omega_{M,b}$	$4 \times 10^{-2}$	
Matière sombre	$\Omega_{M,d}$	0.26	
Énergie sombre	$\Omega_{\Lambda}$	0.70	

Table 7.1: Densités normalisées dans le modèle  $\Lambda$ CDM (Univers plat, k = 0)

visé la densité massique normalisée en une contribution baryonique  $\Omega_{M,b}$ , et une seconde  $(\Omega_{M,d})$ associée à la matière sombre. L'attribut "Cold" à la matière sombre implique que celle-ci ne contribue pas à la pression dans le tenseur de stress-énergie. La densité totale est  $\Omega_{\text{tot}} \simeq 1$ , impliquant que l'Univers est plat. Il est évidemment impossible de démontrer formellement que cette "solution" soit unique, mais aucune version modifiée de la relativité générale n'a réussi à faire mieux à date. Tous comptes faits, nous ne connaissons (et ne comprenons) donc que 4% de la composition de l'Univers. Le reste, "les ténèbres entre les étincelles"<sup>8</sup>, c'est le grand inconnu. Il y a certainement là matière à tenir bien occupées encore quelques générations de physicien(ne)s, soit vous autres! C'est donc à suivre...

#### **Bibliographie:**

Tous les ouvrages de relativité générales cités en bibliographie au chapitre 1 incluent (évidemment!) un ou plusieurs chapitres traitant de cosmologie. Le chapitre 18 du Hartle couvre la construction des modèles cosmologiques; Ses chapitres 17 et 19 détaillent les aspects observationnels, incluant la détermination astronomique des paramètres cosmologiques fondamentaux.

L'ouvrage suivant présente une excellente introduction à l'histoire de la cosmologie; son chapitre 3 couvre avec brio les premiers modèles cosmologiques basés sur la relativité générale, et les vifs débats qu'ils ont engendré:

Kragh, H.S., Conceptions of Cosmos, Oxford University Press (2007),

mais la discussion à saveur historique qui lance ce chapitre est une production de mon cru. Les contributions de Friedmann et Lemaitre sont discutées en détail —et en contexte— dans un autre excellent ouvrage:

Luminet, J.P. (éd.), Essais de Cosmologie, Éditions du Seuil (1997).

et par le même auteur, une "lecture d'été" très fortement recommandée:

Luminet, J.P. (éd.), L'invention du Big Bang, Éditions du Seuil (2004; reédition Éditions Point 2014).

Sur la mesure astronomique de l'expansion de l'Univers par Edwin Hubble, voir:

```
www.pnas.org/content/101/1/8
```

Bien que datant maintenant de trente ans, et donc pas à jours au niveau des observations, l'ouvrage suivant demeure l'incontournable grand classique de la cosmologie physique :

Peebles, P.J.E., Principles of Physical Cosmology, Princeton University Press (1993).

La page Wikipedia en français sur le rayonnement de fond cosmologique est vraiment très bien; et les Figures 7.16 et 7.18 en sont d'ailleurs tirés:

fr.wikipedia.org/wiki/Fond\_diffus\_cosmologique

Sur la nucléosynthèse primordiale, voir l'excellente série de pages web sur le site "Einsteinonline":

www.einstein-online.info/en/spotlight/bbn/

ainsi que le site suivant, d'où les Figures 7.21 et 7.22 sont tirées:

www.astro.ucla.edu/~wright/BBNS.html

L'ouvrage "*Patience dans l'Azur*", par Hubert Reeves, est également une lecture facile et très inspirante, et qui touche au sujet.

La page Wikipedia (en anglais) sur l'inflation est passablement plus étoffée que sa version en français, et vaut la peine d'être lue:

en.wikipedia.org/wiki/Inflation\_(cosmology)

 $<sup>^{8}</sup>$ dixit l'excellent Matière fantôme, par Stéphane Douay, Hughes Fléchard, et Irène Häfliger, aux éditions Dupuis (2006).

Le chapitre 8 de l'ouvrage Carroll (voir bibliographie du chapitre 1) inclut une bonne présentation de l'inflation, raisonnablement succincte et à un niveau un peu plus poussé qu'à la §7.6.4 cidessus, mais demeurant néanmoins accessible au niveau de ce cours.

Bien que d'un niveau technique supérieur à celui de ce cours, le très complet article de revue suivant demeure une excellente discussion de la physique sous-jacente à la constante cosmologique et à l'énergie sombre, et aux contraintes qu'y apportent les observations cosmologiques:

Peebles, P.J., & Ratra, B., Rev. Mod. Phys., 75(2), 559-606 (2003).



John Archibald Wheeler (1911–2008)



Roy Kerr (1934-)



Andrea Ghez (1957–)

## Chapitre 8

# Trous noirs

Un astre lumineux, de la même densité que la Terre, et dont le diamètre serait 250 fois plus grand que le Soleil, ne permettrait, en vertu de son attraction, à aucun de ses rayons de parvenir jusqu'à nous. Il est dès lors possible que les plus grands corps lumineux de l'univers puissent, par cette cause, être invisibles.

Pierre Simon de Laplace Exposition du Système du Monde, 1796

Pierre-Simon de Laplace (1749–1827) reformulait ainsi un concept avancé seize ans auparavant par le géologue et astronome amateur anglais John Michel (1724–1793), mais qui n'avait pas "accroché" à l'époque. L'idée est fermement ancrée dans une vision corpusculaire de la lumière. La finitude de la vitesse de la lumière avait déjà été démontrée en 1676 par Ole Rømer (1644–1710). Notant que les éclipses d'Io par Jupiter sont parfois décalées dans le temps par une dizaine de minutes par rapport aux prédictions de la mécanique céleste Newtonienne, il en conclut que ce décalage résulte de l'intervalle de temps requis par la lumière pour se déplacer de Jupiter jusqu'à la Terre. Il en arrive à une vitesse de la lumière  $c = 220,000 \,\mathrm{km \ s^{-1}}$ , ce qui n'est pas mal du tout!

De là il n'y a qu'un pas en dynamique Newtonienne. Supposons un photon (terminologie anachronique ici...) de masse m se déplaçant à vitesse c; sa vitesse d'échappement dans le champ gravitationnel d'une masse M de rayon r se calcule immédiatement en posant l'égalité de ses énergies potentielle et cinétique:

$$\frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mc^2 , \qquad (8.1)$$

d'où on déduit qu'il existe, pour une masse M, un rayon critique ( $r_S$  disons...) où la vitesse d'échappement devient égale à la vitesse de la lumière:

$$r_S = \frac{2GM}{c^2} . \tag{8.2}$$

Notons que ceci est indépendant de la valeur de la masse supposée du photon, tant que ce dernier a une masse et "ressent" donc la force gravitationnelle; mais notons surtout que cette expression est identique au rayon de Schwarzschild introduit au chapitre 4!

Cependant, l'inexorable émergence de la théorie ondulatoire de la lumière au 18ème siècle éclipse la théorie corpusculaire de la lumière, au point où Laplace lui-même en vient à éliminer la section contenant le passage cité ci-dessus dans la troisième édition de son Système du Monde. L'idée d'une "étoile noire" est donc reléguée aux oubliettes pendant plus de deux siècles. Ce qu'on appelle maintenant un **trou noir** réapparait comme une curiosité mathématique associée à une des première solutions des équations du champ d'Einstein, obtenue par Karl Schwarzschild (1873–1916) un an à peine après la publication de la théorie de la relativité générale. Il est remarquable que ni Schwarzschild ni Einstein n'aient considéré que la solution dite "intérieure" au rayon de Schwarzschild puisse être physiquement valide et astrophysiquement possible. On reviendra sur tout ça à la §8.6.1.

## 8.1 Dérivation de la métrique de Schwarzschild

La dérivation de la métrique de Schwarzschild par le Karl du même nom s'est faite dans des circonstances pratiques plutôt exceptionnelles, comme vous aurez pu déjà l'apprendre grâce à la lecture suggérée associée à ce chapitre. De plus, le **théorème de Birkhoff** stipule que la métrique de Schwarzschild est la **seule** solution possible à symétrie sphérique de l'équation du champ d'Einstein !

La procédure générale suit celle utilisée pour la métrique de Robertson-Walker-Friedmann du chapitre précédent:

- 1. On établit une forme générale sur la base de symétries;
- 2. On calcule les fonctions impliquées via l'équation de champ d'Einstein

La métrique recherchée en est une caractérisée par une symétrie sphérique au niveau des coordonnées spatiales. Travaillant en coordonnées sphériques polaires  $(r, \theta, \phi)$ , la forme la plus générale est du genre:

$$\mathrm{d}s^2 = -\alpha(r)\mathrm{d}t^2 + \beta(r)\mathrm{d}r^2 + \gamma(r)r^2\mathrm{d}\Omega \;, \tag{8.3}$$

avec  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ , comme auparavant. Une des trois fonctions inconnues peut être absorbée dans la définition d'une nouvelle coordonnée radiale, disons  $r' = r\sqrt{\gamma(r)}$ . Il est facile de vérifier que la métrique ci-dessus devient alors:

$$\mathrm{d}s^2 = -\alpha(r')\mathrm{d}t^2 + \frac{\beta(r')}{\left(\sqrt{\gamma} + \frac{r}{2\sqrt{\gamma}}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}r}\right)^2}\mathrm{d}r'^2 + r'^2\mathrm{d}\Omega^2 \ . \tag{8.4}$$

À ce stade, une fonction de r vaut bien une autre fonction de r'; rebaptisons  $r' \to r$ , et déclarons le monstre multipliant  $dr'^2$  comme définissant une "nouvelle" fonction  $\beta(r)$ ; ainsi,

$$ds^{2} = -\alpha(r)dt^{2} + \beta(r)dr^{2} + r^{2}d\Omega^{2} .$$
(8.5)

Il sera important de bien garder en tête quà partir d'ici la coordonnée r n'est plus exactement le rayon habituel des coordonnées sphériques polaires en espace 3D plan !

Réécrivons nos deux fonction inconnues un peu différemment:

$$\alpha(r) = \exp(2\Phi(r)) , \qquad (8.6)$$

$$\beta(r) = \exp(2\Lambda(r)) , \qquad (8.7)$$

de telle sorte que la métrique devient<sup>1</sup>:

$$ds^{2} = -e^{2\Phi(r)}dt^{2} + e^{2\Lambda(r)}dr^{2} + r^{2}d\Omega^{2} .$$
(8.8)

Cette manoeuvre s'avère à simplifier le calcul des coefficients de connexion; car, à partir d'ici, c'est comme au chapitre précédent; on doit:

- 1. calculer les coefficients de connexion,
- 2. calculer les composantes non-nulles du tenseur de Riemann,

BG§8.1.1 Ca §5.2

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Attention, ici $\Phi$ n'a rien à voir avec le potentiel Newtonien, et  $\Lambda$ n'a rien à voir avec la constante cosmologique!

- 3. contracter le tenseur de Riemann pour obtenir le tenseur de Ricci,
- 4. contracter le tenseur de Ricci pour obtenir le scalaire de Ricci,
- 5. assembler les 4 composantes diagonales de  $G_{\mu\nu}$ ,
- 6. calculer les composantes diagonales du tenseur de stress-énergie  $T_{\mu\nu}$ ,
- 7. assembler les 4 composantes diagonale des équations de champ d'Einstein,
- 8. en solutionner deux pour obtenir  $\Phi(r)$  et  $\Lambda(r)$ .

C'est long et un tantinet fastidieux, mais aucune subtilité particulière ne vient compliquer le processus. Sautant quelques étapes (!), pour le tenseur d'Einstein on obtient<sup>2</sup>:

$$G_{00} = \frac{1}{r^2} e^{2(\Phi - \Lambda)} \left( 2r \frac{d\Lambda}{dr} - 1 + e^{2\Lambda} \right)$$
  
$$\equiv \frac{e^{2\Phi}}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r \left( 1 - e^{-2\Lambda} \right) \right], \qquad (8.9)$$

$$G_{11} = \frac{1}{r^2} \left( 2r \frac{d\Phi}{dr} + 1 - e^{2\Lambda} \right) .$$
 (8.10)

Maintenant le tenseur  $T_{\mu\nu}$ ; la métrique recherchée doit décrire la courbure de l'espace-temps produite par une distribution de masse au repos, et ayant symétrie sphérique. Il est facile de montrer que la condition de normalisation pour la quadrivitesse impose  $u_{\mu} = (e^{\Phi}, 0, 0, 0)$ , et que les seules composantes non-nulles de  $T_{\mu\nu}$  sont donc

$$T_{00} = e^{2\Phi}\rho(r) , \qquad T_{11} = e^{2\Lambda}p(r) , \qquad T_{22} = r^2p(r) , \qquad T_{33} = r^2\sin^2\theta p(r) .$$
 (8.11)

La composante "00" de l'équation de champ (sans constante cosmologique!) devient donc

$$\frac{1}{r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left[ r \left( 1 - \mathrm{e}^{-2\Lambda} \right) \right] = 8\pi\rho(r) \;. \tag{8.12}$$

Allons-y maintenant pour une autre définition d'une fonction de r:

$$M(r) = \frac{r}{2}(1 - e^{-2\Lambda}) ; \qquad (8.13)$$

sous substitution de ceci dans la précédente, on arrive à:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r} = 4\pi\rho \;, \tag{8.14}$$

d'où, en intégrant:

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') \mathrm{d}r' \ . \tag{8.15}$$

Le choix du symbole "M" n'était pas un hasard! L'expression ci-dessus indique que M(r) correspond à la masse contenue dans la sphère de rayon r! L'équation (8.13) peut donc s'écrire:

$$e^{2\Lambda} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} , \qquad (8.16)$$

ce qui commence à ressembler à quelquechose de connu...

Ca§5.8

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Attention lecteurs de Barrau & Grain: il manque à leurs équations (8.9) et (8.15) un facteur  $e^{2\Phi}$ ; mais il manque le même facteur à leurs expressions pour  $T_{00}$  et  $T_{11}$ ! Ce qui fait que les développements subséquents s'en retrouvent corrects.

Je vous laisse vérifier que la composante "11" de l'équation du champ,  $G_{11} = 8\pi p$ , conduit à:

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{4\pi pr^3 + M}{r(r - 2M)} .$$
(8.17)

Si on se place à l'extérieur du corps sphérique, on a alors p = 0, et l'expression ci-dessus se réduit à

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} = \frac{M}{r(r-2M)} \ . \tag{8.18}$$

Une petite substitution de variable que je vous laisse la joie de découvrir permet d'évaluer cette intégrale:

$$\Phi(r) = \frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{2M}{r}\right) , \qquad (8.19)$$

et donc

$$e^{2\Phi(r)} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) . \tag{8.20}$$

La substitution de (8.16) et (8.20) dans notre expression générale (8.8) pour la métrique donne finalement:

$$ds^{2} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^{2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^{2} + r^{2}d\Omega^{2}$$
(8.21)

Caramba! Schwarzschild ist gerade aus dem Feldsgleichung aufgetaucht !!

...Uh s'cusez, je fatigue, on continue...

On remarque que tant qu'on considère une région de l'espace à l'extérieur du corps sphérique, le détail de la distribution radiale de masse  $\rho(r)$  ou pression p(r) ne change rien à la courbure locale. Vous avez déjà vu ça en gravité Newtonienne. Et rien, en principe, ne nous empêche de supposer que toute la masse est concentrée dans un volume  $V \to 0$  centré sur r = 0.

Le théorème de Birkhoff stipule que la métrique (8.21) est la seule solution possible des équations de champ en symétrie sphérique applicable au vide, et qu'une telle solution (i.e., tenseur métrique) ne peut pas dépendre explicitement du temps. Pour une preuve (relativement) facile à suivre, voir la §5.2 de l'ouvrage de Carroll cité en bibliographie en fin de chapitre.

## 8.2 Sur l'horizon

Pour Oncle Albert et ses contemporains, incluant Schwarzschild lui-même, la solution obtenue par ce dernier n'avait un sens physique seulement pour r > 2M. C'est avec cette solution dite "extérieure" que nous avons calculé au chapitre 4 l'avance du périhélie de Mercure et la déviation de la lumière, autant pour le soleil que pour notre étoile à neutron peinturlurée (Fig. 4.10). Nous y avions aussi déjà noté quelques "pathologies" associées au rayon de Schwarzschild  $r_S = 2M$ :

- $g_{tt} = 0$  à r = 2M;
- $g_{rr} \to \infty$  quand  $r \to 2M$ ;
- changements de signe de  $g_{tt}$  et  $g_{rr}$  sous r = 2M
- Mesuré en terme de la coordonnée t par un observateur à grande distance, un Buck en chute libre prend un temps infini pour atteindre l'horizon;

Cependant, on a également vu aux chapitres 4 et 5 que:

• Mesuré en terme du temps propre  $\tau$ , rien de particulier ne se produit quand un Buck en chute libre traverse l'horizon;

• La courbure à r = 2M est finie, dans la sens que l'équation de la déviation géodésique ne se comporte pas pathologiquement à r = 2M, seulement dans la limite  $r \to 0$ .

Une mesure scalaire de la courbure peut se calculer par le produit intérieur du tenseur de Riemann avec lui-même, soit la *courbure invariante* associée à ce tenseur. Le calcul est simple mais un peu long, car on doit d'abord calculer les 20 composantes indépendantes de  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ pour la métrique de Schwarzschild. Le résultat en est:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48\,M^2}{r^6} \,. \tag{8.22}$$

Cette expression indique clairement que la courbure ne diverge pas à r = 2M, puisqu'on a alors simplement:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{3}{4M^4} , \qquad (8.23)$$

qui est définitivement une quantité finie. Tout ceci, et en particulier l'éq. (8.22), suggère que les pathologies notées précédemment ne reflètent pas quelque chose de physique, mais plutôt un "mauvais" choix de système de coordonnées utilisé pour exprimer la métrique. Il faut examiner de plus près ce qui se passe réellement à r = 2M.

Commençons par calculer la "surface" de l'horizon, soit la superficie d'une tranche 2D r = 2M et t = constante dans la géométrie de Schwarzschild<sup>3</sup>. Le calcul demande d'évaluer l'intégrale de surface:

$$\int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} \sqrt{g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}} \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} r^{2}\sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi$$
$$= 4\pi (2M)^{2} , \qquad r = 2M . \qquad (8.24)$$

ce qui est bien le résultat attendu pour une surface sphérique de rayon  $r_S = 2M$ . On trouve similairement que le cercle équatorial a une circonférence  $2\pi(2M)$ . Donc à date ça va, tout baigne dans l'huile.

Calculons maintenant le "volume" de l'hypersurface 3D spatiotemporelle définie en fixant r = 2M comme auparavant, mais en laissant cette fois  $-\infty < t < \infty$ :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{-g_{tt}g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi = 0 , \qquad r = 2M .$$
(8.25)

Le volume se retrouve nul ici parce que  $g_{tt} = 0$  à r = 2M; autrement dit, ce volume nominalement 3D est en fait une surface 2D! Voilà qui est définitivement bizarre.

La divergence de  $g_{rr}$  à r = 2M porte également à croire que tout calcul de distance radiale à partir de l'horizon va sérieusement foirer; Écrivons une intégrale de ligne pour calculer la distance propre (physique) le long d'un segment radial entre l'horizon et une position r (> 2M) quelconque:

$$\int_{2M}^{r} \sqrt{g_{rr}} \, \mathrm{d}r = \int_{2M}^{r} \left(\frac{2M}{r} - 1\right)^{-1/2} \, \mathrm{d}r \; . \tag{8.26}$$

Cette intégrale semble à prime abord dangereuse, car l'intégrand diverge à r = 2M. On a vu au chapitre 4 comment évaluer une telle intégrale numériquement à l'aide d'une modification à la méthode du trapèze (viz. Fig. 4.15). Cependant, croyez-le ou non, elle s'évalue aussi analytiquement:

$$\int_{2M}^{r} \left(\frac{2M}{r} - 1\right)^{-1/2} \mathrm{d}r = \sqrt{r(r - 2M)} + 2M \log \left|\sqrt{r/2M - 1} + \sqrt{r/2M}\right| , \qquad r > 2M .$$
(8.27)

 $<sup>^{3}</sup>$ Ici la métrique ne dépend pas de t donc le choix de l'instant temporel précis n'a aucun effet sur tout ce qui suit.



Figure 8.1: Intersections de sphères, chacune séparé par le même incrément de distance propre de la suivante, avec le plan équatorial  $[r, \phi]$  des coordonnées de Schwarzschild ( $\theta = \pi/2$ , t = const.). Le cercle intérieur, tracé en rouge correspond à l'horizon  $r_S = 2M$ .

La distance propre demeure donc une quantité finie. La Figure 8.1 montre une série de cercles correspondant à l'intersection avec le plan équatorial  $[r, \phi]$  de sphères concentriques séparées d'un intervalle constant en distance propre radiale. Remarquez comment, mesurée en terme de la coordonnée r de la métrique de Schwarzschild, la distance entre les sphères diminue à mesure que l'on approche l'horizon, et tendant vers zéro dans la limite  $r \to r_S$ .

Imaginons maintenant décaler chaque cercle dans une direction ("z") perpendiculaire au plan de la Figure 8.1, déformant ainsi le plan équatorial 2D  $[r, \phi]$  en une surface 3D, de manière telle à ce que la "distance" entre chaque cercle redevienne la même quelle que soit la distance à l'horizon. Autrement dit, on représente la surface 2D  $t = \text{constante}, \theta = \pi/2$  dans un espace cartésien 3D où la "hauteur" z(r) est donnée par

$$z(r) = \begin{cases} 2\sqrt{2M(r-2M)} & r \ge 2M \\ -2\sqrt{2M(2M-r)} & r < 2M \end{cases}$$
(8.28)

La Figure 8.2 est une représentation de cet hyperplan, appelé paraboloide de Flamm. La distance métrique entre deux points sur cette surface, disons  $(r_1, \phi_1)$  et  $(r_2, \phi_2)$ , serait la même que donnée par l'expression de l'intervalle dans la métrique de Schwarzschild, toujours dans le plan équatorial à t = constant:

$$ds^{2} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^{2} + r^{2} d\phi^{2} .$$
(8.29)

Le diagramme offre donc une vision graphique de la déformation de l'espace-temps<sup>4</sup>, tout comme la surface d'une sphère est une représentation graphique dans un espace 3D Cartésien d'un espace 2D de courbure positive.

**TB§26.3.6** 

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Ce genre de diagramme, dans la litérature anglophone, est appellé *embedding diagram*; je n'ai pas encore trouvé d'équivalent en français qui soit systématiquement utilisé dans ce contexte; si vous en trouvez un, signalez-le moi SVP!



Figure 8.2: Hypersurface du plan  $[r, \phi]$  dans le plan équatorial  $(\theta = \pi/2)$  et t =constant de la métrique de Schwarzschild, représentée comme une surface 3D dans un espace Cartésien (plat), avec la hauteur z (verticale) de la surface donnée par l'éq. (8.28). Cette surface est connue sous le nom de *paraboloide de Flamm*. Le cercle tracé en rouge à z = 0 correspond à l'horizon,  $r_S = 2M$ . La partie intérieure à l'horizon, située ici sous ce cercle et se terminant en pointe, n'apparait pas sur la Fig. 8.1 mais est discutée à la §8.3. La distance entre deux points sur cette surface est la même que l'intervalle entre les deux points correspondant dans la métrique de Schwarzschild (voir texte).

Il ne faut surtout pas confondre le paraboloide de Flamm avec le potentiel effectif associé aux trajectoires de particules massives dans la métrique de Schwarzschild; une bille lancée sur cette surface ne décrirait *pas* le genre de trajectoires étudiées à la §4.3. Une trajectoire contenue sur cette surface correspondrait à un "objet" se déplaçant à une vitesse infinie, puisque la surface est tracée à un t constant!

## 8.3 Sous l'horizon

Passons maintenant sous l'horizon, en calculons la distance radiale propre entre celui-ci et un point la surface d'une sphère de rayon r < 2M. On doit composer avec le fait que sous  $r_s$ , notre  $g_{rr} < 0$ ; pour le moment, utilisons simplement sa valeur absolue (manoeuvre douteuse, sur laquelle on reviendra un peu plus loin). Encore une fois, il existe une solution analytique:

$$\int_{2M}^{r} \sqrt{|g_{rr}|} \, \mathrm{d}r = \int_{2M}^{r} \left(\frac{2M}{r} - 1\right)^{-1/2} \, \mathrm{d}r$$
  
=  $-2M \operatorname{arccot} \left[\sqrt{r/(2M-r)}\right] - \sqrt{r(2M-r)} , \quad r < 2M .$  (8.30)

Cette expression permet de calculer la distance propre entre l'origine du système de coordonnées de Schwarzschild et l'horizon, soit le "rayon propre" de ce dernier:

$$\lim_{r \to 0} \int_{r}^{2M} \sqrt{|g_{rr}|} \, \mathrm{d}r = \pi M \;, \qquad > 2M \;. \tag{8.31}$$

Ceci est une quantité finie, même si  $|g_{rr}| \to \infty$  quand  $r \to 0$ ; ce résultat est par ailleurs cohérent avec le fait qu'un observateur en chute libre atteigne la singularité centrale en un intervalle de temps propre fini (viz. la Fig. 4.4). Remarquons également que ce rayon propre est plus grand que l'intervalle de la variable r de la métrique de Schwarzschild; autrement dit, un(e) arpenteur(e)-géomètre effectuant des mesures dans cette géométrie déterminerait un rapport

$$\frac{\text{surface}}{(\text{rayon})^2} = \frac{4\pi (2M)^2}{(\pi M)^2}$$
$$= \frac{16}{\pi} < 4\pi$$
(8.32)

et similairement trouverait pour le rapport circonférence-sur-rayon  $4 < 2\pi$ . Ces résultats sont une démonstration on ne peut plus claire de la courbure de l'espace-temps caractérisant cette métrique!

La portion r < 2M est incluse sur le diagramme d'embedding de la Figure 8.2. La pointe conique au bas du diagramme, correspondant à r = 0 indique la divergence de la courbure notée précédemment, mais rien de particulier ne se produit à l'horizon (cercle rouge), sinon que les lignes  $\phi$  =constante y deviennent verticales; et encore une fois il est clair que l'intervalle entre un point sous l'horizon et un autre à l'extérieur est une quantité finie, et ce même si  $g_{rr} \to \infty$ quand  $r \to 2M$ .

Enfin, tout ça nous indique clairement qu'il y a vraiment un sérieux problème avec les coordonnées r et t, pourtant à prime abord "naturelles", en terme desquelles nous avons choisi d'exprimer la métrique de Schwarzschild.

#### 8.3.1 L'impossibilité de demeurer au repos

Nous avons déjà noté le changement des signes des composantes tt et rr de la métrique de Schwarzschild une fois l'horizon franchi. Ceci a plusieurs conséquences physiques majeures, non la moindre étant qu'il devient impossible de demeurer au repos (i.e., à coordonnées de Schwarzschild  $(r, \theta, \phi)$  fixes) sous l'horizon. Pour un Buck au repos la quadrivitesse prend la forme

$$\mathbf{u} = (u^t, 0, 0, 0) , \qquad (8.33)$$

Calculons maintenant la norme de la quadrivitesse; pour toute trajectoire de type temps on a: :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1 = g_{tt} u^t u^t$$
$$= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) (u^t)^2 , \qquad (8.34)$$

Il est clair qu'ici si r < 2M, cette dernière égalité ne pourra jamais être satisfaite car le membre de droite sera toujours positif; il n'existe pas de trajectoire de type temps —les seules trajectoires valides pour un objet massif— correspondant à un observateur au repos. On y reviendra plus loin.

La divergence de la composante rr de la métrique de Schwarzschild à r = 2M n'est pas son seul aspect potentiellement problématique. Les composantes  $g_{tt}$  et  $g_{rr}$  divergent aussi quand  $r \to 0$ . Et cette fois, cette divergence est causée par une divergence de la courbure, comme on le constate immédiatement en évaluant le membre de droite de (8.22) dans la limite  $r \to 0$ . Cette divergence de la courbure est la manifestation d'une **singularité centrale**, et celle-là n'a rien à voir avec un "mauvais" choix de coordonnées.

#### 8.3.2 Les coordonnées d'Eddington-Finkelstein

Nous reviendrons (brièvement) sur les singularités au chapitre 9. Pour l'instant tentons de voir comment choisir de nouvelles coordonnées permettant de calculer des trajectoires traversant r = 2M sans nous foirer au nez. Commençons par introduire une nouvelle variable temporelle v définie par la relation:

$$t = v - r - 2M \log \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|$$
 (8.35)

En termes de ce nouveau système de coordonnées, dites d'Eddington-Finkelstein, la métrique de Schwarzschild devient

$$ds^{2} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dv^{2} + 2dvdr + r^{2}d\Omega^{2}.$$
 (8.36)

C'est ici notre première "vraie" métrique non-diagonale! Elle décrit la même géométrie que la métrique de Schwarzschild, mais clairement ici aucun coefficient métrique ne diverge à r = 2M. Cette singularité apparente dans la métrique était donc due à un mauvais choix de coordonnées. Par contre, la singularité à r = 0 demeure (dans le sens  $g_{vv} \to \infty$  quand  $r \to 0$ ), tout comme le fait  $g_{tt}$  dans la métrique de Schwarzschild sous sa forme originelle.

Considérons des photons ( $ds^2 = 0$ ) se déplaçant sur des trajectoires radiales ( $d\theta = d\phi = 0$ ). La métrique ci-dessus se réduit à:

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2dv dr = 0 , \qquad (8.37)$$

Deux solutions sont possibles, correspondant à des photons se déplaçant dans les directions opposées  $\pm \hat{r}$ ; la première est simplement

$$dv = 0 \quad \rightarrow \quad v = \text{constante} .$$
 (8.38)

Cette solution correspond à des photons se déplaçant vers r = 0, soit dans la direction  $-\hat{r}$ ; en effet, il est clair d'après l'éq. (8.35) que pour que v demeure constant quand t augmente, r devra diminuer.

La seconde solution est décrite par:

$$-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}v+2\mathrm{d}r=0\;,\tag{8.39}$$

qui s'intègre à:

$$v - 4M\left(\frac{r}{2M} + \log\left|\frac{r}{2M} - 1\right|\right) = \text{constante}$$
 (8.40)

On s'attendrait que cette seconde solution corresponde aux photons se déplaçant dans la direction  $+\hat{r}$ ; c'est bien le cas si r > 2M, mais pas sous l'horizon r < 2M.

La Figure 8.3 illustre ces deux familles de trajectoires dans une tranche [v - r, r] de l'espacetemps<sup>5</sup>. Les trajectoires (8.38) sont tracées en vert, et les trajectoires (8.40) en rouge. On voit bien que toutes les solutions "entrantes" décrites par (8.38), en vert, atteignent r = 0quel que soit leur point d'origine à v - r = 0; tandis que les trajectoires "sortantes" ne le sont que si r > 2M à leur point d'origine. Si ce point est situé à r < 2M, même ces trajectoires supposémment sortantes aboutissent à r = 0.

Donc si r < 2M, les deux trajectoires se dirigent vers l'intérieur et terminent à r = 0; un photon se déplaçant radialement sous l'horizon ne peut jamais le traverser vers l'extérieur! D'où le terme "trou noir"! Et si c'est vrai pour des photons, ce le sera encore plus pour des particules massives.

 $<sup>{}^{5}</sup>$ Le choix de v - r comme coordonnée temporelle (plutôt que le coté droit entier de (8.35)) facilite l'interprétation de cette représentation graphique sans en changer le sens fondamental.



Figure 8.3: Trajectoires radiales de photons dans le système de coordonnées d'Eddington-Finkelstein. Les courbes en vert sont les trajectoires "entrantes" décrites par (8.38) pour différentes valeurs de la constante, et celles en rouge les trajectoires "sortantes" décrites par (8.40). La variable "temporelle" (axe vertical) utilisée ici est v - r. Sous l'horizon (r < 2M), toutes les trajectoires, entrantes ou sortantes, terminent à r = 0 (voir texte).

Revenons à un de ces points d'intersection; le secteur situé à la gauche de la courbe rouge et à droite de la verte délimite le cône de lumière "futur" pour ce point. Toute particule massive a sa trajectoire à l'intérieur de ce cône. Même une fusée ayant une puissance de propulsion (et réserve de fuel) lui permettant d'approcher la vitesse de la lumière ne pourra s'échapper du trou noir une fois entrée sous l'horizon.

Photon ou objet massif, une fois sous l'horizon, et quoiqu'on fasse, la coordonnée r diminue. C'est dans ce sens que sous r = 2M la chute vers r = 0 s'apparente à l'écoulement du temps, comme on l'avait déjà noté à partir de l'inversion des signes des termes  $g_{tt}$  et  $g_{rr}$  de la métrique de Schwarzschild se produisant quand le rayon de Schwarzschild est traversé. Misner Thorne et Wheeler, qui lyriquement en beurrent parfois un peu épais, n'y ont pas été avec le dos de la cuillière en décrivant l'inexorable chute de leur Buck vers r = 0 une fois le rayon de Schwarzschild franchi:

"No command that the traveler can give to his jet engines will turn back time. That unseen power of the world which drags everyone forward willy-nilly from age twenty to forty and from forty to eighty also drags the rocket in from time coordinate r = 2M to the later value of the time coordinate r = 0. No human act of will, no engine, no rocket, no force [...] can make time stand still. As surely as cells die, as surely as the traveler's watch ticks away "the unforgiving minutes," with equal certainty, and with never one halt along the way, r drops from 2M to 0." MTW, p. 823

Bref,

#### Sous l'horizon, la chute vers r = 0 est inévitable!

Inévitable oui, mais tout de même pas instantanée; on a vu à la §4.3.4 que dans un repère en chute libre radiale vers un trou noir, le temps propre varie avec le rayon selon:

$$\tau(r) - \tau_0 = -\frac{4M}{3} \left(\frac{r}{2M}\right)^{3/2} \,. \tag{8.41}$$

L'intervalle de temps propre  $\Delta \tau$  s'écoulant entre le moment où l'on franchit l'horizon et ce fatidique r = 0 se calcule par une simple évaluation de l'expression ci-dessus:

$$\Delta \tau = \tau(0) - \tau(r_S) = \frac{4M}{3} .$$
(8.42)

Pour un trou noir de quelques masses solaires,  $\Delta \tau$  est de quelques microsecondes; pour le trou noir supermassif au centre de notre galaxie ( $4.1 \times 10^6 M_{\odot}$ ), on monte à une dizaine de secondes; et pour le monstre Gargantua ( $\sim 10^8 M_{\odot}$ ) dans *Interstellar*, on atteint 5 minutes. L'astronaute Cooper avait donc vraiment le temps de bien viser pour s'accrocher à l'arrière de sa bibliothèque quadridimensionnelle!

L'expression ci-dessus pour  $\Delta \tau$  s'applique à un observateur en chute libre. Il existe en fait une limite supérieure absolue au temps propre que prendra un observateur disposant d'une puissance de propulsion même quasi-infinie pour passer de r = 2M à r = 0:

$$\max(\Delta \tau) = \pi M , \qquad (8.43)$$

soit seulement  $3\pi/4 = 2.36$  fois le temps de survie d'un observateur en chute libre<sup>6</sup>.

Avec le recul, on comprend maintenant que l'utilisation de l'éq. (8.30) pour le calcul de la "distance" propre sous  $r_s$  ne calcule plus vraiment une distance, mais plutôt un intervalle temporel. À tenter ainsi de mesurer comme un intervalle spatial ce qui est un intervalle temporel, notre pôôôvre arpenteur-géomètre s'en retrouvera au moins aussi confus que l'astronaute Cooper face à sa bibliothèque en quatre dimensions... Donc soyons empathiques, et pardonnons lui sa valeur absolue arbitrairement introduite dans l'éq. (8.30) !

 $<sup>^{6}</sup>$ Pouvez vous imaginer d'où vient le remarquable résultat exprimé par l'éq. (8.43) ?

#### 8.3.3 Les coordonnées de Kruskal-Szekeres

Les coordonnées d'Eddington-Finkelstein régularisent la métrique à  $r = r_S$ , mais les géodésiques de mesure nulle (rayons lumineux) ont une forme plutôt complexe (viz. Fig. 8.3), et de surcroit les cônes de lumière correspondant ont une ouverture et inclinaison variables dans un diagramme espace-temps. Les coordonnées dites de Kruskal-Szekeres remédient à ce problème. Ces coordonnées conservent les dépendances angulaires (et donc la symétrie sphérique) du système de Schwarzschild, mais introduisent deux nouvelles coordonnées, U et V, remplaçant les coordonnées de Schwarzschild r et t: selon les transformations suivantes:

$$U = \begin{cases} \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) & r > 2M, \\ \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) & r < 2M \end{cases}$$
(8.44)

$$V = \begin{cases} \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) & r > 2M, \\ \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) & r < 2M \end{cases}$$
(8.45)

Les dérivées de ces expression produisent un système matriciel  $2 \times 2$  qui doit être inversé pour exprimer dt et dr et fonction de dU et dV. Quelques pages d'algèbre un tantinet fastidieuse sont requises, mais n'impliquent aucune subtilité particulière. La substitution des expressions résultantes dans la métrique de Schwarzschild conduit alors à:

$$ds^{2} = \frac{32M^{3}}{r}e^{-r/2M} \left(-dV^{2} + dU^{2}\right) + r^{2} \left(d\theta^{2} + \sin^{2}\theta d\phi^{2}\right) .$$
(8.46)

Attention cependant, si la métrique est écrite sous cette forme, la variable r doit être considéré comme une fonction de U et V, via la relation:

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M} = U^2 - V^2 .$$
(8.47)

Cette dernière expression s'obtient facilement via les éqs. (8.44)–(8.45), et indique que les hypersurfaces r =constante prennent la forme d'hyperboles dans le plan [U, V]. Par une autre manipulation algébrique de ces expressions, que je vous laisse découvrir vous même, on peut aussi montrer que la variable temporelle t des coordonnées de Schwarzschild devient une fonction de U et V via les relations:

$$\tanh\left(\frac{t}{4M}\right) = \begin{cases} V/U , & r > 2M, \\ U/V & r < 2M \end{cases}$$
(8.48)

Les hypersurfaces t =constante sont donc des droites dans le plan [U, V], passant toutes par l'origine, et de pente donnée par le membre de gauche de (8.48). La Figure 8.4 illustre la transposition des coordonnées de Schwarzschild dans le plan [U, V] des coordonnées de Kruskal-Szekeres. Les contours en noir sont des (hyper)surfaces de rayon r constant, de forme hyperbolique telle que décrite par l'éq. (8.47). L'horizon r/M=2 correspond à la droite diagonale tracée en rouge. La région r/M > 2 des coordonnées de Schwarzschild couvre la région d'arrière-plan en blanc, avec  $r \to \infty$  loin à droite; c'est notre Univers! Dans cette région éloignée l'espace-temps devient asymptotiquement plat. La région en rouge clair correspond au volume r/M < 2 situé sous l'horizon. Les régions en gris foncé correspondent à des valeurs négatives de r, et donc n'ont aucun sens physique. Les droites tracées en bleu représentent des surfaces de t constant, telles que décrites par l'éq. (8.48), avec la surface  $t = \infty$  coincidant avec l'horizon r/M = 2 (diagonale rouge de pente positive), et  $t = -\infty$  coincidant avec la diagonale de pente négative. À U fixe, le temps s'écoule dans la direction V.

La trajectoire tracée en vert sur la Figure 8.4 correspond à une solution analytique (4.33) pour un Buck en chute libre radiale, initialement au repos à l'infini, transformée aux coordonnées U et V. La trajectoire traverse l'horizon pour se terminer à r = 0, comme il se doit. Cependant, on constate sur la Figure 8.4 que la trajectoire croise les surfaces de t constant (lignes bleues) jusqu'à la surface  $t = \infty$  coincidant avec l'horizon r/M = 2 dans les coordonnées de Kruskal-Szekeres. Un observateur éloigné observe donc bien un "gel" de la chute libre de Buck à mesure



Figure 8.4: La solution de Schwarzschild dans les coordonnées de Kruskal-Szekeres. Les contours en noir représentent des surfaces r/M =constante, tel qu'indiqué. L'horizon  $(r/M = 2, t = \infty)$  est une droite à 45° dans le plan [U, V] (en rouge). Les droites bleues sont des surfaces t/M =constante, avec t = 0 coincidant avec l'axe-U et  $t = +\infty$  avec l'horizon. La ligne verte représente la trajectoire, dans le plan [U, V], d'un observateur en chute libre vers le trou noir, sur une orbite radiale ( $\ell = 0$ ) d'énergie nulle, telle que décrite par l'éq. (4.33). La région en blanc correspond à  $r > 2M, -\infty < t < \infty$ , et celle en rouge clair à r < 2M. Tout le reste du plan [U, V] n'est pas "couvert" par les coordonnées de Schwarzschild. Les deux régions en gris foncé correspondent à des rayons négatifs, et n'ont donc aucun sens mathématique ou physique. La région en gris clair est potentiellement plus intéressante (voir texte).

que celui-ci approche l'horizon, comme auparavant (voir la §4.3.4 et en particulier la Fig. 4.4). Néanmoins, dans le plan [U, V] rien de particulier ne se produit quand la trajectoire traverse l'horizon.

Revenons à l'équation (8.46); les géodésiques radiales ( $d\theta = d\phi = 0$ ) de mesure nulle ( $ds^2 = 0$ ) sont caractérisées par  $dU^2 = dV^2$ ; la lumière se déplace donc le long de droites inclinées à ±45° dans le plan [U, V], avec un cône de lumière d'ouverture fixe et dont l'axe est aligné parallèlement à l'axe-V, soit verticalement sur la Figure 8.4. Ceci demeure vrai partout dans le plan [U, V], contrairement au cas des coordonnées de Schwarzschild (voir Fig. 4.13) ou d'Eddington-Finkelstein (Fig. 8.3 et texte s'y rattachant). Voilà un grand avantage des coordonnées de Kruskal-Szekeres. Cette constance dans l'ouverture (±45°) et orientation (verticale) du cône de lumière indique immédiatement qu'une fois l'horizon franchi, n'importe quelle trajectoire ne peut qu'éventuellement intersecter la surface r = 0; la chute vers r = 0 est clairement inévitable. On note aussi qu'un photon lancé de r/M = 2 dans direction radiale extérieure demeure éternellement sur l'horizon, résultat déjà apparent dans les coordonnées d'Eddington-Finkelstein (Fig. 8.3, trajectoires rouges tendant asymptotiquement vers la verticale dans la limite  $r/M \rightarrow 2$ ).

Il nous reste à discuter la région en gris clair, image miroir (réflexion à travers l'origine (U, V) = (0, 0)) de l'espace physique r > 0 des coordonnées de Schwarzschild. D'un point de vue strictement mathématique, cette "image" résulte des symétries des fonctions trigonométriques hyperboliques sinh et cosh: à chaque point (r, t) des coordonnées de Schwarzschild correspondent *deux* points dans le plan [U, V]. Dans la région grise la région asymptotiquement plate est à  $U \to -\infty$ .

L'ouverture du cône de lumière à  $\pm 45^{\circ}$  partout dans le plan [U, V] révèle immédiatement qu'il est impossible de passer du domaine de Schwarzschild (blanc+rouge) à ce domaine miroir, ou vice-versa, le long de trajectoires de type temps ou lumière. Le seul espoir possible de "connexion" serait à l'intersection des horizons des deux domaines, soit l'origine (0,0) dans les coordonnées de Kruskal-Szekeres. C'est l'idée du **trou de ver** (wormhole, parfois appelé pont d'Einstein-Rosen), mais encore ici une trajectoire de type espace semblerait requise. Cependant, il faut considérer que sous l'horizon l'espace même n'est plus statique, les surfaces matérielles r =constante à un t donné étant inexorablement entrainées vers la singularité centrale. Autrement dit, la structure de l'espace-temps n'est plus statique. Cette non-stationarité permet en principe une connexion, mais un calcul détaillé révèle que le fameux trou s'ouvre et se referme sur une période trop courte pour permettre le passage.

En bout de ligne, que la métrique soient exprimé dans les coordonnées de Schwarzschild, d'Eddington-Finkelstein ou de Kruskal-Szekeres, la singularité centrale à r = 0 demeure; celle-ci n'est pas une conséquence d'un mauvais choix de coordonnées, mais correspond vraiment à un point où la courbure devient infinie. Le sens physique à attribuer à cette singularité est loin d'être clair; on y reviendra brièvement au chapitre 9 (§9.3).

#### MTW §31.6 Ca §5.7

## 8.4 Trou noir en rotation

Toutes les étoiles sont imbues d'un mouvement de rotation, résidu de la conservation du moment cinétique (dénoté ci-après J) lors de leur contraction depuis un nuage diffus de matière interstellaire. La contraction durant leurs phases évolutives finales, qui pour les plus massives en feront des étoiles à neutron ou des trous noirs, produira une accélération substantielle de cette rotation, toujours par conservation du moment cinétique. Donc, tous les trous noirs devraient "contenir" une quantité substantielle de moment cinétique. Après tout ce travail, il faut maintenant s'avouer que le trou noir de Schwarzschild est une idéalisation mathématique qui n'existe pas où que ce soit dans l'univers des corps astrophysiques!

Ha Ch 15 Ca §5.7

#### R223.tex, May 6, 2023

#### 8.4.1 La métrique de Kerr

La **métrique de Kerr**, calculée en 1963 par le physicien néo-Zélandais du même nom, prend la forme:

$$ds^{2} = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^{2}}\right) dt^{2} - \frac{4M \, a \, r \sin^{2} \theta}{\rho^{2}} d\phi dt + \frac{\rho^{2}}{\Delta} dr^{2} + \rho^{2} d\theta^{2} + \left(r^{2} + a^{2} + \frac{2M \, r \, a^{2} \sin^{2} \theta}{\rho^{2}}\right) \sin^{2} \theta d\phi^{2} , \qquad (8.49)$$

où

$$a \equiv J/M , \qquad (8.50)$$

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta , \qquad (8.51)$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 . \tag{8.52}$$

À noter, le paramètre *a* est ici mesuré en unités géométriques. Ceci sera notre seconde et dernière métrique non-diagonale! On ne peut plus simplement écrire  $g_{tt} = 1/g^{tt}$  ou  $g_{\phi\phi} = 1/g_{\phi\phi}$  (mais on a encore  $g_{rr} = 1/g^{rr}$  et  $g_{\theta\theta} = 1/g^{\theta\theta}$ ). La forme contravariante de la métrique demande donc d'inverser la sous-matrice:

$$\begin{pmatrix} g_{tt} & g_{t\phi} \\ g_{t\phi} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix}$$
(8.53)

Le déterminant de cette matrice est  $D = g_{tt}g_{\phi\phi} - (g_{t\phi})^2$ , et son inverse s'écrit donc:

$$\begin{pmatrix} g^{tt} & g^{t\phi} \\ g^{t\phi} & g^{\phi\phi} \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} g_{\phi\phi} & -g_{t\phi} \\ -g_{t\phi} & g_{tt} \end{pmatrix}$$
(8.54)

Ici  $(t, r, \theta, \phi)$  sont parfois appelées coordonnées de Boyer-Lindquist.

#### 8.4.2 L'horizon et la censure cosmique

Comme dans le cas de la métrique de Schwarzschild, la métrique de Kerr est caractérisée par un **horizon**, en deça duquel les photons ne peuvent s'échapper même sur une trajectoire radiale. L'horizon de la métrique de Kerr est encore une fois défini par la surface sur laquelle la composante  $g_{rr}$  de la métrique diverge; donc ici

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 = 0 \quad \to \quad r_H = M + \sqrt{M^2 - a^2} , \quad (8.55)$$

où on a conservé la racine positive. L'horizon de la métrique de Kerr est clairement plus petit que celui de la métrique de Schwarzschild pour un trou noir sans rotation ( $r_S = 2M$  en unités géométriques).

Il ne faut surtout pas conclure, à partir du fait que l'horizon est défini par une hypersurface  $r = r_H$  =constante, que l'horizon d'un trou noir en rotation est sphérique dans le sens géométrique du terme. Considérons une hypersurface correspondant à une coupe constante dans les coordonnées temporelle t et spatiale r. Posant dt = dr = 0 dans la métrique de Kerr (8.49), la mesure de l'intervalle devient:

$$ds^{2} = (r^{2} + a^{2}\cos^{2}\theta)d\theta^{2} + \left(r^{2} + a^{2} + \frac{2Mra^{2}\sin^{2}\theta}{r^{2} + a^{2}\cos^{2}\theta}\right)\sin^{2}\theta d\phi^{2} , \qquad (8.56)$$

Ceci ne ressemble pas du tout à l'intervalle sur une sphère dans l'espace Euclidien, et ce même si on l'évalue à l'horizon  $r = r_H$  en y substituant l'éq. (8.55). Ce n'est que dans la limite du trou noir de Schwarzschild,  $a \to 0$ , que l'on retrouve  $ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ , indiquant une géométrie sphérique. Un exercice de la troisième série vous conduit à démontrer que l'aire de l'horizon pour un trou noir de Kerr est égale à  $4\pi(r_H^2 + a^2)$ . Il ne faut pas oublier qu'ici la masse M du trou noir ne comptabilise que son énergie de masse au repos, mais pas l'énergie cinétique associée au mouvement de rotation.

L'équation (8.55) indique que si a > M, il n'existe plus de racine réelle, donc plus d'horizon. La singularité centrale devient alors visible. L'hypothèse dite de la **censure cosmique** stipule que de telles **singularités nues** ne peuvent exister. Voir le bouquin de Thorne cité en bibliographie en fin de chapitre si cette idée vous intrigue.

Il peut paraitre bizarre que pour un trou noir en rotation, l'horizon ait un rayon plus petit que sans rotation (à un M donné) même aux pôles, considérant que la vitesse linéaire associée au mouvement de rotation est nulle aux pôles. La raison est simple et fondamentale: la rotation contribue au contenu énergétique du trou noir, et donc à la courbure, via l'équation du champ d'Einstein; et le patron de courbure de l'espace-temps induit est très différent dans les deux cas.

#### 8.4.3 L'ergosphère

L'horizon n'est pas la seule surface dynamiquement importante pour un trou noir en rotation. Suivant la logique introduite à la §8.3.1 dans le cas de la métrique de Schwarzschild, considérons un observateur au repos, caractérisé par la quadrivitesse  $\mathbf{u} = (u^t, 0, 0, 0)$ ; le calcul de l'invariant  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$  conduit à:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1 = g_{tt} u^{t} u^{t} = -\left(1 - \frac{2Mr}{r^{2} + a^{2} \cos^{2} \theta}\right) (u^{t})^{2} , \qquad (8.57)$$

Ceci indique clairement que là où  $g_{tt}$  devient positif, il n'existe pas de trajectoires de type temps pour un observateur au repos. Dénotons par  $r_0$  le rayon où  $g_{tt} = 0$ ; avec  $\rho$  donné par (8.49), il est facile de vérifier que ce rayon dépend de la latitude selon:

$$r_0(\theta) = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$$
 (8.58)

La surface  $r = r_0(\theta)$  est appelée **ergosphère**. La comparaison entre (8.55) et (8.58) montre clairement que l'horizon et l'ergosphère coincident aux pôles ( $\theta = 0$  ou  $\pi$ ), mais que partout ailleurs  $r_0 > r_H$ . La Figure 8.5 illustre ceci, pour quatre valeurs du paramètre a. On voit bien que quand a approche l'unité, l'étendue équatoriale de l'ergosphère (traits plein) devient beaucoup plus grande que celle de l'horizon (traits pointillés). Encore une fois, il ne faut pas déduire de la Figure 8.5 que l'horizon est une surface dont la géométrie est sphérique! La variable "radiale" r de la métrique de Kerr est un bestiau bien différent du r des coordonnées sphériques polaires dans l'espace Euclidien, et même du r des coordonnées de Schwarzschild.

Il se passe des choses vraiment particulières dans l'ergosphère. Considérons deux photons émis dans le plan équatorial dans les directions  $\pm \hat{\phi}$ , soit tangentiellement à un cercle de rayon r. Leur trajectoire est de mesure nulle, et initialement leurs géodésiques n'impliquent que des variations dt et d $\phi$ , donc:

$$ds^{2} = 0 = g_{tt}dt^{2} + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^{2} , \qquad (8.59)$$

d'où on tire<sup>7</sup>:

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \left[ \left( \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}} \right]^{1/2} \,. \tag{8.60}$$

Sur l'ergosphère,  $g_{tt} = 0$  et les deux solutions de (8.60) se réduisent à:

$$(+) \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = 0 \ , \tag{8.61}$$

$$-) \quad \to \quad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -2\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \ . \tag{8.62}$$

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Voyez vous comment?



Figure 8.5: Ergosphère (traits pleins) et horizon (pointillés) dans la métrique de Kerr, pour quatre valeurs du paramètre a, tel qu'indiqué par le code de couleur. L'axe de rotation est ici vertical. L'échelle de distance est donnée en unités géométriques.

La première solution, correspondant à la racine positive, est remarquable: un photon est envoyé dans la direction  $-\hat{\phi}$ , mais demeure au repos dans les coordonnées de la métrique de Kerr! Donc toute particule massive, lancée dans la direction  $-\hat{\phi}$ , et se déplaçant nécessairement moins rapidement qu'un photon, sera inexorablement entrainée dans la direction  $+\hat{\phi}$ . Il est simplement impossible de demeurer à une position fixe!

Il est facile de montrer<sup>8</sup>, à l'aide de l'éq. (8.60), que partout dans l'espace contenu entre l'horizon  $r = r_H$  et l'ergosphère  $r = r_0(\theta)$ , tout, photons inclus, est inexorablement entrainé dans la direction de la rotation du trou noir, quelle que soit l'orientation de la trajectoire sur laquelle photons ou particules sont lancés.

L'existence de l'ergosphère est due à la rotation de la structure même de l'espace-temps, cachée dans le terme non-diagonal de la métrique de Kerr. La singularité centrale a une masse M, mais n'a pas d'étendue spatiale, et donc pas de moment d'inertie; le moment cinétique de l'étoile devenant un trou noir doit bien aller quelquepart; il ne peut que se transférer à la structure même de l'espace-temps.

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>Essayez!

#### 8.4.4 La chute dans un trou noir en rotation

Comme on l'avait fait dans le cas de la métrique de Schwarzschild, on se limite aux orbites contenues dans le plan équatorial ( $\theta = \pi/2$ ,  $d\theta = 0$ ); ceci implique  $\rho = r$ , et donc:

$$ds^{2} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^{2} - \frac{4Ma}{r}d\phi dt + \frac{r^{2}}{\Delta}dr^{2} + \left(r^{2} + a^{2} + \frac{2Ma^{2}}{r}\right)d\phi^{2}, \qquad (8.63)$$

Encore similairement au cas de la métrique de Schwarzschild, ici les coefficients métriques ne dépendent ni de  $\phi$  ni de t; on a donc les deux mêmes vecteurs de Killing (voir §4.3.2 au besoin) à partir desquels on construira nos équations orbitales:

$$-\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u} = e \quad = \quad -g_{tt}u^t - g_{t\phi}u^{\phi} \quad , \tag{8.64}$$

$$\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{u} = \ell \quad = \quad g_{\phi t} u^t + g_{\phi \phi} u^\phi \ . \tag{8.65}$$

Ceci représente un système de deux équations pour les deux inconnus  $u^t$  et  $u^{\phi}$ . Sa solution est:

$$u^{t} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\Delta} \left[ \left( r^{2} + a^{2} + \frac{2Ma^{2}}{r} \right) e - \frac{2Ma}{r} \ell \right] , \qquad (8.66)$$

$$u^{\phi} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\Delta} \left[ \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \ell + \frac{2Ma}{r} e \right] . \tag{8.67}$$

Il s'agit maintenant de développer notre troisième invariant habituel:

$$-1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = g_{\mu\nu} u^{\mu} u^{\nu}$$
  
=  $g_{tt}(u^t)^2 + g_{rr}(u^r)^2 + 2g_{t\phi} u^t u^{\phi} + g_{\phi\phi}(u^{\phi})^2 ,$  (8.68)  
= ...

(comprenez bien d'où vient le facteur 2 multipliant le terme en  $g_{t\phi}$ !). En y substituant (8.66)–(8.67), un peu d'algèbre conduit à:

Exercice

$$\frac{e^2 - 1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + V_{\mathrm{eff}}(r, e, \ell) , \qquad (8.69)$$

avec cette fois

$$V_{\text{eff}}(r,e,\ell) = -\frac{M}{r} + \frac{\ell^2 - a^2(e^2 - 1)}{2r^2} - \frac{M(\ell - ae)^2}{r^3} .$$
(8.70)

Comparez moi ça à (4.13) et (4.15)!

La Figure 8.6 montre 5 trajectoires de chute initialement radiale, pour une particule située initialement à  $(r, \phi) = (50, 0)$  dans le plan équatorial. Ces orbites ont été calculées à l'aide du code Python de la Figure 4.5, la fonction g(s0, u) modifiée en regard au  $V_{\text{eff}}$  de la métrique de Kerr vs Schwarzschild. À l'approche du trou noir, les trajectoires initialement radiales sont déviées dans la direction azimutale, et se retrouvent éventuellement à suivre tangentiellement la surface de l'horizon.

Ces orbites sont tracées en fonction de la coordonnée temporelle t, correspondant au temps mesuré par un observateur au repos à une position très éloignée du trou noir, et observant la chute. En fonction du temps propre mesuré par un Buck en chute libre, rien de particulier ne se passe en traversant l'ergosphère ou l'horizon. Cependant, l'observateur éloigné voit maintenant celui ou celle approchant l'horizon tourner de plus en plus rapidement tangentiellement à l'horizon, à une vitesse approchant celle de la lumière dans la limite  $a/M \rightarrow 1$ . La situation est ici analogue à celle déjà rencontrée précédemment avec la métrique de Schwarzschild (viz. Fig. 4.4), où le corps en chute libre prenait un temps infini (mesuré par la coordonnée t) pour atteindre l'horizon; c'est encore le cas ici.



Figure 8.6: Chute initialement radiale dans un trou noir en rotation, tel que décrit par la métrique de Kerr et vue par un observateur situé à grande distance. La chute débute dans la direction radiale à r = 50 dans tous les cas, qui ne diffèrent que par la valeur du paramètre rotationnel *a*. La région en gris indique l'étendue de l'horizon pour la métrique de Schwarzschild, et les cercles pointillés les horizons associés aux différentes valeurs de *a* considérées.

#### 8.4.5 Orbites liées autour d'un trou noir en rotation

La Figure 8.7 montre des orbites de type liées, pour les mêmes valeurs de paramètres et condition initiale que celles tracées sur la Figure 4.6 pour la métrique de Schwarzschild. Contrairement au cas Schwarzschild, ici si on change le signe de  $\ell$  (orbite horaire vs antihoraire), les comportements sont complètement différents:

- *l* de même signe que a: précession de l'orbite dans le sens du mouvement orbital, comme pour la métrique de Schwarzschild;
- $\ell$  de signe opposé à *a*: ralentissement graduel de la particule, jusqu'au renversement de son orbite dans l'ergosphère et capture subséquente par le trou noir.

L'analyse de l'existence et de la stabilité des orbites liées peut se faire par analyse du potentiel effectif (8.70), comme on l'avait fait dans le cas de la métrique de Schwarzschild. Un des problème de la troisième série vous conduit à démontrer que dans la limite  $a/M \rightarrow 1$  une orbite prograde (dans le sens de la rotation du trou noir) circulaire est possible à l'horizon même (r/M = 1)! Ses paramètres sont:

$$e = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
,  $\ell = \frac{2M}{\sqrt{3}}$ ,  $r/M = 1$ .  $[a/M = 1]$  (8.71)

#### 8.4.6 Déviation de la lumière par un trou noir en rotation

Les trajectoires de rayons lumineux se calculent eux aussi comme dans le cas de la métrique de Schwarzschild, en invoquant les même deux vecteurs de Killing que pour les orbites de particules massives, mais en utilisant comme troisième invariant la condition  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ . Travaillant toujours dans le plan équatorial, on peut encore une fois combiner les trois expression résultantes en une seule expression décrivant la trajectoire:

$$\frac{1}{b^2} = \frac{1}{\ell^2} \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 + W_{\mathrm{eff}}(r) \tag{8.72}$$

210



Figure 8.7: Orbites  $\ell = \pm 4.3M$  et e = 0.9716 et position initiale  $(r, \phi) = (22.2, 0)$ , soit les mêmes paramètres que pour les orbites de la Figure 4.6 (métrique de Schwarzschild), mais maintenant dans la métrique de Kerr avec  $a/M = \pm 0.9$ . L'orbite ayant le même signe de moment cinétique que le trou noir est qualitativement similaire, mais celle ayant un moment cinétique de signe opposé ( $\ell = -4.3M$ , en rouge) est graduellement ralentie, et renversée une fois l'ergosphère atteinte.

avec le paramètre d'impact  $b^2 = \ell^2/e^2$  également comme dans le cas de la métrique Schwarzschild, mais cette fois avec le potentiel effectif donné par:

$$W_{\rm eff}(r, b, a) = \frac{1}{r^2} \left[ 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{2M}{r} \left(1 - \sigma \frac{a}{b}\right)^2 \right] , \qquad (8.73)$$

avec  $\sigma = \operatorname{sign}(\ell)$ . On voit facilement que ceci se réduit bien à l'expression correspondante (4.54) dans la limite  $a \to 0$ ; cependant si  $a \neq 0$  le potentiel effectif dépend explicitement de l'énergie e du photon et de son moment cinétique  $\ell$  (via le paramètre d'impact b). De plus, le potentiel effectif n'est pas le même pour les trajectoires lumineuses progrades et rétrogrades ( $\ell$  du même signe que a ou opposé, respectivement).

La Figure 8.8 porte en graphique le profil radial du potentiel effectif des photons, pour  $\sigma = \pm 1$ . Il faut comparer ceci à son équivalent dans la métrique de Schwarzschild, soit la Fig. 4.8 au chapitre 4. Un des exercices de la troisième série vous conduit à vérifier qu'il existe encore une fois ici des orbites photoniques circulaires instables, qui dans la limite  $a/M \rightarrow 1$  sont situées sur l'horizon pour les orbites progrades, et à r = 4M pour les rétrogrades.

Si vous avez fait les problèmes de la série 2, vous avez été en mesure de calculer que pour des photons approchant un trou noir de Schwarzschild dans le plan équatorial sur des orbites

### Exercice

R223.tex, May 6, 2023



Figure 8.8: Potentiel effectif pour les photons dans la métrique de Kerr, ici à a/M = 0.99.

non-radiales, tous ceux ayant des paramètre d'impact b < 3M sont capturés par le trou noir; ce qui implique que "l'ombre" du trou noir, vue sur le ciel, a un diamètre de 6M, et ce même si l'horizon a un diamètre plus petit, soit 4M. Non seulement le calcul peut être répété dans la métrique de Kerr, mais il existe même une solution *analytique*!. C'est du costaud, mais on peut montrer que les limites équatoriales de l'ombre d'un trou noir de Kerr sont données par la relation:

$$r^{(\pm)} = 2\left[1 + \cos\left(\frac{2}{3}\arccos(\pm a)\right)\right] , \qquad (8.74)$$

où le signe + correspond à une orbite prograde (dans le sens de rotation du trou noir), et le signe - à l'orbite rétrograde.

La Figure 8.9 illustre la variation de l'étendue équatoriale (à l'horizontale) de l'ombre d'un trou noir de Kerr en fonction du paramètre rotationnel a (à la verticale; ici a > 0), tel que donnée par l'éq. (8.74). L'ergosphère a toujours une étendue équatoriale  $\pm 2M$  par rapport au centre du trou noir, tel qu'indiqué par les droites verticales en tirets, et ce indépendamment de a (cf. Fig. 8.5). L'étendue de l'horizon (en gris foncé) diminue quand a augmente, mais demeure symétrique par rapport au centre. La région en gris, elle très asymétrique, correspond à l'équation (8.74). Les photons arrivant dans le sens rétrograde, soit sortant du plan de la page dans la moitié droite du diagramme, doivent se déplacer "à contre-courant" par rapport à la dérive azimutale de l'espace-temps, et sont donc capturés par le trou noir plus facilement que les progrades, qui sortent de la page du coté gauche. Il en résulte une asymétrie azimutale dans l'ombre du trou noir, devenant très marquée dans la limite  $a/M \rightarrow 1$ ; on notera en particulier que dans cette limite un photon prograde peut frôler l'horizon ( $r/M \simeq 1$ ) et néanmoins atteindre un observateur éloigné, ce qui n'est pas le cas dans la limite de Schwarzschild a = 0. Et dans la limite  $a/M \rightarrow 1$ , le centre de l'ombre est décalé de  $\delta d = 1.5M$ , se retrouvant à l'extérieur de l'horizon!

En raison de la dérive azimutale de l'espace-temps, les effets de lentille gravitationnelle par un trou noir en rotation deviennent particulièrement intrigants quand  $a/M \rightarrow 1$ . La Figure 8.10



Figure 8.9: Étendue équatoriale de l'ombre d'un trou noir de Kerr, en fonction du paramètre rotationnel a/M. La région plus foncée indique l'étendue de l'horizon, et les tirets verticaux celle de l'ergosphère.

en montre un exemple spécifique, produit dans le cadre de simulations/visualisations effectuées pour le film Interstellar. L'asymétrie azimutale (direction horizontale ici) est particulièrement frappante<sup>9</sup>. Voir aussi le site web dont le lien est fourni sur la page web du cours pour quelques autres exemples tout aussi fascinants.

#### Le mécanisme de Penrose 8.4.7

Un aspect particulièrement intéressant des trous noirs en rotation est qu'il est possible d'en extraire de l'énergie rotationnelle à partir de leur ergosphère. C'est d'ailleurs l'origine du terme "ergosphère", "ergon" en grec se traduisant par "travail".

Imaginons une masse pénétrant à l'intérieur de l'ergosphère, et s'y fragmentant en deux morceaux, le premier chutant éventuellement à travers l'horizon mais le second s'échappant de l'ergosphère. Le processus de fragmentation est local, et peut donc s'analyser dans un repère TB§26.5.4 localement Minkowskien où la quadri-impulsion est conservée; on écrirait donc:

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{p}_s + \mathbf{p}_h \;, \tag{8.75}$$

où les indices e, s, et h dénotent respectivement les masses entrante, sortante, et chutant dans le trou noir. L'énergie  $E_s$  de la particule sortante est donnée par la première composante de sa quadri-impulsion, que l'on peut écrire en terme du produit scalaire:

$$E_s = -\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{p}_s = -g_{tt} p_s^0 , \qquad (8.76)$$

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Frappante au point où le directeur Christopher Nolan prit la décision d'éliminer artificiellement cette asymétrie (cf. Fig. 4.11) afin de ne pas surchauffer à outrance les neurones de son public. Stanley Kubrick avait pourtant été passablement plus téméraire avec les séquences finales de son 2001, l'odyssée de l'espace...!



Figure 8.10: Déformation de l'image d'un champ d'étoiles par un trou noir en rotation rapide a/M = 0.999. Source: Double Negative Ltd.; voir l'article de James et al. (2015) cité en bibliographie en fin de chapitre, ainsi que stacks.iop.org/cqg/32/065001/mmedia.

et idem pour  $E_e$  et  $E_h$ , où  $\boldsymbol{\xi}$  est notre vecteur de Killing habituel pour les métriques indépendantes du temps. Son produit scalaire avec l'éq. (8.75) permet d'écrire:

$$E_e = E_s + E_h av{8.77}$$

La clef est de réaliser que dans un repère en "chute libre" attaché à la masse entrant initialement dans l'ergosphère ou à celle s'en échappant après la fragmentation,  $E_e$  et  $E_s$  ne peuvent être que des quantités positives. En effet, on peut évaluer pour ces masses stationnaires dans ce repère:

$$\lim_{r \to \infty} (-\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) = \lim_{r \to \infty} \left( 1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) (p^0)^2 \simeq (p^0)^2 = m^2 ; \qquad (8.78)$$

cette quantité étant positive dans la limite  $r \to \infty$ , elle doit le demeurer le long de la trajectoire, telle que mesurée dans le repère en chute libre. Cependant, pour la masse  $E_h$  il n'existe pas de telle contrainte si elle ne ressort pas de l'ergosphère ; il est donc concevable que  $E_h < 0$ , dépendant de l'orientation des **p** au moment de la fragmentation, dans lequel cas (8.76) conduit à:

$$E_s > E_e av{8.79}$$

Autrement dit, la masse sortante peut avoir une énergie plus élevée que la masse entrante. L'énergie ainsi gagnée vient ultimement de l'énergie du trou noir. Ce processus d'extraction d'énergie d'un trou noir s'appelle le **mécanisme de Penrose**.

Il faut bien comprendre le sens d'une telle valeur négative pour  $E_h$ : cette énergie serait mesurée comme négative à une position  $r \to \infty$  si la masse atteignait une telle position; mais ici elle n'atteint jamais l'infini, puisqu'elle chute ultimement dans le trou noir.

Misner, Thorne & Wheeler décrivent une application technologique très pratique (en principe) du mécanisme de Penrose, comme l'illustre la Figure 8.11, une reproduction de leur Figure 33.2. Une civilisation très avancée s'est construit une gigantesque station spatiale ayant la forme d'un grand anneau dans le plan équatorial d'un trou noir en rotation rapide (dans le sens  $a/M \rightarrow 1$ ). Chaque jour les déchets sont placés dans des navettes et lancées vers le trou noir, sur des orbites



Figure 8.11: La solution de Misner, Thorne & Wheeler au problème de la voracité énergétique des civilisations technologiques. Une civilisation (très avancée) s'est installée sur une station spatiale ayant la forme d'un grand anneau dans le plan équatorial d'un trou noir en rotation et centré sur celui-ci. En envoyant leurs déchets dans des navettes effectuant une demi-orbite prograde dans l'ergosphère et y éjectant lesdits déchets sur des trajectoires rétrogrades, les navettes reviennent à leur base avec un excès d'énergie cinétique pouvant en principe être converti en électricité (voir texte pour plus de détails...). Reproduction directe de la Figure 33.2 dans MTW (p908).

progrades ( $\ell$  de même signe que *a*), comme indiqué sur la Figure. Une fois dans l'ergosphère, les navettes *éjectent* les déchets sur des trajectoires en principe rétrogrades, mais à cause de l'entrainement de l'espace-temps ces déchets se retrouvent sur une orbite d'énergie négative, et la navette ressort donc de l'ergosphère avec plus d'énergie cinétique qu'elle en avait au moment de l'entrée, et ce même si sa masse est beaucoup plus faible. Les navettes retournent ensuite vers la station sur la seconde moitié de leur orbite, et sont capturées et freinées par une gigantesque et massive roue à aube, à laquelle elles transfèrent leur énergie cinétique, entretenant ainsi son mouvement de rotation. Il ne s'agit plus que d'utiliser ce mouvement rotatoire pour activer des génératrices pour produire de l'électricité, cette partie de la technologie étant déjà bien maitrisée aujourd'hui sur Terre!

C'est là le mécanisme de Penrose en pleine action. Ce processus est d'une très haute efficacité: on récupère toute l'énergie de masse des déchets, ainsi qu'une partie de l'énergie de rotation du trou noir! Même la fusion nucléaire de l'hydrogène fait piètre figure en comparaison, avec un taux de conversion de l'énergie de masse de seulement  $\sim 1\%$  pour 4H $\rightarrow$ He, le plus efficace des processus de fusion.

## 8.5 Le mécanisme de Hawking

Il peut sembler superflu de le répéter rendu ici, mais allons-y: en physique classique, rien ne peut sortir de l'horizon d'un trou noir.

Mais en mécanique quantique, ce n'est plus vrai.

La théorie quantique des champs nous informe qu'en tout moment, des paires particulesantiparticules peuvent se former spontanément et subsister pendant un temps  $\delta t$  plus court que celui permi par le principe d'incertitude d'Heisenberg. Ce sont les fluctuations du vide. Pour une paire de ces particules chacune de masse m, on aurait  $\delta t \leq \hbar/(2mc^2) \simeq 10^{-21}$  s pour une paire électron-positron.

une paire electron-positron. Si cette création de paire de particules se produit à l'horizon d'un trou noir, il se peut fort bien qu'une des particules se retrouve sous l'horizon; la seconde peut alors s'échapper, n'ayant plus personne avec qui se recombiner. Pour un observateur à grande distance, l'effet net est donc que le trou noir émet des particules, ce qui représente une perte d'énergie qui ne peut que venir de la masse du trou noir. Comprenez bien que de l'énergie est perdue que ce soit la particule ou l'antiparticule qui s'échappe, la masse au repos étant une quantité positive même pour une antiparticule. Cette "évaporation" des trous noirs par émission corpusculaire s'appelle la *radiation de Hawking*.

La quantité d'énergie ainsi extraite du trou noir par unité de temps dépend de la probabilité de création de paires particule-antiparticule à partir des fluctuations du vide. La théorie quantique des champs permet de calculer ce taux, qui conduit à un taux de diminution de la masse du trou noir donné par:

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\nu \frac{\hbar}{M^2} \;, \tag{8.80}$$

où  $\nu$  est une constante, =  $1/(15360\pi)$  en bonne première approximation. Cette expression s'intègre facilement pour donner:

$$M(t) = [3\nu\hbar(t_* - t)]^{1/3} , \qquad (8.81)$$

où on a choisit la constante d'intégration de manière telle que M = 0 à  $t_*$ , cette dernière quantité correspondant donc au temps de vie du trou noir:

$$t_* \simeq \frac{1}{3\nu} \frac{M^3}{\hbar} = 2.1 \times 10^{58} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^3$$
 [Gyr] (8.82)

Un trou noir de masse  $\sim 10^{14}$  g serait ainsi en fin de vie à l'époque présente. Aucun processus astrophysique connu ne peut produire des trous noir de si faible masse; s'ils existent, on doit supposer qu'ils sont primordiaux, c'est-à-dire qu'ils se sont formés au moment du Big Bang.



Figure 8.12: Variation de la masse et température d'émission d'un trou noir de faible masse s'évaporant via le processus de Hawking.

Les calculs quantiques démontrent également que la radiation de Hawking a une distribution spectrale pratiquement identique à celle d'un corps noir de température T donnée par (retour aux unités physiques):

$$k_B T = \frac{c^3 \hbar}{8\pi G M} , \qquad (8.83)$$

où  $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$  J K<sup>-1</sup> est la constante de Boltzmann. Avec la masse du trou noir exprimée en unités de la masse du soleil, on trouve:

$$T = 6.2 \times 10^{-8} \left(\frac{M_{\odot}}{M}\right) \qquad [K] \tag{8.84}$$

Un trou noir d'une masse solaire est pratiquement au zéro absolu! et sa radiation de Hawking se retrouverait donc complètement noyée même par le rayonnement de fond cosmologique<sup>10</sup>. Cependant, en vertu de l'éq. (8.81), cette température d'émission augmente à mesure que M diminue; la Figure 8.12 illustre la variation de M et T jusqu'à  $t^*$ . On y constate que la température d'émission diverge quand  $t \to t_*$ . Un des exercices de la troisième série vous conduit à calculer la quantité d'énergie émise en radiation de Hawking dans les dernières secondes de l'évaporation d'un trou noir; celle-ci se termine de manière explosive, en une sorte de "Little Bang" !

Il peut sembler pour le moins particulier que l'efficacité du processus de Hawking soit inversement proportionnelle à la masse du trou noir, puisque que la surface de l'horizon, où se produit toute l'action, est  $\propto r_S^2 = 4M^2$ ; il faut comprendre que ce qui sépare les paires virtuelles formées sur l'horizon est la force de marée, qui comme on l'a vu varie en  $M/r^3$  (voir §5.1.3). Donc, la force de marée à l'horizon varie en  $1/M^2$ ; c'est là (essentiellement) l'origine de la dépendance en  $1/M^2$  au membre de droite de (8.80).

Exercice

 $<sup>^{10}</sup>$ ce qui implique également qu'un trou noir de cette masse gagne plus d'énergie à absorber le rayonnement cosmologique qu'il en perd par radiation de Hawking !
L'équation (8.83) mérite un dernier commentaire; elle implique quatre grandes constantes fondamentales de la physique: la vitesse de la lumière c, la constante de Planck  $\hbar$ , la constante de Boltzmann  $k_B$ , et la constante gravitationnelle G. Il n'est pas du tout commun de retrouver ces quatre constantes combinées dans une expression décrivant une quantité physique. L'évaporation des trous noirs primordiaux est carrément à l'intersection de la relativité générale et de la mécanique quantique, d'où son grand intérêt au yeux des théoricien(ne)s intéressé(e)s à la Grande Unification et autres noeuds de cordes diverses.

# 8.6 Évidences et scénarios astrophysiques

La récente (2016) détections du train d'ondes gravitationnelles provenant de la coalescence de deux trous noirs (voir e.g. Fig. 6.3), et l'excellent accord entre la forme de ce train d'onde et les prédictions de la relativité générale, représente probablement la plus convaincante preuve à date de l'existence des trous noirs. Cependant plusieurs autres indications de leur existence s'étaient déjà accumulées au fils du demi-siècle précédant ce coup d'éclat astrophysique.

Avant de s'y mettre, profitons-en pour déjà déboulonner quelques mythes tenaces relatifs aux trous noirs:

- Un trou noir est extrêmement massif; **FAUX**: la solution de Schwarzschild tient la route pour n'importe quelle valeur de *M*; les masses des trous noirs observables dans l'Univers sont dictées par leur mécanisme de formation, dont on discutera sous peu.
- Un trou noir siphonne violemment toute matière à sa portée; **FAUX**: déjà à une dizaine de  $r_S$ , le potentiel gravitationnel effectif est à peine distingable du potentiel Newtonien de l'espace-temps plat (voir Figure 4.2). On remplacerait le soleil par un trou noir de masse identique, les planètes du système solaire continueraient de filer à toutes fins pratiques sur les mêmes orbites.
- Un trou noir est par définition invisible, donc inobservable, donc n'est pas un objet d'étude valide, du point de vue de la très fameuse méthode scientifique; **FAUX**: si le trou noir lui-même est en effet inobservable car rien de ressort de l'horizon, son impact sur le milieu environnant est définitivement observable —et observé!

### 8.6.1 Effondrement gravitationnel des étoiles

La solution de Schwarzschild décrit la courbure de l'espace-temps produite par une distribution de masse M ayant une symétrique sphérique et au repos. Elle demeure valide dans le cas où la distribution de masse devient tellement concentrée que toute la masse se retrouve sous l'horizon r = 2M, produisant ce qu'on appelle maintenant un trou noir<sup>11</sup>. Mathématiquement tout est boulonné solide; mais un tel "objet" est-il astrophysiquement réalisable ? Autrement dit, peut-il être produit par l'évolution stellaire, via un processus d'effondrement gravitationnel dans une étoile ayant épuisé tout son carburant nucléaire ?

La réponse est oui, mais elle a prit un bon demi-siècle à s'imposer, pas à pas. En 1930 un très jeune Subramanian Chandrasekhar (1910-1995) avait démontré que la pression des électrons dégénérés (conséquence du principe d'exclusion de Pauli) ne pouvait équilibrer la force gravitationnelle que jusqu'à une masse limite de  $1.4 M_{\odot}$ . Suite à la découverte du neutron en 1932, les astronomes Walter Baade (1893–1960) et Fritz Zwicky (1898–1974) suggèrent la possibilité de l'étoile à neutron comme stade évolutif final des étoiles demeurant plus massives que la limite de Chandrasekhar. L'idée n'est pas prise au sérieux jusqu'à ce que des calculs de structure soit effectués, conséquence accidentelle de l'expertise développée durant la seconde guerre mondiale dans le cadre des efforts de développement de la bombe atomique. C'est la

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>Le terme "trou noir" a été introduit en 1967 par John A. Wheeler. Kip Thorne, dans son ouvrage grand public de 1994 (voir bibliographie en fin de chapitre), rapporte une certaine résistance initiale à cette appelation, particulièrement dans les milieux francophones où l'interprétation anatomique s'impose apparamment plus immédiatement que dans d'autres langues.

découverte en 1965 du premier pulsar dans la nébuleuse du Crabe, résidu d'une supernova remontant à 1054, et son identification avec une étoile à neutron magnétisée et en rotation rapide, qui a fourni la première preuve observationnelle de leur existence.

Les calculs de stabilité structurelle des étoiles à neutron posent une limite supérieure pour leur masse à ~  $3 M_{\odot}$ , correspondant à des masses de progéniteurs stellaires dans l'intervalle  $10-30 M_{\odot}$ . Cette vaste fourchette sur la masse des progéniteurs s'explique par le fait que dans les stades avancés de leur évolution, les étoiles perdent une fraction substantielle de leur masse sous forme de **vent**, et que pour les étoiles les plus massives, la fin de vie prend la forme d'une explosion (supernova) qui éjecte aussi une grande fraction de la masse restante au moment du déclenchement de l'explosion. En date d'aujourd'hui, aucun stade plus compact de la matière dégénérée n'a été découvert<sup>12</sup>. Pourtant des étoiles plus massives que  $30 M_{\odot}$  existent. Le trou noir est leur seul stade évolutif final plausible connu.

On pourrait croire qu'il devrait être facile d'observer les stades finaux de la formation d'un trou noir par effondrement gravitationnel; Après tout, du point de vue d'un observateur au repos à grande distance, la surface de l'étoile prend un temps infini à atteindre l'horizon! Cependant des calculs détaillés ont démontré que vu par un observateur éloigné, la luminosité de l'étoile chute selon

$$L(t) \propto \exp\left(-\frac{2t}{6\sqrt{3}M}\right)$$
, (8.85)

tandis que le redshift (principalement gravitationnel) de la lumière émise augmente exponentiellement:

$$z(t) = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \propto \exp(t/4M) . \tag{8.86}$$

Ces résultats, bien qu'intéressants, n'ont probablement qu'un intérêt académique; la majorité des trous noir stellaires se forment en toute probabilité lors d'une supernova, dont la matière éjectée et la luminosité masquent complètement l'effondrement du coeur stellaire. Les neutrinos et les ondes gravitationnelles demeurent nos seules sondes potentielles pour l'étude de la formation des trous noirs par effondrement gravitationnel. Reste la possibilité "d'attraper" la coalescence de deux étoiles à neutron. LIGO l'a fait pour la première fois le 16 octobre 2017, et la détection de radiation électromagnétique dans une vaste gamme de longueurs d'onde offre l'espoir d'en apprendre plus sur le processus de coalescence<sup>13</sup>.

Bon maintenant; comment "observer" un trou noir déjà formé quand rien, même pas la lumière, ne peut s'échapper de son horizon ? Pas moins de trois options viables sont disponibles: (1) observer son effet de microlentille gravitationnelle sur des étoiles ou galaxies d'arrière plan; (2) observer son influence gravitationnelle sur les étoiles dans son voisinage, ou (3) observer la radiation émise par de la matière tombant dans le trou noir *avant* la traversée de l'horizon. La première option a déjà été discutée brièvement à la §5.6. Poursuivons en commençant par la troisième.

#### 8.6.2 Cygnus-X1 et compagnie

Au début des années 1960s, l'armée américaine s'embarque dans la détection des rayons-X à partir de l'espace, l'idée étant de pouvoir détecter les tests atmosphériques de bombes-H par les méchants-Boris soviets. En 1964 une fusée emporte en orbite (parabolique) le premier détecteur-X, essentiellement un compteur Geiger. La stabilité de la fusée étant assurée en lui donnant un mouvement de rotation autour de son axe (effet gyroscopique), le détecteur passe la moitié du temps à pointer non pas vers l'atmosphère terrestre, mais vers l'espace; d'où la surprise: une source de rayons-X très intenses est détectée, baptisée par la suite Cygnus-X1, qui demeure une des plus intenses sources astronomiques de rayons-X connue à ce jour.

 $<sup>^{12}</sup>$ Les **étoiles à quark**, analogue encore plus compact des étoiles à neutron, ont été proposées comme candidat possible, mais à ce que je sache aucun calcul sérieux n'a encore démontré la possibilité de leur existence; et encore moins d'en prédire les propriétés. Mais bon, il ne faut jamais sous-estimer notre manque d'imagination...

 $<sup>^{13}</sup>$ Voir l'événement GW170817 sur le site web des détections LIGO cité en bibliographie du chapitre 6.

On sait maintenant que Cygnus-X1 est un objet très massif (~ 14.8  $M_{\odot}$ ), invisible optiquement mais membre d'un système binaire très rapproché (demi-grand axe 0.2 U.A.) dont le compagnon est une étoile supergéante variable (code postal HDE226868). L'émission-X provient en toute probabilité des parties intérieures d'un disque d'accrétion autour du mystérieux objet invisible. La dissipation d'énergie dans le disque est due au cisaillement rotationnel, chauffant le plasma à de très hautes température, ce qui conduit à une émission radiative de type corps noir ayant son pic aux très courtes longueurs d'onde. Les deux seuls objets astrophysiques connus pouvant agir ici comme accréteur sont une étoile à neutron, ou un trou noir.

La physique des disques d'accrétion est passablement bien comprise<sup>14</sup>. Dans le régime (réaliste) d'un disque géométriquement mince mais optiquement épais, la luminosité totale du disque, c'est-à-dire intégrée sur toute les longueurs d'onde du spectre corps noir, est donnée par l'expression (retour temporaire aux unités SI):

$$L_{\rm d} = \frac{GM_*\dot{M}}{2R_*} \tag{8.87}$$

où  $M_*$  et  $R_*$  sont les masses et rayons de l'objet accréteur, et  $\dot{M}$  est le taux d'accrétion (kg s<sup>-1</sup>). La température maximale, atteinte très près de l'objet accréteur, est donnée par:

$$T_{\rm max} = 0.488 \left(\frac{3GM_*\dot{M}}{8\pi\sigma R_*^3}\right)^{1/4}$$
(8.88)

où  $\sigma = 5.6704 \times 10^{-8} \text{ kg s}^{-3} \text{ K}^{-4}$  est la constante de Stefan-Boltzmann. Deux "variables" sont disponibles pour ajuster aux données: le rapport  $M_*/R_*$  de l'objet central, et le taux d'accrétion de masse  $\dot{M}$  provenant du compagnon. Dans le cas d'un trou noir,  $R_*$  est le rayon de Schwarzschild (ou un peu moins si sa rotation est rapide, viz. §8.4.3), et donc fixé par sa masse. Le taux de perte de masse de HDE226868, estimé via des mesures des propriétés de son vent, est de  $\dot{M} \simeq 2.5 \times 10^6 M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ ; cette valeur, en conjonction avec  $M_* = 14.8 M_{\odot}$  et  $R_* = r_S = 300 \text{ km}$ , est cohérente avec les déterminations observationnelles de  $L_{\rm d}$  et  $T_{\rm max}$  provenant de la théorie des disques d'accrétion.

Bien qu'il ne s'agisse pas ici d'une démonstration sans équivoque que l'objet accréteur soit un trou noir, cette identification est maintenant généralement acceptée, d'autant plus qu'une étoile à neutron de 14.8  $M_{\odot}$  serait près de 5 fois plus massive que la plus massive des étoiles à neutron connues et bien au delà de la limite supérieure ( $\simeq 3 M_{\odot}$ ) permise par la théorie (actuelle) de leur structure.

#### 8.6.3 Les Galaxies actives

La constellation du Cygne n'en était pas à sa première surprise astronomique avec la découverte de Cygnus-X1 en 1964; et sa détection n'était pas non plus le premier coup de pouce accidentel à l'astronomie par le développement de technologie à motivation militaire. Un quart de siècle auparavant, en 1939, les premiers radars détectaient des sources astronomiques très intenses dans le domaine radio. Il fallu cependant attendre jusqu'en 1951 avant de pouvoir démontrer qu'une de ces sources, baptisée depuis Cygnus-A, était d'origine extragalactique. Plusieurs autres sources extragalactiques semblables ont été découvertes depuis, et on comprend maintenant que le moteur de cette émission radiative est encore une fois l'accrétion sur un trou noir, mais cette fois sur un trou noir supermassif (~  $10^9 M_{\odot}$ ) situé au centre des galaxies; ce sont les "AGN", pour Active Galactic Nucleus. Astronomiquement parlant, leurs propriétés sont maintenant bien documentées:

• Luminosité très élevée,  $10^{42}$ – $10^{48}$  erg s<sup>-1</sup>; en comparaison, la luminosité totale d'une galaxie typique est de ~  $10^{44}$  erg s<sup>-1</sup>.

<sup>&</sup>lt;sup>14</sup>Le sujet est d'ailleurs discuté en profondeur dans le cours gradué PHY-6756, *Fluides Astrophysiques*, un **EXCELLENT COURS!** que je vous recommande **FORTEMENT!**.



Figure 8.13: Jets et lobe radio ( $\lambda = 6 \text{ cm}$ ) dans la galaxie active Cygnus-A, une des plus brillantes sources radio dans tout le ciel. La galaxie même coincide avec le petit point au centre de l'image et d'où originent les deux jets. Les deux lobes au bout des ces jets sont situés à environ 450,000 années-lumière l'un de l'autre, soit une dizaine de fois le diamètre visible de la galaxie centrale. Source: NRAO/AUI, images.nrao.edu/260 (domaine public).

- Source très compacte, parfois aussi petit qu'un mois-lumière; en comparaison, le diamètre d'un disque galactique typique est de 60,000 années-lumière.
- Présence de jets s'étendant beaucoup plus loin que l'étendue visible de la galaxie, observables dans le domaine radio.
- Spectre d'émission électromagnétique très large et fortement non-thermique (i.e., rien à voir avec un corps noir).

Pourquoi une émission si intense dans le domaine radio ? Si un trou noir de masse stellaire comme Cygnus-X1 a son pic d'émission dans les rayons-X, ne devrait-on pas s'attendre à une émission radiative au moins tout aussi énergétique, et probablement bien plus, de la part d'un trou noir 10<sup>9</sup> fois plus massif et accrétant présumément à des taux beaucoup plus élevés ? C'est certainement le cas, mais l'émission-X est rapidement diffusée et thermalisée par les (relativement) hautes densités de gaz et poussière au centre des galaxies. L'émission radio, elle provient de gigantesques lobes de gaz produits par l'interaction avec le milieu intergalactique des **jets** colimatés par le trou noir supermassif central. La Figure 8.13 montre des observations radio à haute résolution des jets et lobes radio de Cygnus-A, la galaxie même étant le tout petit point rouge au centre de l'image. L'émission radio même est due à l'effet synchrotron, soit la radiation électromagnétique produite par l'accélération de particules chargées relativistes par un champ magnétique.

La présence de jets collimatés des directions diamétralement opposées suggère que le trou noir central est en rotation, et que c'est l'extraction de son énergie rotationnelle par un ou plusieurs mécanimes de type Penrose (§8.4.7) qui est le moteur de l'émission électromagnétique dans les galaxies actives. Un scénario plausible, le *mécanisme de Blandford-Znajek*, est discuté au chapitre 15 du Hartle.

Les estimés de la masse du trou noir au centre de Cygnus-A tournent autour de  $(2.5\pm0.7) \times 10^9 M_{\odot}$ , et diverses observations récentes suggèrent que des trous noirs supermassifs existent fort probablement au centre de toutes les galaxies, avec la possible exception des moins massives. Cependant il est clair que toutes les galaxies ne sont pas des AGN; présumément l'effet AGN est associé à des densités stellaires très élevées au centre des galaxies, conduisant à des taux d'accrétion également très élevés. Il a été postulé que la formation d'un trou noir supermassif au centre des galaxies est inévitable. L'absence d'émission de type AGN dans les galaxies "normales" s'expliquerait alors simplement par le fait qu'elles accrètent relativement peu. Celà semble bien être de cas de notre propre galaxie, la Voie Lactée, qui offre notre prochain évidence astrophysique, celle-là vraiment sans ambiguité, de l'existence des trous noirs.

#### 8.6.4 Le trou noir au centre de la Voie Lactée

Le centre de notre galaxie, la Voie Lactée, est situé dans la direction de la constellation du Saggitaire, à environ 8 kpc du système solaire. La grande quantité de gaz et poussière dans le plan galactique en rend l'observation impossible aux longueurs d'onde de la lumière visible. Cependant aux plus grandes longueurs d'onde, dans l'infrarouge et dans le domaine radio, l'observation est possible.

Une source radio très compacte fut découverte en 1954 et baptisée Sgr-A, et depuis 1958, par décret de l'UAI, définit l'origine du système de coordonnées galactiques. Au tout début du présent millénaire, des observations infrarouges à très haute résolution spatiale utilisant l'optique adaptive ont pu mesurer le mouvement d'une douzaine d'étoiles du centre galatique, orbitant autour d'un point coincidant avec Sgr-A (voir également l'animation sur la page web du cours). La Figure 8.14 en illustre six des mieux caractérisées. Les orbites des planétoides extérieurs du système solaire sont tracés dans le coin inférieur droit du diagramme, histoire de donner une idée de l'échelle spatiale extrêmement compacte de ces orbites. La mesure des orbites et des périodes orbitales permet, via les Loi de Kepler, d'établir la masse de l'objet central: les premiers estimés produirent ~  $3 \times 10^6 M_{\odot}$ ; pourtant, l'objet en question demeure invisible, sauf dans le domaine radio. Son identification comme trou noir supermassif est la seule explication astrophysiquement possible connue.

Ce trou noir au centre de notre galaxie résulte fort probablement de la formation d'un trou noir de quelques masses solaires par effondrement gravitationnel d'une étoile massive en fin de vie, s'étant produit tôt dans l'évolution de la galaxie. L'accrétion subséquente de gaz, poussière et même étoiles en aurait graduellement augmenté la masse jusqu'à sa valeur actuelle, maintenant estimée à  $4.1 \times 10^6 M_{\odot}$ .

#### 8.6.5 Le trou noir au centre de la galaxie M87

Le premier avril 2019 —et ce n'était pas un poisson!—, le consortium "Event Horizon Telescope" présentait la première image de synthèse directe d'un trou noir, plus spécifiquement celui au centre de la galaxie M87, située à 14.6 Mpc de la Voie Lactée. Cette image est reproduite à la Figure 8.15. L'anneau lumineux est causé par l'effet de concentration de la lumière émise par le plasma surchauffé dans le disque d'accrétion autour du trou noir, et dans le milieu environnant; un peu comme une version à très basse résolution spatiale de la Figure 4.11. L'asymétrie de l'intensité de l'émission dans l'anneau est associée au fait que le trou noir tourne, produisant un effet de focalisation plus prononcé du coté prograde. La comparaison de cette image avec une montagne de simulations de déviation de la lumière par des trous noirs en rotation (métrique de Kerr!) a permi d'établir la masse de ce trou noir à  $(6.5 \pm 0.7) \times 10^9 M_{\odot}$ , soit  $\simeq 10^3$  plus massif que le trou noir au centre de la Voie Lactée! Des analyses effectuées dans les mois qui ont suivis ont également permi de déterminer la valeur du paramètre de rotation dans la métrique de Kerr:  $a/M = 0.90 \pm 0.05$ .

Le défi technique était ici d'assurer une résolution spatiale significativement meilleure que  $\simeq 10$  micro arc-secondes, correspondant au diamètre attendu pour l'horizon d'un trou noir de  $\sim 10^9 M_{\odot}$  observé d'une distance de 16.4 Mpc;  $10\mu$ as, c'est la moitié de l'angle soustendu



Figure 8.14: Six orbites stellaires autour de Saggitaire-A, le trou noir supermassif au centre de la Voir Lactée. Ces orbites permettent d'estimer la masse du trou noir à  $4.1 \times 10^6 M_{\odot}$ . Les orbites de quelques planètes extérieures du système solaire sont tracées à l'échelle dans le coin inférieur droit. Source: Eisenhauer et al. 2005, *The Astrophysical Journal*, **628**:246, via Wikipedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Galactic\_centre\_orbits.svg.



Figure 8.15: Image de synthèse du trou noir supermassif au centre de la galaxie M87 (en haut) et de notre propre galaxie (Sgr A\*, en bas). Source: Event Horizon Telescope, https://eventhorizontelescope.org (domaine public).

par une pièce de 10 sous à la surface de la Lune, vue de la Terre. Cet exploit technique a été accompli en combinant des observations de radiotélescopes distribués aux quatre coins de la planète (Terre), produisant une ouverture angulaire effective comparable au diamètre de la Terre. Voir les ressources citées en bibliographie pour plus de détails.

En mai 2022, l'équipe du Event Horizon Telescope en rajoutait en publiant la première image de synthèse du trou noir au centre de notre galaxie, la Voir Lactée. Cette image est reproduite au bas de la Figure 8.15. La masse du trou noir central Sgr A\* est estimé à  $4^{+1.1}_{-0.6} \times 10^6 M_{\odot}$ , soit ~ 1500 fois moins que le trou noir au centre de M87, et en bon accord avec les déterminations astrométriques discutées à la §8.6.4. Son paramètre de rotation n'a pas encore été mesuré avec précision, mais en date de janvier 2023 tout semble indiquer que Sgr A\* est un rotateur relativement lent, avec a/M < 0.1.

Etant 1500 moins massif mais 2000 fois plus près de la Terre, le diamètre angulaire de l'anneau de Sgr A<sup>\*</sup> se retrouve presque identique à celui du trou noir au centre de M87, et donc présente en fait le même niveau de défi observationnel au niveau de l'imagerie de synthèse.

#### **Bibliographie:**

A l'exception de la section 8.6, ce chapitre contient une sélection de matériel tiré essentiellement des chapitres 12 et 15 du Hartle, et du chapitre 8 de Barrau & Grain, avec quelques ajouts tirés des ouvrages de Schutz et Misner, Thorne & Wheeler, ou de mon propre cru. J'ai évidemment refait moi-même tout seul comme un grand tous les calculs de trajectoires et d'orbites présentés à la §8.3.

Une démonstration du théorème de Birkhoff accessible au niveau technique de ce cours est présentée à la §5.2 de l'excellent ouvrage suivant:

Carroll, S.M., Spacetime and Geometry, Pearson Scientific 2003 (réimpression Cambridge University Press 2019),

dont les chapitres 5 et 6, sur les trous noirs, sont particulièrement bien tournés.

L'internet regorge de conneries écrites sur les trous noirs, donc allez-y avec prudence, circonspection, et un esprit critique bien éveillé. Dans le plus sécuritaire et à un niveau très accessible bien que ne sacrifiant en rien sur la physique pertinente, et de surcroit d'une lecture très agréable, un grand classique sur les trous noirs demeure:

Thorne, K.S., Black holes and time warps, W.W. Norton (1996).

Ce bouquin a été traduit en français et moult fois re-édité, et est disponible en version bon marché; une excellente lecture d'été!

Sur l'inévitabilité de l'atteinte de la singularité une fois l'horizon passé, même avec une force propulsion pour se freiner, voir la très pégagogique présentation suivante:

Lewis, G.F., & Kwan, J., Pub. Astr. Soc. Australia, 24, 46-62 (2007).

Sur le calcul des effets de lentilles gravitationnelles par un trou noir en rotation, j'ai bien aimé:

James, O., von Tunzelmann, E., Franklin, P., & Thorne, K.S., Class. Quantum Grav. 32, 065001 (2015).

ainsi que le site web d'Alain Riazuelo à l'Institut d'Astrophysique de Paris:

www2.iap.fr/users/riazuelo/interstellar

À un niveau plus poussé que celui du cours, voir le chapitre 5 de l'excellent ouvrage suivant:

Poisson, E., A relativist's toolkit, Cambridge University Press (2004).

L'auteur, membre du Perimeter Institute et prof à l'Université de Waterloo, est un des grands relativistes de sa génération, ainsi qu'un fan fini des trous noirs! Pour ce qui est de l'imagerie radio du trou noir supermassif au centre de la galaxie M87 et de la Voie Lactée, voir la page web du "Event horizon telescope":

eventhorizontelescope.org

et les deux séries de (relativement) courts articles décrivant les premiers résultats publiés (en accès libre) dans l'Astrophysical Journal Letters:



Isaac Newton (1643–1727)



Ernst Mach (1838–1916)



Stephen Hawking (1942–2018)

# Chapitre 9

# Sur les frontières

A fool sees not the same tree that a wise man sees If the fool would persist in his folly he would become wise No bird soars too high if he soars with his own wings What is now proved was once only imagin'd

William Blake Proverbs of Hell (ca. 1793)

# 9.1 L'inertie et le principe de Mach

En relativité générale, il n'y a plus de masse gravitationnelle  $m_G$ , il ne reste que la masse inertielle  $m_I$ , qu'on peut encore considérer comme une mesure de la "quantité de matière". Cependant, la définition même de la masse inertielle, même chez Newton, impose une définition plus dynamique: une mesure de la réaction (accélération) d'un corps à l'application d'une force donnée. Donc, pour "mesurer" la masse inertielle, on doit d'abord pouvoir mesurer à la fois la force et l'accélération.

La mesure d'une accélération n'est pas problématique dans un espace(-temps) absolu du type Newtonien; l'accélération est simplement mesurée par rapport à un repère absolu, et selon un temps également absolu —la mesure du temps étant la même dans tous les repères en mécanique et dynamique Newtoniennes. Pour Newton, ce repère absolu était défini par les étoiles, supposées fixes dans l'espace en son temps. La seule difficulté pratique consiste alors l'identification non-ambigue du repère absolu. Ceci n'est pas possible sur une base purement cinématique, mais le devient quand les effets dynamiques sont pris en considération.

Newton lui même, dans son *Principia* de 1687, offre un exemple qui a été repris sous diverses formes dans les siècles qui ont suivi; en version moderne on pourrait décrire l'exemple comme suit. On imagine un expérimentateur dans une pièce fermée examinant un seau rempli d'eau, en rotation par rapport à un axe parallèle à la gravité. Selon la relativité Galiléenne, on peut imaginer deux situations cinématiques distinctes mais équivalentes:

- 1. Le seau tourne dans un laboratoire fixe par rapport à l'espace absolu;
- 2. Le seau est fixe par rapport à l'espace absolu, et c'est le laboratoire qui tourne (dans le sens inverse) selon un axe parallèle à la gravité.

Selon Newton, on peut immédiatement distinguer ces deux situations en examinant la forme de la surface de l'eau dans le seau; si c'est le seau qui tourne, la surface du liquide prendra la forme d'un paraboloide de révolution, tandis que si c'est le laboratoire qui tourne, la surface du liquide demeurera plane.

L'explication de Newton est cependant incompatible avec le principe d'équivalence. En relativité générale, où tous les repères sont supposés équivalents, l'explication est beaucoup

plus subtile. Si on se place dans un repère en rotation où le seau et l'eau sont au repos, on doit supposer que tout l'Univers, observateur inclus, tourne à une vitesse angulaire correspondant à celle du seau, à un signe près. La densité d'énergie-impulsion associée à ce mouvement est absolument gigantesque, et donc devra induire une courbure dans l'espace temps. Un peu comme dans le cas du trou noir en rotation décrit par la métrique de Kerr (§8.4), on induira une dérive de la structure même de l'espace-temps dans la direction de rotation. Une force "métrique" (i.e., associée à des  $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$  non-nuls) est alors exercée sur l'eau au repos, avec comme conséquence d'en déformer la surface. Le principe d'équivalence tient toujours la route!

Une version plus "mécanique" du seau de Newton, également discutée par ce dernier dans son *Principia*, consiste à considérer deux masses-test tournant l'une autour de l'autre à une fréquence angulaire  $\Omega$ , leurs centres séparés d'une distance 2x et reliées par un ressort de constante k. Il est possible, par une simple mesure de l'étirement du ressort, de déduire la fréquence angulaire de rotation du système en posant égalité de la force centrifuge et de la force associée à l'étirement  $\Delta x$  du ressort. En supposant que la Loi de Hooke s'applique ici, on a donc:

$$k(\Delta x) = m_I x \Omega^2 \qquad \rightarrow \qquad \Omega^2 = \frac{k}{m_I} \left(\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\tag{9.1}$$

Il n'est donc pas nécessaire de pouvoir *mesurer* le déplacement des masses par rapport à un repère quelconque pour en établir le mouvement de rotation; une mesure *purement locale* de l'étirement du ressort suffit.

La situation se corse si on imagine maintenant une masse seule dans tout l'Univers. Sans aucun point de repère, il est tout simplement impossible de *mesurer* une vitesse ou une accélération. Si on applique maintenant une force (par exemple la masse est chargée électriquement et on "allume" soudainement un champ électrique), la masse sera-t-elle ou non "accélérée" ? Si son accélération n'est pas mesurable, on doit alors conclure que sa masse inertielle est nulle. Paradoxe ?

Plus de deux siècles séparent Newton d'Einstein; durant cette période, bon nombre de penseurs se sont acharnés sur ce problème, incluant en particulier le physicien/philosophe Ernst Mach (1838-1916). Pour Mach, dans le cas décrit ci-dessus d'une masse unique dans tout l'Univers, la masse inertielle est égale à zéro, puisque l'accélération ne peut être mesurée; il en conclut que dans notre Univers (où il y a beaucoup plus qu'une seule masse), la masse inertielle est *induite* par la présence des autres masses. Cette hypothèse est connue comme le **Principe de Mach**, une appelation introduite en fait par Oncle Albert lui-même en 1918.

En relativité générale, le paradoxe se reformule très différemment. C'est maintenant le tenseur de stress-énergie qui détermine la courbure (décrite par le tenseur métrique et ses dérivées) via l'équation du champ:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \ . \tag{9.2}$$

Il s'agit ici d'un système d'équation différentielles couplées, donc la solution exige la spécification de conditions limites. La courbure locale est donc influencée par la distribution d'énergie dans tout l'Univers, exactement comme le stipule le Principe de Mach.

Écrivons l'équation géodésique, en y ajoutant cette fois explicitement une (quadri)force "extérieure" au membre de droite:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} \frac{\mathrm{d}x^{\sigma}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^{\rho}}{\mathrm{d}\tau} = f^{\mu} \ . \tag{9.3}$$

La courbure détermine (localement) la forme des géodésiques via le terme impliquant les  $\Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}$  au membre de gauche. C'est la magnitude de ce terme, versus celle du terme de force extérieure  $f^{\mu}$ , qui détermine la difficulté à faire dévier une masse de sa géodésique. C'est l'inertie en relativité générale!

# 9.2 La nature de l'espace-temps

On l'a mentionné d'entrée de jeu au chapitre 1: en relativité générale, l'espace temps est une entité dynamique qui **agit** sur la masse-énergie et **réagit** à sa présence. Nous savons maintenant que l'équation du champ d'Einstein (5.77) est l'expression mathématique de cette idée: structure (i.e., courbure) de l'espace temps au coté gauche du "=", masse-énergie (i.e., tenseur  $T_{\mu\nu}$ ) à droite.

Nous avons également vu que les observations astronomiques actuelles pointent vers une valeur non-nulle pour la constante cosmologique  $\Lambda$ ; réécrivons l'éq. (5.106) sous la forme:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \left( T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda g_{\mu\nu}}{8\pi} \right) ; \qquad (9.4)$$

mathématiquement, on n'a que fait passer le terme en  $\Lambda$  au coté droit; mais l'idée est d'interpréter ce terme, introduit de manière essentiellement *ad hoc* à la §5.5, comme une contribution au tenseur de stress-énergie. Comme on l'a vu à la §7.2.5, physiquement on peut y associer une densité d'énergie, qui devient la densité d'énergie du vide. L'espace temps n'est pas seulement un champ, c'est un champ dont l'état fondamental a une énergie non-nulle. Comme c'est habituellement le cas dans ce domaine, on déclare que cette densité d'énergie du vide est du à des effets quantiques non-spécifiés, mais se manifeste par la création continue de paires particules-antiparticules et, sous certaines circonstances particulières, peut conduire à des effets observables aux échelles non-quantiques; par exemple, le mécanisme de Hawking (§8.5). Cependant, un estimé dimensionnel de la valeur de cette densité du vide originant de la mécanique quantique produit une valeur qui se retrouve, ahem, 120 ordres de grandeurs (i.e.,  $10^{120}$ ) fois plus grande que la limite supérieure associée aux déterminations astronomiques/cosmologiques de  $\Lambda$ . Il y a clairement encore du travail à faire...

Selon notre version actuelle du modèle cosmologique "standard", 70% du contenu énergétique de l'Univers doit être associé à cette soit-disant **énergie sombre**; du reste, environ 26% correspond à la tout aussi mystérieuse **matière sombre**, qui interagit gravitationnelement mais pas électromagnétiquement. Le 4% restant correspond à la matière baryonique. Conclusion:

Nous ignorons tout de 96% du contenu de L'Univers

# 9.3 Singularités et gravité quantique

Au fil des pages qui précèdent nous avons rencontré quelques **singularités** véritables: celle correspondant à  $t \simeq 0$  au moment du Big Bang (et peut-être son équivalent au moment du Big Crunch); et au centre d'un trou noir, cette dernière étant bien cachée sous l'horizon, sauf possiblement dans la phase finale d'évaporation d'un trou noir primordial (§8.5).

Pensons Big Bang; la physique connue et testée aujourd'hui permet ainsi de retracer quantitativement l'histoire de l'Univers jusqu'à  $10^{-43}$  s après le Big Bang. On pourrait décider que c'est suffisant et passer à autre chose, n'est-ce-pas...? Mais plus de deux millénaire de philosophie naturelle et de physique ne permettent qu'une seule réponse, et catégorique, à cette question:

### JAMAIS !!!

Par principe certainement, mais du point de vue de la physique contemporaine c'est aussi parce c'est durant ce minuscule  $10^{-43}$  seconde manquant que viennent à se chevaucher la gravité et la mécanique quantique. La question a préoccupé Max Planck lui-même, qui, par simple analyse dimensionnelle, a tenté d'établir le régime physique dans lequel la gravité devient influencée par les effets quantiques. À partir de la constante de Planck  $\hbar$  et des deux grandes constantes physiques de la relativité, c et G, il est possible de construire les échelles spatiales, temporelle, énergétique et massique suivantes:

$$\ell_{\rm Pl} = (G\hbar/c^3)^{1/2} = 1.62 \times 10^{-33} \,\mathrm{cm}$$
 (9.5)

$$t_{\rm Pl} = (G\hbar/c^5)^{1/2} = 5.39 \times 10^{-44} \,\mathrm{s}$$
 (9.6)

$$E_{\rm Pl} = (\hbar c^5/G)^{1/2} = 1.22 \times 10^{19} \,{\rm GeV}$$
 (9.7)

$$\rho_{\rm Pl} = c^5 / (hG^2) = 5.16 \times 10^{93} \,\mathrm{g \, cm^{-3}}$$
(9.8)

Les effets quantiques influencent la gravité lorsque l'une ou l'autre de ces échelles est atteinte; ceci inclut le tout début du Big Bang, la phase finale de l'effondrement gravitationnel de la masse d'une étoile en une singularité au centre d'un trou noir, ainsi que la phase finale de l'évaporation d'un trou noir primordial, si ils existent.

On peut aussi directement définir la Masse de Planck selon

$$M_{\rm Pl} = E_{\rm Pl}/c^2 \equiv \rho_{\rm Pl} \ell_{\rm Pl}^3 = (\hbar c/G)^{1/2} ; \qquad (9.9)$$

calculons maintenant le rapport

$$\frac{M_{\rm Pl}}{\ell_{\rm Pl}} = \frac{c^2}{G} \; ; \tag{9.10}$$

il ne faut pas trop s'émerveiller du fait que ce rapport soit identique (à un facteur 2 près) à celui du rapport d'une masse M sur son rayon de Schwarzschild  $r_S = 2GM/c^2$ ; on se rappelera (sinon voir la §4.2) que la combinaison de constante  $c^2/G$  permet toujours d'exprimer la masse en terme d'une longueur; c'est purement dimensionnel!

De même, si on considère l'Univers plat Einstein-de Sitter (§7.3), on peut montrer que le rapport entre la masse contenue dans l'Univers visible à un temps cosmologique t et son facteur d'échelle a(t) est donné par

$$\frac{M_{\rm a}(t)}{a(t)} = \frac{2}{9} \frac{c^2}{G} \ ; \tag{9.11}$$

où ici la masse de l'univers visible est définie comme la masse contenue dans le volume ayant pu être traversé par la lumière en un temps t. Ce qui est remarquable encore une fois ici est qu'on retrouve le rapport  $c^2/G$  à un facteur d'ordre unité près, et ce indépendamment de t.

La Figure 9.1, fortement inspirée par la Figure 1.1 dans votre Hartle, porte en graphique la masse vs la "taille" de divers objets physiques. La ligne diagonale est celle associée au rayon de Schwarzschild  $r_S = 2GM/c^2$ . Tous les trous noirs, quelle que soit leur masse ou mécanisme de formation, se retrouvent par définition quelque part le long de cette ligne. La région en gris est inaccessible observationnellement, car elle correspond à "l'intérieur" des trous noirs, i.e.,  $r < r_S$ . La ligne verticale en tirets est tracée à l'échelle de Planck; à gauche de cette ligne, on tombe dans le domaine (*terra incognita*) de la gravité quantique. C'est quelquepart dans cette région que la physique des particules rejoint la diagonale  $2M = (c^2/G)r$ .

On se souvient (§4.2) que pour des objets ayant des tailles  $\gg r_S$ , la gravité peut être considérée comme "faible". La proximité à la ligne diagonale sur la Figure 9.1 indique donc le régime masse vs taille où la relativité générale est importante dans la représentation des effets gravitationnels; sans surprise, on y retrouve des "objets" maintenant familiers: trous noirs, étoiles à neutron, et l'Univers à toutes les phases de son évolution.

On doit aussi conclure de la Figure 9.1 que quelquepart à gauche de la ligne verticale en tirets, la gravité —et donc la relativité générale— devient essentielle à la physique des particules à ces échelles. Qui l'eut cru, pour la plus "faible" des forces fondamentales... !

#### **Bibliographie:**

Les thèmes traités dans ce très bref chapitre ont un coté philosophique marqué, frisant à la limite le mysticisme scientifique. Je ne suis un expert dans ni l'un ni l'autre, mais les questions de ce genre m'intriguent depuis déjà un petit bout de temps, et je lis de temps en temps sur le sujet. Les quelques références qui suivent sont des trucs donc la lecture m'a été profitable. Je



Figure 9.1: Le domaine d'applicabilité de la relativité générale. Notons que l'échelle horizontale couvre 70 ordres de grandeurs, et l'échelle verticale en couvre 90! Les objets situés près de la ligne  $2M = (c^2/G)r$  sont ceux pour lequels la relativité générale est essentielle à la compréhension. Très fortement inspiré par la Figure 1.1 de Hartle.

vous les suggère en guise de conclusion à ces Notes de Cours. Sur l'espace-temps et le principe de Mach:

Huggett, N., Space from Zeno to Einstein, MIT Press, 1999

ainsi que la §21.12 de l'ouvrage de Misner, Thorne & Wheeler déjà souvent cité (voir bibliographie du chapitre 1).

Je ne sais quoi vous recommander en terme de lecture "facile" et pertinente sur la gravité quantique; si vous avez des suggestions, faites-moi les parvenir. La seconde moitié du chapitre de livre suivant traite du sujet d'une manière assez accessible et intéressante (le chapitre complet en vaut la lecture):

Weinberg, S., *Newtonianism and today's physics*, dans 300 Years of Gravitation, éds. S. Hawkins et W. Israel, Cambridge University Press (1987).

Le dernier chapitre de l'ouvrage suivant, moins technique, pourra aussi vous donner une idée d'un des "angles" présentement à l'étude:

Thorne, K.S., Black holes and time warps, W.W. Norton (1996).

La revue en ligne *Living Reviews in Relativity* a toute une série d'articles dédiés au sujet, la plupart très techniques. Stephen Hawking a aussi beaucoup écrit sur le sujet, mais typiquement soit à un niveau très technique, ou alors grand public; je ne connais rien de lui entre les deux.

Et au bout de tout ça, vous êtes finalement équipé(e)s pour vous taper les écrits d'Oncle Albert lui-même. Son petit classique suivant est perpétuellement réédité, et donc toujours disponible:

Einstein, A., The Meaning of Relativity ( $5^e$  éd.), Princeton University Press (1953).

# Annexe A

# Tenseurs de courbure pour métriques diagonales

## A.1 Métriques diagonales en 4D

Vous avez déjà pu constater que le calcul des composantes des tenseurs de courbure en fonction des composantes du tenseur métrique peut s'avérer fastidieux; il est cependant possible d'établir des formules générales permettant de calculer plus facilement (cela demeure un énoncé relatif...) les composantes des coefficients de connection  $\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}$  (§3.5), du tenseur de Riemann  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ , (§5.1), du tenseur de Ricci  $R_{\mu\nu}$ , (§5.3), de l'invariant de courbure R (§5.3), et du tenseur d'Einstein  $G_{\mu\nu}$  (§5.3), dans le cas particulier d'un tenseur métrique diagonal:

$$ds^{2} = A(dx^{0})^{2} + B(dx^{1})^{2} + C(dx^{2})^{2} + D(dx^{3})^{2}$$
(A.1)

où les A, B, C, D peuvent être fonction des quatres coordonnées  $x^{\mu}$ . Notons que cette forme générale d'une métrique diagonale inclut (entre autres) les métriques de Schwarzschild (chaps. 4 et 8) et la métrique de Friedmann-Robertson-Walker (chap. 7).

On introduit tout d'abord les définitions:

$$\alpha = \frac{1}{2A} , \qquad \beta = \frac{1}{2B} , \qquad \gamma = \frac{1}{2C} , \qquad \delta = \frac{1}{2D} , \qquad (A.2)$$

et les racourcis notationnels suivants:

$$A_0 \equiv \frac{\partial A}{\partial x^0}$$
,  $B_{12} \equiv \frac{\partial^2 B}{\partial x^1 \partial x^2}$ , etc. (A.3)

Les coefficients de connexion sont alors donné par:

$$\Gamma_{12}^0 = 0$$
,  $\Gamma_{11}^0 = -\alpha B_0$ ,  $\Gamma_{0\mu}^0 = \alpha A_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . (A.4)

Les autres coefficients sont obtenus par permutation des indices et fonctions associées, par exemple:  $\Gamma_{22}^1 = -\beta C_1$ ,  $\Gamma_{33}^3 = \delta D_3$ , etc.

À partir de ces coefficients le tenseur de Riemann est obtenu via l'éq. (5.11); on trouve ainsi:

$$R_{0123} = 0$$
  

$$2R_{0102} = -A_{12} + \alpha A_1 A_2 + \beta A_1 B_2 + \gamma A_2 C_1$$
(A.5)

$$2R_{0101} = -A_{11} - B_{00} + \alpha (A_0 B_0 + A_1^2) + \beta (A_1 B_1 + B_0^2) -\gamma A_2 B_2 - \delta A_3 B_3$$
(A.6)

Encore ici les autres composantes sont obtenues par permutations des indices et fonctions dans les expressions ci-dessus; par exemple, la composante  $R_{2321}$  s'obtient à partir de  $R_{0102}$  ci-dessus

avec les permutations

$$\begin{array}{rcl}
0 & \rightarrow & 2 \\
1 & \rightarrow & 3 \\
2 & \rightarrow & 1 \\
A & \rightarrow & C & (\text{et donc } \alpha \rightarrow \gamma) \\
B & \rightarrow & D & (\text{et donc } \beta \rightarrow \delta) \\
C & \rightarrow & B & (\text{et donc } \gamma \rightarrow \beta)
\end{array}$$
(A.7)

Les symétries du tenseur de Riemann (voir l'éq. (5.18)) sont également à utilser de manière judicieuse.

Pour le tenseur de Ricci, obtenu par contraction du tenseur de Riemann sur ses premier et troisième indice (voir l'éq. (5.72), les composantes prennent la forme:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \beta A_{11} + \gamma A_{22} + \delta A_{33} \\ &+ \beta B_{00} + \gamma C_{00} + \delta D_{00} \\ &- \beta^2 B_0^2 - \gamma^2 C_0^2 - \delta^2 D_0^2 \\ &- \alpha A_0 (\beta B_0 + \gamma C_0 + \delta D_0) \\ &- \beta A_1 (\alpha A_1 + \beta B_1 - \gamma C_1 - \delta D_1) \\ &- \gamma A_2 (\alpha A_2 - \beta B_2 + \gamma C_2 - \delta D_2) \\ &- \delta A_3 (\alpha A_3 - \beta B_3 - \gamma C_3 - \delta D_3) \end{aligned}$$
(A.8)  
$$R_{01} &= \gamma C_{01} + \delta D_{01} \\ &- \gamma^2 C_0 C_1 - \delta^2 D_0 D_1 \\ &- \alpha \gamma A_1 C_0 - \alpha \delta A_1 D_0 \\ &- \beta \gamma B_0 C_1 - \beta \delta B_0 D_1 \end{aligned}$$
(A.9)

Les autres composantes s'obtiennent à partir des deux listées ci-dessus à l'aide du même patron de permutations que dans le cas des composantes du tenseur de Riemann. La coloration de certains termes sera expliquée plus loin.

L'invariant de courbure R (alias scalaire de Ricci), résultant de la contraction du tenseur de Ricci  $(R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu})$ , est donné par

$$\frac{1}{4}R = \alpha\beta(A_{11} + B_{00} - \alpha A_1^2 - \beta B_0^2 - \alpha A_0 B_0 - \beta A_1 B_1 + \gamma A_2 B_2 + \delta A_3 B_3) 
+ \alpha\gamma(A_{22} + C_{00} - \alpha A_2^2 - \gamma C_0^2 - \alpha A_0 C_0 + \beta A_1 C_1 - \gamma A_2 C_2 + \delta A_3 C_3) 
+ \beta\gamma(B_{22} + C_{11} - \beta B_2^2 - \gamma C_1^2 + \alpha B_0 C_0 - \beta B_1 C_1 - \gamma B_2 C_2 + \delta B_3 C_3) 
+ \alpha\delta(A_{33} + D_{00} - \alpha A_3^2 - \delta D_0^2 - \alpha A_0 D_0 + \beta A_1 D_1 + \gamma A_2 D_2 - \delta A_3 D_3) 
+ \beta\delta(B_{33} + D_{11} - \beta B_3^2 - \delta D_1^2 + \alpha B_0 D_0 - \beta B_1 D_1 + \gamma B_2 D_2 - \delta B_3 D_3) 
+ \gamma\delta(C_{33} + D_{22} - \gamma C_3^2 - \delta D_2^2 + \alpha C_0 D_0 + \beta C_1 D_1 - \gamma C_2 D_2 - \delta C_3 D_3)$$
(A.10)

Finalement, pour les composantes du tenseur d'Einstein  $(G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu})$ , on obtient:

$$G_{01} = R_{01}$$

$$\alpha G_{00} = \beta \gamma (-B_{22} - C_{11} + \beta B_2^2 + \gamma C_1^2 - \alpha B_0 C_0 + \beta B_1 C_1 + \gamma B_2 C_2 - \delta B_3 C_3)$$

$$+ \beta \delta (-B_{33} - D_{11} + \beta B_3^2 + \delta D_1^2 - \alpha B_0 D_0 + \beta B_1 D_1 - \gamma B_2 D_2 + \delta B_3 D_3)$$

$$+ \gamma \delta (-C_{33} - D_{22} + \gamma C_3^2 + \delta D_2^2 - \alpha C_0 D_0 - \beta C_1 D_1 + \gamma C_2 D_2 + \delta C_3 D_3)$$
(A.12)

avec les mêmes règles de permutations qu'auparavant pour les autres composantes.

## A.2 Métriques 2D et 3D

Les formules introduites ci-dessus se simplifient facilement aux métriques diagonales en 2D et 3D:

$$ds^2 = B(dx^1)^2 + C(dx^2)^2$$
, [2D spatial] (A.13)

$$ds^{2} = B(dx^{1})^{2} + C(dx^{2})^{2} + D(dx^{3})^{2} , \qquad [3D \text{ spatial}]$$
(A.14)

Il s'agit simplement d'appliquer les règles suivantes:

- en 3D: on pose A = 1 et les coefficients B, C, D ne dépendent que de  $x^1, x^2$ , et  $x^3$  (donc  $B_0 = C_0 = D_0 = 0$ , et similairement pour les dérivés secondes),
- en 2D: on pose A = D = 1 et les coefficients B, C ne dépendent que de  $x^1$  et  $x^2$ .

Un exemple spécifique est déjà donné dans nos expressions (A.8) et (A.9) pour les composantes du tenseur de Ricci; pour en déduire les composantes applicables à la métrique 3D (A.14), tous les termes en rouge doivent être mis à zéro; et pour une métrique 2D (A.13), les termes en bleu doivent également être mis à zéro.

Attention, notez bien:

- Que ce soir en 2D ou 3D, le facteur 1/4 demeure inchangé dans l'équation (A.10)
- Les composantes du tenseur d'Einstein  $G_{\mu\nu}$  en 2D et 3D ne peuvent **pas** être obtenues de cette façon.

#### **Bibliographie**:

Cet annexe est une transposition de l'Annexe de l'ouvrage de Rindler cité en bibliographie du chapitre 1:

Rindler, W., *Relativity: special, general and cosmological,* 2<sup>e</sup> éd., Oxford University Press (2006).

La "transposition" consiste essentiellement à remplacer la numérotation  $\mu = 1, 2, 3, 4$  de Rindler par notre  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Le fait que Rindler assigne l'indice "4" à sa coordonnée temporelle, et adopte une signature métrique (---+), est inconséquent ici, au vu de la formulation générique (A.1) adoptée pour la métrique diagonale.