

PHY-2100

PHYSIQUE

ENVIRONNEMENTALE

Notes de cours
par

Paul Charbonneau
Département de Physique
Université de Montréal

janvier 2025

MINI-PRÉFACE

Ces notes contiennent toute la matière couverte dans le cadre du cours PHY-2100, **Physique environnementale**, offert par le département de physique de l'Université de Montréal.

Vous avez en main la version 2.0, soit une version passablement revue, modifiée et corrigée de celle de la session H24. Je tiens à remercier la cohorte d'étudiant(e)s de 2024, dont les commentaires et suggestions ont contribué très positivement à cette révision. Parmi les nouveaux sujets couverts on notera: la spectroscopie moléculaire, l'équilibre géostrophique, la percolation, l'évapotranspiration, les centrales thermiques solaires, et l'élévation du niveau de la mer causée par le réchauffement climatique. J'ai également ajouté plusieurs nouveaux exemples détaillés dans diverses sections. Afin de dégager du temps de cours pour ces nouveautés, et toujours selon la rétroaction de la cohorte H24, certains sujets couverts en classe ont été déplacés en annexe, aux fins de référence si besoin il y a. Ces annexes couvrent la mathématique de la marche aléatoire, les couches limites hydrodynamiques, et un rappel sur les ondes électromagnétiques.

Je compte sur vos commentaires et suggestions, sur le cours en général, et sur ces Notes en particulier, pour continuer d'améliorer tout ça pour l'an prochain.

Table des Matières

1	Introduction: les bases	4
1.1	Qu'est-ce-que la physique environnementale?	4
1.2	Propriétés des solides, liquides et gaz	5
1.2.1	Le gaz parfait	6
1.2.2	Capacités thermiques	7
1.2.3	Changements de phase et chaleur latente	8
1.2.4	Évaporation et condensation	8
1.2.5	Compressibilité et dilatation thermique	10
1.3	Une brève introduction à la spectroscopie moléculaire	10
1.3.1	Les modes de vibration	11
1.3.2	Les modes de rotation	14
1.3.3	Les modes couplés de vibration+rotation	14
1.3.4	Photoexcitation, photoionisation, et photodissociation	14
1.4	Réservoirs, flux, sources et puits	15
1.5	Lois de conservation	17
2	L'environnement physique	21
2.1	L'atmosphère	21
2.1.1	L'équilibre hydrostatique	22
2.1.2	L'équilibre géostrophique	24
2.1.3	L'atmosphère plan parallèle isotherme	25
2.1.4	Capacité thermique atmosphérique moyenne	26
2.1.5	La très haute atmosphère	26
2.2	L'hydrosphère	27
2.2.1	Les océans	27
2.2.2	Les eaux de surface	29
2.2.3	La cryosphère	29
2.3	La lithosphère	29
2.4	La biosphère	32
2.5	L'anthroposphère	35
3	Processus physiques I. Radiation	39
3.1	Équilibre thermodynamique et corps noir	39
3.2	Le spectre électromagnétique du soleil	41
3.3	L'irradiance solaire	41
3.4	Insolation	44
3.5	Absorption	47
3.6	Dispersion	50
3.6.1	La dispersion de Rayleigh	50
3.6.2	L'irradiance du ciel	52
3.6.3	Les nuages: dispersion et absorption	53
3.7	Réfectivité et albedo	55

3.8	Absorption au sol	57
3.9	Émission par la surface	58
3.10	Bilan radiatif global	63
4	Processus physiques II. Matière	66
4.1	La diffusion	66
4.1.1	Diffusion = marche aléatoire	67
4.1.2	Le temps de diffusion	71
4.1.3	Solutions analytiques à l'équation de diffusion	72
4.2	Écoulements: transport et mélange	76
4.2.1	L'équation de transport	77
4.2.2	Le temps advectif et le nombre de Peclet	79
4.2.3	Solutions analytiques à l'équation de transport	80
4.2.4	La turbulence	82
4.2.5	Exemple: un inspirant mélange turbulent	83
4.2.6	Exemple: la fonderie Horne à Rouyn-Noranda	84
4.3	La sédimentation	87
4.3.1	La solution de Stokes	87
4.3.2	La vitesse de sédimentation	89
4.3.3	Exemple: la règle du 2 mètres	92
4.4	La percolation	94
4.4.1	Exemple 1 : Infiltration des eaux de surface dans un sol	95
4.4.2	Exemple 2 : bassin de rétention	96
4.4.3	La Loi de Darcy	97
5	Processus Physiques III. Chaleur	100
5.1	Les trois manières de cuire un poulet	100
5.2	Conduction thermique	100
5.3	L'équation du transport de la chaleur	101
5.3.1	Exemple 1: l'asphalte brûlant	101
5.3.2	Exemple 2: l'isolation thermique	103
5.3.3	Exemple 3: les îlots de chaleur	105
5.4	Évaporation et évapotranspiration	108
5.4.1	Le cycle global de l'eau	108
5.4.2	Exemple: Comment survivre à un marathon	109
5.4.3	Exemple: Comment survivre dans un désert	109
6	Activité humaine I. Énergie	110
6.1	L'effet dynamo	110
6.1.1	Le générateur homopolaire	111
6.1.2	Le générateur AC	113
6.1.3	Le flux d'énergie cinétique dans un écoulement	114
6.2	Énergie éolienne	115
6.2.1	La limite de Betz	115
6.2.2	Impacts biosphériques	117
6.3	Énergie hydroélectrique	117
6.3.1	Barrages hydroélectriques	118
6.3.2	Impacts biosphériques	120
6.4	L'énergie marémotrice	121
6.4.1	Turbines marémotrices	122
6.4.2	Impacts biosphériques	124
6.5	La centrale thermique	124
6.6	Énergie solaire I	127
6.6.1	Utilisation passive	128

6.6.2	Centrales thermiques solaires	129
6.7	Énergie solaire II: les panneaux solaires	130
6.7.1	Les semiconducteurs	130
6.7.2	La jonction np	131
6.7.3	L'effet photovoltaïque	132
6.7.4	La limite de Shockley-Queisser	134
6.7.5	Impacts biosphériques	134
6.7.6	Bioénergie et photosynthèse artificielle	134
6.8	Énergie renouvelable versus non-renouvelable	134
6.8.1	Combustibles fossiles	136
6.8.2	Impacts biosphériques	137
6.9	Énergie nucléaire	138
6.9.1	Structure et désintégration nucléaires	138
6.9.2	Fission et fusion	141
6.9.3	Déchets nucléaires	144
6.9.4	Accidents: l'exemple de Tchernobyl	146
6.9.5	Impacts biosphériques	147
6.10	L'éléphant dans la pièce	149
7	Activité humaine II. Bilans de masse	151
8	Activité humaine III. Changement climatique	152
8.1	Le réchauffement global observé	152
8.2	Variabilité climatique naturelle	154
8.2.1	Les âges glaciaires et les cycles de Milanković	155
8.2.2	Variabilité solaire	157
8.2.3	Éruptions volcaniques	159
8.3	Variabilité climatique anthropogénique	162
8.3.1	Les gaz à effet de serre	162
8.3.2	La stratosphère comme stéthoscope	166
8.3.3	Les aérosols	167
8.3.4	Les océans et le cycle du carbone	167
8.3.5	Hausse du niveau des océans	167
8.3.6	Les boucles de rétroaction	170
8.4	Les scénarios du GIEC	173
A	Ondes Électromagnétisme	176
A.1	Ondes électromagnétiques	176
A.2	Interfaces: transmission et réflexion	177
A.3	Flux et irradiance	181
A.4	Le spectre électromagnétique	181
B	La marche aléatoire	183
C	Viscosité et couches limites	186
C.1	La couche limite	187
C.2	Couche limite turbulente	188

Chapitre 1

Introduction: les bases

1.1 Qu'est-ce-que la physique environnementale?

La définition de ce qu'est la Physique Environnementale est loin d'être évidente et certainement pas consensuelle, au delà du fait (plutôt trivial) qu'elle est une composante de la Science Environnementale. *Wikipedia* définit cette dernière comme suit (août 2025):

“Environmental science is an interdisciplinary academic field that integrates physics, biology, meteorology, mathematics and geography (including ecology, chemistry, plant science, zoology, mineralogy, oceanography, limnology, soil science, geology, physical geography, and atmospheric science) to the study of the environment, and the solution of environmental problems [...] it provides an integrated, quantitative, and interdisciplinary approach to the study of environmental systems.”

Il faut déjà remarquer ici, dans la dernière partie de cette définition, les mots “integrated”, “quantitative” et “interdisciplinary”. La définition ci-dessus n'en demeure pas moins toute une salade... et ça ne s'améliore pas si on cherche une définition spécifiquement de la physique environnementale. Souvent on tombe sur des définitions si générales qu'elles ne sont pas vraiment utiles, comme celle-ci, tirée du site Web d'une Université Australienne réputée dont je tairai le nom:

“Environmental physics is the study of the Earth and environment using Physics and Mathematics.”

À l'autre extrême, on trouve aussi des définitions beaucoup plus spécifiques, comme sur cet autre site web d'une autre Université Américaine tout aussi réputée que la précédente:

“Environmental Physics is a scientific discipline that focuses on determination of how environmental factors affect biological and physical processes in agricultural and natural ecosystems.”

Dans la quatrième édition de leur grand classique *Principle of Environmental Physics*, Monteith et Unsworth y vont dans une veine semblable:

“Environmental Physics, as we choose to define it, is the measurement and analysis of interactions between organisms and their environment.”

À leur défense, ils sont très explicite par rapport au fait que leur définition reflète un choix personnel, et de surcroît, quand on découvre ce qu'ils entendent par “environment” leur définition s'élargit substantiellement.

Perso, et après y avoir bien réfléchi, je me risque à proposer la définition suivante, qui penche nettement plus vers le général que le spécifique:

“La Physique Environnementale se définit par l’application des méthodes et approches de la physique aux questions de nature environnementales.”

Quoiqu’il en soit, cette définition a guidé la structure de ce nouveau cours dont ces Notes en regroupent le contenu. Je vous encourage à penser à vos propres définitions de la physique environnementale... nous les discuterons en classe !

On pourrait évidemment aller plus loin. Dans leur excellent ouvrage *Environmental Physics*, Egbert Boeker et Rienk van Grondelle le font, en mettant une forte emphase sur les contributions que peut (et doit!) apporter la physique environnementale à la société en général, incluant les processus décisionnels au niveau politique. Je ne me sens pas du tout confortable à enseigner de tels sujets, mais c’est à garder en tête. En terme de pertinence sociale, la physique environnementale est à la physique ce que le changement climatique est aux sciences atmosphériques et océaniques.

La difficulté, en physique environnementale, ne vient pas de la physique sous-jacente. Pas besoin de mystérieuses énergie ou matière sombres, de particules élémentaires exotiques, de “Nouvelle Physique”, ou même de relativité. En fait, dans pas mal tout ce cours les théories et concepts physiques mobilisés relèvent presque tous de la physique dite “classique”, i.e., pré-relativiste et pré-quantique; la très importante exception étant l’interaction de la radiation électromagnétique avec la matière, qui comme on le verra exige de la mécanique quantique assez solide. La difficulté provient plutôt de la nature même du système environnemental, qui est d’une complexité dépassant pas mal tout ce que vous rencontrerez durant vos études au Bac en physique. Cette complexité provient autant du nombre très élevé de composantes ou éléments en interaction, de la nonlinéarité de ces interactions, et de la très vaste gamme d’échelles spatiales et temporelles sur lesquelles évolue l’environnement. Si il y a une chose que vous apprendrez à maîtriser dans ce cours (si je fais bien mon travail!), c’est l’art de l’approximation physique, et du design de modèle simples pouvant néanmoins capturer certains aspects importants d’une réalité physiquement beaucoup plus complexe.

Le reste de ce chapitre est quelque peu hétéroclite; on commence (§1.2) par un bref survol des propriétés physiques de la matière, vue comme un milieu continu (gaz, liquide, solide). Il s’agira donc d’un rappel de certains concepts que vous avez déjà rencontrés dans vos autres cours (notamment PHY-2215 *Physique Thermique et Statistique*¹, mais en introduira d’autres avec lesquels vous êtes probablement moins familiers. Ensuite (§1.3), bâtissant sur ce que vous avez appris en PHY-2810 *Mécanique Quantique*, on se tape un petit survol de la physique (et du calcul) des spectres d’absorption/émission moléculaires. On passe ensuite (§1.4) à la présentation d’une classe de modèles mathématico-physiques qui nous servira à répétition au fil du cours: le modèle “Réservoir-Source-Puit-Flux” (abrévié RSPF), aussi connu sous l’appellation “box model” dans la littérature anglophone. Ce modèle peut offrir une représentation simple de systèmes très complexes, et permet (souvent) le calculs de propriétés globales de tels systèmes qui autrement ne pourraient qu’être extraites de simulations numériques massives du genre qu’on aimerait éviter à moins de ne vraiment pas en avoir le choix. Ce genre de modèle est basée sur des principes de conservation, dont la formulation mathématique formelle est décrite à la §1.5, histoire (entre autre) de mieux apprécier l’approche RSPF !

1.2 Propriétés des solides, liquides et gaz

Dans bien des applications en physique environnementale, il est d’usage de traiter la matière comme un **milieu continu** (gaz, liquide, solide...), dont les caractéristiques seront définies par des variables globales: par exemple la densité ρ (unités: kg m^{-3}), la température T (unités: degré K ou °C), la pression p (unités: Pa pour Pascal, $\equiv \text{N m}^{-2}$). Ce n’est vraiment que lorsqu’on doit considérer l’interaction de la radiation électromagnétique avec la matière que

¹Je saisis d’ailleurs l’occasion pour aussi dire un gros merci à mon collègue Pierre Bergeron, pour m’avoir refilé ses excellentes notes de cours de PHY-2215, ce qui m’a permis de me rafraîchir efficacement la mémoire sur certaines subtilités du sujet; la mémoire étant une faculté qui oublie!

la nature microscopique de cette dernière (ainsi que la nature quantique de la lumière comme étant composée de photons d'énergie $h\nu$) devra être prise en considération.

1.2.1 Le gaz parfait

Le pont entre le microscopique et le macroscopique s'établit grâce à une expression tout à fait fondamentale résultant des travaux de Ludwig Boltzmann (1844–1906). Pour un ensemble de “particules” non-relativistes de masse m sans degrés de liberté internes, et donc interagissant uniquement via collisions élastique:

$$\frac{1}{2}mv_{\text{th}}^2 = \frac{3}{2}k_B T, \quad (1.1)$$

où $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann, et v_{th} est la vitesse thermique moyenne:

$$v_{\text{th}}^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad (1.2)$$

où v_x^2, v_y^2, v_z^2 sont les composantes de la vitesse moyennées (rms) sur l'ensemble des particules. Le **théorème d'équipartition** stipule qu'à chacun des trois degré de liberté (translations en x, y et z) est associée une énergie moyenne $k_B T/2$. Ceci implique alors que les vecteurs-vitesse individuels sont orientés isotropiquement, et que $|v_x| = |v_y| = |v_z| = \sqrt{v_{\text{th}}^2/3}$.

Considérons maintenant un volume V contenant n de nos particules de masse m . La densité est simplement:

$$\rho = \frac{nm}{V}, \quad [\text{kg m}^{-3}]. \quad (1.3)$$

La densité volumique d'énergie (e) s'écrit alors:

$$e = \frac{1}{2}\rho v_{\text{th}}^2, \quad [\text{J m}^{-3}]. \quad (1.4)$$

Imaginons maintenant une surface perpendiculaire à la direction x (disons) contre laquelle nos particules rebondissent de manière élastique. En vertu de l'isotropie spatiale et du théorème d'équipartition, le transfert de quantité de mouvement à 1 mètre carré de la surface par une densité ρ de particules ayant une vitesse thermique v_{th} est alors:

$$p = \frac{1}{3}\rho v_{\text{th}}^2, \quad [\text{J m}^{-3}] \equiv [\text{N m}^{-2}]. \quad (1.5)$$

ou, utilisant (1.1) pour exprimer v_{th}^2 en fonction de T :

$$p = \rho \frac{k_B T}{m}. \quad (1.6)$$

C'est l'**équation d'état** pour la gaz parfait. En physique environnementale et/ou climatique on exprime souvent cette équation d'état sous la forme alternative:

$$pV = nRT, \quad (1.7)$$

où $n = \rho V/\mu$ est maintenant le nombre de particules contenues dans le volume V , exprimé en **mole**, par définition composée de $A = 6.02 \times 10^{23}$ particules, ce A étant le célèbre **Nombre d'Avogadro**, et $R \equiv k_B \times A = 8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ est la **constante des gaz**. La quantité μ (sans dimension) est la masse moléculaire moyenne des particules, exprimée en unités de la masse de l'atome d'Hydrogène, i.e., $\mu = m/m_H$ avec $m_H = 1.6735 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

Dans la plupart des situations que nous rencontrerons dans ce cours, l'idéalisation du gaz parfait est une excellente approximation, même si nous aurons à traiter de mélange gazeux dont les constituants microscopiques sont des molécules possédant des états d'énergie interne associés à la vibration et/ou rotation. Cependant, aux densités et températures d'intérêt dans un contexte environnemental, les collisions inter-particules ne sont pas suffisamment énergétiques

pour exciter les états vibrationnels, et le contenu énergétique des états rotationnels est trop faible pour avoir impact important sur les collisions inter-particules². L'équation d'état du gaz parfait (1.6) tient alors la route, avec un μ approprié. Par exemple, si on approxime l'air comme un mélange de 80% N₂ et 20% O₂, on a $\mu = 0.8 \times 28 + 0.2 \times 32 = 28.8$.

Ceci dit, on verra plus loin (§3.9) qu'au niveau de l'interaction avec la radiation électromagnétique, les états vibrationnels et rotationnels de diverses molécules peuvent jouer un rôle de grande importance.

1.2.2 Capacités thermiques

Si on injecte un incrément d'énergie dans un gaz de “particules”, cette énergie doit se retrouver quelque part, conservation de l'énergie oblige. À volume constant, la seule possibilité est d'augmenter la vitesse thermique des particules, et donc la température du gaz. On peut alors écrire:

$$dE = \rho c_v dT, \quad (1.8)$$

où c_v (unités: J kg⁻¹ K⁻¹) est la **capacité thermique à volume constant**, et dE est l'énergie injectée par unité de volume.

Dans la plupart des processus environnementaux, qui ne se développent pas dans des situations où le volume est fixé mécaniquement par des contenants rigides, un gaz dans lequel on injecte de l'énergie peut non seulement réchauffer, mais aussi prendre de l'expansion; dans ce dernier cas le travail devant être fait contre la pression aura comme conséquence que l'augmentation de température sera moins marquée que dans un processus à volume constant. On écrirait alors

$$dE = \rho c_p dT + p dV, \quad (1.9)$$

Le travail par unité de volume fait par expansion étant donné par $p dV$, et c_p (unités: J kg⁻¹ K⁻¹) est maintenant la **capacité thermique à pression constante**, et clairement $c_p > c_v$. Si maintenant on prend la dérivée de l'équation d'état (1.7) à p constant on obtient immédiatement:

$$p dV = n R dT. \quad (1.10)$$

Substituant ainsi pour dV dans (1.9) et soustrayant (1.8), on arrive à:

$$c_p - c_v = \frac{nR}{\rho}. \quad (1.11)$$

Les deux capacités thermiques dépendent évidemment de la nature microscopique de la substance considérée. Pour notre gaz parfait à trois degrés de liberté (et non relativiste), on a

$$\rho c_p = \frac{5nR}{2}, \quad \rho c_v = \frac{3nR}{2}, \quad (1.12)$$

Donc le rapport $c_p/c_v = 5/3$, ce rapport définissant l'**indice adiabatique** (γ). Le Tableau 1.1 liste les capacités thermiques à pression constante pour plusieurs milieux qui seront d'intérêt dans ce qui suit. La dernière colonne liste le produit ρc_p , soit la capacité thermique volumique (unités: J m⁻³ K⁻¹), souvent plus pratique d'utilisation. On notera déjà la très grande capacité thermique volumique de l'eau, en comparaison à l'air.

On verra plus loin (§2.1.1) qu'autant dans l'atmosphère que dans les océans, le profil vertical de pression est établi via l'équilibre hydrostatique, ce qui implique que la majorité des processus thermodynamiques d'intérêt opèrent à pression localement constante ou vraiment pas loin, ce qui fait que dans tout ce qui suit la capacité thermique c_p sera utilisée, sauf avis contraire explicite.

²Il y a quelques subtilités cachés derrière ce dernier énoncé; on y reviendra à la §1.3.

Table 1.1: Chaleurs spécifiques pour quelques substances d'intérêt

Substance	ρ [kg m ⁻³]	c_p [J kg ⁻¹ K ⁻¹]	ρc_p [J m ⁻³ K ⁻¹]
Air (sec)	1.2	1004	1.2×10^3
Glace (0° C)	917	2030	1.8×10^6
Eau (pure)	1000	4182	4.2×10^6
Sol/organique	1300	1921	2.5×10^6
Sol/inorganique	2600	733	1.9×10^6
Asphalte	2320	865	2.0×10^6
Béton	2400	880	2.1×10^6
Acier	7900*	466	3.5×10^6

* 7750–8050 dépendant de l'alliage

1.2.3 Changements de phase et chaleur latente

Qu'un processus thermodynamique opère à pression constante ou volume constant, il n'en demeure pas moins qu'un apport de chaleur à un volume de gaz/fluide causera une augmentation de sa température. Une exception importante est la **transition de phase**, qui conduit à des situations particulière où un apport (ou perte) de chaleur dans un élément de volume ne change pas la température de son contenu. On parle alors de **chaleur latente**. En contexte environnemental, les fusion/gel et vaporisation/condensation de l'eau seront les deux transitions de phase dont nous aurons à nous préoccuper.

L'apport d'énergie requis pour la fusion de la glace à 0° (la **chaleur latente de fusion**) est de 3.34×10^3 J kg⁻¹; et le gel de l'eau liquide *libère* la même quantité d'énergie.

La **chaleur latente de vaporisation** de l'eau liquide à 100° est de 2.26×10^6 J kg⁻¹, ce qui est très substantiel; c'est 5.4 fois plus que l'apport énergétique requis pour chauffer le même volume d'eau de 0 à 100°C. Comme on le verra ultérieurement, l'évaporation est utilisée efficacement par bon nombre d'organismes vivants (dont nous!) aux fins de régulation thermique. Comme dans le cas de la transition liquide/solide, la même substantielle quantité d'énergie est libérée quand la vapeur d'eau condense en gouttelettes liquides, avec des conséquences importantes pour la dynamique et énergétique atmosphériques.

1.2.4 Évaporation et condensation

Il est important de distinguer de la **vaporisation**, changement de phase se produisant pour l'eau (pure) à 100°C, de l'**évaporation**, qui est un phénomène opérant à une *interface* liquide-gaz. En contexte environnemental, on s'intéresse le plus souvent à une interface eau-air.

L'évaporation peut se produire même si l'eau n'est pas à 100°C, comme on peut facilement le constater en examinant en cuisine la vapeur émanant d'un chaudron rempli d'eau chaude. Du point de vue microscopique, la raison en est que les molécules d'eau dans la queue élevée de la distribution de Maxwell-Boltzmann ont suffisamment d'énergie pour échapper aux forces intermoléculaires donnant au fluide sa cohésion.

La chaleur latente de vaporisation de l'eau est de $\Lambda = 2260$ kJ kg⁻¹. Si on imagine que l'évaporation consiste à élever la température de l'eau à 100°C et ensuite la vaporiser, on écrirait:

$$L \simeq \rho c_p(100 - T) + \Lambda, \quad [\text{Approximation \#1}] \quad (1.13)$$

On en concluerait que l'input énergétique requis pour évaporer de l'eau à $T < 100^\circ$ est plus élevé que la chaleur latente de vaporisation Λ , et diminue à mesure que T approche le point d'ébullition; et c'est bien le cas comme le montre la Figure 1.1. Attention cependant, la véritable **chaleur latente d'évaporation** L , indiquée par des points noirs sur la Fig. 1.1, est bien toujours plus grande que Λ , mais significativement plus petite que ce qui est prédit par

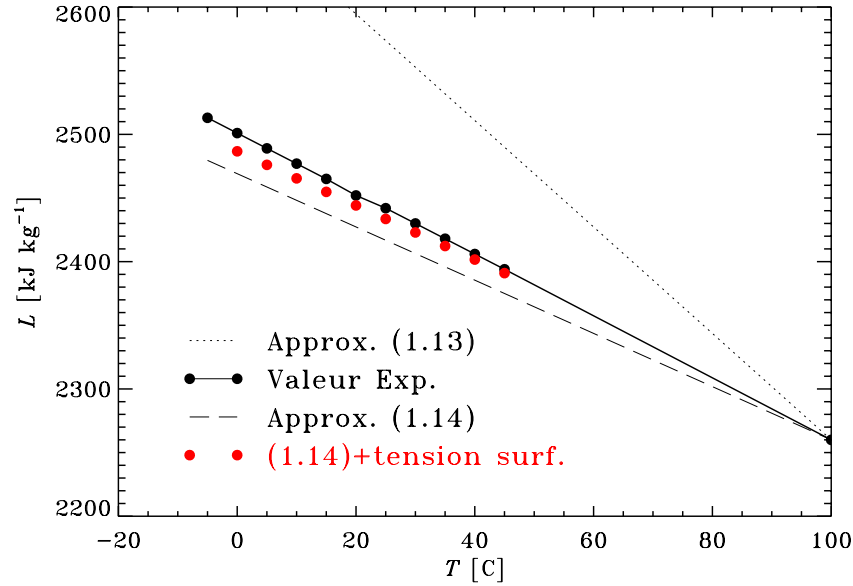


Figure 1.1: Chaleur latente d'évaporation de l'eau dans l'air sec à pression atmosphérique (poits noirs; source de données: Monteith & Unsworth, Tableau A.3). Le trait pointillé indique l'apport énergétique requis pour chauffer une masse d'eau d'une température T jusqu'à 100° et ensuite de la vaporiser entièrement, soit notre première approximation donnée par l'éq. (1.13), et le trait en tirets correspond à l'approximation donnée par l'éq. (1.14). Les points rouges améliorent cette seconde approximation en incluant un estimé de l'énergie requise pour briser la tension de surface (voir texte).

l'expression (1.13) ci-dessus (trait pointillé sur la Fig. 1.1). La raison en est qu'une molécule d'eau à l'interface ne "ressent" que les forces intermoléculaires associées aux molécules d'eau sur et sous l'interface, soit sur 2π steradian; tandis qu'une molécule dans la couche liquide même ressent ces forces sur 4π steradian. On en concluerait qu'en meilleure approximation, la chaleur latente d'évaporation pourrait se calculer comme:

$$L \simeq \frac{1}{2}\rho c_p(100 - T) + \Lambda, \quad [\text{Approximation \#2}] \quad (1.14)$$

expression qui, comme la précédente, néglige les (petites) variations de ρ et c_p avec la température T . Le trait en tirets sur la Figure montre cette approximation, bien supérieure à la première, qui s'avère à sous-estimer le véritable $L - \Lambda$ par seulement $\simeq 15\%$ à $T = 20^\circ\text{C}$.

On peut faire encore mieux en incorporant un autre effet significatif, soit l'apport énergétique requis pour briser la tension de surface à l'interface fluide-air. La force de cette tension est mesurée par le **coefficient de tension superficielle** (Θ , unités N m^{-1} ou J m^{-2}). Ce coefficient mesure autant la force requise pour étirer une interface d'une unité de longueur (les unités N m^{-1}) que l'énergie potentielle surfacique (les unités J m^{-2}) associée à cet étirement. Ce coefficient décroît graduellement quand la température augmente, une variation bien capturée en première approximation par la relation linéaire suivante:

$$\Theta [\text{J m}^{-2}] = 0.0756 - 0.000154T, \quad 0 \leq T [^\circ\text{C}] \leq 50. \quad (1.15)$$

Les points rouges sur la Figure 1.1 montrent l'effet d'ajouter cette énergie ($\Theta \times \text{surface}$) requise pour briser la tension superficielle à l'estimé approximatif de la chaleur latente d'évaporation fourni par l'éq. (1.14). On a supposé ici qu'un mètre cube d'eau (1000 kg) s'étale en une couche plane de 333 m^2 et d'épaisseur 3 mm, cette dernière correspondant à la longueur capillaire

de l'eau, soit l'épaisseur sous laquelle la couche se fragmenterait spontanément en un grand nombre de petites gouttelles³. On commence à être pas mal près des mesures expérimentales de L .

En contexte environnemental, une complication importante vient du fait que le *taux* d'évaporation (déterminant la quantité d'eau évaporée par unité de temps) dépend non seulement de la température, mais aussi de la pression partielle de vapeur d'eau dans l'air, i.e., du degré d'humidité. Nous y reviendrons plus loin (§5.4), quand nous aborderons le rôle de l'évapotranspiration dans la thermorégulation animale.

1.2.5 Compressibilité et dilatation thermique

Toutes les substances d'intérêt pour ce cours (l'air, l'eau, etc.) se compriment sous action d'une pression extérieure, et se dilatent si leur température augmente. La quantification des variations de densité correspondantes se fait via le **coefficient de compressibilité** (β) et le **coefficient de dilatation thermique** (α):

$$\beta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad \equiv \quad \frac{\partial \log \rho}{\partial p}, \quad (1.16)$$

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \quad \equiv \quad -\frac{\partial \log \rho}{\partial T}. \quad (1.17)$$

Notez le signe “−” dans (1.17), ajouté “à bras” de manière à ce que α soit une quantité positive⁴.

Un fluide, comme l'eau, est à toute fins pratiques incompressible, et se retrouve donc caractérisée par un β minuscule. Dans le cas de l'eau pure, $\beta = 4.6 \times 10^{-10} \text{ m}^2 \text{ N}^{-1}$; c'est comparable au roc ! Dans un gaz, comme l'air, β est beaucoup plus grand, mais tant qu'un écoulement gazeux qui n'est pas confiné par des parois demeure confortablement subsonique, les effets de la compressibilité sur la dynamique sont en fait négligeables⁵.

Dans un contexte environnemental, la dilatation thermique a des effets beaucoup plus importants, autant pour un gaz qu'un fluide. La Figure 1.2 montre la variation de la densité et du coefficient de dilatation thermique de l'eau pure en fonction de la température. Attention, l'axe vertical rouge est en unités de $10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}$, i.e., $\alpha \simeq 2 \times 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ à $T = 20^\circ\text{C}$. Ces valeurs de α peuvent sembler petites, mais un exercice en fin de chapitre vous conduit à vérifier que l'augmentation du niveau des océans associée à une hausse de température d'un degré C est très significative!

1.3 Une brève introduction à la spectroscopie moléculaire

Un aspect essentiel de la dynamique atmosphérique (et climatique) est la transmission et absorption de la radiation électromagnétique par l'atmosphère (surtout), et les océans. Une bonne partie du chapitre 3 y sera consacré. Pour les conditions physiques (température, densité, etc.) caractérisant l'atmosphère terrestre (discutées à la §2.1), les principaux absorbeurs sont sous forme moléculaire. Il s'agit donc d'établir les caractéristiques des transitions énergétiques dans des molécules relativement simples (e.g. H_2O , CO_2 , CO), et en déduire les longueurs d'onde d'absorption/émission des spectres moléculaires.

En plus des transitions électroniques se produisant dans les atomes les composant, une molécule peut contenir de l'énergie sous forme de vibration et de rotation; et comme dans le cas des niveaux électroniques d'un atome isolé, les niveaux énergétiques de vibration et rotation d'une molécule sont quantifiés, et calculables en solutionnant l'équation de Schrödinger incluant

H16, §3.5
BvG, §8.3

³Cette instabilité dite capillaire est discutée en détail dans l'EXCELLENT cours PHY-3140 *Hydrodynamique* !

⁴La définition de α et β en terme de la variation de $\log \rho$ plutôt que simplement ρ est une convention dont j'ignore l'origine ou la motivation.

⁵Ce résultat plutôt contre-intuitif est rigoureusement démontré dans l'EXCELLENT cours PHY-3140 *Hydrodynamique*.

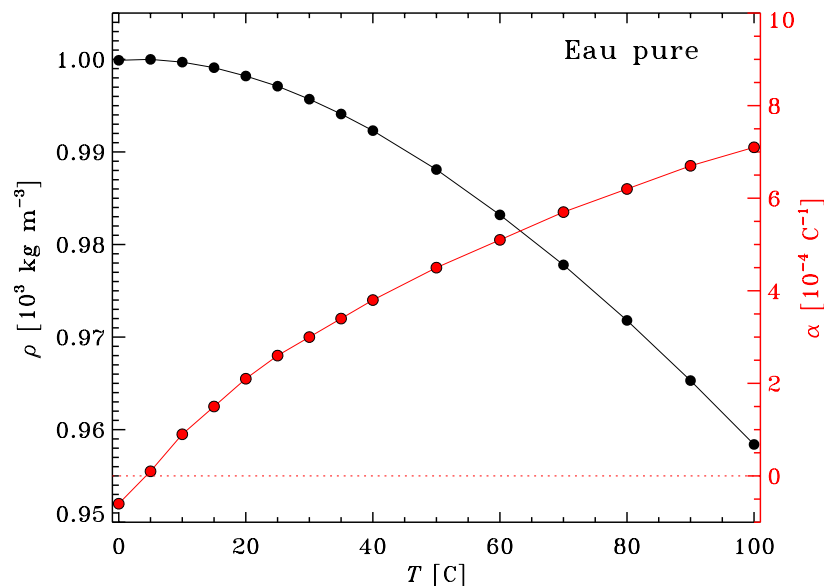


Figure 1.2: Variation du coefficient de dilatation thermique (voir l'éq. (1.17)) de l'eau pure (en rouge) et densité de l'eau (en noir) en fonction de la température. Notez que sous $\simeq 4^\circ\text{C}$, α devient négatif, i.e., la densité de l'eau diminue légèrement quand T diminue.

un potentiel d'interaction inter-atomique approprié. Pas question de solutionner l'équation de Schrödinger dans ce qui suit (ce serait vraiment du sport même pour des molécules simples), mais on peut tout de même en apprendre beaucoup à partir de trucs que vous connaissez déjà, en bâtissant sur vos connaissances acquises en mécanique quantique (PHY-2810 !).

1.3.1 Les modes de vibration

En bonne première approximation, dans une molécule diatomique le déplacement des deux atomes par rapport à leurs positions d'équilibre peut être décrit via le potentiel d'un oscillateur harmonique:

$$V = \frac{1}{2}K(R - R_e)^2, \quad (1.18)$$

où R est la séparation entre les deux atomes, R_e leur séparation d'équilibre, et K (unités: N m^{-1}) est la constante de force, de l'ordre de quelques 10^2 – 10^3 N m^{-1} pour les molécules (relativement) simples (diatomiques ou triatomiques) qui sont d'intérêt dans ce cours. Si on imagine le lien covalent comme un ressort, K est l'équivalent de sa constante de raideur.

La solution de l'équation de Schrödinger avec le potentiel ci-dessus nous fournit alors les niveaux d'énergie vibratoire comme un spectre de valeurs propres:

$$E_\nu = \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (1.19)$$

où ν est le nombre quantique vibratoire, et

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{\mu}}. \quad (1.20)$$

Dans ces expressions $\hbar = h/(2\pi)$, avec $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J s}$ la constante de Planck, et la quantité μ est la masse réduite; pour une molécule diatomique composée de deux atomes de

masses m_1, m_2 respectivement:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} . \quad (1.21)$$

Une transition vibratoire induite radiativement est régie par la règle de sélection $\Delta\nu = \pm 1$, conséquence du fait qu'un photon absorbé par une molécule doit y transférer non seulement son énergie, mais aussi son moment cinétique; dans le contexte d'une transition vibratoire ceci ne sera possible que si la vibration cause un changement du moment dipolaire électrique de la molécule. Une telle transition $\nu \rightarrow \nu + 1$ demande ainsi une énergie:

$$\Delta E \equiv E_\nu - E_{\nu-1} = \hbar\omega , \quad (1.22)$$

Pour une molécule de CO, on a $K = 1857 \text{ N m}^{-1}$ et $\mu = 1.14 \times 10^{-26} \text{ kg}$, conduisant à $\omega = 4.04 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$, $\Delta E = 4.26 \times 10^{-20} \text{ J} \equiv 0.266 \text{ eV}$, et donc

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{2\pi c}{\omega} = 4.67 \mu\text{m} , \quad (1.23)$$

soit dans l'infrarouge moyen⁶. Comme pour toutes les molécules diatomiques, c'est ici le seul mode vibratoire possible pour la molécule CO.

Pour des molécules triatomiques, comme H_2O ou CO_2 , il y a trois modes de vibration possibles: deux d'étirement, dits symétrique et antisymétrique, ainsi qu'un mode de flexion⁷, tel qu'illustré schématiquement sur la Figure 1.3. Le calcul des énergies associées à ces différents modes vibratoires est passablement plus complexe que dans le cas d'une molécule diatomique, mais on finit encore avec des énergies de l'ordre de 0.1–1eV, et des longueurs d'onde de transitions radiatives dans l'intervalle $1 \lesssim \lambda \lesssim 20 \mu\text{m}$.

Le Tableau 1.2 ci-dessous liste les longueurs d'onde des transitions vibratoires pour plusieurs molécules d'intérêt⁸. Le calcul de ν_1 pour les molécules diatomiques N_2 et O_2 est laissé en exercice (problème #5 en fin de chapitre!). Notons que dans le cas des molécules linéaires sans

Table 1.2: Longueurs d'onde (en μm) de transitions vibratoires moléculaires

Molécule	ν_1	ν_2	ν_3	ν_4	dip. perm.	dip. induit
CO	4.67	—	—	—	oui	
NO	5.25	—	—	—	oui	
N_2	(#1.5)	—	—	—	non	non
O_2	(#1.5)	—	—	—	non	non
H_2O	2.73	6.27	2.65	—	oui	
CO_2	7.39*	15.0	4.26	—	non	oui (ν_2)
O_3	9.01	14.2	9.59	—	oui	
N_2O	7.78	17.0	4.49	—	oui	
CH_4	3.31*	6.32*	3.17	7.31	non	oui (ν_3, ν_4)

* radiativement interdite

moment dipolaire électrique permanent, comme CO_2 , le mode vibratoire symétrique (ν_1) ne peut être excité radiativement puisqu'il n'induit aucun moment dipolaire transitoire, contrairement aux modes ν_2 et ν_3 , ce qui fait qu'il est alors impossible de respecter la règle de transition dipolaire. Cette transition est donc radiativement interdite, et n'apparaîtra donc pas dans le

⁶Voir le Tableau A.2 pour la définition des différents domaines du spectre électromagnétique.

⁷Une molécule composée de N atomes dispose de $3N - 6$ modes vibratoires en général, mais $3N - 5$ pour une molécule linéaire comme CO_2 ; cependant, dans ce dernier cas, deux modes de flexion sont dégénérés en énergie, donc on se retrouve encore avec 3 transitions énergétiquement distinctes.

⁸Alerte Notation! Il semble être conventionnel en spectroscopie moléculaire de dénoter par ν_1, ν_2 , etc, les **longueurs d'onde** des transition rotationnelles; à cause du choix tout aussi conventionnel de ν pour dénoter le nombre quantique associé aux vibrations j'imagine. Ne pas confondre avec la fréquence!

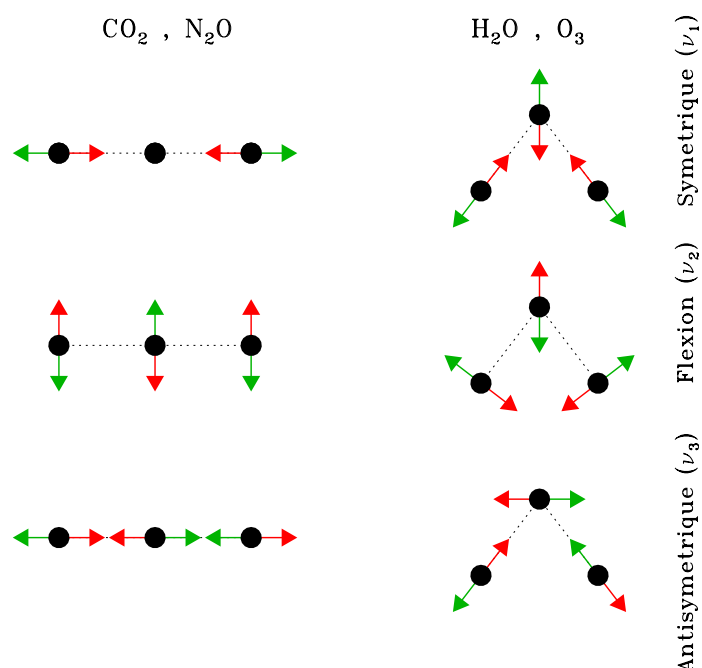


Figure 1.3: Représentation schématique des trois modes vibratoires accessibles aux molécules triatomiques, comme les molécules linéaires CO_2 et N_2O (colonne de gauche), et les molécules planaires comme H_2O et O_3 (colonne de droite). Le centre de masse des molécules demeure fixe durant le cycle vibrationnel rouge→vert→rouge.

spectre d'absorption/émission infrarouge. Elle pourrait cependant être excitée collisionnellement, mais aux températures atmosphériques terrestres l'énergie thermique $k_B T \sim 0.025 \text{ eV}$ est trop faible. Il en est de même pour des molécules diatomiques comme N_2 et O_2 , qui n'ont pas de moment dipolaire électrique permanent, et ne peuvent en générer par vibration. Deux des 4 modes vibratoires non-dégénérés de la très symétrique molécule CH_4 induisent aussi un moment dipolaire transitoire sous vibration, et donc peuvent être excités radiativement⁹.

Le fait que $\Delta E_\nu \sim 0.1\text{--}0.5 \text{ eV} \gg k_B T \simeq 0.025 \text{ eV}$ implique aussi qu'en l'absence d'excitation radiative, seul le niveau fondamental $\nu = 0$ sera peuplé pour des conditions atmosphériques du genre TPN, mais on peut néanmoins s'attendre à un élargissement thermique (collisionnel) significatif des transitions vibratoires. Cependant, un élargissement beaucoup plus important est causé par la présence de transitions rotationnelles.

⁹Les valeurs citées dans la littérature et/ou éparpillées sur le Web pour les longueurs d'onde des 4 modes non-dégénérés de vibration du CH_4 montrent des variations significatives. Les valeurs cités ici sont tirés de:

www2.ess.icla.edu/~schauble/MoleculeHTML/CH4_html/CH4_page.html

Ce sont les valeurs qui semblent s'accorder le mieux avec celles incluses dans le *Planetary Spectrum Generator* de la NASA, que vous utiliserez en TP et qui a servi à produire la Fig. 3.16 du chapitre 3 plus loin. Notons que ces valeurs diffèrent dans certains cas par plus de 10% de celles listées au Tableau 3.1 de l'ouvrage de Hartmann (voir bibliographie en fin de chapitre), d'où les autres valeurs du tableau sont tirées (sauf ν_1 pour CO_2).

1.3.2 Les modes de rotation

Tout comme la vibration, la rotation d’une molécule est sujette à la quantification de son énergie rotationnelle. Pour une molécule linéaire comme CO₂, les niveaux d’énergie permis sont:

$$\begin{aligned} E_J &= \frac{J(J+1)\hbar^2}{2I}, \\ &= hcBJ(J+1), \quad J = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1.24)$$

où J est le nombre quantique associé au moment cinétique¹⁰. La seconde égalité résulte de la définition de la constante de rotation $B = \hbar/(4\pi cI)$ (unités: m⁻¹), I étant le moment d’inertie de la molécule. Pour les “petites” molécules qui nous intéressent ici, typiquement $10 \lesssim B \lesssim 100 \text{ m}^{-1}$. L’expression ci-dessus demeure valide pour des molécules “sphériques” (dans le sens que les moments d’inertie selon une triade d’axes x, y, z sont identiques), mais des termes supplémentaires s’y ajoutent au côté droit dans le cas de molécules ayant des plans de symétrie; les valeurs de E_J résultantes demeurent cependant du même ordre.

Un photon absorbé par une molécule doit y déposer son moment cinétique, donc induire radiativement une transition rotationnelle dans une molécule exige de satisfaire à la règle de transition $\Delta J = \pm 1$, d’où

$$\Delta E \equiv E_J - E_{J-1} = 2hcBJ. \quad (1.25)$$

Pour la molécule CO₂, on a $B = 39.0 \text{ m}^{-1}$, ce qui conduit à $\Delta E = 1.55 \times 10^{-23} \text{ J} \equiv 10^{-4} \text{ eV}$. Contrairement aux niveaux vibrationnels, ceci est maintenant beaucoup plus petit que l’énergie thermique $k_B T \simeq 0.025 \text{ eV}$ à TPN, en conséquence de quoi les niveaux rotationnels seront peuplés jusqu’à de très hautes valeurs de J . Dans le cas d’une molécule linéaire comme CO₂, la probabilité d’occupation est

$$p(E_J) \propto (2J+1) \exp\left(-\frac{E_J}{k_B T}\right), \quad (1.26)$$

avec E_J donné par (1.24). Je vous laisse vérifier que pour CO₂ à TPN, la probabilité d’occupation est maximale à $J \simeq 250$! Ceci permet ainsi un très grand nombre de transitions distinctes, résultant en un spectre rotationnel très dense, i.e., composé d’un très grand nombre de raies séparées chacune de la suivante (en J) par 10^{-2} – $10^{-3} \mu\text{m}$.

1.3.3 Les modes couplés de vibration+rotation

Les vibration et rotation moléculaires sont en réalité couplées, et on peut montrer (solide calcul de mécanique quantique !) qu’une transition vibratoire doit presque toujours induire une transition rotationnelle $\Delta J = \pm 1$. En bonne première approximation, les niveaux d’énergie sont donnés par:

$$E_{\nu,J} = \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega + hcBJ(J+1), \quad \Delta\nu = \pm 1, \quad \Delta J = \pm 1. \quad (1.27)$$

Comme un très grand nombre de niveaux rotationnels sont peuplés à TPN, une bande spectrale de rotation-vibration sera beaucoup plus large que la raie de vibration pure au même ν , et l’élargissement thermique conduira souvent au chevauchement spectral des raies rotationnelles, résultant en une **bande moléculaire** où l’absorption est complète sur une plage substantielle de longueur d’ondes. On en verra des exemples spécifiques plus loin (§3.9).

1.3.4 Photoexcitation, photoionisation, et photodissociation

Tout comme dans un atome isolé, l’absorption d’un photon peut induire une transition électronique dans un atome faisant partie d’une molécule. Les niveaux électroniques diffèrent de ceux du

¹⁰Tout comme pour les transitions électroniques dans le très célèbre atome d’Hydrogène que vous avez étudié à fond en PHY-2810.

même atome en isolation, à cause du chevauchement des orbitales des autres atomes de la molécule, mais ce processus de **photoexcitation** exige tout de même des photons dans le visible ou proche ultraviolet, sous conditions atmosphériques typiques (excluant, e.g., ce qui se passe durant un éclair).

L'absorption d'un photon UV plus énergétique peut aussi causer une **photoionisation** de la molécule en éjectant un électron d'un des atomes, ou encore carrément dissocier la molécule; on parle alors de **photodissociation**. Pour les molécules du Tableau 1.2, autant la photoionisation que la photodissociation demandent des photons d'énergies beaucoup plus élevées que celles associées aux bandes de rotation/vibration. On parle typiquement de longueur d'onde dans l'ultraviolet $\lambda < 200$ nm, sauf pour l'ozone (O_3), une molécule relativement fragile qui peut être photodissociée ($O_3 + h\nu \rightarrow O_2 + O$ ou $O_2 + O^+ + e^-$) déjà à des longueurs d'onde $200 \lesssim \lambda \lesssim 320$ nm.

1.4 Réservoirs, flux, sources et puits

Revenons aux échelles macroscopiques. Bien des questions en physique environnementale impliquent des systèmes complexes, que l'on peut souvent représenter comme un réseau de **réservoirs** (de chaleur, d'eau, de CO_2 , etc.), sujets à des gains ou pertes associés à des **sources** ou **puits** internes ou externes au système, et interconnectés de manière telle qu'il existe des **flux** entre réservoirs. Nous introduisons ici une formulation sous forme d'équations différentielles ordinaires couplées qui permettent de modéliser quantitativement ce genre de situations. Cette formulation pourra paraître plutôt ad hoc à prime abord, mais on verra au fil des chapitres qui suivent qu'elle est en fait tout à fait appropriée et applicable à bien des systèmes d'intérêt en physique environnementale.

On considère ici deux réservoirs, A et B , contenant une certaine quantité de quelque chose (Q), et on cherche à modéliser l'évolution temporelle de $Q(t)$ dans chacun des réservoir, en réponse à la présence d'une source et d'un puit de Q dans le réservoir A , ainsi qu'un flux entre les deux réservoirs; aux fins de ce petit exercice on définira ces "ingrédients" comme suit:

- Source pour réservoir A : $S(t)$
- Puit pour réservoir A : σQ_A^4
- Flux entre réservoirs A et B : $\pm(Q_A - Q_B)/\tau$

L'idée est illustrée schématiquement à la Figure 1.4 pour un système à deux réservoirs. Ici τ est un temps caractéristique d'échange de Q entre les deux réservoirs, et on a choisi une forme particulière pour le puit de Q dans le réservoir A , soit $\propto Q_A^4$. Le fait que le flux soit proportionnel à la différence de contenu Q entre les deux réservoir suggère que ceux-ci pourraient être deux corps noirs en contact, et Q la température, dans lequel cas le flux de chaleur entre les réservoir devrait effectivement être proportionnel à la différence de température (on justifiera ça formellement plus loin, §5.2). De plus, avec $Q \propto T$, le puit $\propto \sigma Q_A^4$ ressemble aussi dangereusement à l'énergie irradiée dans le vide par un corps noir... Mais Q pourrait aussi bien être la quantité de fluide dans deux vases communicants, la source un robinet déversant du fluide dans un des vases, et le puit une forme particulière d'évaporation. Ce genre de formulation est d'applicabilité très générale!

Écrivons maintenant les équations d'évolution pour la quantité Q contenue dans chaque réservoir, utilisant les formes mathématiques listées plus haut pour nos différents ingrédients:

$$\frac{dQ_A}{dt} = - \underbrace{\frac{Q_A - Q_B}{\tau}}_{\text{Flux } A \rightarrow B} + \underbrace{S(t)}_{\text{Source}} - \underbrace{\sigma Q_A^4}_{\text{Puit}}, \quad (1.28)$$

$$\frac{dQ_B}{dt} = + \underbrace{\frac{Q_A - Q_B}{\tau}}_{\text{Flux } A \rightarrow B}. \quad (1.29)$$

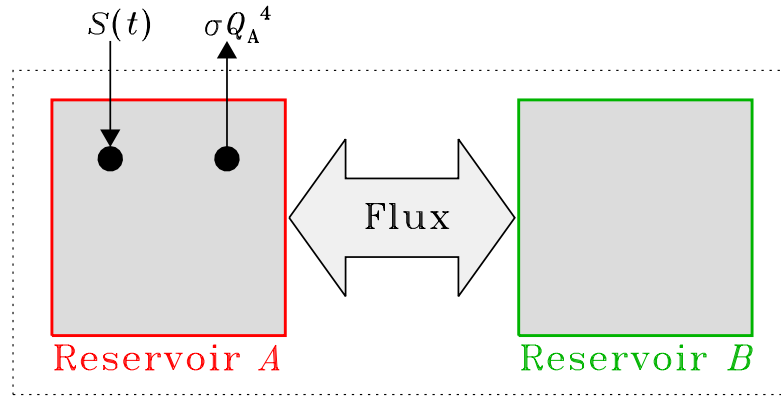


Figure 1.4: Représentation schématique d'un système Réservoir+Source+Puit+Flux (abrévié RSPF dans ce qui suit). Le système physique (rectangle pointillé) contient deux réservoirs, A et B , entre lesquels peut exister un flux d'une quantité Q , qui peut aller de A vers B ou l'inverse. Ici une source S ajoute du Q au réservoir A , à un taux spécifié par la fonction $S(t)$, et un puit qui évacue Q , à un taux $\propto Q^4$. Ce petit modèle peut être interprété comme une représentation très simplifiée du bilan de chaleur de la couche externe de l'océan (voir texte).

Notons que le terme de flux apparaît avec des signes opposés aux deux membres de droite, conséquence du fait que (trivialement) le flux sortant du réservoir A vers B est le même flux qui entre dans le réservoir B du A , autrement dit la quantité totale de Q (soit $Q_A + Q_B$) est conservée lors du transfert entre les deux réservoirs.

Ces deux équations différentielles ordinaires (EDO) nonlinéaires et couplées se solutionnent aisément numériquement¹¹. La Figure 1.5 montre deux exemples, différant seulement dans la forme du terme source: constant dans le graphique du haut, mais périodique dans celui du bas. L'amplitude de S dans la solution du haut a été ajustée de manière à ce que sur la durée de la simulation, la même quantité de Q soit injectée dans chaque solution. Dans les deux cas la condition initiale est $Q_A = Q_B = 0$. Le comportement de la simulation du haut (S constant) est facile à saisir intuitivement: initialement Q_A augmente car le puit est $\simeq 0$, ce qui crée une différence $Q_A - Q_B > 0$ qui alimente le réservoir B , qui augmente à son tour, en retard sur le A par un temps de l'ordre de τ ($= 1$ ici), le temps caractéristique d'échange de Q entre les réservoirs. On arrive éventuellement à une solution stationnaire ($d/dt = 0$) des éqs. (1.28)–(1.29), soit:

$$Q_A = \left(\frac{S}{\sigma}\right)^{1/4}, \quad Q_B = Q_A. \quad (1.30)$$

La solution du bas, avec terme source périodique (mais non-sinusoidal) suit la même tendance générale d'augmentation suivie de stabilisation, mais dans sa phase stabilisée conserve la périodicité imposée par celle du terme source. On remarquera comment la séquence temporelle du réservoir A (rouge) retarde par rapport à celle du terme source, conséquence de "l'inertie" du réservoir A , et similairement comment la phase de la séquence pour le réservoir B (vert) oscille à plus faible amplitude et retarde par rapport au A , conséquence du temps fini requis pour échanger entre A et B (constante τ).

¹¹par exemple via un des nombreux solveurs d'EDO contenus dans la librairie SciPy en Python, e.g., `odeint`.

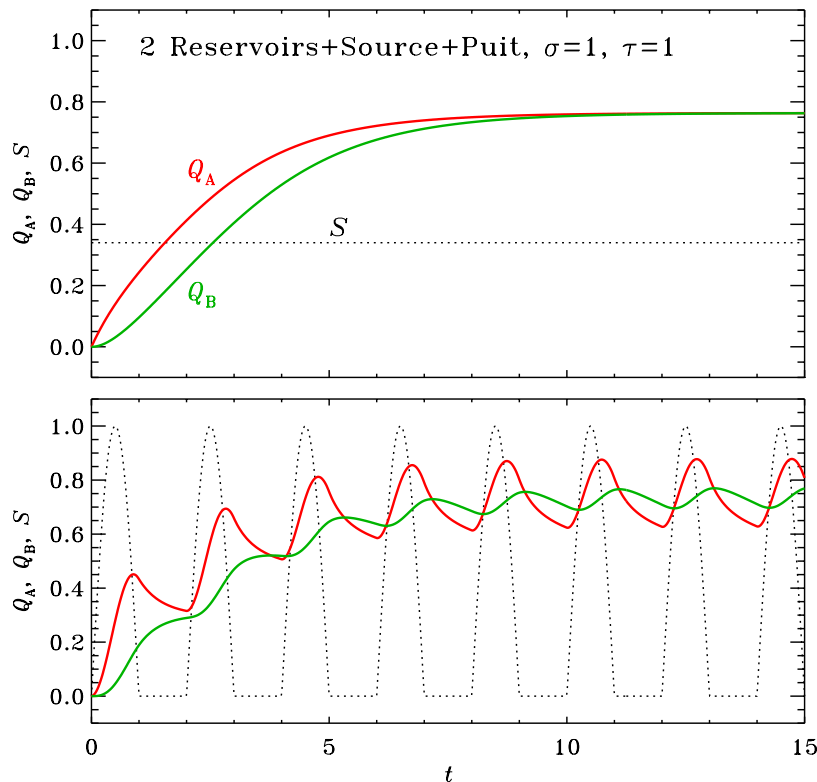


Figure 1.5: Solutions numériques des équations (1.28)–(1.29) pour $\sigma = 1$ et $\tau = 1$, à partir d’une condition initiale $Q_A = Q_B = 0$, pour deux termes sources (pointillés) différents: en haut, S constant; et bas, $S(t)$ variant périodiquement, mais non-sinusoidalement (voir texte).

Vous aurez à expérimenter avec ce genre de petit modèle dans le cadre de votre premier TP. En fait, le “modèle” de la Figure 1.4 et la partie périodiquement stationnaire de la Figure 1.5 pourrait décrire en première approximation l’évolution de la température (Q) de la couche superficielle des océans (réservoir A) en réponse à l’irradiance solaire (Source $S(t)$ périodique, maximale à midi et nulle durant toute la nuit), les pertes radiatives vers l’atmosphère (Puit σQ_A^4), et les échanges par transport de chaleur vers les couches profondes de l’océan (réservoir B). TP1

1.5 Lois de conservation

Les couches superficielles de l’océan ne sont pas vraiment un “contenant” genre réservoir, et ne sont pas démarquées des couches profondes par une interface bien définie. Cependant l’idée générale sous-jacente au modèle très simple de la Fig. 1.4, soit un principe de conservation (on pourrait même dire “de plomberie”) peut se reformuler de manière beaucoup plus réaliste, en considérant notre fameuse quantité générique Q , ainsi que ses flux, sources et puits comme des variables physiques continues qui dépendent de la position et du temps.

Considérons un volume V de forme arbitraire, délimité par une surface fermée S , et contenant une “substance” $q(\mathbf{x}, t)$ (une quantité scalaire qui pourrait être la température, la densité d’un polluant, etc.). Le contenu total de q dans le volume V à un temps t se calculerait en

intégrant q sur V :

$$Q(t) = \int_V q(\mathbf{x}, t) dV . \quad (1.31)$$

Similairement, si une source $s(\mathbf{x}, t)$ (unités: “q” par unité de volume et par unité de temps) ou un puit $p(\mathbf{x}, t)$ (unités: idem que s) est présent à l’intérieur du volume, la quantité de q gagnée via la source ou perdue via le puit, par unité de temps, sera donnée par une intégrale du genre:

$$\int_V (s(\mathbf{x}, t) - p(\mathbf{x}, t)) dV . \quad (1.32)$$

Dénotons maintenant par $\mathbf{f}_q(\mathbf{x}, t)$ le flux (unités: “q” par unité de surface par unité de temps) de notre quantité q traversant un élément de surface dS . La quantité nette de q entrant ou sortant de V par unité de temps t est alors donnée par:

$$\Phi(t) = - \oint_S \mathbf{f}_q(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS , \quad (1.33)$$

où $\hat{\mathbf{n}}$ est un vecteur normal défini en chaque point de la surface S , et orienté extérieurement au volume, ce qui impose d’inclure le signe “−” de manière à ce qu’un flux net Φ positif corresponde à un gain de q dans le volume (par convention). Le produit scalaire du flux avec la normale est requis pour capturer la géométrie de la surface: un flux parallèle à la surface ne ferait rentrer aucune quantité de q dans le volume délimité par cette surface! Notez aussi que Φ est un scalaire, mais $\mathbf{f}_q$ est un champ vectoriel.

Nous avons maintenant tous les morceaux requis pour écrire une **loi de conservation** pour notre substance q :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V q(\mathbf{x}, t) dV = - \oint_S \mathbf{f}_q(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_V (s(\mathbf{x}, t) - p(\mathbf{x}, t)) dV . \quad (1.34)$$

Mais, on peut faire mieux! En interchangeant la dérivée temporelle et l’intégrale de volume au membre de gauche, et en appliquant le théorème de la divergence au premier terme du membre de droite, on peut écrire notre loi de conservation sous la forme:

$$\int_V \left[-\frac{\partial q}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{f}_q + s(\mathbf{x}, t) - p(\mathbf{x}, t) \right] dV = 0 . \quad (1.35)$$

Comme le volume V est de forme tout à fait arbitraire, pour que l’intégrale soit nulle en général, il faudra que l’intégrant soit lui-même nul, d’où:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}_q = s(\mathbf{x}, t) - p(\mathbf{x}, t) . \quad (1.36)$$

Fondamentalement, cette équation différentielle aux dérivées partielles représente une formulation continue du système discret “Réservoirs+Source+Puit+Flux” introduit à la §1.4. Dans les deux cas, en pratique pour une quantité q donnée la principale difficulté sera de développer des expressions appropriées pour les flux, sources et puits. Cela nous tiendra pas mal occupés aux chapitres 3, et 4, et 5 !

Exercices:

1.1: Vous disposez d’un four domestique typique développant une puissance tout aussi typique de 3000 W. Calculez le temps requis pour

1. Chauffer 0.25 m^3 d’air de 20 à 180°C ;
2. Faire fondre 1 kg de glace;

3. Chauffer l'eau ainsi produite jusqu'à son point d'ébullition;
4. Évaporer la totalité de cette eau à 100°.

1.2: Le coefficient de compressibilité de l'eau pure ($\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$) à TPN est de $\beta = 4.6 \times 10^{-10} \text{ m}^2 \text{ N}^{-1}$. Imaginons un tube cylindrique de longueur $L = 1 \text{ m}$ et rayon $R = 0.05 \text{ m}$ rempli d'eau, fermé à une extrémité et muni d'un piston à l'autre. Quelle force (en N) doit être exercée sur le piston pour comprimer la colonne d'eau de 1 mm ? Si le cylindre est orienté verticalement dans le champ gravitationnel terrestre, quelle masse doit-on empiler sur le piston pour produire cette force ?

1.3: Approximons (très grossièrement!) l'océan comme une couche d'eau de profondeur moyenne 4km à une température uniforme de 10°C ($\alpha \simeq 10^{-5} \text{ °C}^{-1}$ à cette température). Supposez qu'à toutes les profondeurs, la température monte de 1°C. Calculez la hausse du niveau de l'océan qui sera causée par ce réchauffement.

1.4: Les molécules N_2 et O_2 ont des constantes de force $K = 2738$ et $K = 2294 \text{ N m}^{-1}$ respectivement. Les deux étant des molécules diatomiques, elles n'ont qu'un seul mode vibratoire. Calculez pour chacune la longueur d'onde d'une transition vibratoire $\nu \rightarrow \nu + 1$. Ces transitions sont-elles radiativement actives ?

1.5: Dans la molécule pentaatomique CH_4 , les 4 atomes d'hydrogène sont aux sommets d'un tétraèdre, avec l'atome de Carbone au centre. Pour une molécule pentaatomique ($N = 5$) qui n'est pas en configuration linéaire, on a en général $3N - 6 = 9$ degrés de libertés vibrationnels, mais ici la haute symétrie de la molécule conduit à seulement 4 modes énergétiquement distincts. Tracez-les schématiquement. De ces 4 modes, seuls deux sont radiativement actifs, lesquels et pourquoi ?

1.6: Il s'agit ici de modifier le modèle RSPF de la §1.4, en déplaçant le terme puit au réservoir B.

1. Écrivez la nouvelle forme des équations (1.28)–(1.29);
2. Obtenez les nouvelles valeurs d'équilibre ($dt/d = 0$) pour Q_a et Q_B ;
3. Modifiez votre code du TP1 pour produire un équivalent de la Fig. 1.5 pour ce modèle modifié, en conservant les mêmes valeurs des paramètres τ , S , etc.

1.7: Revenant à la version originale du modèle RSPF présenté à la Fig. 1.4, ajoutez un troisième réservoir ("C") connecté au réservoir B par échange d'un flux $\propto \pm(Q_B - Q_C)/\tau$ avec le même temps caractéristique τ que pour le flux entre A et B.

1. Écrivez l'équivalent du système d'EDO (1.28)–(1.29) pour ce système à trois réservoirs;
2. Calculez la solution d'équilibre;
3. Produisez un équivalent de la Fig. 1.5... et réfléchissez à l'origine des différences!

Bibliographie:

Ces notes de cours sont de mon cru, mais je me suis évidemment inspiré de divers manuels de cours sur le sujet, plus spécifiquement les quatre qui suivent, listés en ordre croissant de niveau technique (selon ma perception de la chose). Parfois l'inspiration est vraiment forte, i.e., je n'ai surtout fait que traduire et/ou élaborer/ajouter des étapes manquantes et/ou commentaires aux développements mathématiques. J'indique alors en **rouge** dans les marges les références aux sections correspondantes dans l'un ou l'autre de ces bouquins, suivant le code d'abréviation indiqué:

- Harte, J., *Consider a Spherical Cow*, University Science Books (1988) [H88]
Monteith, J.L., & Unsworth, M.H., *Principles of Environmental Physics*, 4^e éd., Academic Press (2013) [MU]
Boeker, E., & van Grondelle, R., *Environmental Physics*, 3^e éd., Wiley (2011) [BvG]
Hartmann, D.L., *Global Physical Climatology*, 2^e éd., Elsevier (2016) [H16]

Notez cependant que j'ai recalculé moi-même tout seul comme un grand pratiquement tous les résultats analytiques ou numériques présentés au fil des pages qui suivent. Si c'est trop difficile pour que je puisse le recalculer, c'est trop difficile pour l'inclure dans ces Notes de cours. Les quelques rares exceptions à ce *modus operandi* seront explicitement indiquées. Il serait aussi une bonne idée de garder à portée de la main vos notes de cours de PHY-2215 *Physique thermique et statistique* et PHY-2441 *Optique et ondes électromagnétiques* (PHY-2441), et PHY-2810 *Mécanique quantique I*.

Le site web suivant est une véritable mine d'or offrant des compilations (tableaux, graphiques, calculateur en ligne) des propriétés physiques (incluant les capacités thermiques, coefficients de dilatation thermique, etc.) d'un grand nombre de substances, incluant air et eau, et leur variations en fonction de la température, pression, etc:

engineeringtoolbox.com

Une série d'animations très pédagogiques illustrant les différents modes de vibration d'une vaste gamme de molécules simples et relativement complexes est disponible ici (décembre 2024):

www2.ess.ucla.edu/~schaube/molecular_vibrations.htm

Les données pour la variation du coefficient de tension superficielle avec la température, utilisées à la §1.2.3, sont tirées de:

- Vargaftik, N.B., Volkov, B.N., & Voljak, L.D., *J. Phys. Chem. Ref. Data*, **12**(3), 817–820 (1983).

Chapitre 2

L'environnement physique

La physique environnementale se joue dans pas mal toutes les “sphères” qu’aime définir la géographie: l’ATMOsphère, l’HYDROsphère, la CRYOsphère, la LITHOsphère, et la BIOsphère. Ce chapitre offre donc un survol des propriétés physiques de ces différentes “sphères” d’intérêt.

2.1 L’atmosphère

L’atmosphère est cette mince couche gazeuses entourant la surface de la Terre (rayon moyen $R_{\oplus} = 6370$ km), à peine visible de l’espace (voir Figure 2.1). Elle n’en est pas moins essentielle à pas mal toute vie sur Terre, directement ou indirectement. Dans la majorité des questions



Figure 2.1: L’atmosphère terrestre vue de l’espace. Source: NASA.

pertinentes à la physique environnementale, on ne s'intéressera qu'à la **troposphère**, soit le premier $\simeq 10 - 12$ km de l'atmosphère, et plus occasionnellement à la **stratosphère**, couche supérieure à la troposphère (épaisseur ~ 10 km) et s'étendant jusqu'à $\simeq 50$ km d'altitude¹.

La composition chimique moyenne du gaz atmosphérique est présentée au Tableau 2.1, ordonnée en fonction de la masse totale de chaque constituant. Seul les 10 premiers constituants (en masse totale) sont listés. À eux seul, l'azote moléculaire (N_2) et l'oxygène moléculaire (O_2) comptent pour 98.75% de l'atmosphère, en masse. Ce qui n'implique cependant pas que les autres constituants comme la vapeur d'eau (H_2O) ou le dioxyde de Carbone (CO_2), soient à négliger; on verra plus loin comment et pourquoi ces constituants, même mineurs en fraction de masse, dominent l'opacité de l'atmosphère terrestre dans l'infrarouge. L'Hydrogène, de loin

Table 2.1: Composition chimique de l'atmosphère terrestre

Constituent	μ	fraction volumique	masse totale [10^9 kg]
Total	28.97		5.136×10^9
Air sec	28.96	1.0	5.119×10^9
N_2	28.01	0.7808	3.870×10^9
O_2	31.99	0.2095	1.185×10^9
Ar	39.95	0.00934	6.59×10^7
H_2O	18.02	variable	1.7×10^7
CO_2	44.0	391ppm*	2.96×10^6
Ne	20.18	18.18ppm	6.48×10^4
Kr	83.8	1.14ppm	1.69×10^4
CH_4	16.04	1.92ppm*	5.23×10^3
He	4.00	5.24ppm	3.71×10^3
O_3	47.99	variable	3.3×10^3

* valeur en 2023

l'élément chimique le plus abondant dans l'Univers, ne fait même pas le "top-10", avec une maigre fraction volumique de 0.5ppm. Le peu d'Hydrogène se trouvant dans l'atmosphère résulte principalement de la dissociation de molécules comme H_2O ou CH_4 . Par contre, les gaz nobles (colonne de droite du tableau périodique) sont abondamment représentés. Ceci est dû au fait qu'ils ne réagissent pas chimiquement, et donc ne se sont pas retrouvés "capturé" dans des molécules plus lourdes, comme dans le cas de l'Hydrogène. L'Hélium, étant moins dense que l'air, s'échappe graduellement l'atmosphère vers l'espace, et les abondances mesurées reflètent principalement la désintégration- α d'isotopes radioactifs comme l'Uranium ou le Radium dans la croûte terrestre.

En très bonne première approximation, la dynamique atmosphérique peut se décrire comme deux équilibres: (1) dans l'horizontale, des vents propulsés par la différence de température pôles-équateur, finissant dans une configuration où un gradient horizontal de pression équilibre la force de Coriolis; c'est l'**équilibre géostrophique**; (2) dans la verticale, une structure statique (pas ou peu de vents verticaux) résultant d'un équilibre entre le gradient vertical de pression et la force gravitationnelle agissant sur un volume de fluide atmosphérique; c'est l'**équilibre hydrostatique**. Commençons par ce dernier.

2.1.1 L'équilibre hydrostatique

Considérons, tel qu'illustré schématiquement sur la Figure 2.2, un élément de fluide (air) de densité ρ et de volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ en équilibre dans l'atmosphère. Cet élément de fluide ressent une force gravitationnelle $\rho \Delta V g$ dirigée vers le bas. La pression est la force par unité de

¹Dans pratiquement tout ce qui suit on utilisera "atmosphère" dans son sens vernaculaire, même si on devrait vraiment écrire "troposphère".

surface ($\text{N m}^{-2} \equiv \text{Pa}$, pour “Pascal”) agissant perpendiculairement à chaque surface délimitant le volume ΔV . Sur la Figure 2.2, elle exerce donc sur chaque surface une force donnée dans l'horizontale par $\pm p \times \Delta z \Delta y \mathbf{e}_x$, et dans la verticale par $p \Delta x \Delta y$. En l'absence d'autres forces,

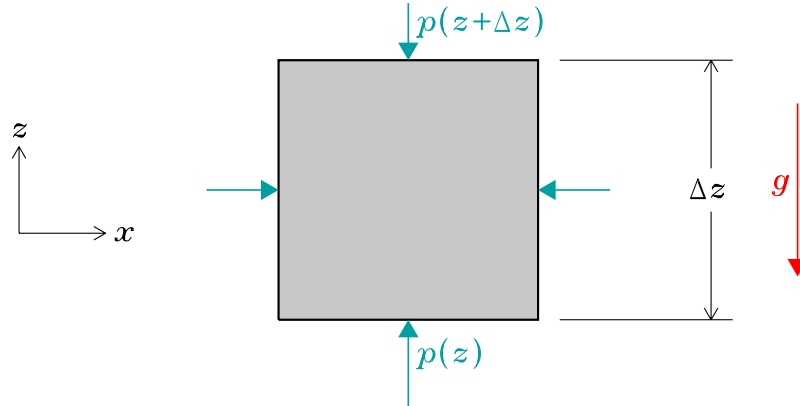


Figure 2.2: L'équilibre hydrostatique. La force gravitationnelle $\rho g \Delta V$ sur un élément de volume de fluide de densité ρ est équilibré par la différence de pression sur ses faces supérieure et inférieure (voir texte).

l'équilibre des forces n'est possible que si les pressions agissant sur les faces droite et gauche sont identiques, et si la pression agissant sur la face inférieure est plus grande que celle agissant sur la face supérieure, ce qui implique que la pression doit décroître avec z . L'équilibre dans la verticale requiert donc:

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \times [p(z + \Delta z) - p(z)] &= -(\rho \Delta V) g \\ &= -\rho \Delta x \Delta y \Delta z g, \end{aligned} \quad (2.1)$$

d'où

$$\frac{p(z + \Delta z) - p(z)}{\Delta z} = -\rho g. \quad (2.2)$$

Dans la limite infinitésimale $\Delta z \rightarrow 0$ ceci devient

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \quad (2.3)$$

C'est la très célèbre équation de l'**équilibre hydrostatique**. Sa solution $p(z)$ exige cependant que l'on spécifie comment varie la densité ρ soit avec l'altitude z , soit avec la pression. Cette dernière est reliée à la densité ρ via une équation d'état, qui dans le cas d'un gaz parfait est simplement

$$p = \frac{\rho k_B T}{\mu m_p} g. \quad (2.4)$$

où $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann, $\mu = 29$ le poids moléculaire moyen du gaz atmosphérique, et $m_p = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$ la masse du proton. Le gaz atmosphérique n'est pas un gaz parfait, ses constituants moléculaires ayant des degrés de libertés “internes” associés aux niveaux de rotation et vibration (on l'a vu à la §1.3), mais aux températures de la basse atmosphère ces transitions ne sont que rarement excitées par les collisions produites par le mouvement thermique, donc l'éq. (2.4) est une bonne approximation. Cependant, la solution de l'équation (2.3) exigera alors que l'on puisse spécifier comment varie la température (T) avec l'altitude z .

2.1.2 L'équilibre géostrophique

Dans la direction horizontale, i.e., perpendiculaire à la gravité, l'équilibre hydrostatique prédirait une pression constante. Aux grandes échelles spatiales ($\gtrsim 1000$ km), les vents ont donc tendance à souffler horizontalement, les vents verticaux se développant typiquement sur de beaucoup plus petites échelles spatiales, associées à l'orographie ou aux "points chauds". Mais un vent soufflant horizontalement à vitesse $\mathbf{u}$ ressentira une force de Coriolis $\propto -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$, où $\boldsymbol{\Omega}$ est le vecteur de vitesse angulaire de rotation de la Terre. Pour atteindre un équilibre dynamique à l'horizontale, la seule autre force disponible est celle associée à un gradient horizontal de pression.

La Figure 2.3 illustre cet état d'équilibre dit géostrophique. On y a représenté (schématiquement) en noir une série d'isobares (contours de pression constante) sur une surface horizontale (altitude constante) dans l'atmosphère, avec une zone de basse pression ("L") dans le coin inférieur gauche. La force $\propto -\nabla p$ exercée sur un élément de fluide (carré gris) par le gradient horizontal de pression est indiquée par la flèche verte. Considérons d'abord la situation sur le diagramme

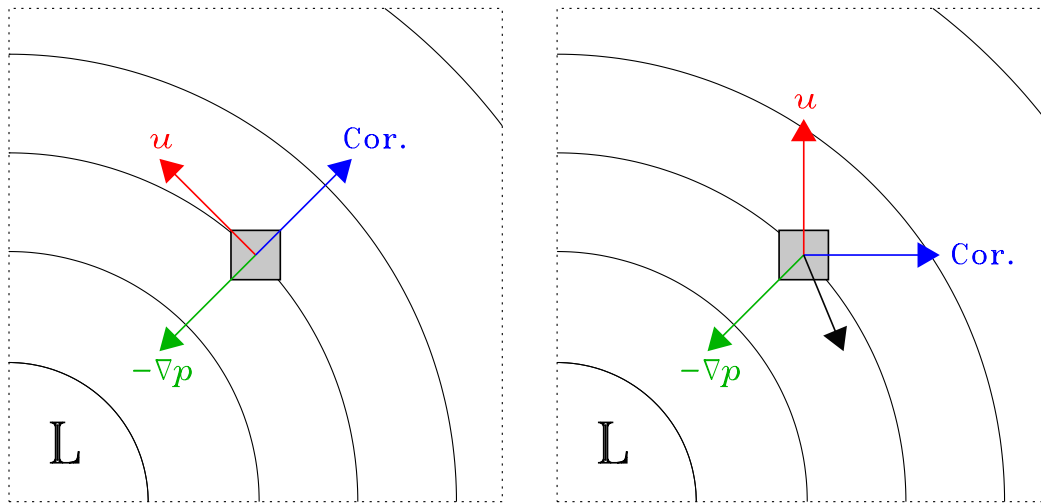


Figure 2.3: L'équilibre géostrophique entre la force due au gradient de pression (flèches vertes) et la force de Coriolis (flèches bleues) est illustrée sur le diagramme de gauche. Les lignes noires sont des isobares, associée à la présence d'une dépression atmosphérique (L) située dans le coin inférieur gauche. Le diagramme de droite montre comment une déviation de la trajectoire de l'élément de fluide (flèches rouges) produira une force résultante (flèche noire) qui ultimement réalignera la trajectoire avec l'isobare (voir texte). Les diagrammes sont tracés pour l'hémisphère Nord; dans l'hémisphère Sud, les vents circulent autour des dépressions dans le sens inverse, soit horaire plutôt qu'antihoraire.

de gauche. Si l'élément de fluide se déplace à vitesse u le long de l'isobare (flèche rouge), il ressentira une force de Coriolis (flèche verte) $\propto -\boldsymbol{\Omega} \times u$, qui peut équilibrer le gradient de pression. Si maintenant la trajectoire de l'élément de fluide est déviée vers le Nord (diagramme de droite), alors la force nette résultante (flèche noire) tendra à le ralentir, ce qui fera décroître la force de Coriolis, faisant ainsi graduellement tourner le vecteur force résultante dans la direction horaire. Ceci ramènera donc la trajectoire de notre élément de fluide vers l'isobare. C'est pourquoi, sur les cartes météo, aux échelles dites synoptiques les vents soufflent majoritairement le long des isobares².

²Pour en savoir plus sur la dynamique atmosphérique et ses conséquences météo, et au risque de me répéter, ne manquez pas PHY-3140 *Hydrodynamique* !

2.1.3 L'atmosphère plan parallèle isotherme

Revenons à l'équilibre hydrostatique dans la verticale. Si l'épaisseur de l'atmosphère est $\ll R_\oplus$, alors on peut utiliser des coordonnées cartésiennes avec z pointant dans la direction du zénith local, et l'accélération gravitationnelle g peut être considérée comme constante, à sa valeur de surface $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ pour la Terre. Une telle atmosphère est dite **plan-parallèle**.

Un cas particulièrement simple, et offrant une première approximation tout à fait acceptable aux premiers 8–10km de l'atmosphère terrestre, est celui d'une **atmosphère isotherme**, soit $T = \text{constante}$. La substitution de (2.4) dans (2.3) conduit alors à:

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p}{H}, \quad \text{avec} \quad H = \frac{k_B T}{\bar{m}g} \quad (2.5)$$

qui s'intègre maintenant facilement:

$$p(z) = p_0 \exp(-z/H). \quad (2.6)$$

où p_0 est la pression à la base de l'atmosphère, soit $p_0 = 101.6 \text{ kPa}$ à TPN au niveau de la mer. La quantité H (dimension de longueur) est la **hauteur de colonne**, fixant l'échelle de la décroissance exponentielle de la pression (et densité) avec l'altitude z . Pour une atmosphère terrestre isotherme à $T = 288 \text{ K}$, on trouve $H = 8.36 \text{ km} \ll R_\oplus$, ce qui est cohérent *a posteriori* avec l'hypothèse plan-parallèle.

La Figure 2.4 présente le profil de pression (noir) et température (rouge, échelle de droite) correspondant à l'atmosphère dite “standard”, telle que définie par la National Atmospheric and Oceanic Administration (NOAA, É.-U.). Cette atmosphère standard n'est clairement pas isotherme, la température chutant de $\simeq 50 \text{ K}$ entre altitudes 0 et 10km. Néanmoins, le profil

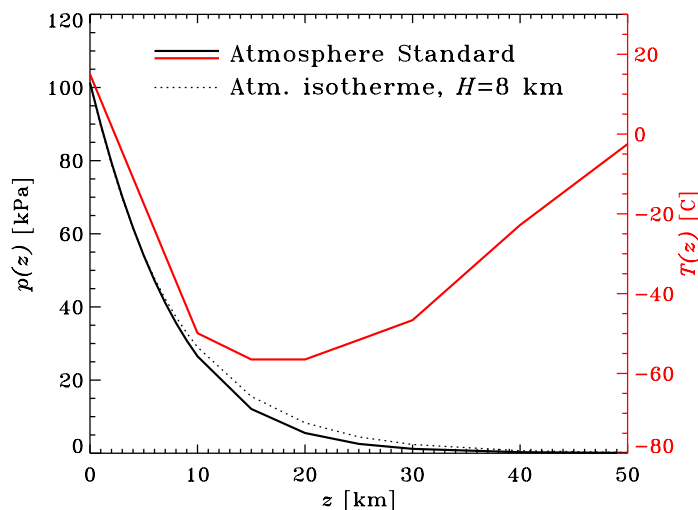


Figure 2.4: L'atmosphère “standard” de la National Atmospheric and Oceanic Administration (NOAA, É.-U.). Le trait pointillé correspond au profil de pression pour une atmosphère isotherme de hauteur de colonne $H = 8 \text{ km}$, correspondant à $T = 276 \text{ K}$.

de pression $p(z)$ mesuré colle tout de même très bien au profil de décroissance exponentielle donné par l'éq. (2.6) pour une hauteur de colonne de $H = 8.0 \text{ km}$ (trait pointillé sur la Fig. 2.4), qui correspondrait à une température constante $T = 276 \text{ K}$, ou 3°C . La raison est simplement que Mesuré en Kelvin, la chute de température entre 0 et 10km n'est qu'un peu moins de 20% du 287K à altitude zéro. Tant qu'on ne s'intéresse qu'à la basse atmosphère, ou aux échanges d'énergie ou de masse entre l'atmosphère et le sols ou les océans, l'atmosphère isotherme offre donc une excellente hypothèse de travail.

2.1.4 Capacité thermique atmosphérique moyenne

Il sera utile, pour ce qui suit, de calculer une capacité thermique effective moyenne d'une colonne atmosphérique de section 1 m^2 , que nous dénoterons $\bar{C}_a$ (unités: $\text{J K}^{-1} \text{ m}^{-2}$). Dans une atmosphère isotherme, la densité chute exponentiellement, comme le fait la pression (viz. l'éq. (2.6)). Le calcul de $\bar{C}_a$ demande donc d'intégrer le produit ρc_p sur la colonne atmosphérique:

$$\begin{aligned}\bar{C}_a &= \int_0^\infty c_p \rho_0 \exp(-z/H) dz \\ &= -H \rho_0 c_p [\exp(-z/H)]_0^\infty \\ &= c_p \frac{p_0}{g} = 1.02 \times 10^7 \text{ J K}^{-1} \text{ m}^{-2},\end{aligned}\tag{2.7}$$

où ρ_0 est la densité au sol ($z = 0$). Dans la seconde égalité on a supposé que c_p est constant dans toute l'atmosphère, et dans la troisième, on a fait bon usage de notre définition de la hauteur de colonne (2.5) pour exprimer la densité à la base de l'atmosphère (ρ_0) en terme de la pression $p_0 = 101.4 \text{ kPa}$. ATTENTION, ici $\bar{C}_a$ est vraiment une capacité *volumique* exprimée en unités *surfaiques*.

2.1.5 La très haute atmosphère

Revenant à la Fig. 2.4, il est clair que quelque chose de particulier se produit au delà d'une altitude de $\sim 10 \text{ km}$, conduisant à la remontée de la température. L'atmosphère de la Terre s'étend en fait jusqu'à une centaine de kilomètre d'altitude; au delà, c'est l'espace. Ces couches de la très haute atmosphère terrestre jouent néanmoins un rôle non-trivial en physique environnementale, puisqu'elles absorbent la radiation ultraviolette solaire qui serait sinon très dommageable aux organismes vivant à la surface de la Terre.

La Figure 2.5 présente la structure en température de l'atmosphère terrestre, cette fois jusqu'à 120 km d'altitude. On y définit traditionnellement quatre couches, sur la base du profil de température:

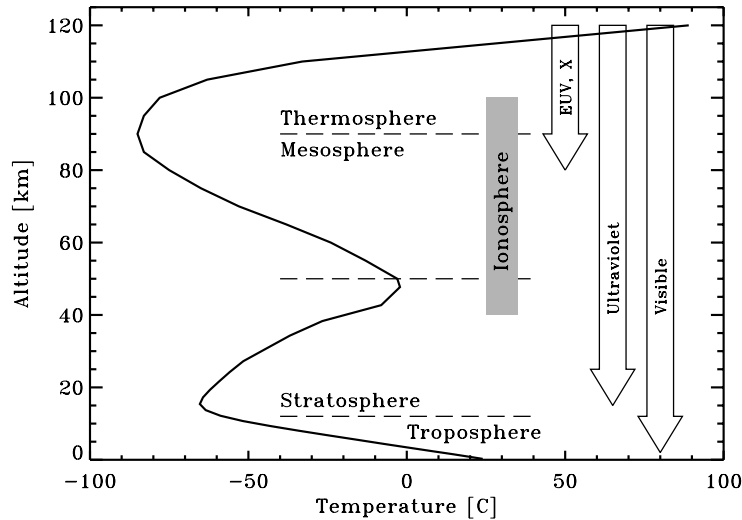


Figure 2.5: Structure en température de l'atmosphère terrestre à mi-latitudes, jusqu'à 120 km d'altitude.

- La **troposphère** (altitude 9–12 km), correspondant à “l’atmosphère” du langage courant tel que déjà mentionné. La température y décroît approximativement linéairement avec l’altitude;

- La **stratosphère** (altitude 12–50km), où la température remonte jusqu'à $\sim 0^\circ\text{C}$. Ce réchauffement est causé par l'absorption de l'ultraviolet rapproché (200–400nm) par dissociation de l'ozone (O_3);
- La **mésosphère** (altitude 50–90km), où la température retombe à $\simeq -80^\circ\text{C}$;
- La **thermosphère** (altitude $> 90\text{km}$), où la température remonte rapidement à des valeurs dépassant de loin la température de surface. Ce réchauffement est causé par l'absorption de l'ultraviolet lointain, rayons-X, et particules énergétiques d'origine solaire, par dissociation de N_2 et O_2 .

Les démarcations entre ces différentes couches atmosphériques ne sont évidemment pas taillées au couteau. Sous 50km on observe une certaine dépendance en fonction de la latitude et des saisons; et au delà de 50km, une très forte variabilité temporelle associée à l'activité solaire.

Une dernière couche atmosphérique, l'**ionosphère** (altitude $\simeq 40\text{--}100\text{ km}$), est caractérisée par une conductivité électrique substantielle; cette dernière peut varier en réponse aux sursauts de radiation et flux de particules énergétiques, causés par les éruptions solaires et produisant des perturbations aux communications radio (entre autres).

2.2 L'hydrosphère

L'eau (H_2O) est essentielle à la biosphère, et joue également un rôle majeur dans la dynamique et l'énergétique de l'atmosphère et des sols.

Le Tableau 2.2 donne la répartition de l'eau dans l'environnement terrestre. Les océans dominent évidemment le bilan, avec un volume total de $1.35 \times 10^{18} \text{ m}^3$, ou encore $1.35 \times 10^{21} \text{ kg}$, avec 10^3 kg m^{-3} pour la densité de l'eau. La troisième colonne du Tableau liste la profondeur

Table 2.2: Distribution des eaux dans l'environnement

Réservoir	Fraction (%)	Profondeur équivalente (m)
Océans	97	2650
Glaciers et calottes glaciaires	2.2	60
Eaux souterraines	0.7	20
Lacs, fleuves et rivières	0.013	0.35
Sols humides	0.013	0.12
Atmosphère	0.0009	0.025

équivalente de chaque "réservoir", si le contenu en eau était réparti uniformément sur toute la surface de la Terre ($4\pi R_\oplus^2$, avec $R_\oplus = 6371 \text{ km}$). On en déduit déjà le potentiel d'élévation du niveau des océans pouvant résulter de la fonte des calottes glaciaires.

2.2.1 Les océans

Les océans couvrent $\simeq 71\%$ de la surface de la Terre. La masse totale de l'atmosphère étant de $5.15 \times 10^{18} \text{ kg}$, on en déduit un rapport de masse océan:atmosphère de $\simeq 300 : 1$. De plus, la rapport des chaleurs spécifiques volumiques (ρc_p) eau:air est $\simeq 4000 : 1$. Les océans agissent ainsi comme un véritable réservoir thermique pour le climat.

Calculons la capacité thermique globale d'une colonne d'eau de profondeur h . Contrairement à l'air, l'eau est un fluide à toutes fin pratiques incompressible, dans le sens que sa densité demeure constante à $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ (eau pure non saline) même quand la pression augmente substantiellement. Nous n'avons donc pas à intégrer le profil de densité verticalement, comme dans le cas de l'atmosphère (viz. eq. (2.7)); pour une colonne d'eau de profondeur d_e , on peut écrire directement:

$$\bar{C}_e = c_p \rho_e d_e = 4.2 \times 10^6 d_e \text{ J K}^{-1} \text{ m}^{-2}, \quad (2.8)$$

avec d_e exprimé en mètres. Poser l'égalité $\bar{C}_a = \bar{C}_e$ conduit à la conclusion qu'une colonne d'eau de profondeur $d_e \simeq 2$ m a la même capacité thermique globale que toute la colonne atmosphérique qui lui est superposée. Ceci est ultimement dû au fait que le produit ρc_p est $\simeq 4000$ plus grand pour l'eau, comparé à l'air à TPN (voir Tableau 1.1). Cette comparaison néglige évidemment plusieurs effets importants, en particulier le fait que la capacité thermique de l'air augmente significativement avec son contenu en vapeur d'eau, mais la conclusion demeure.

On verra plus loin que sur un cycle saisonnier annuel, on peut s'attendre à ce que les variations de l'insolation conduisent à des variations de température des eaux océaniques de surface s'étendant jusqu'à une profondeur de ~ 100 m, ce qui implique que la capacité thermique *effective* des océans est ~ 50 fois plus grande que celle de l'atmosphère; les océans sont un très puissant régulateur thermique du climat!

Comme l'eau est à toute fin pratique incompressible, le coté droit de l'équation de l'équilibre hydrostatique (2.3) est alors constant, ce qui conduit à une augmentation linéaire de la pression avec la profondeur:

$$p(z) = p_0 - \rho g z, \quad (z \leq 0), \quad (2.9)$$

où p_0 est la pression atmosphérique au niveau de la mer (altitude $z = 0$). ATTENTION, dans cette expression z est une quantité négative si $\hat{z}$ pointe vers le zénith et on pose $z = 0$ à la surface de l'océan. La densité de l'eau étant environ 1000 fois celle de l'air, la pression monte très rapidement quand on s'enfonce dans les océans, ou même dans un lac: à seulement $z = 10$ m sous l'eau, le poids de la colonne d'eau est le même que le 10 km d'atmosphère produisant la pression atmosphérique à $z = 0$!

La Figure 2.6 montre la variation de la température océanique avec la profondeur. ATTENTION, ici je vous expose à la tradition océanographique consistant à porter la variable dépendante, la profondeur z , sur l'axe vertical, et la variable dépendante, ici la température en rouge) sur l'axe horizontal³. La température de $\sim 20^\circ\text{C}$ caractérisant les premiers quelques

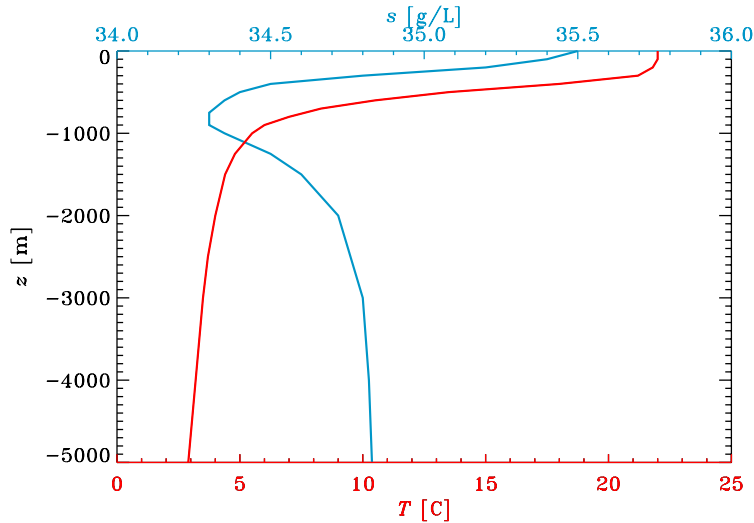


Figure 2.6: Profils moyens de température (en rouge) et salinité (en bleu) en fonction de la profondeur dans l'océan.

centaines de mètres de l'océan est produite par l'absorption de l'irradiance solaire (§3.3 plus loin), la mince couche de transition vers les températures de $\sim 4^\circ\text{C}$ des eaux profondes est la **thermocline**. Notons qu'aux pressions extrêmes des abysses océaniques, l'eau demeure dans sa phase complètement liquide sous 4°C

³Par contre je dévie de la tradition océanographique en gardant l'axe des z pointant vers le haut; il y a quand même des limites à vouloir mêler le monde...

En plus d'un réchauffement marqué, l'irradiance solaire cause aussi une évaporation à la surface de l'océan, ce qui augmente localement la salinité (en bleu sur la Figure 2.6). L'augmentation n'est que de quelques %, mais c'est suffisant pour produire des effets dynamiques conduisant à un mélange vertical des couches superficielles. Si la hausse de salinité devient telle que la densité de l'eau en surface devient plus grande que celle des eaux très profonde, alors on génère un courant descendant qui, ultimement, conduira à un échange des eaux de surface et des eaux profondes. C'est la **circulation thermohaline**, qui joue un rôle très important au niveau climatique et biosphérique; on y reviendra plus loin.

2.2.2 Les eaux de surface

Les eaux de surface (lacs, fleuves, rivières, sols humides), bien que ne comptant que pour une minuscule fraction de l'eau totale (voir Tableau 2.2), jouent néanmoins un rôle important dans le bilan énergétique des sols et basse atmosphère, principalement via l'évaporation, mais aussi dans le transport des nutriments, contaminants et pathogènes. L'eau est également essentielle non seulement comme milieu de vie pour les écosystèmes aquatiques et marins, mais dans la synthèse organique (voir §2.4 plus loin). Un humain en santé peut survivre 2 mois sans nourriture ; mais seulement 3-4 jours sans eau !

2.2.3 La cryosphère

Un terme spécial, la cryosphère, est utilisée pour l'eau à l'état solide dans l'environnement. Comme l'indique le tableau 2.2, les glaces contiennent $\sim 2\%$ de l'eau totale sur Terre (mais $\simeq 80\%$ de l'eau douce!). La calotte glaciaire Antarctique à elle seule compte pour 89% du total, avec 8.8% pour la calotte du Groenland, 0.76% pour les glaciers de montagne, et 0.95% dans le permafrost. La neige est également une composante (transiente en fonction des saisons) de la cryosphère.

La neige et les glaces jouent un rôle important dans le système climatique: elles impactent la réflectivité des sols et des océans, et ont un effet d'isolation thermique important. On reviendra sur tout ça et en détail, au fil du cours.

La neige est une substance absolument fascinante. Les formes que peuvent prendre ses cristaux sont pratiquement infinies, et dépendent de manière extrêmement sensible de la température, pression, niveau d'humidité, etc. La Figure 2.7 en montre quelques exemples, produits en laboratoire. Vous pourrez facilement imaginer que les propriétés mécaniques de ces différents types de cristaux de glace sont très différentes les unes des autres.

Plus encore que la glace, la neige augmente la réflectivité des surfaces qu'elle recouvre. La Figure 2.8 en montre un exemple frappant, soit une banquise océanique vue à incidence normale. La réflectivité de l'océan découvert est ici de quelques pourcent, tandis que celle de la glace couverte de neige approche le 90%. On y reviendra plus loin.

La neige est aussi un excellent isolant thermique. Dépendant de son niveau de compaction et de son contenu en eau (neige fondante), la diffusivité thermique d'une couche neigeuse peut varier entre celle de l'air à -5°C , et celle de la glace (voir le Tableau 5.1, à la §5.3 plus loin). Une couche de neige sèche de quelques dizaines de centimètres peut maintenir une température au sol de 0°C même quand l'air extérieur est sous -25°C . À nos latitudes, ceci assure la survie de plusieurs petits rongeurs n'hibernant pas l'hiver, et passant le gros de la saison sous la neige, à grignoter l'écorce des arbres ou des résidus organiques au sol.

Notons finalement que bien que la neige (fraîche) soit très blanche, elle irradie effectivement comme un corps noir à $T \simeq 273\text{ K}$!

2.3 La lithosphère

Les sols peuvent se définir comme la mince pellicule recouvrant la lithosphère, soit la croûte terrestre. D'une importance fondamentale en physique environnementale, les sols montrent une



Figure 2.7: Flocons de neiges, produits en laboratoire sous différentes conditions de pression, température, et pression partielle de vapeur d'eau. Source: Ken Libbrecht, www.snowcrystals.com; ce site web inclut des films absolument fascinant suivant la croissance de ces cristaux.

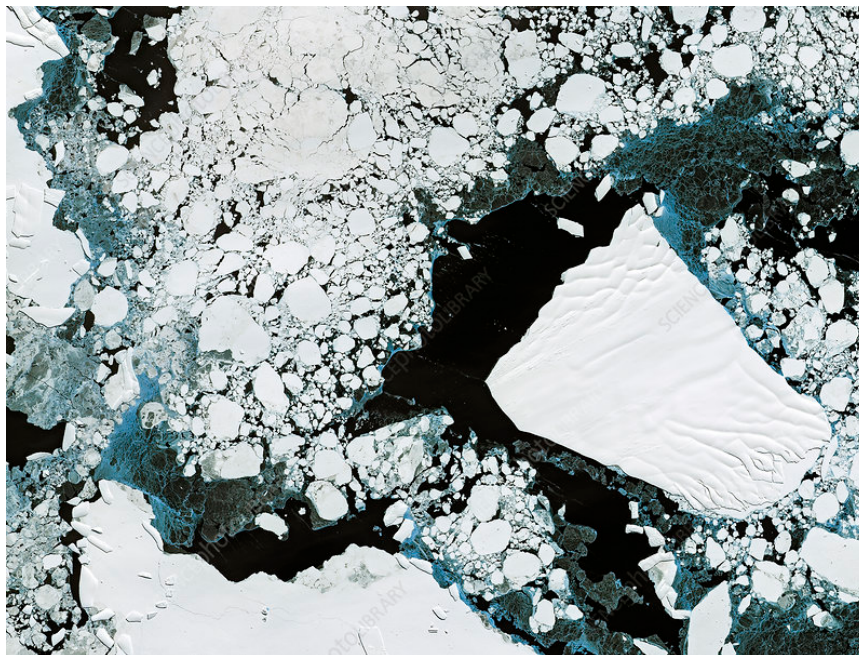


Figure 2.8: Glace océanique en mer d’Amundsen (Antarctique), 12 décembre 2015. Cette image satellite illustre parfaitement comment la réflectivité de la surface de l’océan (à incidence normale ou pas loin) est beaucoup, beaucoup plus faible que celui d’une banquise neigeuse. Source: <http://www.sciencephoto.com>

très grande diversité dans leurs propriétés physiques, en particulier en fonction de leur contenu en eau et en matières organiques, incluant les organismes vivants.

En plus évidemment de leur densité, une caractéristique déterminante des sols est leur **porosité**. On définit le coefficient de porosité d’un sol (symbole p), comme la fraction du volume de “vide”, i.e., n’étant pas occupé par le substrat rocheux (grains de sable, gravier, roches, etc.), par rapport au volume d’un échantillon de sol. Le Tableau 2.3 liste quelques valeurs représentatives pour quelques types de sols.

Une autre caractéristique importante des sols est leur **perméabilité**, soit la capacité à laisser s’infiltrer l’eau (ou tout autre liquide). On mesure ceci par un coefficient de **conductivité hydraulique** (k , unités m s^{-1}), également listé au Tableau 2.3. Comme pour la porosité, la perméabilité des sols granulaires (e.g. sable, terre, etc.) dépend beaucoup de leur niveau de compaction, d’où les intervalles d’une largeur très généreuse listés en dernière colonne du tableau. Un modèle approximatif décrivant la dépendance de la conductivité hydraulique sur la porosité du sol sera développé plus loin (§4.4). Typiquement, un sol est considéré perméable si $k > 10^{-5} \text{ m s}^{-1}$, imperméable si $k < 10^{-7} \text{ m s}^{-1}$, et semi-perméable entre les deux.

Les propriétés thermodynamique des sols sont en grande partie déterminées par leur contenu en eau, qui dépend (entre autre) de la porosité. En particulier, un sol très poreux et chargé en eau aura une capacité thermique et une conduction thermique beaucoup plus élevées que le même sol asséché, ou qu’un sol de même densité mais de faible porosité. De plus, un sol riche en matières organiques aura tendance à retenir l’eau plus longtemps qu’un sol inorganique même de plus grande porosité.

Table 2.3: Coefficient de porosité (p) et conductivité hydraulique (k) pour différents sols

Sols	p	k [m s ⁻¹]
Roches concassées	0.23–0.38	3×10^{-4} – 3×10^{-2}
Sable	0.26–0.43	10^{-6} – 5×10^{-4}
Sable fin	0.29–0.46	2×10^{-7} – 2×10^{-4}
Argile (+organique)	0.51–0.77	5×10^{-9} – 10^{-7}
Argile	0.35–0.55	10^{-11} – 5×10^{-9}
Sol arable compact	0.06–0.18	$\sim 10^{-4}$
Sol arable labouré	0.17–0.24	$\sim 10^{-4}$
Tourbe	0.71–0.95	$> 10^{-4}$

Source: voir bibliographie

2.4 La biosphère

La biosphère regroupe tous les organismes vivants présents sur Terre, du virus à la baleine bleue, en passant par tous les genres de plantes et animaux⁴. L'environnement physique, que l'on peut définir comme l'union des atmosphère, hydrosphère, cryosphère, lithosphère, et de l'illumination solaire, définit ce grand théâtre dans lequel se développe la biosphère. Par exemple:

- L'environnement physique est la source de tous les éléments chimiques dont sont composés les organismes vivants;
- Via ce magnifique truc de passe-passe chimique qu'est la photosynthèse, la radiation électromagnétique en provenant du soleil est la source d'énergie quasi-exclusive pour toute vie sur Terre.
- L'environnement détermine les conditions physiques (température, humidité, gravité, durée du jour, etc.) qui régulent la croissance des végétaux, l'activité métabolique, les cycles d'hibernation et de reproduction chez les animaux.
- Les écoulements atmosphériques et océaniques contrôlent la distribution des nutriments, pathogènes et parasites circulant dans les écosystèmes.

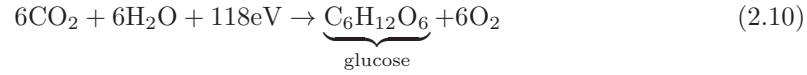
Moins évident mais tout aussi important, la biosphère a un effet de rétroaction souvent très significatif sur l'environnement physique; par exemple:

- La biosphère influence fortement la composition chimique de l'atmosphère; par exemple, sans biosphère la concentration atmosphérique d'oxygène moléculaire (O₂) serait beaucoup plus faible qu'observée;
- Les végétaux sont une composante essentielle des cycles de l'eau et du CO₂;
- La présence d'une couverture végétale (forêt, savanne, toundra) impacte le bilan énergétique global via son effet sur la réflectivité de la surface terrestre, et par la capture (temporaire) d'une partie de l'irradiance solaire;
- La biosphère a un impact majeur sur la structure et l'évolution des sols, influençant ainsi les échanges de matière et énergie entre la lithosphère, l'atmosphère et l'hydrosphère.

Nous aurons l'occasion, au fil de ce cours, d'étudier en détail, et sur des bases physiques quantitatives, bon nombre de ces processus.

⁴L'inclusion de l'humain dans la biosphère est sujette à débat...

La photosynthèse, ultimement, consomme du CO_2 et du H_2O , et libère de l'oxygène moléculaire, le Carbone se retrouvant transféré à des molécules organiques. La photosynthèse est accomplie via un cycle chimique complexe appelé **cycle de Calvin**, mais en bout de ligne, schématiquement ça a l'air de:



(1 J = 6.242×10^{18} eV). Le glucose ainsi produit est incorporé en molécules organiques, incluant celles agissant comme réservoirs énergétiques; dans la grande majorité des végétaux il s'agit de l'ATP.

Il s'avère pratique de mesurer la **biomasse** (B) d'un écosystème non pas simplement en kilogramme, mais en kilogramme de Carbone, abrégé kg(C) dans ce qui suit. La **productivité** (p) d'un écosystème se mesure alors en kilogramme de Carbone par unité de temps⁵. Le Tableau 2.4 liste ces deux quantités (exprimées par unité de surface) pour divers écosystèmes d'intérêt, ainsi que la productivité totale P ($= p \times A$) associée à la surface (A) couverte par chaque type d'écosystème sur Terre. La productivité totale est donc dominée par l'océan (prin-

Table 2.4: Surfaces, biomasse, et productivité des écosystèmes

Écosystème	A [10^{12} m^2]	B [kg(C) m^{-2}]	p [kg(C) $\text{m}^{-2} \text{ yr}^{-1}$]	P [10^{12} kg(C) yr^{-1}]
Forêts tropicales	24.5	18.8	0.83	20.3
Forêts tempérés	12.0	14.6	0.56	6.72
Forêts boréales	12.0	9.0	0.36	4.32
Broussailles	8.0	2.7	0.27	2.16
Savannes	15.0	1.8	0.32	4.80
Prairies	9.0	0.7	0.23	2.07
Toundra	8.0	0.3	0.065	0.52
Déserts	18.0	0.3	0.032	0.58
Roc, sable, glace	24.0	0.01	0.015	0.36
Champs cultivés	14.0	0.5	0.29	4.06
Marécages	2.0	6.8	1.13	2.26
Lacs et rivières	2.5	0.01	0.23	0.58
Océan ouvert	332.0	0.0014	0.057	18.9
Zones de résurgence	0.4	0.01	0.23	0.07
Plateaux continentaux	26.6	0.005	0.16	4.26
Coraux, champs d'algues	0.6	0.9	0.90	0.54
Estuaires	1.4	0.45	0.81	1.13

Source: voir bibliographie

cipalement via la photosynthèse par le plancton) et les forêts tropicales, les forêts tempérées suivant en bon troisième. D'où l'idée de préserver les forêts tropicales, et d'arrêter de traiter les océans comme une grande poubelle.

La productivité surfacique (p) des océans est relativement inhomogène, tendant à être plus élevée là où l'apport de nutriment est élevé; ceci peut se produire via les écoulements continentaux de surface (e.g., un fleuve se jettant dans la mer, ou ruissellement de surface sur les côtes), ou résurgence des eaux profondes, résultant souvent de l'interaction des courants marins avec les masses continentales, ou des profondeurs moindres permettant la croissance d'algues et coraux. Les plateaux continentaux se retrouvent donc des sites productifs, comme l'illustre très bien la

⁵Vous aurez peut-être remarqué que nous sommes déjà rendus à trois attributions très distinctes à la lettre " p "; la pression (gazeuse), la porosité (des sols), et la productivité (écosystémique); dans ce qui suivra au fil du cours, le contexte devrait suffire à établir duquel des p il est question.

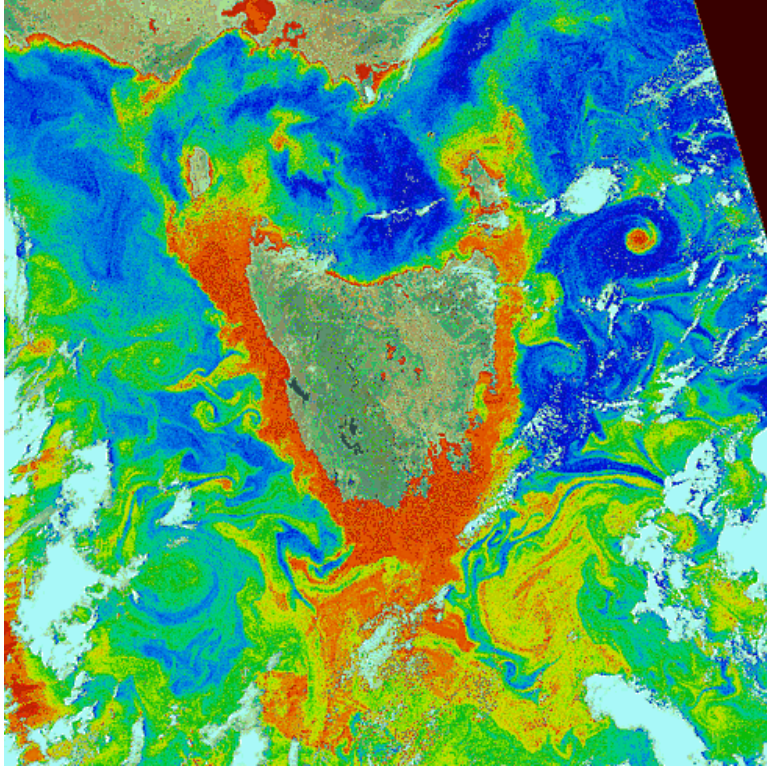


Figure 2.9: Concentration de phytoplancton (échelle de couleur allant du bleu au rouge selon l'augmentation de la concentration). La prédominance de régions à hautes concentrations de phytoplancton près des côtes est due à la plus grande productivité biomassique des plateaux continentaux, souvent favorisée par la résurgence d'eaux profondes. Source: projet SeaWiFS (NASA/GSFC), <https://oceancolor.gsfc.nasa.gov>.

Figure 2.9. Il s'agit ici d'une image en fausses couleurs, codant l'absorptivité dans une bande de longueurs d'onde sensible à la concentration de phytoplancton.

On remarquera aussi au Tableau 2.4 que l'écosystème le plus “productif” (par unité de surface) est en fait le marécage ($p = 1.13 \text{ kg(C) m}^{-2} \text{ s}^{-1}$), d'où l'importance de la protection des milieux humides face à l'urbanisation.

La productivité totale de la biosphère est donnée par le produit de la productivité surfacique d'un écosystème par sa surface totale, sommée sur tous les types d'écosystèmes du Tableau 2.4:

$$P_{\text{tot}} = \sum P_k = 7.4 \times 10^{13} \text{ kg(C) yr}^{-1} . \quad (2.11)$$

Cette productivité en Carbone peut aussi être convertie en unités d'énergie. On estime qu'un kilogramme de biomasse a un contenu énergétique de $1.6 \times 10^7 \text{ J/kg}$. Si on revient au glucose, connaissant les poids moléculaires de C, H et O, il est facile de vérifier que la fraction de masse en Carbone est de 0.4. Donc,

$$1 \text{ kg biomasse} = 0.4 \text{ kg(C)} \equiv 6.4 \times 10^6 \text{ J}$$

Utilisant cette relation comme facteur de conversion, la productivité énergétique totale des écosystèmes est donc de $1.5 \times 10^{21} \text{ J}$ par année, ou encore 46.9 TW ($1 \text{ TW} \equiv 10^{12} \text{ W}$).

2.5 L'anthroposphère

Le terme **anthroposphère** réfère aux éléments de l'environnement modifiés par l'activité humaine. C'est une mosaïque étourdissante: déforestation, agriculture, élevage, extraction minières, barrages et irrigation, modification/destruction des écosystèmes, villes et routes, production énergétique, production industrielle, pollution des sols, atmosphère et océans, réchauffement climatique, pour n'en nommer que quelques uns.

La plupart des interactions entre l'environnement naturel et l'anthroposphère, ainsi que les impacts de ces interactions, sont ultimement proportionnels à la taille de la population humaine. La Figure 2.10 illustre la croissance de cette population durant le dernier millénaire. Le segment

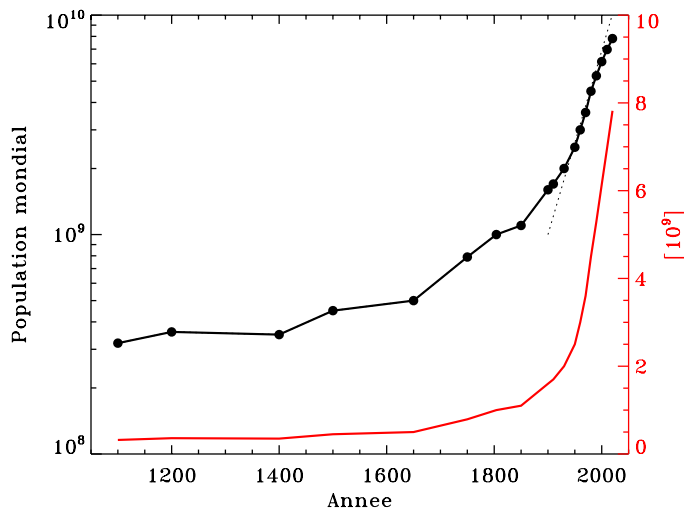


Figure 2.10: Croissance de la population mondiale durant le dernier millénaire, sur une échelle logarithmique à gauche (noir), et linéaire à droite (rouge). Les valeurs avant 1500 sont des estimés historiques, mais au delà de 1850 environ l'incertitude devient comparable au diamètre des points noirs, et plus petite au delà de 1900. Le segment de droite pointillée illustre la croissance exponentielle de la population mondiale durant le vingtième siècle.

de droite en pointillés indique une phase exponentielle de croissance couvrant la majorité du vingtième siècle. Une telle exponentielle est une solution d'une équation différentielle de la forme:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N, \quad (2.12)$$

où N est la population et α mesure son taux de croissance. Du point de vue de la dynamique des populations, ce genre d'équation différentielle, où $dN/dt \propto N$, caractérise une population sans prédateurs et ayant accès à des ressources illimitées pour soutenir sa croissance; et depuis le dix-neuvième siècle, c'est malheureusement le cas que l'humanité a pratiquement éliminé tous ses prédateurs naturels (autre que lui-même, *Homo homini lupus...*), et siphonne l'environnement comme si c'était un bar ouvert inépuisable.

L'activité métabolique d'un humain moyen requiert 2500 calories par jour, soit $\simeq 10^7$ J par jour⁶. Ceci correspond à 0.116kW en mode continu sur toute l'année. Une population humaine de 8×10^9 individus consomme donc annuellement 2.9×10^{19} J. La fraction de la productivité énergétique de la biomasse consommée par l'humanité à des fins purement métaboliques est

⁶La "calorie" (cal) est une antique unité d'énergie, valant 4.19 Joule; la "Calorie" (Cal; notez le "C" majuscule) sur les emballage de nourriture est en fait une kilo-calorie (kcal); d'où $2500 \text{ Cal} \simeq 10^7 \text{ J}$.

donc

$$f = \frac{2.9 \times 10^{19} \text{ [J/yr]}}{1.5 \times 10^{21} \text{ [J/yr]}} \simeq 0.02, \quad (2.13)$$

soit 2%. Le carbone dans le corps humain compte pour $\simeq 18.5$ de sa masse totale. Mesurée en kg(C), la biomasse totale de l'humanité est de $(8 \times 10^9) \times 65 \text{ kg} \times 0.185 \simeq 2.3 \times 10^{11} \text{ kg(C)}$, pour un humain moyen pesant 65 kg, tandis que la biomasse totale des écosystèmes listés au Tableau 2.4 est de $8.3 \times 10^{14} \text{ kg(C)}$. L'humanité compte donc pour 2.8×10^{-4} de la biomasse-Carbone totale, mais consomme une fraction 2×10^{-2} de sa productivité. C'est assez gourmand...

Ça se gâte encore plus si on considère la consommation énergétique de l'humanité pour autre chose que le simple métabolisme: construction, transport, production industrielle, chauffage/-climatisation, communications, etc. On estime que ceci totalise présentement 16 TW ($1 \text{ TW} \equiv 10^{12} \text{ W}$) en continu pour l'ensemble de la population humaine de la planète, soit 2kW/humain, pour un total de $5 \times 10^{20} \text{ J}$ sur une année; c'est le tiers de la production énergétique biosphérique.

Évidemment, la majorité de cette consommation énergétique totale est basée non pas sur la production biosphérique annuelle, mais plutôt sur l'utilisation des combustibles fossiles; autrement dit, sur une portion de la productivité biosphérique géologiquement emmagasinée dans la lithosphère au fil des derniers 500 million d'années. Les impacts biosphérique et climatique de cette utilisation s'avèrent très importants.

La Figure 2.11 montre la croissance de la concentration atmosphérique de CO_2 (en rouge) depuis 1958, telle que mesurée au sommet du Mauna Loa (Hawai'i). Cette augmentation résulte principalement de l'utilisation accélérée des combustibles fossiles (principalement le charbon et le pétrole). La petite variation annuelle superposée à la croissance générale reflète la dépendance

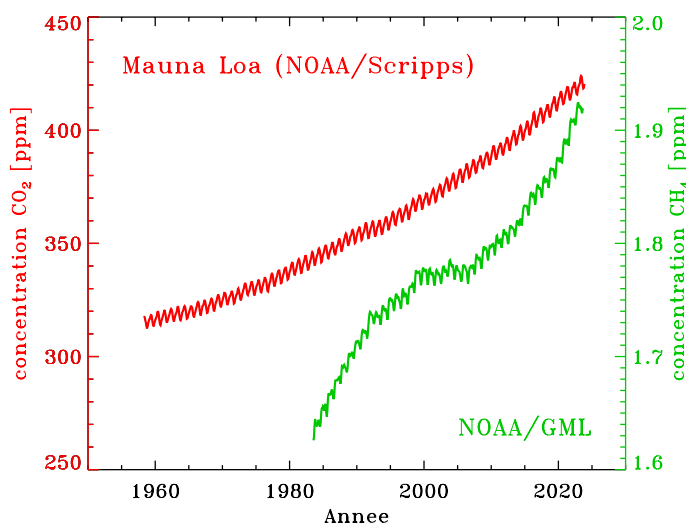


Figure 2.11: Croissance des concentrations atmosphériques de CO_2 (en rouge) et CH_4 (en vert). Source des données: NOAA/Scripps, gml.noaa.gov/ccgg/trends/data.html

saisonnnière de la productivité biosphérique.

La croissance du méthane atmosphérique (CH_4 ; en vert sur la Fig. 2.11) est aussi significative, et résulte en grande partie de l'élevage intensif du bétail (les fameux “pets de vaches”), et du méthane libéré par la fonte du pergélisol.

On verra au chapitre qui suit comment ces deux gaz atmosphériques, CO_2 et CH_4 , bien que présents en faibles concentrations dans l'atmosphère terrestre actuelle (voir Tableau 2.1), n'en jouent pas moins un rôle majeur au niveau du climat.

Exercices:

2.1: Supposons que la température T décroît linéairement de 14°C à $z = 0$ à -50° à $z = 10\text{ km}$ (une assez bonne approximation en fait); intégrez l'équation de l'équilibre hydrostatique pour calculer le profil de pression $p(z)$. Comparez ceci avec le profil de pression pour une atmosphère isotherme à 14°C .

2.2: Calculez le profil de pression $p(r)$ pour une atmosphère isotherme ($T = 14^\circ\text{C}$) où la gravité chute en $1/r^2$, comme nous l'a enseigné le Sieur Newton.

2.3: Calculez de combien s'élèverait le niveau des océans si l'ensemble de la banquise Antarctique venait à fondre complètement.

2.4: En utilisant les Figures 1.2 et 2.6 pour “lire” les données requises, calculez de combien varie la densité de l'eau de mer entre la surface et une profondeur de 1000m...

1. Si seulement la variation de la température est prise en considération;
2. Si seulement la variation de la salinité est prise en considération;
3. Si les variations de température et de salinité sont toutes deux prises en considération.
4. De combien doit-on réduire la température de surface (sans changer sa salinité) pour que l'eau en surface se retrouve plus dense que les eaux très profondes (4000m, disons).

Vous pouvez approximer la densité de l'eau de mer comme celle de l'eau pure plus le poids en sel par unité de volume, et négliger l'effet de la salinité sur le coefficient dilatation thermique.

2.5: Le sable sec a une capacité thermique $c_p \simeq 800\text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$, pour des grains de silicates de densité $\rho \simeq 2650\text{ kg m}^{-3}$. Estimez la capacité thermique de ce même sable, mais complètement imbibé d'eau.

2.6: Petit exercice de jonglage d'unités avec relents de cours de chimie: calculez le nombre de Joule requis par la réaction de photosynthèse donnée (2.10) par mole de glucose produite. Combien de moles de CO_2 sont ainsi capturés ?

2.7: La population mondiale était de $N = 1.6 \times 10^9$ en 1900, et $N = 6.4 \times 10^9$ en 2000;

1. À partir de ces chiffres, calculez le taux de croissance exponentielle α dans l'éq. (2.12);
2. Supposons maintenant que ce taux de croissance est proportionnel à la productivité biosphérique totale annuelle P_{tot} , moins la quantité $Q = N \times 2\text{ kW}$ consommée par l'humanité à son rythme de 2023, i.e., on écrit:

$$\alpha = \beta(P_{\text{tot}} - Q) . \quad (2.14)$$

Utilisant la valeur de P_{tot} calculée à la §2.5, calculez β (attention aux unités!). Quelle est la population humaine d'équilibre (i.e., N pour lequel $dN/dt = 0$?)

3. Maintenant solutionnez (2.12) avec α donné par l'expression ci-dessus et les valeurs numériques calculées à l'étape précédente. Si β et Q demeurent constants, en quelle année atteindra-t-on 90% de la population d'équilibre calculée précédemment ?

2.8: Le “jour de bascule” est le jour de l'année pour lequel l'humanité a siphonné depuis le 1 janvier toute la productivité biosphérique annuelle de la planète n'étant pas nécessaire pour maintenir minimalement les écosystèmes dans leur état actuel. En 2024, le jour de bascule était le 1 août.

1. Dénotons par $P_{\min}$ la part de la productivité biosphérique totale P_{tot} requise pour maintenir les écosystèmes; calculez cette quantité à partir des données et calculs de la §2.5.
2. La forêt amazonienne compte pour 54% de la superficie totale couverte par les forêts tropicales sur toute la planète. Si 20% de l'Amazonie est instantanément convertie en terres agricoles, déterminez à quelle date arrivera le jour de bascule l'an prochain.
3. En supposant que la consommation énergétique moyenne par humain demeure à 2kW et que la productivité biosphérique le demeure aussi à son niveau actuel, jusqu'où peut croître la population humaine avant que le jour de bascule recule au 15 janvier ? Ce calcul vous semble-t-il raisonnable ? Pourquoi ?

Bibliographie:

Les données des Tableaux 2.1 et 2.2 sont tirées directement des Tableaux 1.1 et 1.2 dans l'ouvrage de Hartmann cité en bibliographie au chapitre 1; celles du 2.4 sont tirées de l'Annexe XII.2 de l'ouvrage de Harte, également cité en bibliographie au chapitre 1. Les données présentées au Tableau 2.3 sont adaptées de:

www.geotechdata.info/parameters/soil-porosity

structx.com/Soil.Properties_007.html

Sur les flocons de neige, naturels ou produits en laboratoire, voir:

skycrystals.ca/snowflake-gallery

www.snowcrystals.com

ainsi que l'excellent (mais très technique):

Libbrecht, K., *The Physics of Snow Crystals*, *Rep. Prog. Phys.*, **68**, 855-895 (2005)

Sur la consommation énergétique mondiale, voir

iea.org/reports/key-world-energy-statistics-2021/final-consumption

pour le plus récent rapport (2021) de l'International Energy Agency.

Chapitre 3

Processus physiques I. Radiation

La radiation électromagnétique provenant du soleil est, de loin, la source d'énergie dominante pour toute vie sur terre, et pour la dynamique de l'atmosphère et des océans. Dans ce chapitre, nous considérons comment cette radiation électromagnétique est transmise et partiellement réfléchie et absorbée par l'atmosphère; comment elle est réfléchie, absorbée et re-émise par le sol et les océans; et comment cette radiation ré-émise interagit à son tour avec l'atmosphère avant de s'échapper dans l'espace. Tout un programme... qui débutera cependant par un petit rappel de thermodynamique radiative.

3.1 Équilibre thermodynamique et corps noir

Le **corps noir** est un concept iconique de la physique statistique, que vous avez déjà étudié en détail en PHY-2215. Dans ce qui suit on utilisera le corps noir, et en particulier son spectre électromagnétique, pour approximer l'émission radiative du soleil ou de la terre; on serait en droit de penser ces deux corps célestes seraient très mal approximatés par une cavité percée d'un très petit trou, la représentation iconique du corps noir! Mais ce qui importe vraiment ici c'est l'**équilibre thermodynamique**, autrement dit le champs de radiation doit être en équilibre thermique avec la matière, ce qui ne sera possible que si le flux radiatif reçu ou perdu (observable) demeure beaucoup plus petit que le contenu thermique du système durant la période d'observation. Pour une étoile comme le soleil, l'énergie perdue radiativement par sa surface (la photosphère) n'est qu'une minuscule fraction du contenu thermique de l'intérieur. C'est vrai aussi pour la Terre, même si on ne s'en tient qu'à son atmosphère.

Si le système est en équilibre thermodynamique, alors le spectre électromagnétique est entièrement déterminé par la température T du corps noir lui étant associé; c'est la **Loi de Planck**, ou spectre du corps noir. Exprimé en terme de la longueur d'onde λ :

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/\lambda k_B T) - 1}, \quad [\text{W m}^{-3} \text{sr}^{-1}] \quad (3.1)$$

où $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J s}$ est la constante de Planck, et $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ la constante de Boltzmann. Attention aux unités ici, $B_\lambda(T)$ est un flux spectral d'énergie, se mesurant en Watt par mètre cube par steradian; soit la quantité d'énergie émise par intervalle de longueur d'onde par unité de surface émettrice par unité d'angle solide du faisceau lumineux (voir Fig. A.3 au besoin). Notons finalement qu'un corps noir émet sa radiation de manière spatialement **isotrope**, i.e. sans aucune dépendance sur la direction d'émission.

La Figure 3.1 présente une série de spectres de corps noir, couvrant les plages de longueurs d'onde et de températures qui seront particulièrement importantes pour ce cours. Sur une telle échelle linéaire en longueur d'onde, à basses températures ($T \lesssim 1000 \text{ K}$) le spectre est plutôt plat, mais à plus hautes température développe un pic marqué aux courtes longueurs d'onde. Il est facile de montrer, en dérivant le membre de droite de l'éq. (3.1), que le pic du spectre du

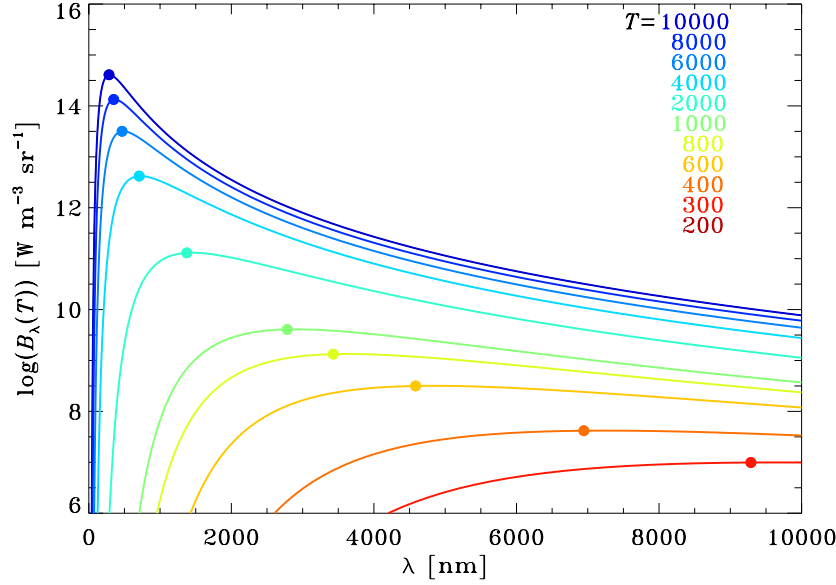


Figure 3.1: Spectre du corps noir, pour diverses températures d'intérêt (indiquées en degrés Kelvin). Les points marquent le pic de chaque spectre, correspondant à la Loi de déplacement de Wien (3.2). Notez l'échelle verticale logarithmique.

corps noir est situé à une longueur d'onde $\lambda_{\max}$ (en $\text{nm} \equiv 10^{-9} \text{ m}$) donnée par:

$$\lambda_{\max} = \frac{2.897 \times 10^6}{T} \quad [\text{nm}] \quad (3.2)$$

avec T en degrés Kelvin. C'est la **Loi de déplacement de Wien**. On peut vérifier que le spectre "corps noir" du soleil ($T \simeq 6000 \text{ K}$) pique à $\lambda_{\max} \simeq 480 \text{ nm}$, et celui de la Terre ($T \simeq 300 \text{ K}$) à $\simeq 10^4 \text{ nm}$, ou encore $10 \mu\text{m}$.

Le flux d'énergie émise par une surface à température T dans l'hémisphère la recouvrant se calcule en intégrant la Loi de Planck (3.1) sur les longueurs d'onde. On obtient ainsi la **Loi de Stefan**:

$$F = \sigma T^4, \quad [\text{W m}^{-2}] \quad (3.3)$$

où la constante de Stefan-Boltzmann σ est donnée par

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}. \quad (3.4)$$

Connaissant (c'est mesurable!) le rayon ($R_{\odot} = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$) et la luminosité ($L_{\odot} = 3.83 \times 10^{26} \text{ W}$) du soleil, on peut définir une **température effective** via la Loi de Stefan:

$$L_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T^4 \quad \rightarrow \quad T_{\text{eff}} = \left(\frac{L_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^2 \sigma} \right)^{1/4} \quad (3.5)$$

Pour le soleil, on arrive à $T_{\text{eff}} = 5770 \text{ K}$. On peut évidemment faire la même chose pour la Terre.

3.2 Le spectre électromagnétique du soleil

La Figure 3.2 montre le spectre d'émission électromagnétique observée du soleil, sur une plage de longueurs d'onde allant de l'EUV à l'infrarouge moyen¹ (voir Tableau A.2 pour la définition des différents domaines du spectre électromagnétique). Les fortes fluctuations avec la longueur d'onde dans l'UV et le visible ne sont pas du bruit instrumental ou des erreurs de mesure, mais des variations véritables, dues à la présence de raies spectrales d'absorption produites dans la photosphère du soleil. L'encadré en bleu montre le spectre en plus de détail sur une petite plage de longueur d'onde 500–550nm. La profonde structure présente dans l'intervalle 517–519nm, par exemple, correspond à un triplet du MgI, sur lequel se superpose une raie du FeI; entre 519 et 520nm, on a quatre raies du Fer et une raie du Titane. L'avènement de la spectroscopie quantitative dans la seconde moitié du dix-neuvième siècle marque vraiment la naissance de l'astrophysique (en tant que discipline distincte de l'astronomie du temps), puisque qu'elle a permis de déterminer la composition chimique et les conditions physiques (pression, température, etc.) dans les atmosphères du soleil et des étoiles.

Les courbes vertes sur le graphique donnent le spectre attendu pour un corps noir de température $T = 5770\text{ K}$. Si on oublie les raies spectrales, c'est tout de même une très bonne représentation du spectre solaire véritable dans l'infrarouge, tout-à-fait acceptable aussi jusqu'au milieu du visible. Cependant, le spectre véritable est sous-estimé de $\sim 20\text{--}25\%$ dans le vert et le bleu, et ça se gâte rapidement dès qu'on entre dans l'ultraviolet rapproché, le flux réel étant maintenant très significativement sous la valeur attendue du corps noir. Dans l'ultraviolet, les raies spectrales associées aux métaux présents dans l'atmosphère du soleil, même en très faibles concentrations comparé à l'Hydrogène ou l'Hélium, sont tellement nombreuses et spectralement denses qu'elles abaissent effectivement le niveau du continu. Le flux manquant doit alors “sortir” à d'autres longueurs d'onde où l'opacité photosphérique est moindre. C'est ce qui se retrouve à causer l'excès de flux aux plus courtes longueur d'onde du visible. Tout ceci conduit à la forme curieusement triangulaire du pic d'émission à $\simeq 450\text{ nm}$ sur le graphique du haut, plutôt que la forme plus arrondie qui caractérise le spectre du corps noir.

De l'EUV aux rayons-X, le flux spectral observé est très faible, mais montre peu de dépendance sur la longueur d'onde, ce qui est tout à fait contraire à ce que prédit la théorie du corps noir, suggérant une origine dans un phénomène physique loin de l'équilibre thermodynamique. Cette émission est associée à l'activité solaire, et plus précisément à la dissipation très spatiotemporellement intermittente de l'énergie magnétique dans la basse couronne solaire.

3.3 L'irradiance solaire

L'**irradiance solaire totale** (TSI) est définie comme le flux radiatif d'énergie (en Watt par mètre carré), intégré sur toutes les longueurs d'onde du spectre électromagnétique, incident sur la très haute atmosphère terrestre, i.e., avant toute réflexion ou absorption, quand la Terre est à exactement une unité astronomique du Soleil ($1\text{ U.A.} \equiv 149\,597\,870.7\text{ km}$; dans tout ce qui suit j'arrondirai à $150 \times 10^6\text{ km}$!), Cette quantité est mesurée de manière continue depuis 1978 par une suite de satellites en orbite autour de la Terre.

La Figure 3.3 montre une séquence temporelle de la TSI. Il s'agit ici d'un composite assemblé à partir de mesures provenant de plus d'une douzaine de satellites; ce processus d'assemblage exige un travail substantiel de calibration des mesures d'un instrument à l'autre, mais laissons ça aux experts (voir bibliographie en fin de chapitre).

La TSI montre des variations à prime abord substantielles, mais regardez bien l'échelle verticale; les fluctuations couvrent environ 2 W m^{-2} , sur une valeur moyenne de $\simeq 1361\text{ W m}^{-2}$, soit 0.15% ! Ces fluctuations sont dues à l'activité magnétique à la surface du soleil, qui produit de régions plus sombres (taches solaires) ou plus brillantes (facules, réseau) que la photosphère non-magnétisée. La variation approximativement périodique de période $\simeq 11$ ans

¹Attention, ici c'est le flux mesuré à 1UA qui est porté en graphique, intégré sur l'angle solide sous-tendu par le Soleil vu de la Terre.

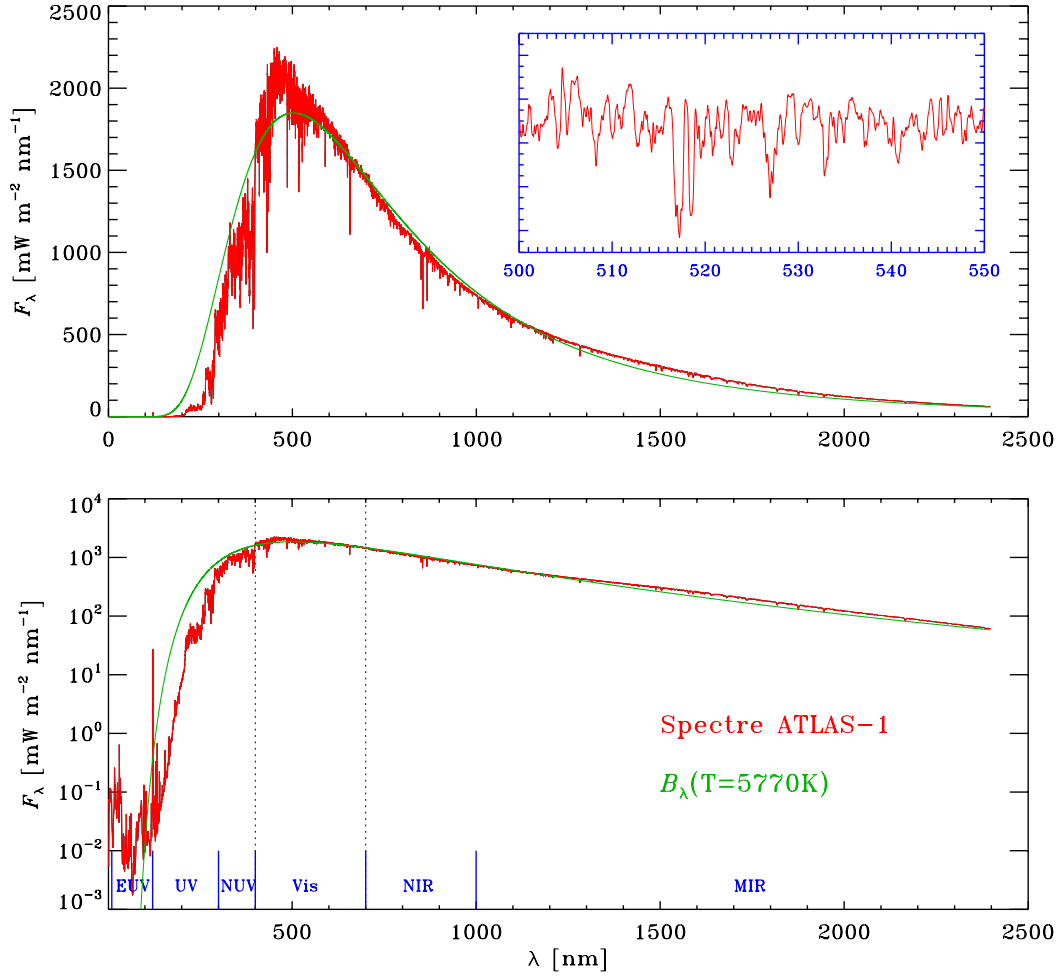


Figure 3.2: Le spectre électromagnétique du soleil, tel qu'observé de l'espace de l'extrême ultraviolet à l'infrarouge moyen, avec le flux spectral porté en graphique sur une échelle linéaire sur le graphique du haut, et logarithmique sur celui du bas. Sur ce dernier, le trait en vert est le spectre d'un corps noir à $T = 5770\text{K}$, qui offre une bonne représentation du spectre véritable dans l'infrarouge jusqu'au milieu du visible, mais en dévie de plus en plus à mesure que la longueur d'onde diminue (voir texte). Le très haut pic d'émission à 121nm, démarquant traditionnellement les domaines EUV et UV, correspond à la raie spectrale $\text{Ly}\alpha$ de l'Hydrogène. Source: Spectre Atlas-1 (G. Thuillier), sbuv.gsfc.nasa.gov/solar/reference_spectra

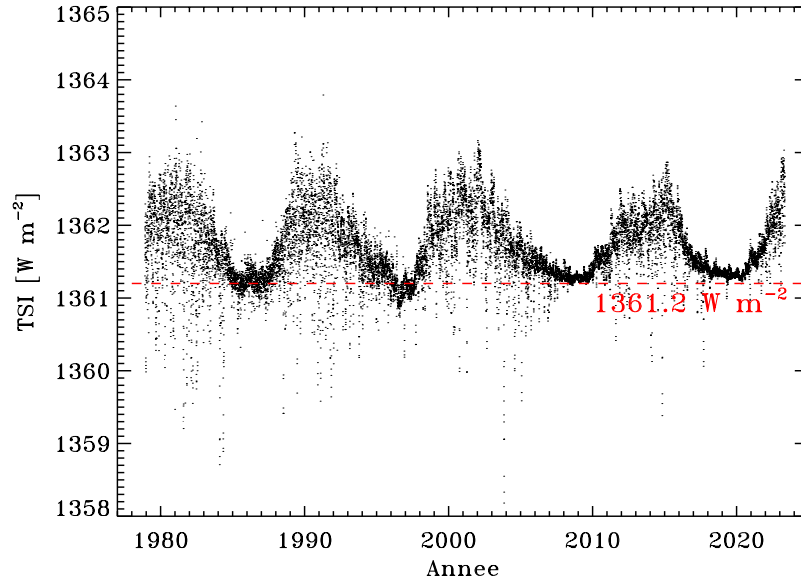


Figure 3.3: L'irradiance solaire totale depuis 1978. Chaque petit point correspond à une mesure journalière. Les fluctuations par rapport à la valeur basale de 1361 W m^{-2} sont dues à l'activité solaire, fortement modulée selon un cycle de période d'environ 11 ans (voir texte). Source: G. Kopp, <http://spot.colorado.edu/~kopp/TSI>

reflète le cycle magnétique du soleil, propulsé par un effet dynamo opérant en son intérieur. Notons cependant qu'aux courtes longueurs d'onde, la variabilité en fonction de la phase du cycle d'activité est beaucoup plus grande: $\sim 1\text{--}3\%$ dans l'UV, $\sim 10\text{--}20\%$ dans l'EUV, $\gtrsim 50\%$ pour $\text{Ly}\alpha$ à 121nm , atteignant $100\text{--}200\%$ dans les SXR; cependant, les flux sont très faibles dans ces plages de longueur d'onde, ce qui fait que la variabilité de la TSI est dominée par la variabilité dans le visible, proche ultraviolet, et proche infrarouge.

Aux fins de ce cours, il sera tout à fait acceptable de considérer la TSI comme constante dans le temps, à une valeur $S_0 = 1361.2 \text{ W m}^{-2}$, indiquée par le trait en tirets rouges sur la Fig. 3.3.

Connaissant la TSI, il est possible de calculer la **température d'équilibre** de la Terre, soit la température à laquelle l'émission radiative thermique de sa surface vers l'espace compense exactement le flux radiatif solaire incident:

$$(\pi R_{\oplus}^2) \times S_0 = (4\pi R_{\oplus}^2) \times \sigma T_{\text{eq}}^4, \quad \rightarrow \quad T_{\text{eq}} = \left(\frac{S_0}{4\sigma} \right)^{1/4}. \quad (3.6)$$

Donc pour la Terre, $T_{\text{eq}} = 278 \text{ K} \equiv 5^\circ \text{C}$, ce qui est vraiment surprenamment près de 287K , la température moyenne mesurée². On remarquera que la température d'équilibre de la Terre ne dépend pas de son rayon.

Notons finalement que le volcanisme, l'activité géothermique, et la conduction de la chaleur à travers la croûte terrestre depuis l'intérieur de la Terre, ne totalisent conjointement qu'environ 0.08 W m^{-2} ; et l'énergie déposée dans l'atmosphère par les rayons cosmiques d'origine galactique ne contribue qu'une fraction $\sim 10^{-8}$ de la TSI.

²Il y a une coïncidence ici, l'annulation quasi-exacte de deux effets allant dans des directions opposées, que nous aurons l'occasion d'étudier en détail dans ce qui suit.

3.4 Insolation

À tout moment, l'irradiance solaire illumine une surface effective de $\pi R_{\oplus}^2$, où $R_{\oplus} = 6370$ km est le rayon moyen de la Terre³. L'input énergétique total est donc de $S_0 \times \pi R_{\oplus}^2 = 173495$ TW ! Moyennée sur toute l'atmosphère, de surface $4\pi R_{\oplus}^2$ (équivalent à une moyenne journalière) on obtient une irradiance au sol de 340.3 W m^{-2} .

Ce n'est pas aussi simple cependant. L'irradiance varie en fonction de la distance Terre-Soleil, qui varie au cours de l'année; et de plus, localement, l'irradiance varie beaucoup en fonction de la latitude et des saisons en raison de l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre par rapport au plan de son orbite autour du Soleil. Ces effets s'avèrent à produire de très substantielles variations de l'irradiance au sol à différents points à la surface de la Terre, qui seront très importantes pour la suite des choses.

Commençons par définir l'**angle zénithal solaire** θ_S , soit l'angle soutendu par le segment reliant un point à la surface de la Terre au soleil, et la verticale locale (voir Figure 3.4). Un élément de surface dA interceptera alors un flux $\propto S_0 \cos \theta_S$, par simple effet de projection. H16, §2.7

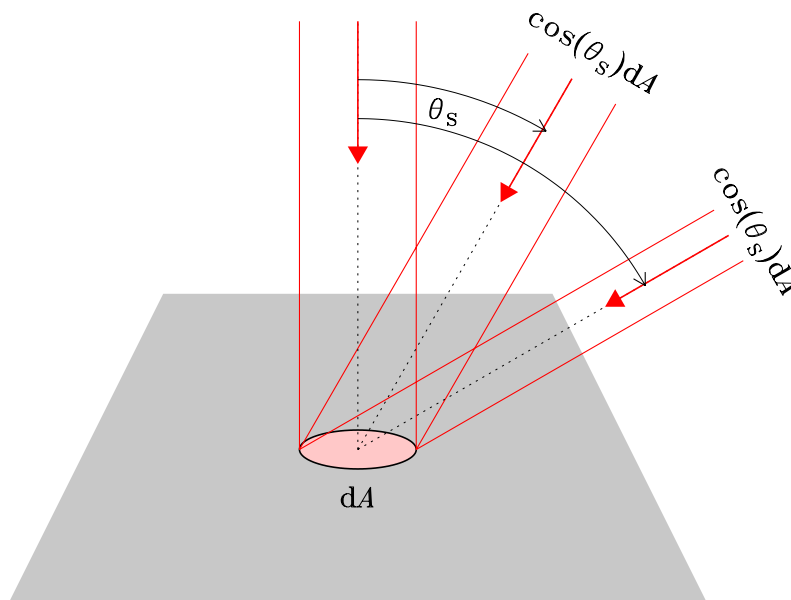


Figure 3.4: Variation de l'insolation Q d'un élément de surface dA avec l'angle zénithal θ_S . Même si l'irradiance S_0 ne dépend pas de θ_S , Q varie en $\cos \theta_S$, correspondant à l'irradiance effective sur la projection de dA dans un plan perpendiculaire à la radiation incidente. Au lever et coucher du soleil, $\theta_S = 0$.

L'**insolation** (Q , mesurée en W m^{-2}), soit l'irradiance effective reçue par l'élément de surface

³La Terre n'est pas exactement sphérique, à cause de sa rotation; son rayon équatorial est de 6378 km, tandis que son rayon polaire est de 6357 km. Nous utiliserons $R_{\oplus} = 6370$ km dans tout ce qui suit.

dA, sera alors donnée par:

$$Q = S_0 \left(\frac{\bar{d}}{d} \right)^2 \cos \theta_S, \quad [\text{W m}^{-2}] \quad (3.7)$$

où le facteur $(\bar{d}/d)^2$ capture la variation annuelle de la distance Terre-Soleil, $\bar{d}$ étant par définition égal à une unité astronomique.

Il faut maintenant quantifier comment varie θ_S en fonction de l'heure de la journée et des saisons. Nous devons définir deux autres angles: (1) l'**angle horaire** h , soit la longitude ($\in [-\pi, \pi]$) du point subsolaire par rapport à sa longitude à midi solaire (correspondant à $h = 0$); et (2) l'**angle de déclinaison** δ , soit la latitude du point à la surface de la Terre où le soleil est au zénith à midi. Ceci permet de relier l'angle zénithal au midi solaire à la latitude locale ϕ : $\theta_S = \phi - \delta$. Notons que δ varie en fonction des saisons.

Un développement mathématique plutôt fastidieux en trigonométrie sphérique, dont je nous fait grâce, permet d'exprimer l'angle zénithal solaire en fonction de la latitude ϕ , l'angle de déclinaison δ , et l'angle horaire h (voir bibliographie en fin de chapitre). Le résultat de cette manoeuvre est:

$$\cos \theta_S = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos h \quad (3.8)$$

Une valeur $\cos \theta_S < 0$ indique que le soleil est sous l'horizon, i.e., c'est la nuit! Les lever/coucher de soleil se produisent à $\theta_S = \pi/2$, les deux angles horaires correspondant (h_0) étant donnés par l'expression:

$$\cos h_0 = -\tan \phi \tan \delta \quad (3.9)$$

La Figure 3.5 illustre la trajectoire du soleil dans le plan du ciel $[h, \theta_S]$, aux solstices et aux équinoxes. L'angle horaire est exprimé en terme de l'**heure solaire locale**, $h_S = 12(1+h/(2\pi))$. Par définition, le soleil atteint son élévation maximale à $h_S = 12:00:00$, directement au Sud (dans l'hémisphère Nord), se lève exactement à 06:00:00 directement à l'Est aux équinoxes, etc. L'information contenue dans la Figure 3.5 est du genre à considérer dans le choix de l'orientation et inclinaison optimales pour des panneaux solaires!

En climatologie, on est souvent intéressé à la moyenne journalière ($\bar{Q}$) de l'insolation locale Q . Il s'agit "simplement" de substituer (3.8) dans (3.7), et d'intégrer de $-h_0$ à h_0 , cette quantité étant donnée par (3.9), et divisant le tout finalement par 2π . Notons que à une latitude et un jour donnés, δ et ϕ peuvent être considérés comme des constante du point de vue de cette intégrale. On trouve ainsi:

$$\bar{Q} = \frac{S_0}{\pi} \left(\frac{\bar{d}}{d} \right)^2 (h_0 \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \sin h_0) . \quad (3.10)$$

Le calcul de $\bar{Q}$ est compliqué par le fait que δ ne varie pas exactement sinusoidalement à cause de la variation annuelle de la distance Soleil-Terre, l'orbite étant elliptique ($\varepsilon = 0.0167$). Ce dernier calcul est passablement plus complexe qu'on pourrait l'imaginer *a priori*. Cependant, aux fins de la modélisation atmosphérique/climatique, au niveau de précision requis on peut se contenter des premiers termes d'un développements en séries de Fourier. On commence par définir un angle θ_d en fonction du jour (n) de l'année, débutant avec $n = 0$ le 1 janvier:

$$\theta_d = \frac{2\pi n}{365}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 364 \quad (3.11)$$

Les séries de de Fourier requises sont:

$$\delta(\theta_d) = \sum_{m=0}^3 (a_m \cos(m\theta_d) + b_m \sin(m\theta_d)) \quad (3.12)$$

$$\left(\frac{\bar{d}}{d(\theta_d)} \right)^2 = \sum_{m=0}^2 (a_m \cos(m\theta_d) + b_m \sin(m\theta_d)) \quad (3.13)$$

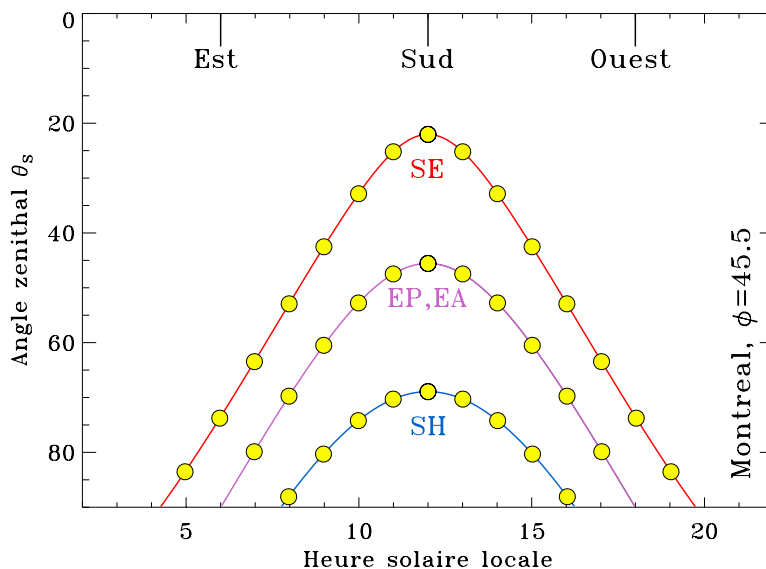


Figure 3.5: Trajectoire du soleil dans le ciel, tel que vu de Montréal (latitude $\phi = 45.5^\circ$), aux solstices d'été (SE) et hiver (SH), et aux équinoxes de printemps et automne (ES, EA), les trajectoires étant identiques aux deux équinoxes. L'angle horaire h est exprimé en termes de l'heure solaire locale ($h = 0 \equiv 12:00 \equiv \text{Sud}$). Les "soleils" (cercles jaunes) sont tracés à intervalle d'une heure.

Table 3.1: Coefficients de Fourier pour δ et d

m	$a_m(\delta)$	$b_m(\delta)$	$a_m(d)$	$b_m(d)$
0	0.006918	0	1.000110	0
1	-0.399912	0.070257	0.034221	0.001280
2	-0.006758	0.000907	0.000719	0.000077
3	-0.002697	0.001480		

Les coefficients requis sont listés au Tableau 3.1. On notera qu'on arrête à $m = 3$ pour δ , et $m = 2$ pour $(\bar{d}/d)^2$.

Il ne reste plus qu'à substituer ces expressions dans (3.10) pour calculer l'insolation journalière moyenne $\bar{Q}$ en fonction de la latitude ϕ et du jour de l'année. Le résultat d'un tel calcul est porté en graphique sur la Figure 3.6, sous la forme d'isocontours de $\bar{Q}$ dans le plan jour-latitude. L'insolation se maintient aux alentours de 400 W m^{-2} toute l'année dans les régions équatoriales, mais montre des variations beaucoup plus substantielles aux plus hautes latitudes; par exemple, à Montréal (latitude $\phi = 45.5^\circ$), $\bar{Q}$ passe de 121 à 483 W m^{-2} du solstice d'hiver (SH) à celui d'été (SE). On remarquera qu'aux solstices, $\bar{Q}$ est plus grand au pôle "été" qu'à l'équateur, et ce malgré un angle zénithal approchant 90° , simple conséquence du fait que le soleil ne se couche jamais. Notons finalement qu'aux solstices l'insolation maximale est 6.9% plus grande dans l'hémisphère Sud qu'elle ne l'est dans l'hémisphère Nord, conséquence du fait que la Terre est légèrement plus près du Soleil durant l'été austral que septentrional.

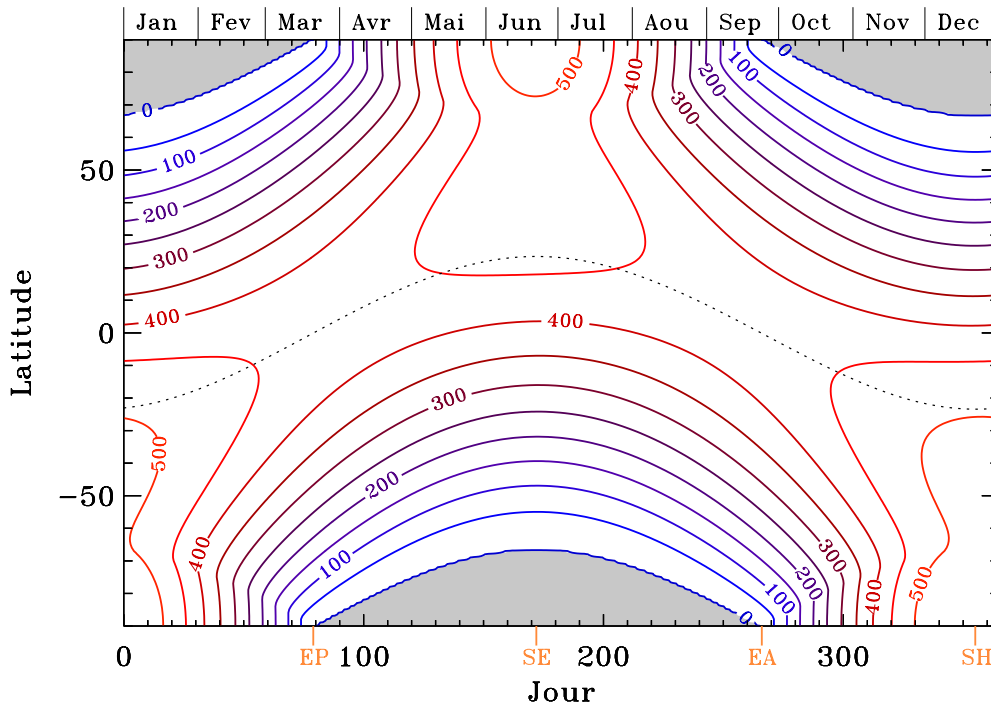


Figure 3.6: Insolation journalière moyenne en fonction du jour de l’année et de la latitude. Les valeurs des contours sont en W m^{-2} , et les régions grises correspondent aux nuits polaires septentrionales et australes. Le trait pointillé indique la variation de l’angle de déclinaison δ au cours de l’année. Les date des solstices (SE, SH) et équinoxes (EP, EA) sont indiquées le long de l’axe horizontal.

3.5 Absorption

Il est clairement d’intérêt de calculer la fraction de l’irradiance solaire qui est absorbée par l’atmosphère terrestre et/ou les océans. Il est important de bien distinguer l’**absorption**, qui transfère l’énergie des ondes électromagnétiques en énergie thermique du milieu, et la **dispersion** (sujet de la §3.6), qui redistribue spatialement la radiation électromagnétique incidente sans en diminuer le contenu énergétique.

H16, §3.6

On considère la géométrie illustrée sur la Figure 3.7. Le soleil (* orange) est à un angle zénithal θ_S , et illumine le haut de l’atmosphère (ellipse bleue) d’un flux radiatif F_∞ (unités: W m^{-2}). Ce faisceau lumineux traverse la colonne d’atmosphère (cylindre bleu) pour arriver finalement au sol (ellipse orange). Il s’agit de calculer l’atténuation du flux radiatif incident (F_∞) dû à l’absorption par le gaz atmosphérique contenu dans la colonne traversée.

En bonne première approximation, on peut supposer que la fraction (dF) du flux radiatif (F) absorbé sur une longueur ds le long de la trajectoire du rayon lumineux est linéairement proportionnelle à la densité du milieu absorbant, la constante de proportionnalité étant le **coefficient d’absorption** (k ; unités: $\text{m}^2 \text{kg}^{-1}$):

$$\frac{F(s + ds) - F(s)}{F(s)} \equiv \frac{dF}{F} = -k\rho ds . \quad (3.14)$$

Attention, comme F décroît à mesure que s augmente en suivant le faisceau lumineux vers la surface, le signe “−” soit être ajouté “à bras” si on veut que k soit une quantité définie

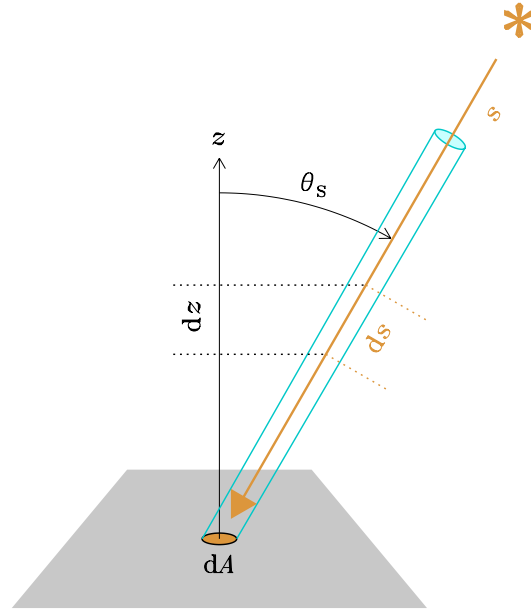


Figure 3.7: Géométrie de l'absorption d'un faisceau lumineux (flèche orange) en provenance du soleil (* orange) à un angle zénithal θ_S et traversant une colonne de l'atmosphère terrestre (cylindre bleu) avant d'arriver au sol (en gris). La coordonnée s est définie le long de la ligne du faisceau, et augmente dans le sens de la flèche orange. L'angle zénithal θ_S permet de relier l'élément infinitésimal de distance de long du faisceau, ds , à la variation correspondante en altitude, dz , via $dz = -ds \cos \theta_S$.

positivement. Les unités de k , surface/masse, indiquent que k représente une forme de section efficace d'absorption par unité de masse du milieu. La quantité $1/(k\rho)$ a des unités de longueur, est appelée **longueur d'atténuation**, et est aussi souvent utilisée pour mesurer l'absorptivité d'un milieu. Son inverse aussi, avec des unités m^{-1} . Toujours faire TRÈS ATTENTION quand vous recherchez ces quantités sur le Web, ou ailleurs.

La géométrie du système (viz. Figure 3.7) permet d'écrire:

$$dz = -\cos \theta_S ds . \quad (3.15)$$

Attention encore une fois, le signe “−” vient du fait que z augmente vers le haut, tandis que $s = 0$ au haut de l'atmosphère et augmente en suivant le faisceau vers le sol. En terme de l'altitude z l'éq. (3.14) devient donc:

$$\cos \theta_S \frac{dF}{dz} = k\rho F . \quad (3.16)$$

Introduisons maintenant la **profondeur optique** (τ), une quantité adimensionnelle définie comme

$$d\tau = -k\rho dz , \quad (3.17)$$

ou encore,

$$\tau = \int_z^\infty k\rho dz . \quad (3.18)$$

Je vous laisse vérifier que τ est bien une quantité adimensionnelle. Cette définition de la profondeur optique permet de réécrire l'éq. (3.16) sous la forme :

$$\cos \theta_S \frac{dF}{d\tau} = -F, \quad (3.19)$$

dont la solution est alors tout simplement:

$$F(z) = F_\infty \exp \left(-\frac{\tau}{\cos \theta_S} \right), \quad (3.20)$$

décrivant l'atténuation exponentielle du flux radiatif due à l'absorption le long du faisceau lumineux. Ici F_∞ est effectivement le flux radiatif au haut de l'atmosphère. En sciences atmosphérique cette relation est connue comme la *Loi de Lambert-Bouguer-Beer*, ou souvent simplement en plus compact, **Loi de Beer**.

Le terme exponentiel au membre de droite de l'éq. (3.20) permet une interprétation physique simple: si on imagine notre faisceau lumineux comme un ensemble de photons, alors le terme exponentiel donne une mesure de la probabilité qu'un photon soit absorbé lors de sa traversée d'une colonne atmosphérique inclinée par θ_S par rapport au zénith et s'étendant de la haute atmosphère jusqu'à une altitude z . Cette interprétation probabiliste implique alors que si la colonne contient J espèces d'absorbeurs distincts, chacun avec sa densité ρ_j et coefficient d'absorption k_j , alors l'éq. (3.20) deviendrait

$$F(z) = F_\infty \prod_{j=1}^J \exp \left(-\frac{\tau_j}{\cos \theta_S} \right), \quad (3.21)$$

qui se ramène à la forme (3.20) si on définit comme suit une profondeur optique totale τ_{tot} :

$$\tau_{\text{tot}} = \sum_{j=1}^J \tau_j, \quad (3.22)$$

où chaque τ_j est calculé selon (3.18) avec les ρ_j et k_j appropriés pour chaque espèce absorbante.

La Loi de Beer peut paraître très simple, mais il faut bien comprendre que toute la complication, soit la structure et composition chimique de l'atmosphère, se retrouve "cachée" dans la profondeur optique τ .

Revenons à notre atmosphère plan-parallèle de la §2.1.3; on a vu que la densité ρ décroît exponentiellement avec l'altitude, viz. l'éq. (2.6). Substituant ceci au membre de droite de (3.18) et supposant k constant dans l'atmosphère, l'évaluation explicite de l'intégrale produit:

$$\tau = \frac{p_0}{g} k \exp(-z/H), \quad (3.23)$$

où p_0 est la pression à altitude zéro et $H = k_B T / \bar{m} g$ est la hauteur de colonne telle qu'introduite à la §2.1.3. Pour notre atmosphère plan-parallèle isotherme, on peut montrer (je vous le laisse en exercice!) que

$$\frac{d\tau}{dz} = -\frac{\tau}{H}. \quad (3.24)$$

L'évaluation de (3.23) à $z = 0$ conduit à $\tau_0 = p_0 k / g$; La quantité p_0 / g a des unités de kg m^{-2} , soit la masse totale contenue dans une colonne atmosphérique de 1 m^2 de section.

Il s'agit maintenant de calculer le taux d'absorption d'énergie (unités: W m^{-3}) dans la colonne atmosphérique. Pour un segment de colonne de hauteur dz situé à une altitude z , l'énergie absorbée sera égale à la différence du flux entre z et $z + dz$, autrement dit on doit calculer

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dz} &= \frac{d\tau}{dz} \frac{dF}{d\tau}, \\ &= -\frac{d\tau}{dz} \frac{F_\infty}{\cos \theta} \exp(-\tau / \cos \theta_S), \\ &= \frac{\tau}{H} \frac{F_\infty}{\cos \theta} \exp(-\tau / \cos \theta_S). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ici la seconde égalité résulte de l'utilisation de (3.20), et la troisième de (3.24). Un petit exercice en fin de chapitre vous fera démontrer que l'absorption est maximale à $\tau/\cos\theta_S = 1$, et donc qu'à mesure que l'angle zénithal augmente, l'absorption maximale se produit de plus en plus haut dans l'atmosphère.

Nous y sommes presque... L'augmentation de la température atmosphérique à une altitude z en conséquence de l'absorption du flux radiatif est donnée par

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dF}{dz} , \quad (3.26)$$

la dérivée partielle au membre de gauche venant du fait que suite à l'absorption du flux radiatif, qui dépend de z , la température évoluera en fonction de z et t , et ce même si l'atmosphère était initialement isotherme. Utilisant à bon escient l'éq. (3.16), ceci peut s'exprimer comme:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c_p \cos\theta_S} F(z) , \quad (3.27)$$

démontrant que le chauffage local ne dépend que des propriétés physique du milieu (c_p et k), en plus évidemment du flux radiatif $F(z)$.

Tout ceci peut paraître passablement simple, mais en réalité la complexité physique du phénomène se cache dans le coefficient d'absorption k ; en général ce dernier dépend de la longueur d'onde λ de la radiation incidente, et de la composition chimique du milieu absorbeur, incluant souvent les concentrations de constituants mineurs, par exemple la vapeur d'eau atmosphérique dans le domaine spectral de l'infrarouge. On y reviendra sous peu (§§3.8 et 3.9).

3.6 Dispersion

L'absorption d'une onde lumineuse, telle que considérée précédemment, réduit son énergie au profit de l'énergie thermique du milieu absorbeur. La **dispersion** est une autre forme de réduction de l'énergie d'un faisceau d'ondes électromagnétiques (i.e., réduction de la grandeur du flux de Poynting), cette fois sans chauffage local du milieu: l'énergie est plutôt redirigée dans des directions autres que celle du faisceau lumineux incident. La Figure 3.8 illustre ceci schématiquement, du point de vue ondulatoire. Une onde plane arrivant ici de la gauche induit une oscillation d'une "particule" (point noir au centre) à la fréquence de l'onde incidente, ce qui en retour émet un front d'onde circulaire de même fréquence, un peu comme le ferait une bouée flottant sur une interface air-eau en présence de vagues.

En contexte atmosphérique, c'est le champ électrique oscillant de l'onde électromagnétique qui est la "vague"; agissant sur les électrons d'un atome ou molécule, le passage de l'onde électromagnétique induit un moment dipolaire, lui-même oscillant, et émettant donc une onde électromagnétique secondaire isotropiquement dans le plan perpendiculaire à l'axe du dipôle induit, équations de Maxwell obligent. Notons que ce processus conserve l'énergie électromagnétique. Vu du point de vue corpusculaire, la dispersion consiste à absorber un photon et le ré-émettre à la même énergie, mais dans une direction aléatoire, comme dans une collision élastique.

3.6.1 La dispersion de Rayleigh

L'efficacité de la dispersion est fortement influencée par les propriétés physiques du milieu dans lequel se propage l'onde électromagnétique, ainsi que par la longueur d'onde de cette dernière. Une théorie générale de la dispersion a été développée par Gustav Mie en 1908, mais c'est vraiment du costaud; nous nous limiterons ici au cas limite déjà étudié par Rayleigh en 1871.

La théorie développée par Rayleigh est applicable quand la taille d des atomes/molécules impliquées est beaucoup plus petite que la longueur d'onde λ de l'onde électromagnétique incidente. Exprimé en coordonnées sphériques avec l'axe de symétrie aligné avec la direction de propagation d'une onde incidente d'intensité I_0 et l'origine du système coïncidant avec

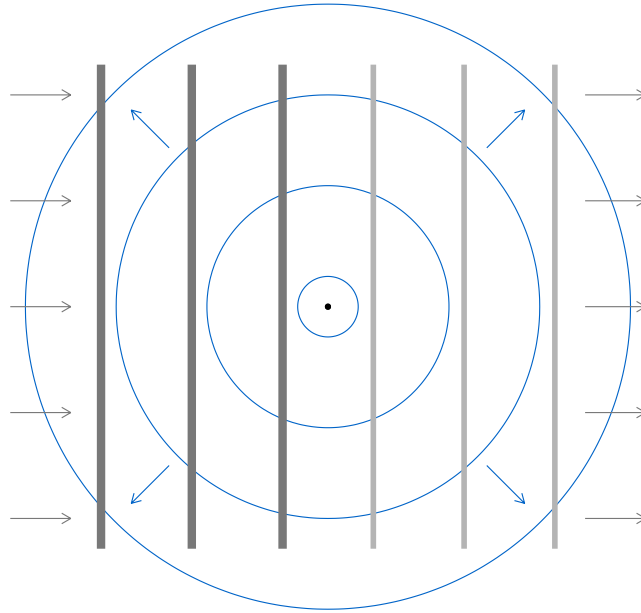


Figure 3.8: représentation classique (lumière $\equiv$ onde électromagnétique) de la dispersion de Rayleigh. Une onde électromagnétique plane incidente (traits verticaux gris) induit une oscillations harmonique des électrons dans un atome ou molécule (point noir), conduisant à l'émission d'un train d'onde électromagnétique secondaire (cercles bleus) à la même fréquence que l'onde incidente (voir texte).

la position de la particule produisant la dispersion, la distribution spatiale de l'intensité I_s dispersée à une position (r, θ) est donnée par:

$$\frac{I_s(r, \theta)}{I_0} = \frac{1 + \cos^2 \theta}{2r^2} \left(\frac{2\pi}{\lambda^4} \right)^4 \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2 \left(\frac{d}{2} \right)^6, \quad (3.28)$$

où n est l'indice de réfraction du milieu et l'angle polaire θ est mesuré par rapport au vecteur d'onde $\mathbf{k}$ de l'onde. La **section efficace** de dispersion est donnée par la moyennes angulaire du cot droit de l'expression ci-dessus:

$$\sigma_s = \frac{2\pi^5}{3} \frac{d^6}{\lambda^4} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2, \quad [\text{m}^2] \quad (3.29)$$

Pour une onde électromagnétique au pic du visible ($\lambda = 532 \text{ nm}$) se propageant dans l'air ($n = 1.000293$) et dispersé par une molécule d'azote (N_2 ; $d \simeq 1.25 \text{ nm}$), on trouve $\sigma_s = 5 \times 10^{-31} \text{ m}^2$. L'atténuation de l'intensité à une position z le long de la trajectoire de l'onde est alors donnée par le produit de cette section efficace et du nombre N de molécules présentes dans le milieu:

$$\frac{I(z)}{I_0} = \sigma_s \times N. \quad (3.30)$$

À TPN, on a $\sim 2 \times 10^{25}$ molécules de N_2 par mètre cube, donc une atténuation de $\sim 10^{-5}$ par mètre d'atmosphère traversé. Sur une hauteur de colonne de 8km, l'intensité est donc atténuée de 8%; on monte à 25% à 400nm, et tombe à 3% à 700nm; la dépendance en $1/\lambda^4$ se fait rapidement sentir !

Mentionnons finalement que la couleur bleue du ciel (sans nuage), et la couleur rouge des levers et couchers de soleil, sont des conséquences directes de la dispersion de Rayleigh.

3.6.2 L'irradiance du ciel

MU, §5.3

L'impact net de la dispersion sur l'irradiance au sol est moins significatif qu'on pourrait à prime abord l'imaginer; en première approximation, si la dispersion est vraiment isotrope spatialement, la moitié du flux radiatif extrait d'un faisceau d'ondes électromagnétique par dispersion traversant une colonne atmosphérique (viz. Fig. 3.7) est réémis sur le 2π sterradian sous-tendu par la surface, et l'autre moitié sur l'autre 2π sterradian, vers l'espace. L'irradiance au sol (en W m^{-2}) est donc celle provenant du soleil réduite par la fraction dispersée (S_p), plus l'irradiance diffuse du ciel (S_d) intégrée sur tout le ciel (2π steradian):

$$S_{\text{tot}} = S_p + S_d , \quad (3.31)$$

Comme on l'a vu (viz. Fig. 3.4), le flux solaire sur une surface (horizontale) est réduit d'un facteur $\cos \theta_S$, où θ_S est l'angle zénithal solaire, par simple géométrie. La Loi de Beer (§3.5) est applicable ici, en remplaçant la profondeur optique d'absorption par la profondeur optique de dispersion (τ_{tot}); dans un cas comme dans l'autre, l'atténuation du faisceau est proportionnel à la masse d'absorbeur/disperseur traversé. On écrira donc:

$$S_p = S_0 \cos \theta_S \exp(-\tau_{\text{tot}} m) , \quad (3.32)$$

où $S_0 = 1361 \text{ W m}^{-2}$ est l'irradiance solaire incidente sur la haute atmosphère terrestre (§3.3) et θ_S l'angle zénithal solaire (Fig. 3.4). La quantité m est une mesure indirecte de l'altitude, définie comme la masse d'une colonne atmosphérique s'élevant d'une altitude z_0 par rapport à une colonne complète s'élevant à partir du niveau de la mer. Pour une atmosphère en équilibre hydrostatique et isotherme (ou pas loin):

$$m = \left(\frac{p(z_0)}{p_0} \right) \left(\frac{1}{\cos \theta_S} \right) , \quad (3.33)$$

p_0 étant la pression atmosphérique au niveau de la mer, et $p(z_0)$ la pression de surface à une position d'altitude z_0 à la surface de la Terre où on cherche à calculer S_{tot} . Il reste à spécifier la profondeur optique totale τ_{tot} , associée à l'ensemble des constituants atmosphériques produisant la dispersion. On se limite souvent à calculer (ou mesurer) deux contributions, une (τ_m) due aux molécules (pour lesquelles la théorie de Rayleigh est appropriée), et une seconde associée aux **aérosols**, particules couvrant un intervalle de taille $0.1\text{--}1 \mu\text{m}$. On a donc $\tau_{\text{tot}} = \tau_m + \tau_a$, avec comme valeur typique $\tau_m \simeq 0.3$ (valeur exacte dépendant principalement du contenu atmosphérique en vapeur d'eau), et $\tau_a \simeq 0.05\text{--}0.5$, la valeur exacte dépendant du niveau de pollution.

Le calcul de l'irradiance diffuse par l'ensemble des constituants atmosphériques est plus complexe, car il implique la distribution spatiale de la radiation dispersée (viz. l'éq. (3.28)), intégrée sur tout le ciel. Certaines expressions approximatives utiles ont néanmoins été développées, et validées empiriquement (i.e., à partir de mesures); par temps clair, i.e., sans nuages:

$$S_d = 0.3 S_0 [1 - \exp(-m \tau_{\text{tot}})] \cos \theta_S , \quad (3.34)$$

La Figure 3.9 montre la variation de S_p (trait tirets-points), S_d (traits en tirets) et S_{tot} (traits pleins) en fonction de l'angle zénithal solaire θ_S , tels que calculé à l'aide des expressions ci-dessus. Le calcul a été effectué pour deux "sites", le premier un site "urbain" chargé en aérosols et au niveau de la mer (en rouge), et un site de plus haute altitude loin des villes ou autre source d'aérosols (en vert). Dans les deux cas on a posé $\tau_m = 0.3$. On constate que, de manière générale et sauf pour une heure ou deux après le lever du soleil et avant son coucher, un site de plus haute altitude et loin des grandes villes, donc moins chargé en aérosols (traits verts), verra une irradiance diffuse atteignant rarement plus $\sim 10\%$ de l'irradiance solaire au sol; tandis qu'à un site de plus basse altitude et chargé en aérosols (traits rouges), l'irradiance du ciel clair (sans nuages) peut facilement compter pour jusqu'à un tiers de l'irradiance totale au sol.

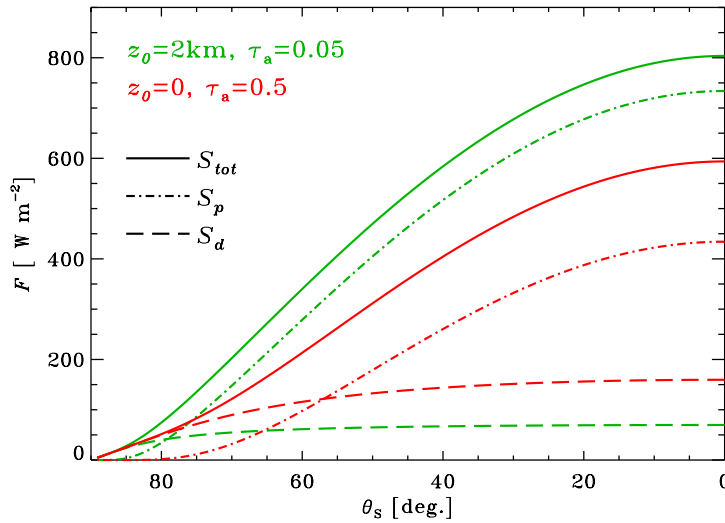


Figure 3.9: Irradiance au sol à deux combinaisons d'altitudes (z_0) et de densités d'aérosol (spécifiée via τ_a), avec $\tau_m = 0.3$ dans les deux cas. L'irradiance solaire au sol S_p (tirets-points), l'irradiance diffuses du ciel S_d (tirets) et leur somme (trait plein) sont portés en graphique en fonction de l'angle zénithal solaire θ_s .

3.6.3 Les nuages: dispersion et absorption

Qu'en est-il de tout ça quand des nuages sont présents? Un nuage est constitué d'un ensemble de petite gouttelettes d'eau ou cristaux de glace ayant des tailles suffisamment petites pour demeurer en suspension dans l'air pendant de longues périodes de temps (on verra pourquoi et comment au chapitre suivant). On parle ici de gouttelettes de diamètre d variant (typiquement) de 5 à $50\mu\text{m}$; soit beaucoup plus grand que les longueurs d'onde où le spectre électromagnétique du soleil est maximal. On est maintenant dans le régime $d \gg \lambda$, soit le régime opposé à celui caractérisant la dispersion de Rayleigh. Par contre, dans l'infrarouge moyen, dans le pic de l'émission thermique de la Terre, on aurait $d \sim \lambda$; la situation la plus compliquée !

Comme dans le visible λ est beaucoup plus petit que le diamètre des gouttelettes, et donc on peut approcher le problème en terme de réflexion/transmission à une interface eau-air de forme sphérique. Considérons une gouttelette comme une sphère liquide (H_2O) d'indice de réfraction n et de rayon r . Une onde électromagnétique incidente sera en partie réfléchiée et en partie transmise à l'interface (voir §A.2). La partie réfléchiée sur la partie supérieure de la gouttelette le sera dans une direction approximativement contraire au faisceau incident; une partie du faisceau transmis traversera la gouttelette et ressortira de l'autre côté substantiellement déviée (voir Figure 3.10); une autre partie subira une (ou plusieurs) réflexion interne et ressortira (éventuellement) dans une direction très différente du faisceau incident; tout ça produit une forme de dispersion anisotrope.

De plus, l'onde lumineuse sera également atténuée par absorption à l'intérieur de la gouttelette⁴. On a donc à la fois transmission, dispersion et absorption. Mais dans les trois cas, l'effet est de retirer une partie du flux du faisceau incident de sa direction initiale de propagation. Pour la lumière visible, le problème est de nature balistique: une goutte sphérique de rayon r ayant une section πr^2 , il s'agit simplement de calculer, sur la hauteur de la colonne atmosphérique, la surface de la section de la colonne qui est masquée par l'ensemble des gouttelettes distribuées sur toute la partie de la colonne atmosphérique occupée par un nuage.

⁴On pourrait penser que la petite taille d'une gouttelette typique ne devrait pas conduire à beaucoup d'absorption, mais les réflexions totales internes peuvent grandement allonger le chemin optique total à travers la gouttelette.

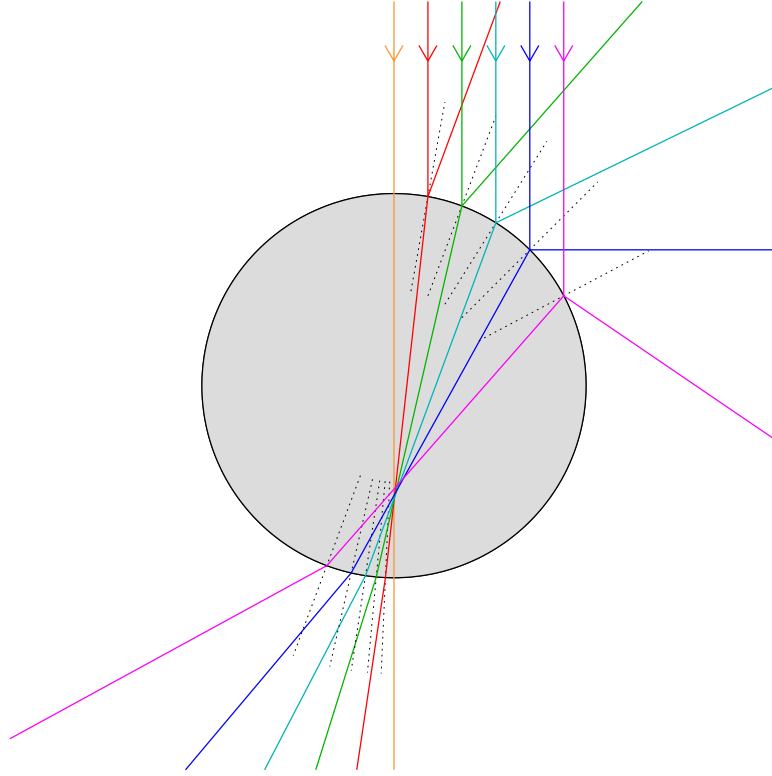


Figure 3.10: Rayons lumineux verticaux incidents sur une goutte sphérique d'eau (indice de réfraction $n = 1.33$ dans tous les cas; la couleur des rayons ne représente pas leur longueur d'onde!). Les rayons ayant un angle d'incidence $\leq 45^\circ$ ont leur fraction réfléchi dirigée vers le haut, tandis que un pour angle d'incidence $\gtrsim 72^\circ$ il y aura réflexion totale interne à la sortie de la goutte. Sauf pour des angles d'incidence très petits, les rayons transmis sont fortement déviés de la verticale par les deux réfractions successives.

Considérons un nuage hautement idéalisé, soit une couche horizontale d'épaisseur h à l'intérieur de laquelle les gouttelettes sont distribuées de manière statistiquement uniforme spatialement. Supposons que nous connaissons la distribution $n(r)$ de la taille des gouttelettes, i.e., le nombre de gouttelettes par unité de volume ayant rayon entre r et $r+dr$. En intégrant sur la distribution des tailles, on peut alors définir une profondeur optique capturant l'interception et dispersion/absorption du faisceau incident par l'ensemble des gouttelettes sur l'épaisseur du nuage:

$$\tau_n = \pi h \int_0^\infty k_e(r) r^2 n(r) dr, \quad (3.35)$$

où dans ce contexte $k(r)$ est appelé le **coefficient d'extinction**, qui dépend de la taille des gouttelettes. Si $r \gg \lambda$, on peut montrer que $k_e \simeq 2$. Pour une distribution bien piquée et de moyenne $\bar{r} \gg \lambda$, l'expression ci-dessus devient alors

$$\begin{aligned} \tau_n &= 2\pi h \bar{r}^2 \int n(r) dr \\ &= 2\pi h \bar{r}^2 N, \end{aligned} \quad (3.36)$$

où N est la densité volumique de gouttelettes (leur nombre par unité de volume), toutes tailles confondues. On peut donc définir, pour une colonne verticale traversant le nuage une **densité surfacique** (unités: kg m^{-2}):

$$\sigma = \frac{4\pi}{3} \bar{r}^3 \rho_e h N, \quad (3.37)$$

où $\rho_e = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ est la densité de l'eau. Utilisant cette expression pour substituer pour le h dans l'éq. (3.36), on obtient

$$\tau_n = \frac{3\sigma}{2\rho_e \bar{r}}. \quad (3.38)$$

Ceci nous informe que pour un contenu total en eau donné, une distribution de gouttelettes de plus petite taille moyenne génère une plus grande profondeur optique, i.e., disperse plus efficacement; ceci résulte du fait que la dispersion par réflexion à l'interface eau-air est un effet de surface, et que le rapport surface/volume varie en $1/r$ pour une sphère. Ceci est illustré schématiquement sur la Figure 3.11; la même masse totale d'eau a été distribuée en N_1, N_2 sphères de rayon r_1, r_2 avec $r_2 = 2r_1$, et chaque groupe positionné aléatoirement dans un cube de volume unitaire. La Figure montre une projection sur un plan perpendiculaire à l'axe- z du cube. Bien que plus petites, les gouttelettes du diagramme de gauche couvrent une plus grande fraction de la surface projetée que dans les cas des plus grosses gouttelettes de droite; conséquence directe qu'ici $N \propto 1/r^3$ et donc que la surface d'interception $f \propto N\pi r^2$.

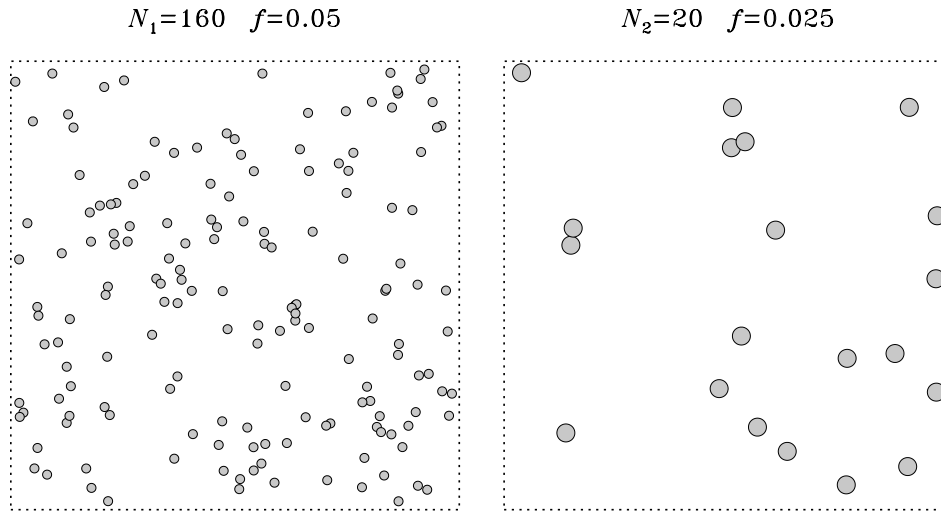


Figure 3.11: Distributions spatialement aléatoires mais statistiquement uniforme en 3D de gouttes sphériques, projetées dans un plan horizontal, représentation très idéalisée d'un nuage. Pour contenu total identique en eau, des gouttes plus petites (gauche) couvrent une plus grande fraction (f) de la surface que des gouttes de plus grand rayon (droite).

Il est déjà clair sur la Fig. 3.10 que tous les rayons incidents frappant la gouttelette avec un angle d'incidence plus petit que 45° sont réfléchis vers l'espace. Un impact important des nuages, particulièrement ceux à hautes altitudes est d'augmenter de manière importante la réflectivité de l'atmosphère dans le visible. Dépendant du contenu en eau (la densité surfacique σ dans l'éq. (3.37)), une telle couche nuageuse peut facilement doubler la réflectivité de la haute atmosphère. Ceci nous mène naturellement vers notre prochain sujet au programme, soit...

3.7 Réflectivité et albedo

Le terme **albedo** est souvent utilisé comme synonyme de réflectivité; ici je réserverai le terme "albedo" pour une mesure de la réflectivité **moyenne** d'une surface, la moyenne se faisant ici sur la surface même ainsi que sur les longueurs d'onde du spectre électromagnétique.

Le calcul de l'albedo d'une surface est extrêmement complexe. Même pour une surface "simple", l'albedo dépend de la nature microscopique de la substance, ainsi que de la rugosité de la surface.

Imaginons un cas maximalelement “simple”, soit la surface d’un océan calme (i.e., sans vagues, écume, glaces, ou plastique flottant en surface). On a alors affaire à une interface plane air-eau, avec indices de réfraction $n = 1$ et 1.34 respectivement. Le coefficient de réflectivité à incidence normale est alors $R \simeq 0.02$ (éq. (A.24); voir la §A.2 au besoin). Cependant l’indice de réfraction de l’eau dépend de la longueur d’onde, passant de $n = 1.345$ à 1.331 entre 400nm et 700nm. Le coefficient de réflectivité ne change pas beaucoup, passant de $R = 0.0216$ à 0.0202, mais augmente de plus en plus à mesure que l’on s’enfonce dans l’ultraviolet. On montre aussi à la §A.2 que le coefficient de réflexion demeure essentiellement constant pour des angles d’incidence allant de zéro jusqu’à $\simeq 45^\circ$, mais augmente rapidement pour des angles d’incidence dépassant $\simeq 50^\circ$ (viz. Fig. A.2). Ainsi, vu à incidence normale la surface de l’océan (sans glaces) est très sombre, mais à incidence élevée reflète très bien la luminosité du Soleil, comme le montre déjà très bien la Fig. 2.1. Ceci implique que la forme d’une surface aura un fort impact sur son albedo.

Reprenons le cas de notre océan, cette fois avec des vagues d’amplitudes substantielles (voir Fig. 3.12). Pour un faisceau lumineux arrivant avec un grand angle d’incidence, comme quand le Soleil est bas sur l’horizon, la déformation de la surface par les vagues fera que les rayons lumineux frapperont l’interface eau-air à un angle d’incidence local *inférieur* au cas de l’interface plane, ce qui *diminuera* donc l’albedo de la surface dans son ensemble.

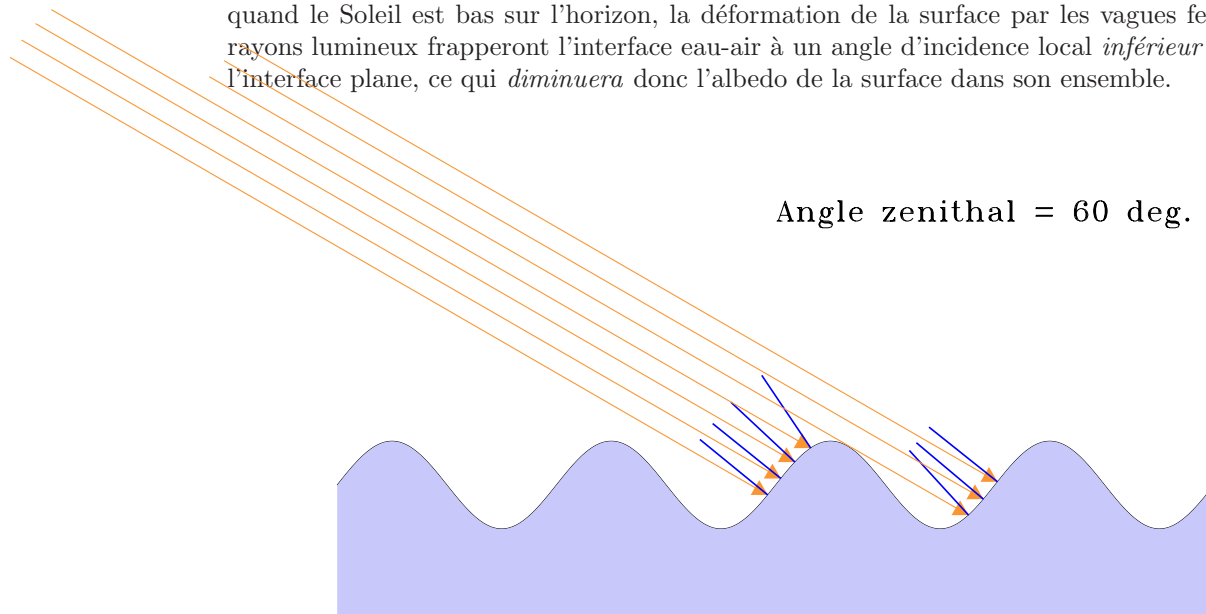


Figure 3.12: Insolation d’une surface océanique liquide avec vagues, ici pour un angle zénithal de 60° . Pour une interface plane on aurait ici $R = 0.06$ à cet angle d’incidence, tandis qu’ici les angles d’incidence locaux varient entre 4° et 22° , conduisant à $R \simeq 0.02$ dans tous les cas. Les segments bleus indiquent la normale locale au point d’arrivée des rayons lumineux (flèches oranges).

En physique environnementale on s’intéressera parfois à l’albedo de surfaces simples, comme un océan sans glaces ou vagues ou une couche de neige fraîche; ou plus souvent complexes, comme un glacier rocailleux, une prairie herbeuse, ou une forêt. Un calcul *ab initio* de l’albedo pour de telles surfaces complexes est en pratique extrêmement difficile, voire impossible, et il est d’usage de mesurer l’albedo expérimentalement, directement en laboratoire ou “in the field”, ou encore via des observations faites de l’espace. Le Tableau 3.2 compile les albedos de diverses surfaces naturelles ou artificielles qui seront d’intérêt pour le reste de ce cours.

Remarquez déjà qu’il s’agit de beaucoup plus qu’une simple question de couleurs sombres vs claires. Au niveau des sols et surfaces poreuses, le contenu en eau souvent aussi très important.

L’albedo moyen des couches externes de l’atmosphère terrestre est mesuré à $\alpha \simeq 0.29$, cette moyenne prenant ici en considération la variation avec la latitude de l’angle d’incidence

Table 3.2: Albedo (α) de diverses surfaces naturelles et artificielles

Surface	Valeur typique	Intervalle
Eau profonde+vent	0.1	0.05–0.2
Sol riche (noir, humus)	0.1	0.05–0.15
Sol humide	0.15	0.1–0.2
Sol désertique	0.3	0.2–0.35
Sable mouillé	0.25	0.2–0.3
Sable sec	0.35	0.3–0.4
Végétation verte (courte)	0.17	0.1–0.2
Végétation sèche	0.25	0.2–0.3
Forêt conifères	0.12	0.1–0.15
Forêt feuillus	0.17	0.15–0.25
Forêt tropicale	0.13	
Forêt marécageuse	0.12	
Forêt enneigée	0.25	0.2–0.35
Glace marine (sans neige)	0.3	0.25–0.4
Vieille neige (fondante)	0.5	0.35–0.65
Neige froide	0.7	0.6–0.75
Neige fraîche et sèche	0.8	0.7–0.9
Asphalte	0.07	0.05–0.1
Béton	0.2	0.15–0.35

de l'irradiation solaire, et les variations des propriétés atmosphériques avec la latitude et les saisons (couverture nuageuse, etc.). Si on reprend le calcul de la §3.3 pour la température d'équilibre de la Terre, on doit maintenant réduire le flux entrant par un facteur $1 - \alpha$, ce qui conduit à une température d'équilibre maintenant donnée par:

$$T_{\text{eq}} = \left(\frac{(1 - \alpha)S_0}{4\sigma} \right)^{1/4} = 255 \text{ K} . \quad (3.39)$$

C'est un très hivernal -18°C , ce qui commence à faire dans le frisquet, et nous éloigne substantiellement de la température moyenne mesurée, 14°C . On y reviendra bientôt.

3.8 Absorption au sol

Notre radiation solaire est finalement arrivée au sol, et la fraction (un moins l'albedo de surface) qui n'est pas réfléchi vers l'atmosphère est finalement absorbée.

Dans les sols sans végétation, l'absorption se fait dans le premier mètre, et souvent beaucoup moins, la profondeur d'absorption dépendant de la composition du sol et en particulier de son contenu en eau, et donc de sa porosité (voir §2.3). En présence d'une couverture végétale une fraction parfois substantielle de la radiation est interceptée par le feuillage et est utilisée pour la photosynthèse, réduisant ainsi le chauffage direct du sol.

Les océans couvrent 71% de la surface de la Terre, et ils se retrouvent donc à absorber directement la majorité de l'irradiance solaire. Pour une eau relativement propre et transparente, l'absorption s'avère être bien décrite par la Loi de Beer introduite à la §3.5 en contexte atmosphérique. Le coefficient d'absorption k pour l'eau varie substantiellement avec la longueur d'onde, même dans l'intervalle spectral relativement restreint du spectre visible. Ceci est illustré sur la Figure 3.13, dans le cas de l'eau pure à 22°C . ATTENTION, ce qui est porté en graphique ici est le produit $k \times \rho$. On constate que le coefficient d'absorption k augmente par plus de deux ordres de grandeur entre 400 et 700nm, indiquant que l'atténuation du spectre électromagnétique incident est beaucoup plus rapide aux grandes longueurs d'onde qu'aux

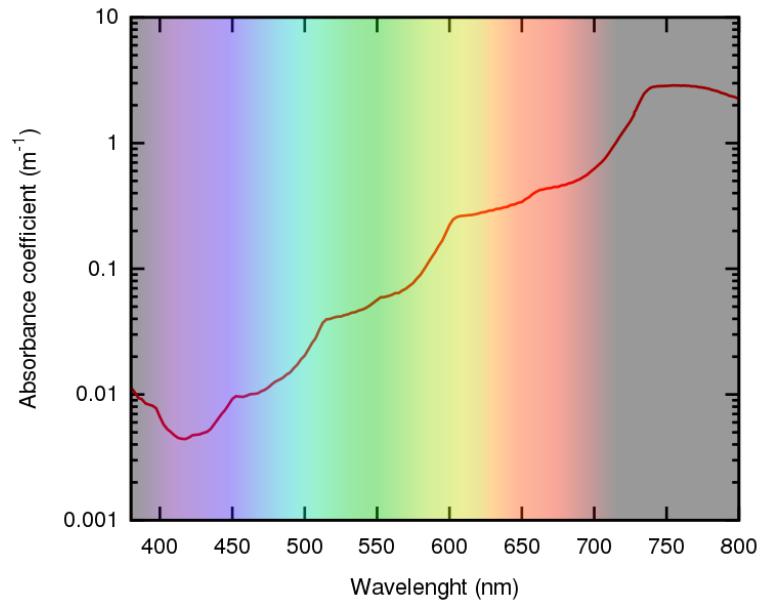


Figure 3.13: Longueur d’atténuation du spectre visible dans l’eau pure à 22°C. Attention, ici la quantité portée en graphique versus la longueur d’onde est le produit $k \times \rho$, dans la notation de la §3.5. Source: Wikipedia Commons CC0 1.0.

courtes. En bonne première approximation:

$$\log(k\rho) = -2.5 + 3.0 \frac{\lambda - 400}{350}, \quad [400 \leq \lambda \leq 750 \text{ nm}] \quad (3.40)$$

On a vu (§3.5!) que la quantité $(k\rho)^{-1}$ est une longueur d’atténuation, soit la distance sur laquelle le flux chute d’un facteur 1/e. La lumière rouge (700nm) s’atténue ainsi sur une distance de $\simeq 1$ m, tandis que la bleue (450nm) le fait sur $\simeq 100$ m. C’est pourquoi tout a déjà une teinte bleuâtre quand on nage à peine à quelques mètres de profondeur sous l’eau.

En réalité l’absorption dans les couches externe des océans est plus rapide que ce qu’on vient de déduire de la Fig. 3.13. La présence de sels ou autres minéraux dissous ou en suspension, de plancton, etc., augmente l’absorptivité, et parfois de manière fortement dépendante de la longueur d’onde, comme dans le cas du plancton. La Figure 3.13 et l’éq. (3.40) demeurent cependant des approximations raisonnables, certainement aux fins de ce cours... sauf si on s’intéresse spécifiquement au plancton et/ou à la photosynthèse qu’il produit !

3.9 Émission par la surface

Comme tout bon corps noir, la Terre irradie de l’énergie dans l’espace, à un taux proportionnel à la quatrième puissance de sa température (viz. Eq. (??)), ce qui devrait conduire à un inexorable refroidissement. Heureusement qu’il y a l’irradiance solaire pour maintenir la surface de la Terre à une température n’approchant pas le zéro absolu.

Comme on l’a vu, pour les longueurs d’ondes plus longues que l’ultraviolet, en bonne première approximation la distribution spectrale de l’irradiance solaire ressemble beaucoup à celle d’un corps noir de température $T = 5770 \text{ K}$ (retourner zieuter la Fig. 3.2 au besoin). Le spectre correspondant est porté en graphique sur la Figure 3.14 (trait bleu), ainsi qu’en version “diluée” par un facteur $(R_\odot/\bar{d})^2$ (tirets bleus), donnant alors le flux spectral tel qu’on le mesurerait à l’orbite de la Terre, comme sur la Fig. 3.2. On a vu précédemment (§3.3) que la Terre, considérée comme un corps noir, a une température d’équilibre $T_{\text{eq}} = 287 \text{ K}$. Le spectre

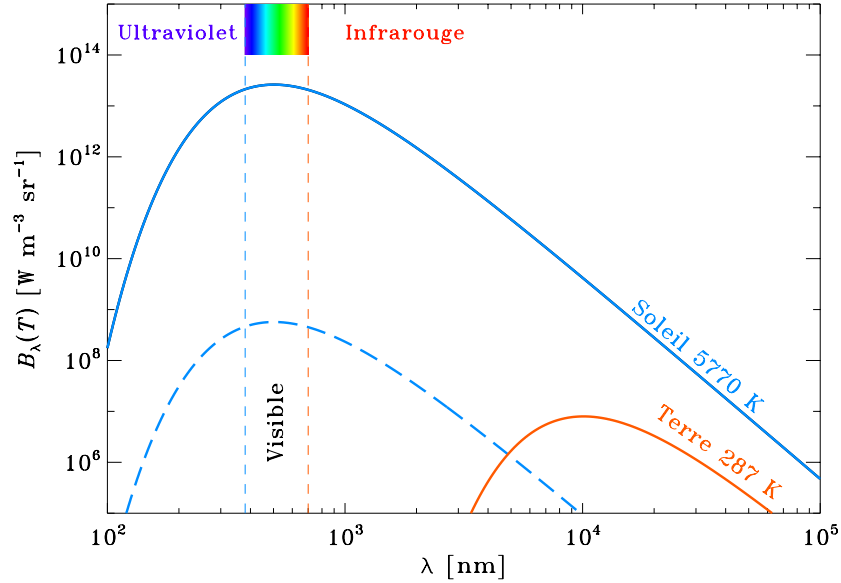


Figure 3.14: Spectres du corps noir pour des températures correspondant à la photosphère du Soleil ($T = 5770 \text{ K}$) et à la surface de la Terre ($T = 287 \text{ K}$). Notez l'échelle verticale logarithmique. Le trait en tirets bleus est le spectre solaire rapporté à la distance moyenne Terre-Soleil, $\bar{d} = 1 \text{ UA} = 150 \times 10^6 \text{ km}$.

corps noir correspondant est tracé en rouge sur la Figure 3.14. Comparant les deux spectres corps noir, on constate que la majorité de l'irradiance solaire est “contenue” dans l'intervalle spectral $200 \leq \lambda \leq 3000 \text{ nm}$, tandis que le spectre d'émission thermique de la Terre se situe dans l'intervalle $3000 \leq \lambda \leq 10^5 \text{ nm}$. En climatologie anglophone on distingue souvent ces deux domaines électromagnétiques par les qualificatifs “shortwave” et “longwave”, respectivement.

La Figure 3.15 montre une image satellite de l'émission thermique de la Terre, sur son côté nuit. On peut y distinguer, dans le quadrant supérieur droit, les contours de l'Afrique du Nord, de la Péninsule Arabique, et de la Mer Méditerranée, et les plus férre.e.s en géographie y détecteront également la Corse, la Sardaigne et la Crète. Les régions en bleu (les plus froides) correspondent à l'émission thermique provenant des couches nuageuses en très haute altitude (donc froides), l'émission codée en rouge représente les régions les plus chaudes, soit prédominamment la surface des océans et les nuages de très basses altitudes, essentiellement à la température du sol. On remarque que les régions désertiques comme le Sahara ou l'intérieur de la Péninsule Arabique sont à des températures (codées jaune/vert) plus froides que les océans, ce qui est typique des déserts la nuit, à cause de la très faible humidité de la basse atmosphère dans ces régions.

Dans le visible et l'infrarouge rapproché, l'atmosphère (par temps clair) est pratiquement transparente, tandis que dans l'infrarouge moyen et lointain caractéristique du spectre thermique terrestre, elle est opaque sur de larges bandes de longueurs d'onde. Ceci s'avère à avoir des conséquences importantes sur le bilan énergétique planétaire.

Dans l'infrarouge entre 1 et $100 \mu\text{m}$, l'absorption par l'atmosphère est dominée par les bandes moléculaires associées aux états quantiques de vibration et rotation. Les niveaux d'énergie associés étant très rapprochés de l'un au suivant, on se retrouve avec un spectre très dense, qui se fusionne en une bande sous l'effet de l'élargissement thermique (retourner lire la §1.3 au besoin!).

La Figure 3.16 montre la variation de la transmissivité de l'atmosphère terrestre en fonction de la longueur d'onde, soit la transmissivité spectrale (t_λ), sur une plage de longueurs d'onde

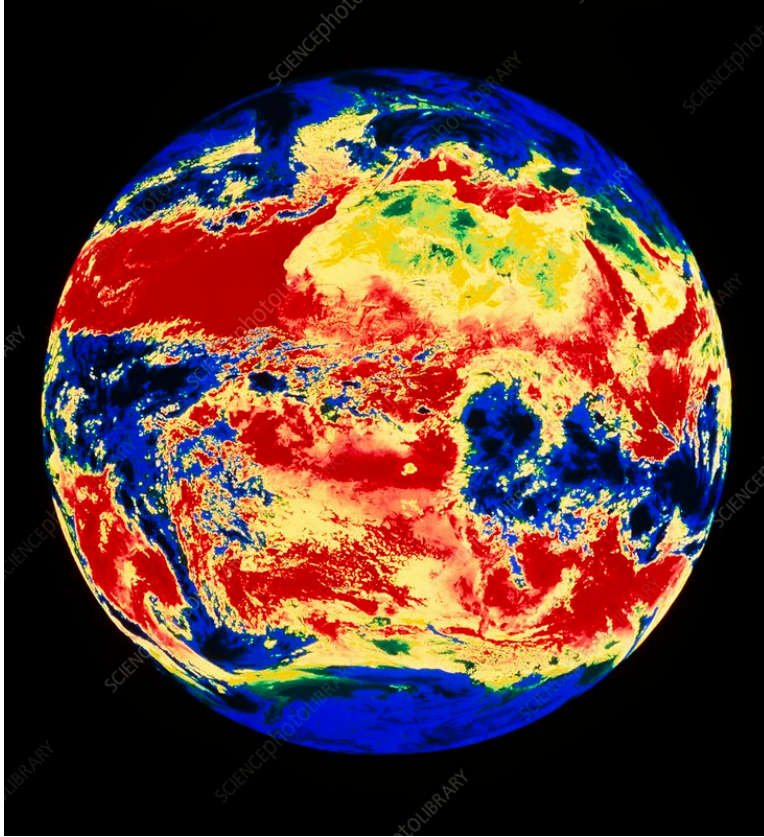


Figure 3.15: Image thermique (infrarouge) du côté nuit de la Terre. Le pôle N (S) est au haut (bas) de l'image. La température augmente du bleu au rouge. Les régions bleues correspondent à l'émission au haut des nuages de haute altitude, et les régions rouges à l'émission des océans et/ou nuages de basse altitude. Source: METEOSAT/www.sciencephoto.com.

incluant à la fois le pic du spectre solaire et celui de la radiation thermique terrestre. Le trait noir au bas du graphique montre la transmissivité spectrale totale, tandis que les traits colorés montrent la transmissivité spectrale des cinq principaux absorbeurs dans l'infrarouge rapproché et moyen ($700 \leq \lambda \leq 10^4 \text{ nm}$). Ces courbes de transmissivité ont été produites à l'aide du "Planetary Spectrum Generator" de la NASA, avec lequel vous aurez l'occasion de vous amuser en TP.

On pourrait être surpris que les principaux constituants atmosphériques, soit les molécules N_2 et O_2 , ne se retrouvent pas parmi les principaux absorbeurs. Ultimement ceci est dû au fait que ces molécules ne montrent pas de moment dipolaire électrique même quand elles vibrent, et donc n'ont pas de transitions rotationnelles, et donc pas de bandes vibration+rotation. De plus, leur (seul) mode vibratoire (symétrique, soit ν_1 dans la notation de la §1.3) est radiativement inactif. Les molécules H_2O et O_3 , par contre, sont caractérisées par un moment dipolaire permanent, et CO_2 en développe un sous vibration (modes ν_2 et ν_3 , viz. la Fig. 1.3 et le Tableau 1.2); ces constituants atmosphériques, bien que présents en faibles quantités relativement à N_2 et O_2 , se retrouvent alors à dominer l'absorption dans l'intervalle $5 \lesssim \lambda \lesssim 50 \mu\text{m}$, où la majorité de la radiation thermique est émise. Plus spécifiquement:

- Le principal absorbeur dans l'infrarouge est, de loin, la vapeur d'eau (H_2O), avec une bande vibration-rotation à $6.3 \mu\text{m}$, et une large bande purement rotationnelle au delà de $12 \mu\text{m}$, dominant l'absorption à $\simeq 20 \mu\text{m}$ et plus;

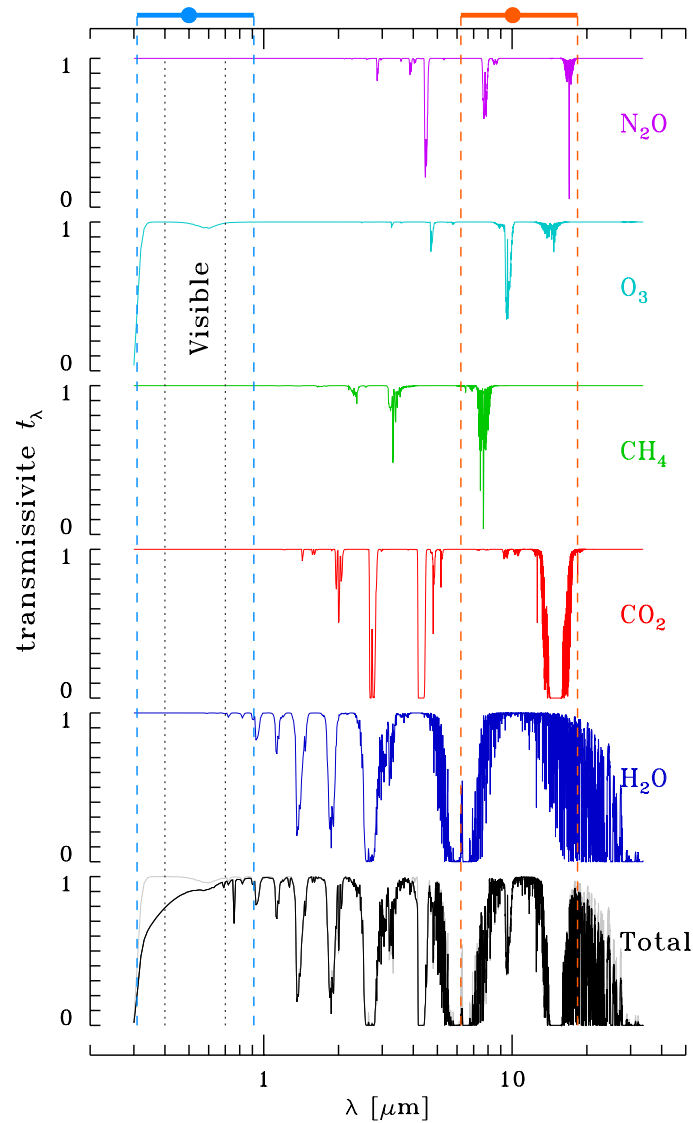


Figure 3.16: Transmissivité atmosphérique spectrale t_λ versus la longueur d'onde, de 200nm (ultraviolet) jusqu'à $50\mu\text{m}$ (infrarouge lointain). Les transmissivités spectrales associées aux cinq principaux absorbeurs atmosphériques dans l'infrarouge sont portées en graphique individuellement, ainsi que la transmissivité totale (en noir). Les traits et points colorés bleu/rouge le long de l'axe supérieur indiquent le pic du corps noir à $T_{\text{eff}} = 5770$ et 287 K , ainsi que la plage de longueurs d'onde correspondante où le $B_\lambda(T)$ est supérieur à 50% de sa valeur maximale. Figure produite à partir de données numériques générées par le Planetary Spectrum Generator (NASA-GSFC), psg.gsfc.nasa.gov.

- Le dioxyde de carbone (CO_2) a une très forte bande de vibration-rotation à $\simeq 15\mu\text{m}$, soit au pic de l'émission thermique de l'atmosphère terrestre à 288K.
- Dans l'infrarouge rapproché ($0.7 \lesssim \lambda \lesssim 3\mu\text{m}$), une séquence de bandes vibration-rotation de H_2O , et à un degré moindre de CO_2 , domine l'absorption atmosphérique de l'irradiance solaire.
- L'ozone a une bande d'absorption à $9.3\mu\text{m}$, qui bien que relativement mince, tombe dans la "fenêtre" de transmission entre 8 et $12\mu\text{m}$ laissée ouverte par H_2O et CO_2 .
- Sous $\simeq 0.3\mu\text{m}$ (300nm), la photodissociation de l'ozone (O_3) domine l'absorption, qui se produit principalement dans la stratosphère.
- Finalement, sous $\simeq 0.2\mu\text{m}$, la photodissociation de N_2 et O_2 domine l'absorption, qui se produit dans la haute stratosphère et thermosphère (viz. Fig. 2.5).

La transmissivité étant essentiellement une mesure de la probabilité qu'un photon ne soit *pas* absorbé, la transmissivité spectrale totale d'un mélange de diverses espèces chimiques est alors donnée par le *produit* des transmissivités associées à chaque espèce chimique:

$$t_\lambda = \prod_k t_{\lambda,k} , \quad k \equiv [\text{H}_2\text{O}, \text{CO}_2, \text{CH}_4, \text{O}_3, \text{N}_2\text{O}] \quad (3.41)$$

Cette quantité est tracée en gris au bas de la Fig. 3.16, pour nos cinq espèces chimiques dominant l'absorption atmosphérique dans l'infrarouge; les deux principales différences avec la transmissivité spectrale totale simulée (en noir) sont (1) dans le visible, où la dispersion de Rayleigh (§3.6.1) atténue préférentiellement le côté bleu du spectre électromagnétique dans le visible; ce n'est pas de l'absorption à proprement parler, puisque la radiation est réémise isotropiquement dans le plan perpendiculaire à $\mathbf{E}$, à la même longueur d'onde, et donc n'est pas toute perdue, énergétiquement parlant. (2) Au delà de $\simeq 20\mu\text{m}$, l'absorption manquante est due en bonne partie au dimère $\text{H}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O}$, qui produit un continu d'absorption.

Dénotons par t_λ la transmissivité atmosphérique totale (en noir au bas de la Fig. 3.16) à une longueur d'onde λ ; la transmissivité nette dans une bande de longueur d'onde donnée peut se calculer en pondérant t_λ par le spectre corps noir évalué à cette même longueur d'onde, le tout intégré sur ladite bande de longueur d'onde. On peut ainsi calculer la transmissivité nette de l'atmosphère par rapport à l'irradiance solaire dans le visible, et par rapport au spectre thermique terrestre dans l'infrarouge:

$$\langle t \rangle_{\text{Vis}} = \int_{0.3\mu\text{m}}^{0.9\mu\text{m}} B_\lambda(T=5770) t_\lambda d\lambda \bigg/ \int_{0.3\mu\text{m}}^{0.9\mu\text{m}} B_\lambda(T=5770) d\lambda , \quad (3.42)$$

$$\langle t \rangle_{\text{IR}} = \int_{6\mu\text{m}}^{30\mu\text{m}} B_\lambda(T=287) t_\lambda d\lambda \bigg/ \int_{6\mu\text{m}}^{30\mu\text{m}} B_\lambda(T=287) d\lambda , \quad (3.43)$$

$$(3.44)$$

Les bornes des deux régimes spectraux correspondent aux intervalles indiqués en bleu et rouge au haut de la Fig. 3.16; pour le profil de transmissivité atmosphérique de la Fig. 3.16, on trouve ainsi:

$$\langle t \rangle_{\text{Vis}} = 0.88 , \quad \langle t \rangle_{\text{IR}} = 0.51 . \quad (3.45)$$

Vous aurez l'occasion de vérifier en TP que les valeurs exactes des bornes d'intégration choisies TP3 ci-dessus n'influencent pas énormément le résultat final. Par exemple, si se on se limite à l'intervalle spectral du formellement visible ($0.3 \leq \lambda \leq 0.7\mu\text{m}$), on trouve $\langle t \rangle_{\text{Vis}} = 0.85$.

Bref, le message important: l'atmosphère terrestre est essentiellement transparente au gros de l'irradiance solaire, mais opaque à la radiation thermique terrestre dans l'infrarouge, sauf dans une mince fenêtre spectrale allant de 8 à $12\mu\text{m}$, ...mais centrée sur le pic d'émission thermique ! De plus, cette fenêtre étant bornée par des bandes d'absorption du méthane et du dioxyde de carbone, on peut déjà anticiper l'importance de la contribution de ces constituant atmosphériques pourtant mineurs (voir Tableau 2.1) à l'effet de serre...

3.10 Bilan radiatif global

Nous avons débuté ce chapitre en calculant (§3.3) la température d'équilibre $T_{\text{eq}} = 278 \text{ K}$ pour laquelle une Terre (sans atmosphère et d'albedo nul) demeure à l'équilibre thermique. Il s'agit maintenant de le clore en recalculant T_{eq} , cette fois prenant en considération l'effet de l'atmosphère et des sols/océans.

Établissons un bilan énergétique planétaire en utilisant l'approche système RSPF introduite à la §1.4... et apprivoisée au premier TP! La Figure 3.17 en illustre les différentes composantes:

- Nous avons deux réservoirs thermiques: l'atmosphère et les sols/océans, caractérisés par des températures T_a et T_s respectivement;
- Le réservoir sol/océan à une source, soit l'insolation solaire S_0 , qui par hypothèse traverse l'atmosphère sans atténuation, mais dont une fraction $(1 - \alpha)$ (α étant l'albedo) est réfléchié dans l'espace et donc ne contribue pas à l'insolation au sol;
- Le réservoir "atmosphère" irradie la moitié de son flux thermique ($0.5\sigma T_a^4$) vers l'espace, et l'autre moitié vers le bas, ce qui correspond à un flux entrant $= 0.5\sigma T_a^4$ pour le réservoir sol/océan;
- Le réservoir sol/océan transfère un flux thermique σT_s^4 au réservoir atmosphère.

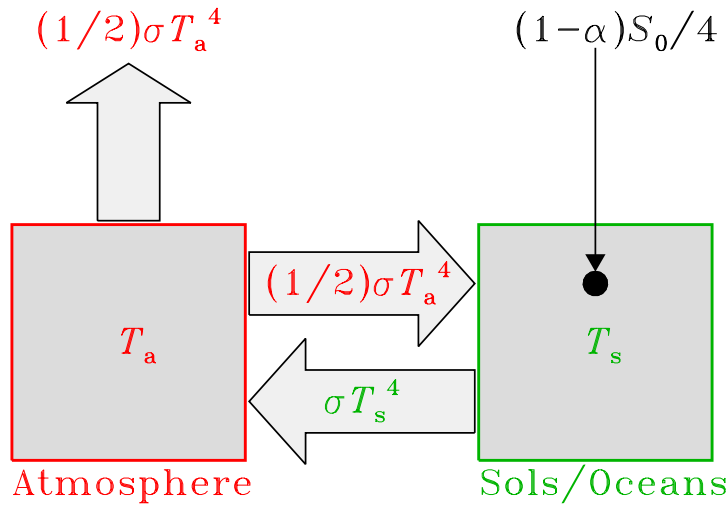


Figure 3.17: Le système Atmosphère+Sols et océans, en représentation Réservoir+Source+Puit+Flux. On suppose que l'atmosphère est complètement transparente à l'irradiance solaire, et complètement opaque à la radiation thermique provenant de la surface. Dans une telle situation l'atmosphère envoie la moitié de sa radiation thermique vers l'espace, et l'autre moitié vers la surface (voir texte).

Il ne nous reste plus qu'à écrire nos équations de bilan. On se limitera ici au régime stationnaire, où le système est globalement à l'équilibre (tous les $d/dt = 0$); les flux totaux entrant et sortant de chaque réservoir doivent alors être nuls:

$$\text{Atmosphère} : 0 = \sigma T_s^4 - 2 \times \left(\frac{1}{2} \sigma T_a^4 \right) \rightarrow T_a = T_s, \quad (3.46)$$

$$\text{Sol/Océan} : 0 = \frac{(1-\alpha)S_0}{4} + \frac{1}{2} \sigma T_a^4 - \sigma T_s^4. \quad (3.47)$$

De ces deux expressions on tire immédiatement:

$$T_{\text{eq}} = \left(\frac{(1 - \alpha) S_0}{2\sigma} \right)^{1/4} = 304 \text{ K} , \quad (3.48)$$

soit 31°C, nettement plus chaud que le -18°C obtenu à la §3.7 en ne prenant en considération que l'effet de l'albedo sur la température d'équilibre. Pas mal trop chaud, en fait, en comparaison avec la température terrestre moyenne mesurée, 14°C. C'est une manifestation de ce très fameux **effet de serre**, ici dans sa forme la plus extrême puisque *toute* la radiation thermique de la surface est supposée être absorbée dans l'atmosphère, ce qui n'est pas le cas avec l'atmosphère terrestre, bien que l'absorption y soit substantielle. Au delà de la simplicité du modèle, introduire un puit thermique supplémentaire, directement du réservoir sol/océan vers l'espace, peut nous ramener au 14° observé. Un des problèmes en fin de chapitre vous guide dans cet exercice.

Exercices:

3.1: Considérons que le soleil émet un spectre d'onde électromagnétique bien décrit par la Loi de Planck pour un corps noir à $T = 5770 \text{ K}$. Calculez la fraction de l'énergie totale émise dans les bandes de longueur d'onde suivantes:

1. Ultraviolet éloigné: $10 \leq \lambda \leq 121 \text{ nm}$;
2. Ultraviolet moyen: $121 \leq \lambda \leq 300 \text{ nm}$;
3. Ultraviolet rapproché: $300 \leq \lambda \leq 400 \text{ nm}$;
4. Lumière visible rapproché: $400 \leq \lambda \leq 700 \text{ nm}$;
5. Infrarouge rapproché: $700 \leq \lambda \leq 10^3 \text{ nm}$;
6. Infrarouge moyen: $10^3 \leq \lambda \leq 10^4 \text{ nm}$;
7. Infrarouge éloigné: $10^4 \leq \lambda \leq 10^5 \text{ nm}$;

3.2: Refaites les calculs de l'exercice précédent, cette fois pour un corps noir de température $T = 287 \text{ K}$, caractéristique de l'émission thermique de la Terre.

3.3: Considérons encore une fois l'émission électromagnétique du Soleil comme identique à celle d'un corps noir à $T = 5770 \text{ K}$. Calculez l'irradiance attendue au haut de l'atmosphère terrestre.

3.4: Allez fouiner sur internet (ou ailleurs) pour trouver les distances et températures moyennes des planètes Mercure, Vénus, Mars et Jupiter; calculez leur températures d'équilibre, et comparez aux valeurs mesurées. Réfléchissez aux origines possibles des différences, le cas échéant.

3.5: Calculez Q (équation (3.7)) en fonction de l'heure de la journée à la latitude de Montréal le jour de l'équinoxe. Faites le calcul pour une atmosphère complètement transparente. Il pourrait être une bonne idée de commencer par reproduire la Fig. 3.5. Une forme purement sinusoidale représenterait-elle bien la variation de $Q(t)$ entre les lever et coucher du soleil ? Si vous ajustez une forme sinusoidale à votre $Q(t)$ correctement calculé, quelle est l'erreur relative maximale sur l'irradiance au sol et à quelle heure de la journée se produit-elle ?

3.6: Répétez les calculs de l'exercice précédent, mais cette fois en prenant en compte l'atténuation du flux radiatif selon la Loi de Beer (§3.5). Vous pouvez supposer une longueur d'atténuation de 10km.

3.7: À partir de l'éq. (3.25), démontrez que le chauffage par absorption est maximal à une profondeur optique $\tau = 1$.

3.8: Calculez la profondeur géométrique correspondant à la profondeur optique $\tau = 1$ d'une colonne d'eau dans l'océan, aux longueurs d'onde $\lambda = 400, 500, 600$ et 700nm . La Figure 3.13 vous sera très utile dans ce processus.

3.9: On considère une atmosphère sans absorption mais avec forte dispersion (§3.6.2) due à une très forte densité d'aérosols produits par des feux de forêt, par exemple. À quelle profondeur optique τ_{tot} l'irradiance diffuse devient-elle égale à l'irradiance transmise? Faites votre calcul pour des angles zénithaux de $30, 45$ et 60° . Que devient l'irradiance diffuse dans la limite $\tau_{\text{tot}} \rightarrow \infty$?

3.10: La transmissivité de l'atmosphère dans la partie infrarouge du spectre thermique de la Terre est notoirement difficile à calculer *ab initio*, car elle dépend de manière très sensible de la composition de l'atmosphère (contenu en vapeur d'eau, en CO_2 , en méthane, etc.) ainsi que de la longueur d'onde (vous vérifierez ça en TP!). Aux fins de cet exercice supposons simplement qu'une fraction t ($0 \leq t \leq 1$) du flux thermique émis au niveau de la surface s'échappe dans l'espace. Modifiez le modèle de la Figure 3.17 pour prendre en considération ce puit supplémentaire, et calculez la valeur de t qui conduit à une température d'équilibre de 14°C en surface. Votre valeur de t se compare-t-elle bien à celle obtenue à la fin de la §3.9 ?

3.11: Reprenez le modèle stationnaire de calcul de l'effet de serre de la §3.9, mais en y ajoutant une seconde couche atmosphérique élevée, pour représenter la stratosphère. Vous pouvez supposer la stratosphère également totalement transparente à la lumière visible, mais totalement opaque à la radiation thermique infrarouge. Votre température au sol se retrouve-t-elle plus petite ou plus grande que sans cette couche stratosphérique ?

Bibliographie:

Pour plus de détails (et données) sur le spectre solaire, voir par exemple:

sunclimate.gsfc.nasa.gov/ssi-reference-spectra

Sur la TSI et toutes les subtilités associées à la production du composite de la Fig. 3.3, voir:

<http://spot.colorado.edu/~koppg/TSI>

Bien que sujettes à plusieurs élaborations de mon cru, les §3.4 et 3.5 sont fortement inspirées de la présentation de ces sujets faites aux sections 2.7 et 3.6 de l'ouvrage de Hartmann cité en bibliographie à la fin du chapitre 1.

La section 3.6.2 s'inspire quant à elle de la §5.3.4 de Monteith & Unsworth, qui présente deux séries de mesures, en format équivalent à la Fig. 3.9, et qui s'y collent très bien. La §3.6.3 est basée en partie sur la §3.9 de Hartmann, qui présente aussi des mesures et calcul d'albedo et absorptivité pour des nuages prototypiques.

Chapitre 4

Processus physiques II. Matière

Nous avons vu au chapitre précédent comment la radiation transporte et redistribue l'énergie à travers les différentes “sphères” de l'environnement physique. La matière en mouvement (vents, courants marins, précipitations, évaporation, écoulements de surface ou subsurface, etc.) peut également transporter de l'énergie, en plus évidemment de la masse, et de divers “contaminants” présents dans l'air ou dans l'eau. Du point de vue environnemental les bilans de masse sont aussi pertinents que les bilans d'énergie. En plus de ce **transport** par les écoulements, ces derniers peuvent également conduire au **mélange**, autre phénomène de grande importance dans un contexte environnemental.

La dynamique des écoulements définit l'**hydrodynamique**, sujet d'un cours de troisième année (PHY-3140) que je vous recommande fortement si le sujet vous intéresse. Dans le cadre de PHY-2100, nous allons, la plupart du temps, considérer les écoulements comme connus (soit mesurés, soit déjà calculés), et allons nous concentrer sur leurs effets en contexte environnemental.

Ce chapitre, de longueur substantielle, débute par une présentation d'un phénomènes physique de grande importance contrôlant la dispersion et concentration spatiale de matière dans l'environnement: la **diffusion** (§4.1); ceci est suivi d'un survol de l'hydrodynamique, avec emphase sur le transport de masse par les écoulements (§4.2). On se tourne ensuite vers deux processus physiques de grande importance environnementale, soit la **sédimentation** (§4.3) et la **percolation** (§4.4).

4.1 La diffusion

Imaginons la situation suivante: un flacon d'after shave Brut Magnum 45 est ouvert dans le coin d'une pièce fermée. La pression partielle des molécules puantes étant initialement nulle dans l'air, celles contenues dans le flacon commenceront à s'évaporer et se disperser dans l'air, en réponse aux perpétuelles collisions dues au mouvement thermique des molécules de N_2 et O_2 . Après un certain temps la situation ressemblera à celle illustrée sur la Figure 4.1. Continuellement bousculées par N_2 et O_2 , les molécules puantes effectuent une forme de marche aléatoire qui, en moyenne, les éloignent de leur source, ici située en bas à gauche. Cette situation exemplifie le processus dit de **diffusion**.

Dans cette marche aléatoire, la direction de chaque pas est déterminée par les aléas des collisions inter-particules, leur longueur par la distance interparticule moyenne, et la durée du pas par le temps moyen s'écoulant entre deux collisions successives. Mais, puisque les molécules d'air (essentiellement N_2 et O_2) sont beaucoup plus nombreuses que celles de Brut 45 Magnum (heureusement d'ailleurs), ces dernières feront des collisions presque uniquement avec O_2 ou N_2 , et presque jamais avec une autre molécule de Brut 45. Donc le mouvement de chaque molécule de Brut est complètement découplée des autres. On dirait ici du Brut 45 Magnum qu'il est un **contaminant trace** diffusant dans l'air.

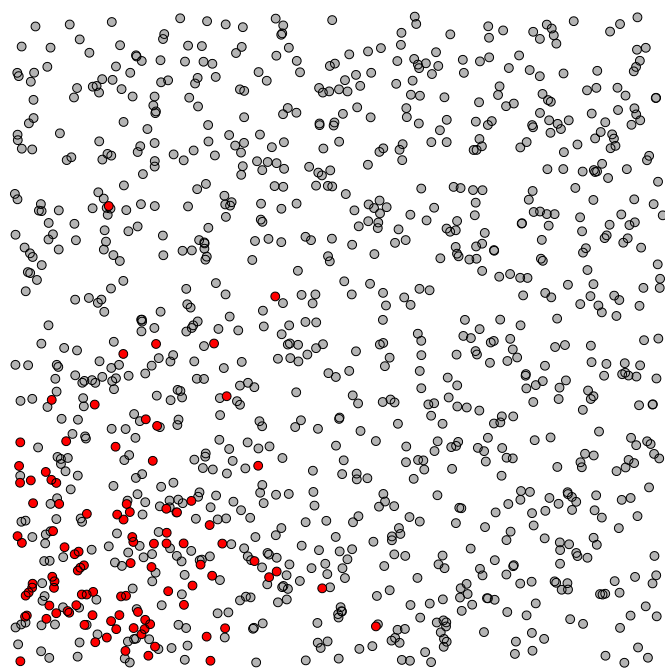


Figure 4.1: Représentation schématique d'un fluide à deux composantes, ici des molécules d'air ($80\%N_2+18\%O_2$, composante 1, en gris) et de Brut Magnum 45 (composante 2, en rouge), vu ici à l'échelle microscopique. La source du Brut Magnum 45 est dans le coin inférieur gauche. La composante (2) agit comme un contaminant trace en autant que son nombre de particules $N(2)$ est $\ll N(1)$; dans une telle situation, les paramètres thermodynamiques du gaz (densité, température, pression, etc.) sont complètement déterminés par la composante 1, et la diffusion de la composante 2 s'apparente à une marche aléatoire où les collisions avec la composante 1 réorientent aléatoirement la direction de déplacement des constituants de la composante 2.

4.1.1 Diffusion = marche aléatoire

La diffusion est la manifestation macroscopique de la marche aléatoire (mouvement Brownien) des constituant microscopiques d'un mélange, sous l'influence de leur agitation thermique. Considérons la variation suivante sur le thème de la marche aléatoire en une dimension spatiale: chaque marcheur fait un pas $s = \pm 1$, mais la marche est limitée par deux "murs" à $x = 100$ et $x = -100$, et les marcheurs frappant le mur "rebondissent" d'un pas dans la direction opposée. De plus, choisissons une condition initiale où tous les marcheurs débutent à des positions distribuées de manière aléatoire mais statistiquement uniforme dans le sous-intervalle $-100 < x \leq 0$, soit dans la moitié gauche du domaine. Tous les marcheurs font leur pas de manière synchronisée dans le temps, mais sinon de manière totalement découplée l'un de l'autre.

La Figure 4.2 montre une séquence temporelle d'histogrammes décrivant la distribution des positions des marcheurs à mesure que la marche aléatoire progresse. La distribution, initialement très raide à $x = 0$, s'étale graduellement avec le temps, mesuré en pas de marche aléatoire. Cet étalement résulte du fait que plus de marcheurs traversent de la moitié gauche du domaine vers la moitié droite que dans le sens inverse, en raison du simple fait qu'il y a initialement beaucoup plus de marcheurs du côté gauche. Ce n'est que lorsqu'il y aura autant de marcheurs de chaque côté de $x = 0$ que le système pourra devenir statistiquement stationnaire.

L'annexe B détaille la mathématique de la marche aléatoire en plus d'une dimension spatiale.

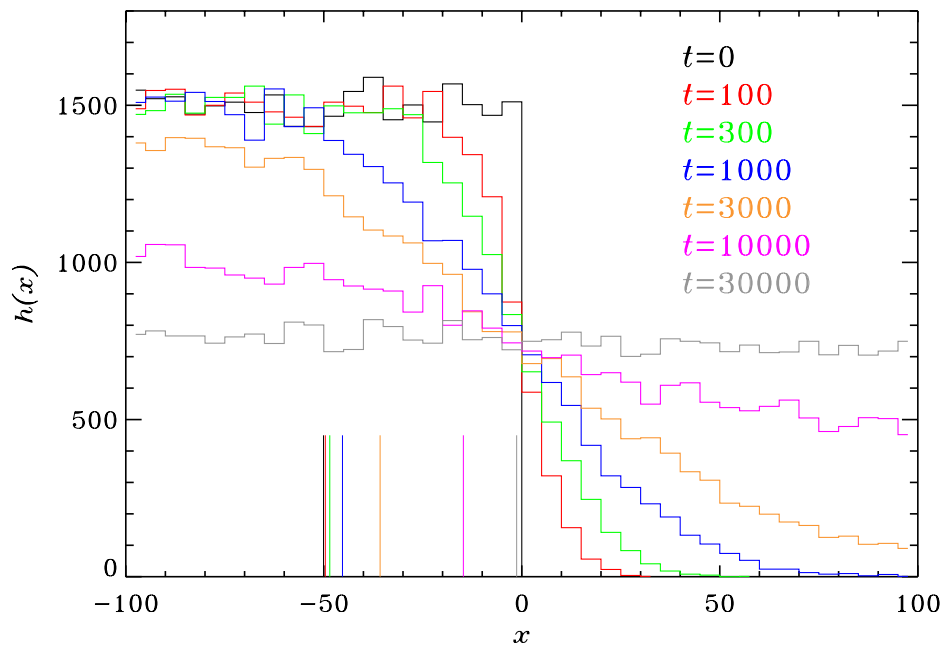


Figure 4.2: Évolution temporelle de la distribution de 30000 marcheurs aléatoires 1D confinés à l'intervalle $[-100 \leq x \leq +100]$, et initialement tous localisés aléatoirement dans le sous-intervalle $[-100 \leq x \leq 0]$. Les lignes verticales le long de l'abscisse indiquent la position moyenne des marcheurs au temps correspondant, tel que codé par la couleur du trait.

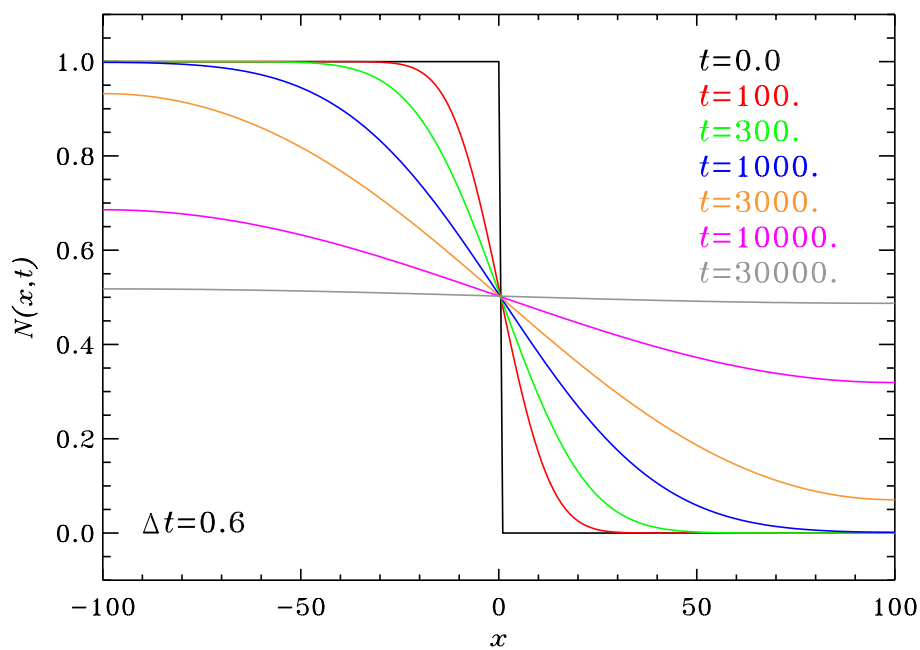


Figure 4.3: Solution numérique de l'équation de diffusion (4.4) avec les conditions initiale et limites données par les équations (4.6), avec $\Delta x = 1$ et $\Delta t = 0.25$.

On y démontre que l'étalement graduel d'une concentration de "particules" décrivant chacune une marche aléatoire, comme sur la Fig. 4.2, n'est pas limité aux situations en une dimension spatiale; cet étalement est en fait représentatif des processus dits de **diffusion**.

Dans un contexte environnemental, il est hors de question de commencer à simuler les processus de dispersion par diffusion en calculant explicitement la dispersion des contaminants comme des marches aléatoires, le nombre de "marcheurs" impliqués étant carrément astronomique (plus précisément: plusieurs fois le nombre d'Avogadro), même si on se limitait à la diffusion du Brut Magnum 45 dans une petite salle de classe. On doit donc établir une représentation mathématique du processus de diffusion sous la forme d'équations différentielles impliquant des variables globales comme la densité, la concentration du contaminant, etc.

Revenons à notre marche aléatoire en 1D confinée à l'intervalle $-100 \leq x \leq 100$ (Fig. 4.2). Examinons ce qui se passe à une position x_0 quelconque; comme l'illustre la Figure 4.4, seules les particules situées dans l'intervalle $x_0 - |s| < x < x_0 + |s|$ (région grise) ont une chance de traverser x_0 au prochain pas de marche, mais seulement si le pas se fait dans la bonne direction ($s = +1$, en rouge, pour les particules situées dans $x_0 - |s| < x < x_0$, et $s = -1$, en vert, pour celles dans $x_0 < x < x_0 + |s|$). Pour des directions équiprobables, la moitié des particules

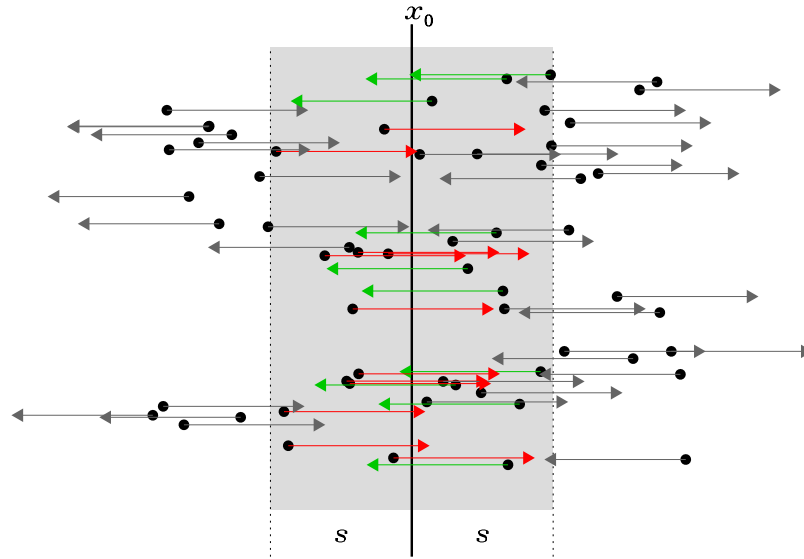


Figure 4.4: Pour un groupe de marcheurs aléatoires en 1D distribués aléatoirement en x , seuls ceux situés à une distance inférieure d'un pas s à une position quelconque x_0 auront la possibilité de traverser x_0 au prochain pas, mais seulement si ce pas est pris dans la "bonne" direction, soit vers la gauche (flèches vertes) pour les marcheurs situés dans l'intervalle $x_0 \leq x \leq x_0 + s$, ou vers la droite (flèches rouges) pour les marcheurs dans l'intervalle $x_0 - s \leq x \leq x_0$. La position verticale des particules est ici arbitraire, et sans conséquence pour l'argument.

dans chaque intervalle feront ce pas dans la "bonne" direction. Donc le nombre *net* δN de particules traversant la position x_0 vers la droite sera donné par quelque chose comme

$$\delta N(x_0) = \frac{1}{2}N(x_0 - |s|) - \frac{1}{2}N(x_0 + |s|) . \quad (4.1)$$

Considérons maintenant l'intervalle $x_0 - |s| < x < x_0 + |s|$ dans son ensemble, et dénotons par $N(x_0, t)$ le nombre de particules contenues dans cet intervalle au temps t . Le nombre au temps $t + \Delta t$ sera donné par le nombre au temps t plus le gain net entré du côté gauche (à $x_0 - |s|$) moins la perte nette de ce qui est sorti du côté droit (à $x_0 + |s|$). Évaluant l'éq. (4.1) à $x_0 - |s|$

et $x_0 + |s|$, on arrive à:

$$\begin{aligned} N(x, t + \Delta t) &= N(x, t) + \delta N(x - s) - \delta N(x + s) \\ &= N(x, t) + \left[\left(\frac{1}{2}N(x - 2s) - \frac{1}{2}N(x) \right) - \left(\frac{1}{2}N(x) - \frac{1}{2}N(x + 2s) \right) \right] \\ &= N(x, t) + \frac{1}{2} (N(x + 2s) - 2N(x) + N(x - 2s)) , \end{aligned} \quad (4.2)$$

où on largué l'indice "0" sur le x et la valeur absolue sur s afin d'alléger la notation. Divisant les membres de gauche et de droite par Δt , on peut réécrire cette expression sous la forme équivalente:

$$\frac{N(x, t + \Delta t) - N(x, t)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{(2s)^2}{\Delta t} \right) \times \left(\frac{N(x + 2s) - 2N(x) + N(x - 2s)}{(2s)^2} \right). \quad (4.3)$$

La seconde parenthèse au membre de droite ressemble à quelque chose que vous avez déjà vu en PHY-1234 (j'espère), soit une formule de différence finie centrée pour la dérivée seconde par rapport à x pour un pas spatial $h \equiv 2s$, tandis que le membre de gauche ressemble tout autant à une formule de différence finie avant pour la dérivée temporelle, pour un pas temporel $h \equiv \Delta t$. Si l'on accepte ces interprétations, l'éq. (4.3) représenterait alors une discrétisation par différences finies de l'équation différentielle suivante:

$$\frac{\partial N(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 N(x, t)}{\partial x^2}, \quad (4.4)$$

où on a défini le coefficient numérique

$$D = \frac{2s^2}{\Delta t}, \quad (4.5)$$

La Figure 4.3 présente une solution numérique de l'éq. (4.4), avec $D = 2$ et conditions initiales et limites:

$$N(x, t = 0) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} \Big|_{x=-100} = \frac{\partial N}{\partial x} \Big|_{x=+100} = 0. \quad (4.6)$$

Comparez maintenant ceci à la Figure 4.2; La solution a été tracée aux mêmes temps équivalents, et avec le même code de couleur pour les différents traits. Il est clair que l'éq. (4.4) est une excellente représentation de la marche aléatoire en 1D, même dans la limite d'un nombre de marcheurs élevé mais encore très loin de l'infini.

En contexte environnemental, il est d'usage d'écrire l'équation (4.4) non pas en terme du nombre N de molécules de contaminant, mais plutôt de sa **concentration**, souvent définie comme le rapport de la densité contaminant (ρ_c) par rapport à la densité totale du milieu (ρ):

$$c = \frac{\rho_c}{\rho}, \quad (4.7)$$

soit une quantité adimensionnelle. Mais je n'ai pu que constater que dans bien des ouvrages de sciences environnementales, le terme "concentration" est souvent utilisé pour caractériser la densité du contaminant (ρ_c) comme telle, dans lequel cas la concentration (dénnotée par un "C" majuscule dans tout ce qui suit) a des unités de kg m^{-3} . C'est en fait une définition souvent plus pratique quand vient le temps de quantifier la magnitude d'une source de contaminant, et celle adoptée dans ce qui suit. Notre équation (4.4) devient alors:

$$\frac{\partial C(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C(\mathbf{x}, t)}{\partial x^2}, \quad (4.8)$$

qui se généralise en plus d'une dimension spatiale à:

$$\frac{\partial C(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 C(\mathbf{x}, t), \quad (4.9)$$

et est appelée **équation de diffusion**. Remarquons que puisque $\nabla^2 C \equiv \nabla \cdot (\nabla C)$, avec D constant cette expression a la forme de notre loi de conservation générique (1.36), en l'absence de sources ou puits et si l'on définit le **flux diffusif** selon

$$\mathbf{q}_D = -D\nabla C, \quad [\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}] \quad (4.10)$$

ce qui est tout à fait cohérent avec le développement ayant mené à (4.4)¹. La quantité D (unités: $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$) est le **coefficient de diffusion**, et mesure le taux auquel se disperse le contaminant trace dans le milieu ambiant.

Notons bien que D caractérise la diffusion d'un contaminant spécifique dans un milieu ambiant tout aussi spécifique. Un calcul *ab initio* de D est possible via la théorie cinétique dite de Chapman-Enskog, mais c'est un exercice assez violent en physique statistique; en physique environnementale il est plutôt d'usage de mesurer D en laboratoire pour un mélange spécifique. Le Tableau 4.1 liste des coefficients de diffusion pour quelques contaminants d'intérêt, diffusant dans l'air ou l'eau.

Table 4.1: Coefficients de diffusion D [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$] dans l'air et dans l'eau

Substance	dans l'air (20° C)	dans l'eau (25° C)
Ar	1.89×10^{-5}	2×10^{-9}
CH ₄	2.1×10^{-5}	1.49×10^{-9}
CO	2.08×10^{-5}	2.03×10^{-9}
CO ₂	0.16×10^{-5}	1.92×10^{-9}
H ₂ O	2.42×10^{-5}	
H	7.56×10^{-5}	
NaCl		1.61×10^{-9}
Acetone		1.16×10^{-9}
Benzene		1.02×10^{-9}
Ethanol		0.84×10^{-9}
Nominal	10^{-5}	10^{-9}

Source: voir bibliographie

Si on repense à la diffusion comme étant due, à l'échelle microscopique, au mouvement thermique des constituants décrit par une marche aléatoire, alors on peut poser l'équivalence $s \equiv \ell$ et $\Delta t \equiv \ell/v_{\text{th}}$, et l'éq. (4.5) donnerait alors:

$$D = 2v_{\text{th}}\ell. \quad (4.11)$$

On en concluerait qu'un gaz peu dense (plus grand libre parcours moyen) conduira à une diffusion plus rapide. De même, dans un gaz chaud les constituants microscopiques se déplacent plus rapidement, et donc v_{th} est plus grand et (à densité égale) le temps inter-collisions est plus court, ce qui nous ferait prédire que D augmente avec la température. Ces deux attentes s'avèrent conformes à l'expérience. Pour l'Argon dans l'air, par exemple, D passe de $0.167 \times 10^{-5} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ à $0.289 \times 10^{-5} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ quand l'air réchauffe de 0° à 100° C. Mais encore ici, aux fins de ce cours, en bonne première approximation on négligera la plupart du temps cette dépendance en température.

Pour la majorité des espèces chimiques d'intérêt en physique environnementale, en bonne première approximation et sauf avis contraire, on utilisera des valeurs nominales $D = 10^{-5} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ pour la diffusion dans l'air, et $D = 10^{-9} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ pour la diffusion dans l'eau.

4.1.2 Le temps de diffusion

Notre équation de diffusion est une équation différentielle linéaire aux dérivées partielles (EDPs), dont la solution n'est pas exactement de la tarte, comme on le verra sous peu. On peut cepen-

¹Petit quiz: où se trouve le gradient dans l'équation (4.2)?

dant en extraire de l'information très pertinentes sans la solutionner formellement, via l'**analyse dimensionnelle**.

Travaillons avec l'équation de diffusion pure (4.8), et supposons que l'on puisse jauger "à l'oeil" une longueur caractéristique (L) et un temps caractéristique τ sur lesquels varie C . Dimensionnellement, on aurait alors:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial t} &\rightarrow \frac{C_0}{\tau} , \\ D\nabla^2 C &\rightarrow \frac{D C_0}{L^2} .\end{aligned}$$

Appliquant cette procédure à notre équation de diffusion:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\nabla^2 C , \quad \rightarrow \quad \frac{C_0}{\tau} \sim D \frac{C_0}{L^2} \quad (4.12)$$

Les C_0 se simplifient, conséquence du fait que notre équation de diffusion est linéaire en C . On a donc:

$$\frac{1}{\tau} \sim \frac{D}{L^2} . \quad (4.13)$$

Ceci permet d'estimer l'ordre de grandeur du temps caractéristique de la diffusion de C sur une échelle spatiale L :

$$\tau_D = \frac{L^2}{D} . \quad (4.14)$$

C'est le **temps de diffusion**. Ce genre d'analyse dimensionnelle permet d'obtenir assez facilement des estimés de type ordre de grandeur pour des phénomènes dont un calcul complet serait passablement plus complexe; on en fera usage à répétition au fil du cours²

4.1.3 Solutions analytiques à l'équation de diffusion

BvG, §7.1.1

En physique environnementale on s'intéressera souvent à la solution de l'équation de diffusion en présence d'une source de contaminant, dépendant potentiellement de temps et de la position. L'équation (4.9) devient alors:

$$\frac{\partial C(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = D\nabla^2 C(\mathbf{x}, t) + S(\mathbf{x}, t) , \quad (4.17)$$

où la concentration C est mesurée en kg m^{-3} , et sa source en $\text{kg m}^{-3} \text{s}^{-1}$.

Débutant avec Jean-Baptiste Fourier (1768–1830), faisant par la suite une passe à Pierre-Simon de Laplace (1749–1827) qui fait un punt posthume de l'autre côté de la Manche à Georges Gabriel Stokes (1819–1903; grand matheux et expert du 2-pour-1 —et même parfois 3-pour-1— dans l'application de solution mathématiques à des problèmes physiques), une panoplie de méthodes mathématiques ont été développées permettant d'obtenir des solutions analytiques à l'équation de diffusion (4.17), avec ou sans terme source, dans des situations géométriquement simples mais tout de même pertinentes en physique environnementale (entre autre): transformée de Laplace, solutions autosimilaires, solutions par fonctions de Green, etc. Vous avez déjà fait connaissance avec certaines de ces méthodes dans vos cours de math, et d'autres sont couvertes

²Le temps de diffusion permet également d'**adimensionnaliser** notre équation de diffusion. Introduisons les variables adimensionnelles suivantes:

$$x^* = x/L , \quad t^* = t/\tau_D , \quad (4.15)$$

et substituons ces définitions dans l'éq. (4.8); on obtient:

$$\frac{\partial C(\mathbf{x}^*, t^*)}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 C(\mathbf{x}^*, t^*)}{\partial x^{*2}} . \quad (4.16)$$

Le coefficient de diffusion D a disparu de l'équation, ayant été absorbé dans le temps de diffusion qui est maintenant l'unité de temps pour la variable temporelle.

en PHY-3140. On se bornera ici à simplement lister quelques solutions qui nous seront utiles plus loin³.

Aplanissement d'une discontinuité

On revient d'abord, mais en version continue, au petit problème introduit à la §4.1.1: l'aplanissement graduel d'une discontinuité initiale de la concentration dans un domaine spatial infini en 1D ($-\infty \leq x \leq \infty$), en l'absence de toute source de C autre que la quantité présente à $t = 0$. On doit alors solutionner l'équation de diffusion (4.17) avec $S = 0$ et comme condition initiale:

$$C(x, t = 0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ C_0, & x \geq 0 \end{cases} . \quad (4.18)$$

Notons que dans un tel problème 1D, la concentration est maintenant mesurée en kg m^{-1} . La solution prend la forme:

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] . \quad (4.19)$$

avec $\operatorname{erf}(\beta)$ étant la **fonction d'erreur**, définie selon:

$$\operatorname{erf}(\beta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\beta \exp(-x^2) dx . \quad (4.20)$$

Pour référence future, la **fonction d'erreur complémentaire** est définie ainsi:

$$\operatorname{erfc}(\beta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\beta^\infty \exp(-x^2) dx . \quad (4.21)$$

de telle sorte que $\operatorname{erf}(\beta) + \operatorname{erfc}(\beta) = 1$. Notons également que $\operatorname{erf}(\beta) = -\operatorname{erf}(-\beta)$, et que la définition même de la fonction d'erreur (soit l'éq. (4.22) implique que

$$\frac{d}{d\beta} \operatorname{erf}(\beta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-\beta^2) . \quad (4.22)$$

La solution (4.19) est portée en graphique sur la Figure 4.5A, à des temps t exprimés en unités du temps de diffusion (4.14), ce qui revient ici à poser $D = 1$. Notez bien que les courbes successives sont espacées de manière approximativement uniforme en $\log(t)$, tel qu'indiqué par le code de couleur⁴.

On perçoit déjà sur cette Figure (en fait déjà sur les Figs. 4.2 et 4.3) une caractéristique importante des processus diffusifs: ils opèrent très rapidement en présence de fort gradients, mais deviennent de plus en plus inefficaces à mesure que les gradients s'aplanissent. C'est évidemment une conséquence du fait que le flux diffusif est lui-même proportionnel au gradient de C (revoir l'éq. (4.10) au besoin). La solution stationnaire asymptotique est

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C(x, t)}{C_0} = \frac{1}{2} , \quad (4.23)$$

soit un mélange complet de la concentration initiale dans tout le domaine spatial.

Source ponctuelle instantanée en 1D

On considère une situation en une dimension spatiale, où à $t = 0$ une masse Q (en kg) de contaminant est injectée instantanément à la position $x = 0$, dans un environnement où

³Cette sous-section est adapté pas mal directement de la Section 7.1.1 et l'Annexe C de l'ouvrage de Boeker & van Grondelle cité en fin de chapitre

⁴C'est aussi la solution qui a été utilisée pour produire la Figure 4.3, même si dans ce cas le domaine spatial était borné dans $-100 \leq x \leq +100$; une petite tricherie qu'on me pardonnera j'espère...

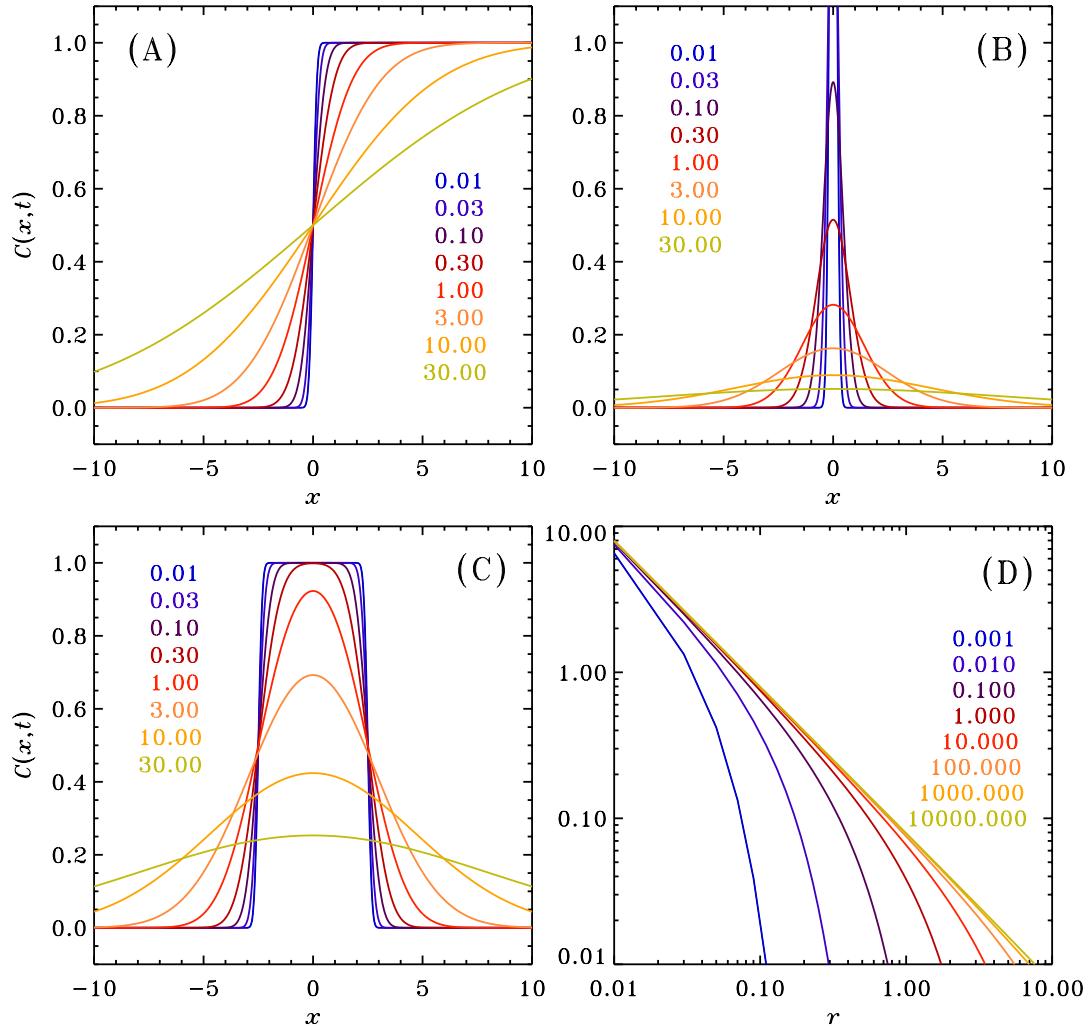


Figure 4.5: Diverses solutions analytiques à l'équation de diffusion (4.17), discutées à la §4.1.3. (A): Aplanissement d'une discontinuité 1D; (B): Source instantanée et spatialement localisée à $x = 0$ en 1D; (C) source instantanée d'étendue finie en x en 1D; et (D) source temporellement continue mais spatialement localisée à $r = 0$ en 3D (notez l'échelle log-log pour cette dernière). Le code couleur correspond au temps t , mesuré en unité du temps de diffusion, auquel chaque solution est tracée.

avant l'injection $C = 0$ partout. Le terme source S dans (4.17) est alors $S = 0 \forall t > 0$, et se retrouve entièrement "contenu" dans la condition initiale:

$$C(x, t = 0) = Q\delta(x) , \quad (4.24)$$

où $\delta(x)$ est la fonction delta de Dirac, et C est encore ici une densité linéaire (unités: kg m^{-1}) en raison de la nature 1D du problème.

La solution de l'équation (4.17) est donnée par

$$C(x, t) = \frac{Q}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/(2\sigma^2)) \quad (4.25)$$

où on a défini

$$\sigma(t) = \sqrt{2Dt} . \quad (4.26)$$

L'équation (4.35) décrit une Gaussienne centrée sur $x = 0$ et dont la largeur croît en $\sqrt{t}$ selon (4.26), et est illustrée sur la Figure 4.5B. Cette solution satisfait également

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(x, t) dx = Q \quad \forall t , \quad (4.27)$$

exprimant la conservation de la masse totale de contaminant injecté à $t = 0$; la diffusion ne fait que disperser le contaminant présent initialement. Ici la solution stationnaire asymptotique est

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(x, t) = 0 , \quad (4.28)$$

la concentration initiale se retrouvant complètement diluée dans le domaine spatial infini.

Notons finalement que cette même solution décrirait une situation en 3D où une densité surfacique (unités: kg m^{-2}) de grandeur Q est injectée dans le plan $x = 0$, la solution demeurant alors invariante en y et z .

Source étendue instantanée en 1D

La linéarité de l'équation de diffusion permet de construire des solutions pour des sources spatialement étendues comme une somme (intégrale) de solutions spatialement ponctuelles, décalées spatialement l'une par rapport à la suivante et couvrant l'étendue spatiale de la source. Considérons par un exemple une injection instantanée de contaminant en 1D, comme précédemment, mais cette fois injectée à $t = 0$ sur un intervalle fini $-b/2 \leq x \leq b/2$. À une position x' dans cet intervalle on peut écrire:

$$C(x', t = 0) = C_0 \delta(x - x') dx' , \quad (4.29)$$

À ce petit segment linéaire infinitésimal dx' est associé une solution:

$$C(x, t) = \frac{C_0 dx'}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - x')^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.30)$$

comme auparavant, viz. éq. (4.35). En vertu de la linéarité de notre équation de diffusion, la solution complète pour la source étendue est alors donnée par:

$$\begin{aligned} C(x, t) &= \frac{C_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-b/2}^{+b/2} \exp\left(-\frac{(x - x')^2}{2\sigma^2}\right) dx' \\ &= \frac{C_0}{2} \left[\text{erf}\left(\frac{b/2 + x}{\sigma\sqrt{2}}\right) + \text{erf}\left(\frac{b/2 - x}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

où $\sigma(t)$ est toujours donné par l'éq. (4.26), et notre fonction d'erreur est réapparue dans le portrait. Cette solution est portée en graphique à la Figure 4.5C. Qualitativement, le comportement est le même qu'en (B), soit un inexorable étalement du profil initial de la concentration. La solution stationnaire asymptotique est encore une fois

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(x, t) = 0 , \quad (4.32)$$

soit dilution complète de la masse de contaminant injecté à $t = 0$.

Source ponctuelle instantanée en 3D

Notre solution de la §4.1.3 est généralisable pour une source ponctuelle instantanée diffusant en 2D ou 3D. La concentration C est alors mesurée en kg m^{-n} . La solution de l'équation (4.17) est alors donnée par

$$C(r, t) = \frac{Q}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{r^2}{(2\sigma^2)}\right), \quad (4.33)$$

où $n = 2$ en 2D (géométrie cylindrique avec invariance en z), avec le rayon $r^2 = x^2 + y^2$ pour une source linéaire sur l'axe de symétrie $r = 0$; et $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ en 3D ($n = 3$) pour une source ponctuelle à l'origine ($r = 0$). On a toujours $\sigma = \sqrt{2Dt}$, et l'évolution de la solution est qualitativement semblable à la Figure 4.5B.

Source ponctuelle continue en 3D

Dans toutes les solutions présentées jusqu'ici, le contaminant est injecté instantanément à $t = 0$. Toujours en vertu de la linéarité de notre équation de diffusion, il est possible de modéliser une injection continue de contaminant en superposant des solutions pour injection instantané, décalées dans le temps l'une par rapport à l'autre, chaque injection ayant une intensité qdt' . On doit maintenant remplacer (4.26) par

$$\sigma(t, t') = \sqrt{2D(t - t')}, \quad (4.34)$$

donnant la contribution au temps t de l'injection instantanée au temps t' . Il s'agit maintenant d'intégrer la solution (4.33) de 0 à t :

$$C(r, t) = \frac{q}{(8(\pi D)^{3/2})} \int_0^t (t - t')^{-3/2} \exp\left(-\frac{r^2}{4D(t - t')}\right) dt' \quad (4.35)$$

Cette intégrale, de type convolution, a l'air un peu méchante, mais la substitution de variable

$$\beta = \frac{r}{\sqrt{4D(t - t')}} \quad (4.36)$$

nous ramène à une forme plus gentille, donc la solution est:

$$C(r, t) = \frac{q}{4\pi Dr} \operatorname{erfc}\left(\frac{r}{2\sqrt{Dt}}\right) \quad (4.37)$$

où $\operatorname{erfc}(x)$ est la fonction d'erreur complémentaire. Cette solution est portée en graphique à la Figure 4.5D. La solution stationnaire asymptotique prend la forme:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(x, t) = \frac{q}{4\pi Dr} \quad (4.38)$$

Ce profil asymptotique est tel qu'en tout r , le flux diffusif intégré sur une sphère de rayon r équilibre le taux d'injection q du contaminant à $r = 0$.

4.2 Écoulements: transport et mélange

Notre étude de la diffusion s'est faite dans le cadre d'un milieu ambiant globalement au repos. Mais en contexte environnemental on devra souvent composer avec la présence de vents, de courant marins, ou d'écoulements surfaciques, allant du ruissellement aux rivières et fleuves. Tous ces écoulements fluides peuvent avoir un fort impact sur la dispersion des contaminants (et aussi sur transport de la chaleur, sujet du chapitre 5 qui suit), et doivent donc être pris en considération.

Le calcul d'un écoulement fluide $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ se développant en réponse à l'action de forces comme la gravité, la pression, la force de Coriolis, etc., est un sujet fort complexe⁵. Dans le cadre de ce cours on considérera $\mathbf{u}$ comme connu (calculé ou mesuré), et on se concentrera sur ses effets environnementaux, en particulier sur le transport de "contaminant" ou d'énergie thermique dans l'atmosphère, l'océan, les écoulements de surface et les sols.

Dans bien des cas nous introduirons de surcroît une hypothèse simplificatrice qui peut paraître plus que douteuse dans le cas du gaz atmosphérique: l'incompressibilité. Contrairement à l'eau et autres liquides, l'air est définitivement un milieu compressible. Cependant, on peut montrer⁶ que pour des écoulements qui ne sont pas fortement confinés par des parois et sont lents par rapport à la vitesse du son dans le milieu ambiant, la dynamique des écoulements compressibles s'approche de celle des écoulements incompressibles à un très bon niveau d'approximation. La mesure-clef est le **nombre de Mach** $M = |\mathbf{u}|/c_s \ll 1$, où c_s est la vitesse du son. Même dans un ouragan, les vents atteignent des vitesses de "seulement" quelques dizaines de m s^{-1} , ce qui est beaucoup plus petit que la vitesse du son dans l'air à TPN, soit $c_s = 340 \text{ m s}^{-1}$, d'où $M \lesssim 0.1$.

4.2.1 L'équation de transport

Considérons la situation très simple illustrée schématiquement sur la Figure 4.6: travaillant en coordonnées cartésiennes, on s'imagine un volume fictif $V = \Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ fixé dans l'espace (rectangle noir) traversé par un fluide de densité ρ se déplace horizontalement vers la droite (flèches rouges). La masse traversant les deux surfaces d'aire $A = \Delta y \Delta z$ perpendiculaire

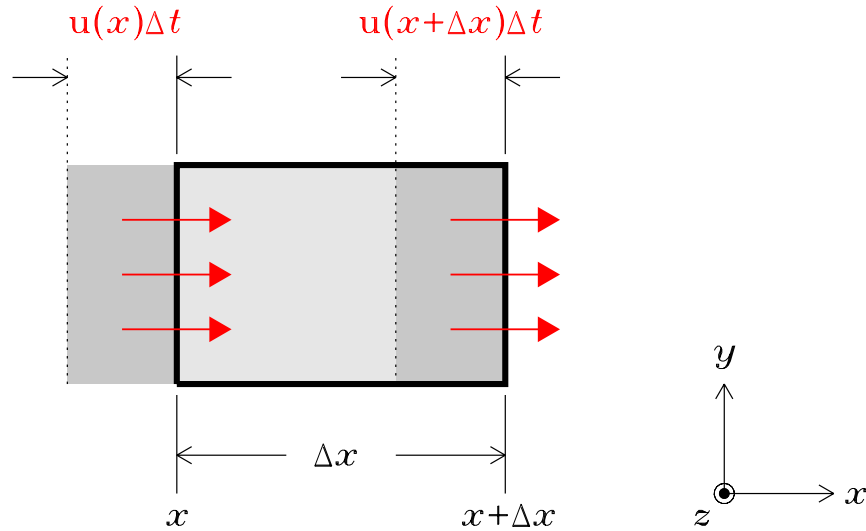


Figure 4.6: Transport de masse par un écoulement $\mathbf{u}$ en 1D.

à l'écoulement par unité de temps est donné par $\rho u A$; pour vous en convaincre (au besoin...), il suffit d'examiner les unités:

$$\rho u A \equiv \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \times \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \times [\text{m}^2] = \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]. \quad (4.39)$$

Durant un intervalle de temps Δt la variation de la masse contenue dans V ($= \rho V$) sera donc donnée par la différence entre la masse de fluide entrant de la gauche et sortant par la droite

⁵Sujet par ailleurs traité en détail dans le cours PHY-3140 *Hydrodynamique*, donné par mononcle ici présent.

⁶C'est fait en PHY-3140 *Hydrodynamique* !

durant le même intervalle de temps. Dénnotant par $\Delta\rho$ la variation de la densité produite par ces flux de masse entrant et sortant de V , on a alors:

$$\Delta\rho\Delta x\Delta y\Delta z = \rho(x)u(x)\Delta t\Delta y\Delta z - \rho(x+\Delta x)u(x+\Delta x)\Delta t\Delta y\Delta z, \quad (4.40)$$

expression que l'on peut réorganiser algébriquement sous la forme équivalente:

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t} = - \left(\frac{\rho(x+\Delta x)u(x+\Delta x) - \rho(x)u(x)}{\Delta x} \right). \quad (4.41)$$

Dans la limite infinitésimale $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, ceci devient une équation différentielle aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}. \quad (4.42)$$

La généralisation en 3D est simple une fois qu'on réalise que pour un écoulement de forme plus complexe, ce n'est que la composante de l'écoulement perpendiculaire à la surface qui contribue au transport. L'argument ci-dessus s'applique alors indépendamment dans chaque direction définie par les axes du système de coordonnées, ce qui conduit à:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial t} &= - \frac{\partial\rho u_x}{\partial x} - \frac{\partial\rho u_y}{\partial y} - \frac{\partial\rho u_z}{\partial z} \\ &= -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (4.43)$$

On retrouve ici encore une version spécifique de notre loi de conservation générique (1.36), en l'absence de source ou puit et un flux $\mathbf{f} = \rho\mathbf{u}$. Physiquement, ceci exprime la conservation de la masse de fluide transportée par l'écoulement $\mathbf{u}$.

Notons que dans bien des situations d'intérêt environnemental, l'écoulement effectuant le transport est **incompressible** (comme l'eau), ou se déplace suffisamment lentement (par rapport à la vitesse du son dans le milieu) pour être se comporter comme un fluide incompressible à un très bon niveau d'approximation. On a alors $\rho = \text{constante}$, et l'éq. (4.43) se réduit alors à:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad [\text{incompressible}] \quad (4.44)$$

Ceci indique que le débit Q (unités: $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$) de fluide incompressible s'écoulant dans un conduit ou canal de section variable devra ajuster sa vitesse de manière à assurer un débit constant, conservation de la masse oblige: L'idée est illustrée sur la Figure 4.7. Ici la constance du débit

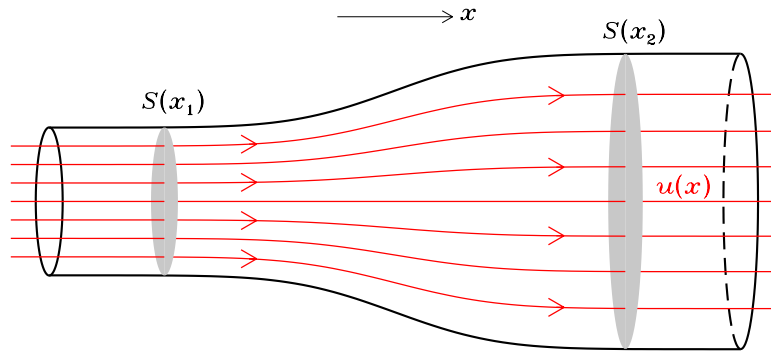


Figure 4.7: Un “tube de flux”. Un écoulement incompressible $\mathbf{u}$ voyage dans un conduit de section $S(x)$ variant en x . La conservation de la masse impose que le débit Q , donné par le produit $S(x)u_x(x)$, demeure constant, le fluide doit ralentir (accélérer) quand le conduit s'élargit (rétrécit), de manière à préserver le débit Q .

impose:

$$u_x(x_1)S(x_1) = u_x(x_2)S(x_2) , \quad \rightarrow \quad u_x(x_2) = u_x(x_1) \frac{S(x_1)}{S(x_2)} \quad \forall x_1, x_2 \quad (4.45)$$

Pour un fluide compressible, en régime stationnaire ($\partial/\partial t = 0$), la constance du débit imposerait plutôt:

$$\rho(x_1)u_x(x_1)S(x_1) = \rho(x_2)u_x(x_2)S(x_2) \quad (4.46)$$

Tous ces développements peuvent s'appliquer au transport d'une concentration ($C(x, t)$, $\equiv$ densité) d'un contaminant dans un fluide en mouvement. Si le contaminant est présent en quantités traces, c.-à-d. sa concentration est très petite par rapport à la densité du fluide en mouvement, alors en l'absence de diffusion on n'a qu'à remplacer ρ par C dans l'équation (4.50) et (4.46).

En présence de diffusion cependant, notre loi de conservation doit maintenant inclure le flux diffusif (4.10) en plus du flux advectif, le flux total devenant alors:

$$\mathbf{q}_{\text{tot}} = \mathbf{q}_a + \mathbf{q}_D = \mathbf{u}C - D\nabla C . \quad (4.47)$$

Notre nouvelle loi de conservation pour la concentration C a maintenant la forme

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u}C - D\nabla C) . \quad (4.48)$$

Dans le cas particulier d'un écoulement incompressible, on a:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}C) = \mathbf{u} \cdot \nabla C + C \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{u}}_{=0} \quad (4.49)$$

en vertu de (4.46). Pour un coefficient de diffusion constant (ou variant sur une échelle spatiale beaucoup plus grande que celle des variations de C), l'éq. (4.48) devient alors

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C = D\nabla^2 C . \quad (4.50)$$

C'est l'**équation de transport**, de grande importance en physique environnementale, comme le verra sous peu.

4.2.2 Le temps advectif et le nombre de Peclet

On peut de nouveau appliquer l'analyse dimensionnelle (voir §4.1.2) à notre équation de transport (4.50). Avec τ , L et u_0 comme temps, longueur, et vitesse caractéristiques, on a maintenant:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \tau} &\rightarrow \frac{C_0}{\tau} , \\ \mathbf{u} \cdot \nabla C &\rightarrow \frac{u_0 C_0}{L} , \\ D\nabla^2 C &\rightarrow \frac{D C_0}{L^2} \end{aligned}$$

et donc,

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \mathbf{u} \cdot \nabla C = D\nabla^2 C , \quad \rightarrow \quad \frac{C_0}{\tau} + \frac{u_0 C_0}{L} \sim \frac{C_0}{L^2} \quad (4.51)$$

Comme notre équation de transport est toujours linéaire en C ,

$$\frac{1}{\tau} \sim \frac{u_0}{L} + \frac{D}{L^2} . \quad (4.52)$$

Le rapport du premier terme au membre de gauche sur le second nous produit une quantité adimensionnelle, appelé **Nombre de Peclet**:

$$\text{Pe} = \frac{u_0 L}{D} . \quad (4.53)$$

Le nombre de Peclet mesure l'importance relative de l'écoulement versus la diffusion dans le transport du contaminant. Dans la limite $\text{Pe} \gg 1$, le terme diffusif peut être considéré comme négligeable, ce qui permet alors d'obtenir un estimé d'ordre de grandeur pour le **temps advectif**, soit le temps caractéristique mesurant le transport du contaminant par l'écoulement sur une distance $\sim L$:

$$\tau_a = \frac{L}{u_0} . \quad (4.54)$$

4.2.3 Solutions analytiques à l'équation de transport

BvG, §7.1.2

Pour un écoulement $\mathbf{u}$ le moins réaliste, même stationnaire ($\partial/\partial t \equiv 0$), la solution de l'équation de transport doit être effectuée numériquement. Quelques solutions analytiques sont cependant possibles, (et utiles!) dans le cas très simple d'un écoulement constant dans le temps et l'espace.

Source ponctuelle instantanée

On revient à la situation d'une source spatialement ponctuelle, et injectant instantanément à $t = 0$ une masse de contaminant Q dans un fluide se déplaçant à vitesse constante u dans la direction- x (disons). Commençons par passer à un repère se déplaçant avec le fluide, par les transformations (Galiléennes) habituelles:

$$x' = x - ut , \quad (4.55)$$

$$y' = y , \quad (4.56)$$

$$z' = z . \quad (4.57)$$

Dans ce repère, le fluide est au repos, et la solution purement diffusive obtenue à la §4.1.3 est directement applicable. On peut ainsi écrire l'éq. (4.33) dans le repère prime (en coordonnées cartésiennes), et la transformer au repère non-prime selon les eqs. (4.55)–(4.57):

$$C(x, y, z, t) = \frac{Q}{(\sigma\sqrt{2\pi})^3} \exp\left(-\frac{(x - ut)^2 + y^2 + z^2}{2\sigma^2}\right) , \quad (4.58)$$

avec $n = 3$ pour une situation 3D, et comme auparavant $\sigma = \sqrt{2Dt}$. Cette expression décrit un profil Gaussien s'élargissant en $\sqrt{t}$ tout en se déplaçant à vitesse uniforme dans la direction positive de l'axe- x .

La Figure 4.8 illustre deux solutions en version adimensionnelle, pour des valeurs différentes du nombre de Peclet, qui ici fixe le rapport u/D , et le temps exprimé en unités du temps de diffusion (4.14). Le Peclet devient ainsi une mesure de la vitesse de l'écoulement. On notera déjà qu'au haut Peclet, à une distance donnée en aval du point de d'injection du contaminant, un observateur mesurera une plus haute concentration, mais moins longtemps, qu'il/elle ne le ferait à bas Peclet; au niveau de la "sécurité publique", ce genre de considération est vital à la réponse à apporter en cas de déversement de polluant toxique dans l'air ou un cours d'eau. Ici la densité massique C (kg m^{-3}) de contaminant à la position x au temps t est la quantité requise pour déterminer si la baignade est permise ou pas, si l'eau doit être déclarée non-potable ou pas, et si il faut anticiper devoir (ou pas) ramasser des poissons morts loin en aval. Encore ici la solution asymptotique en est une de dilution complète, i.e., $C(x, t \rightarrow \infty) = 0$.

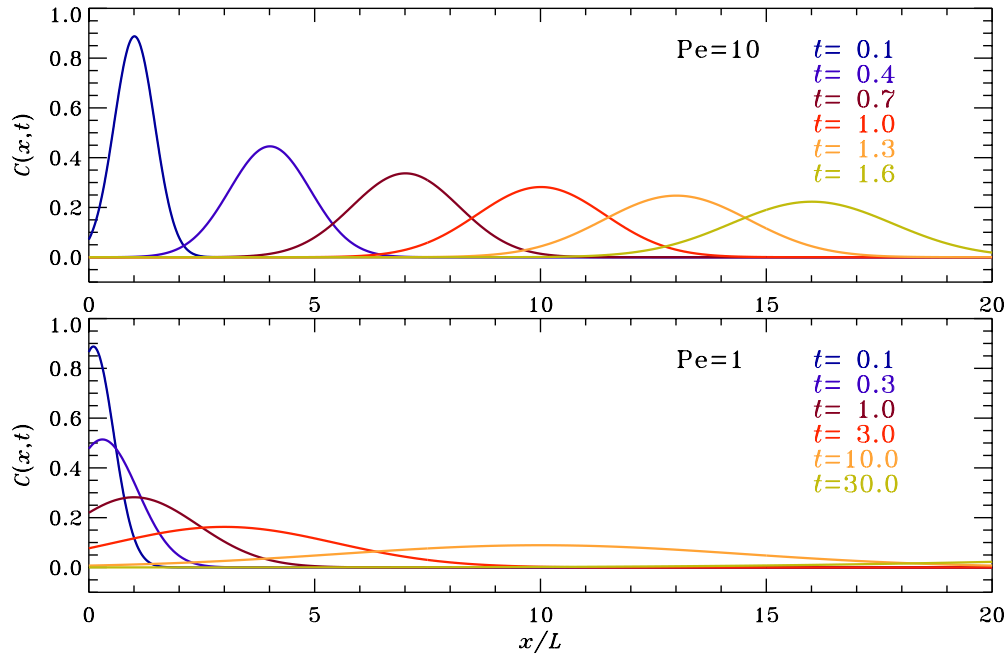


Figure 4.8: Transport et diffusion d'une masse de contaminant injectée instantanément à $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$ en présence d'un écoulement constant $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x$, à des nombres de Peclet $Pe = 10$ et 1 . Notez bien que les temps portés en graphique sont espacés linéairement sur le graphique du haut, mais logarithmiquement sur celui du bas.

Source ponctuelle continue

Tout comme on l'avait fait dans le cas de la diffusion pure (§4.1.3), une injection continue de contaminant en un point fixe peut se modéliser comme une convolution d'injections instantanées décalées l'une par rapport à l'autre dans le temps. Utilisant ainsi notre solution (4.58), la solution est alors donnée par l'intégrale

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{8(\pi D)^{3/2}} \int_0^t (t - t')^{-3/2} \exp\left(-\frac{(x - u(t - t'))^2 + y^2 + z^2}{4D(t - t')}\right) dt' \quad (4.59)$$

La même substitution de variable que dans le cas purement diffusif, $\beta = r/\sqrt{4D(t - t')}$, permet de simplifier l'intégrale, mais plus au point de produire une solution analytique, sauf dans la limite asymptotique $t \rightarrow \infty$, dans lequel cas:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi D r} \exp\left(-\frac{u(r - x)}{2D}\right), \quad (4.60)$$

avec $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ comme d'habitude. Introduisons maintenant les variables adimensionnelles suivantes:

$$x^* = \frac{u}{D} x, \quad (4.61)$$

$$y^* = \frac{u}{D} y, \quad (4.62)$$

$$z^* = \frac{u}{D} z, \quad (4.63)$$

$$C^* = \frac{4\pi D^2}{q u} C. \quad (4.64)$$

Substituant ces expressions dans (4.60), on arrive à un résultat particulièrement simple:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C^*(x, y, z, t) = \frac{1}{r^*} \exp\left(-\frac{r^* - x^*}{2}\right), \quad (4.65)$$

avec r^* le pendant adimensionnel de notre r habituel. La Figure 4.9 illustre cette solution, ici dans le plan $[x^*, y^*]$, mais la solution est axisymétrique sur rotation par rapport à l'axe- x . Il

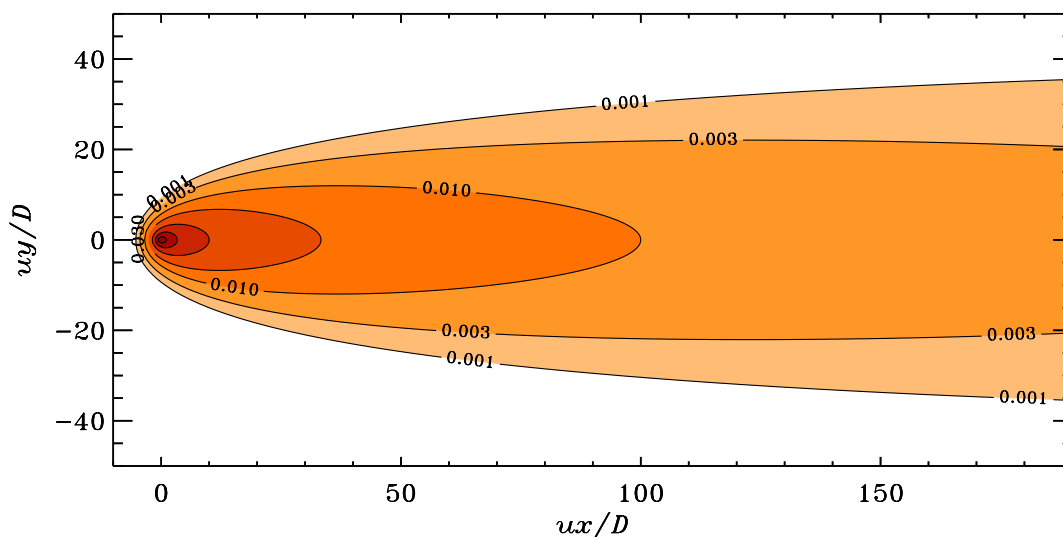


Figure 4.9: Distribution spatiale asymptotique ($t \rightarrow \infty$) de la concentration d'un contaminant injecté de manière continue à $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, distances et concentrations étant exprimées ici en terme des variables adimensionnelles (4.61)–(4.64). Cette solution est axisymétrique sous rotation autour de l'axe- x .

faut apprécier l'avantage pratique de cette forme adimensionnelle: elle peut servir à modéliser n'importe quel type de dispersion d'un polluant émanant à taux q constant d'une source spatialement ponctuelle, comme l'ouverture au sommet d'une cheminée, quels que soient la vitesse du vent et le coefficient de diffusion; pour revenir dans le monde physique on n'a qu'à reconvertir les C^* , x^* , etc., en quantités dimensionnelles, via les éqs. (4.61)–(4.64); et on va faire exactement ça dans pas long...

4.2.4 La turbulence

La prochaine fois que l'occasion se présentera, observez l'écoulement de l'eau dans une rivière ou un fleuve ayant un débit substantiel; sous l'influence de la gravité, l'eau s'écoule clairement dans une direction spécifique, ultimement vers la mer; mais si on y regarde de près, à ce mouvement global à peu près constant se superpose toutes sortes de fluctuations produites par des tourbillons, obstacles, etc. Ces fluctuations se développent sur des échelles spatiales (et temporelles) typiquement beaucoup plus petite que l'écoulement global régulier, de l'amont vers l'aval.

Les fluctuations observées à la surface de votre cours d'eau sont une manifestation de la **turbulence** dans l'écoulement, cette turbulence résultant du développement d'une (ou plusieurs) **instabilités** du fluide. Souvent caractérisé comme le dernier grand problème non-résolu de la physique classique (i.e., non-quantique), les écoulements turbulents jouent un rôle majeur dans plusieurs contextes environnementaux. Le sujet est couvert en détail, devinez où... en PHY-3140. En PHY-2100 nous nous limiterons à une approche particulière à la modélisation de la turbulence et de ses effets, basé sur la **séparation d'échelles**; l'idée étant que si on

n'est pas particulièrement intéressés à modéliser les détails de l'écoulement à l'échelle des petits tourbillons, on peut faire une moyenne sur une échelle beaucoup plus grande que ces tourbillons, et en extraire l'effet net sur l'écoulement aux grandes échelles, par exemple la quantité de contaminant transportée en aval.

Considérons un écoulement fortement turbulent, dans le sens qu'un très grand nombre de petits tourbillons sont perpétuellement en train de se former, de tourbillonner pendant un temps, puis de se dissiper, etc. Observé sur un temps comparable à la durée de vie typique (τ) de ces petits tourbillons, un petit élément de fluide ballotté par cet ensemble de tourbillons semble décrire une forme de marche aléatoire, la distance parcourue (ℓ) lorsqu'entraîné par un tourbillon de vitesse caractéristique u_t devenant l'équivalent du pas de marche, et τ mesure la durée d'un pas marche. On a alors $\ell = u_t \times \tau$. On a vu qu'on pouvait construire un coefficient de diffusion à partir de ces quantités (revoir l'éq. (4.5) au besoin). Invoquant la même logique, on peut définir un **coefficient de diffusivité turbulente** (D_T) pour capturer l'effet des petites échelles sur les grandes:

$$D_T = u_t \times \ell, \quad [\text{m}^2\text{s}^{-1}] \quad (4.66)$$

Tout ceci pourrait paraître un grave abus du processus analogique, mais en contexte environnemental il est souvent possible de *mesurer* u_t , ℓ et/ou τ , et de valider expérimentalement le D_T en résultant.

Par exemple, en océanographie il est (relativement) simple de mesurer à bonne cadence temporelle l'écoulement à une profondeur donnée sous la surface. À partir de longues séquences temporelles de telles mesures, il est alors possible de calculer un écoulement moyen $\langle \mathbf{u} \rangle$, et la déviation quadratique moyenne par rapport à cet écoulement moyen devient une mesure de u_t . Le temps de corrélation ces déviations par rapport à la moyenne offre ensuite une mesure de τ , qui permet ensuite d'estimer $\ell \sim u_t \tau$.

Dans les couches superficielles de l'océan, on détermine ainsi $D_T \sim 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, soit $\sim 10^6$ fois plus grand que le coefficient de diffusion D “microscopique” associé à l'agitation thermique (voir Tableau 4.1). Dans la troposphère, le coefficient de diffusion turbulente est estimé à $\sim 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, soit encore 10^6 fois plus que la diffusion microscopique. Ce sont ici des résultats tout-à-fait typiques: quand une turbulence bien développée est présente —et elle l'est souvent— la **diffusion turbulente** dominera largement sur la diffusion microscopique, et donc contrôlera (entre autre) le taux auquel se dispersera un contaminant aux grandes échelles spatiales. On peut toujours estimer un temps caractéristique de mélange via l'éq. (4.14), mais avec D_T remplaçant D :

$$\tau_D = \frac{L^2}{D_T}. \quad (4.67)$$

La bonne nouvelle ici est que si on accepte cette “recette”, toutes les solutions analytiques aux équation de diffusion et de transport considérées dans les sections précédentes sont encore valides, mais avec $D \rightarrow D_T$.

4.2.5 Exemple: un inspirant mélange turbulent

La troposphère terrestre est surprenamment bien mélangée, conséquence des vents horizontaux très rapides dans la haute atmosphère, et du mélange turbulent dans la verticale, associée à la convection thermique et diverses autres instabilités fluides qui sont ÉVIDEMMENT discutées en détail en PHY-3140. Un modeste vent soutenu de 10 m s^{-1} (36 km/h) fait le tour de la terre en 1 mois! Et dans la haute troposphère et basse stratosphère, le jet stream souffle presque continuellement dans la direction W-E à 3–10 fois cette vitesse (pas pour rien qu'on l'appelle “jet stream”!). Dans la direction N-S le mélange est moins efficace, en l'absence d'équivalent du jet stream; on estime néanmoins que le temps caractéristique d'échange gazeux interhémisphérique est de l'ordre de l'année.

Considérant tout ça, on peut estimer, par exemple sur la base des solutions de la Fig. 4.5, qu'une homogénéisation complète de l'ensemble de l'atmosphère demandera de l'ordre de quelques $\sim 10^2$ temps de diffusion turbulente. On parle donc de plusieurs siècles pour *complètement*

mélanger le gaz atmosphérique sous l'influence combinée des vents et de la turbulence atmosphérique.

On a vu (§2.1 et Tableau 2.1) que l'Argon est le troisième constituant atmosphérique en masse, avec $\simeq 7 \times 10^{16}$ kg pour l'ensemble de l'atmosphère. Le poids moléculaire de l'Argon étant de $\simeq 40$ et l'unité de masse atomique $m = 1.66 \times 10^{-27}$ kg, on a donc un très astronomique grand total de

$$N = \frac{7 \times 10^{16}}{40m} \simeq 10^{42} \text{ Ar} \quad (4.68)$$

atomes d'Argon dans l'atmosphère. L'Argon est un gaz lourd qui tend à se concentrer naturellement dans la basse atmosphère, on considérera ici qu'il réside en totalité dans le premier $h = 2.5$ km de la troposphère. Le volume total correspondant est

$$V = 4\pi R_{\oplus}^2 h \simeq 10^{18} \text{ m}^3, \quad (4.69)$$

où $R_{\oplus} = 6371$ km est le rayon de la Terre. On en conclut qu'un litre ($\equiv 10^{-3} \text{ m}^3$) d'air près du sol contient

$$n = \frac{10^{42}}{10^{18}} \times 10^{-3} \simeq 10^{21} \text{ Ar}. \quad (4.70)$$

Maintenant; à la naissance, un.e nouveau-né.e aspire environ 1 litre d'air à sa première respiration. Ce litre d'air contient donc $n = 10^{21}$ atomes d'Argon, et l'Argon étant chimiquement inerte, ces n atomes seront renvoyés dans l'atmosphère au premier souffle expiratoire subséquent de notre nouveau-né.e. Supposons que par un processus quelconque on puisse marquer ces atomes d'Argon (en leur collant un “*”, par exemple). Durant les siècles qui suivront ces atomes marqués seront dispersés dans l'atmosphère par mélange turbulent, y devenant éventuellement distribués de manière géographiquement uniforme. On aura donc, au bout de tout ce temps, et toujours dans la basse atmosphère ($0 \leq z \leq 2.5$ km):

$$n^* = \frac{10^{21}}{10^{18}} \text{ Ar}^* \text{ m}^{-3} \sim 1 \text{ Ar}^* \text{ litre}^{-1} \quad (4.71)$$

La suite exige d'utiliser votre imagination. Choisissez votre personnage historique préférée: Cléopâtre, Astérix, Attila le Hun, le p'tit Jésus, qui vous voulez... La seule contrainte, si on veut jouer prudent, est que le personnage en question soit né il y a plus d'un millénaire, histoire de laisser suffisamment de temps à la diffusion turbulente atmosphérique pour bien mélanger de manière homogène (Napoléon ou de Jeanne d'Arc, je suis vraiment désolé...).

Au vu du petit calcul qui précède, on doit conclure qu'à votre première respiration comme nouveau-né.e, vous avez inspiré en toute probabilité un atome d'Ar* qu'avait inspiré votre personnage historique préféré à sa propre naissance, il y a maintenant plus d'un millénaire. C'est ça, le mélange turbulent !

4.2.6 Exemple: la fonderie Horne à Rouyn-Noranda

De son propre aveu, en 2022 la Fonderie Horne à Rouyn-Noranda (voir Fig. 4.10) a émis par ses cheminées une concentration d'Arsenic de 73.1 nanogramme (ng) par mètre cube (moyenne annuelle). Par autorisation ministérielle spéciale, la cible d'émission d'Arsenic imposé par Notre Bon Gouvernement à la fonderie Horne pour l'année 2023 est de 65 ng m^{-3} , soit plus de 20 fois la norme provinciale officielle de 3 ng m^{-3} . Parce que c'est Bon pour l'Économie...⁷

Pour un débit gazeux de $\simeq 10^6 \text{ m}^3$ par heure sortant des deux principales cheminées de la Fonderie, on a donc un taux d'injection massique moyen de

$$q = (73.1 \text{ ng m}^{-3}) \times (10^6 \text{ m}^3 \times (3600 \text{ s})^{-1}) \simeq 2 \times 10^4 \text{ ng s}^{-1}. \quad (4.72)$$

Il s'agit ici d'estimer la dispersion de ce polluant toxique dans la ville de Rouyn-Noranda, en présence d'un vent soufflant du Nord à vitesse constante u et d'une turbulence atmosphérique caractérisée par un coefficient de diffusion turbulente D_T .

⁷Mentionnons tout de même, pour un peu de positif, qu'entre avril 2023 et février 2024 la fonderie Horne a émis en moyenne 45.2 ng m^{-3} , significativement mieux que cette (généreuse) cible pour 2023.



Figure 4.10: La fonderie Horne, à Rouyn-Noranda. Le quartier Notre-Dame est au côté gauche de l'image. Sources: Archives photographiques de *La Presse* (Montréal).

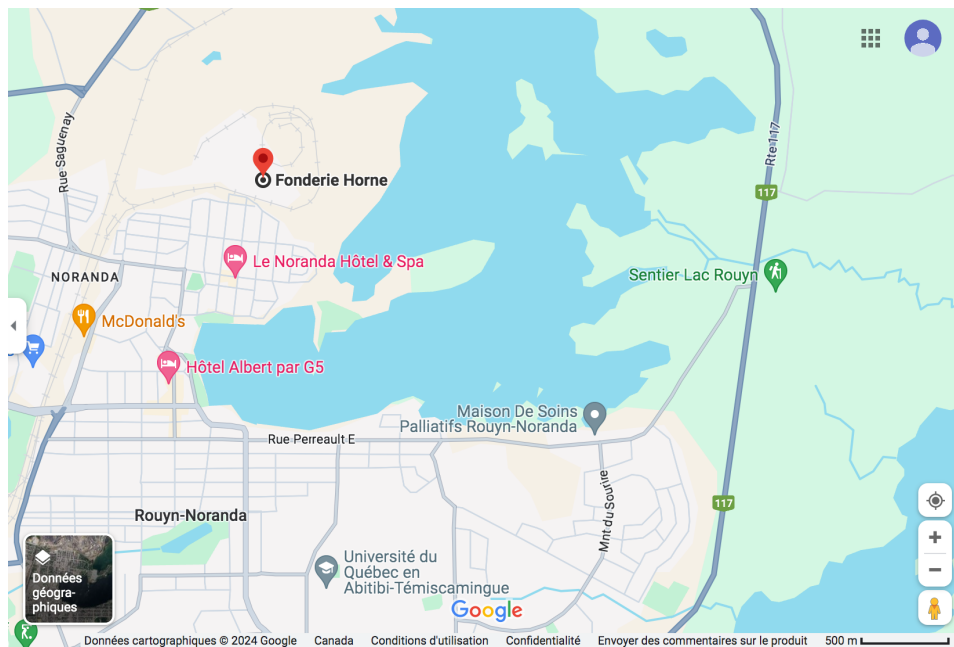


Figure 4.11: Capture d'écran d'une carte GoogleMap de Rouyn-Noranda, avec la fonderie Horne localisée en rouge. L'échelle de la carte est en bas à droite, et le Nord pointe verticalement vers le haut. McDo Inc. donne probablement beaucoup de \$\$\$ à Google pour que ses franchises apparaissent en priorité sur Googlemap!

La Figure 4.11 est une carte Googlemap de Rouyn-Noranda, avec la position de la fonderie Horne indiquée en rouge. Nous nous intéresserons aux concentrations d'Arsenic à trois sites dans la ville de Rouyn-Noranda:

1. Le campus de l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue, indiqué sur la carte en gris et situé à une distance de 2.5 km franc sud (essentiellement) de la Fonderie;
2. Le McDo de Rouyn-Noranda, indiqué sur la carte en jaune, et situé à $\simeq 1$ km au sud et $\simeq 1$ km à l'ouest de la fonderie;
3. Le quartier Notre-Dame, situé directement au Sud et Sud-Ouest de la Fonderie. Dans ce qui suit on fixera la position à l'intersection de l'Avenue Carter et de la 7^e rue, soit $\simeq 300$ m au Sud et $\simeq 100$ m à l'Ouest de la fonderie.

Le point de départ de ce calcul à prime abord complexe est notre solution stationnaire de l'équation de transport pour une source spatialement ponctuelle et temporellement continue, soit l'éq. (4.65). Nous travaillerons en deux dimensions spatiales $[x, y]$, avec la direction- x pointant vers le sud, et l'origine du système cartésien coïncidant avec la fonderie.

Il s'agit maintenant tout simplement de convertir les distances de nos trois sites en terme de ces variables adimensionnelles via les expressions (4.61)–(4.62), de calculer la concentration adimensionnelle C^* via l'éq. (4.65), et de reconvertir cette dernière en concentration dimensionnelle (i.e., en ng m^{-3}) via l'éq. (4.64). Le Tableau 4.2 compile les résultats de cette manoeuvre, pour deux combinaisons représentatives de vitesse de vent u et diffusion turbulente D .

Table 4.2: Concentrations d'Arsenic à Rouyn-Noranda, en régime stationnaire

Site	x^*	y^*	C^*	C [ng m^{-3}]
$(u = 1 \text{ m s}^{-1}, D = 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1})$				
UQAT	250	0	2.1×10^{-57}	3.3×10^{-56}
McDo	100	100	7.2×10^{-12}	1.2×10^{-10}
Qu. N-D	40	20	9.6×10^{-8}	1.5×10^{-6}
$(u = 10^{-2} \text{ m s}^{-1}, D = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1})$				
UQAT	25	0	1.5×10^{-7}	2.4×10^{-6}
McDo	10	10	0.0089	0.144
Qu. N-D	4	2	0.065	1.05

La moitié supérieure du Tableau correspond à une situation relativement venteuse (et donc plus turbulente), tandis que la moitié inférieure représente des conditions de météo tranquille, avec moins de turbulence. On remarque que la situation “venteuse” conduit des concentrations d'Arsenic plus *faibles* qu'en absence de vent; c'est simplement parce qu'un vent significatif évacue le contaminant de la région plus rapidement, conduisant ainsi à moins d'accumulation localement. Même dans le cas du quartier Notre-Dame, toutes les concentrations en colonne de droite du Tableau 4.2 demeurent sous la norme provinciale officielle de 3 ng m^{-3} , quoiqu'on commence à s'en approcher en situation de météo tranquille. On constate aussi que les concentrations chutent très rapidement à mesure que l'on s'éloigne de la fonderie, même directement sous le vent comme dans le cas du site UQAT.

On aime bien chialer contre nos gouvernements, mais n'empêche que les normes provinciales sont établies sur la base de calculs sérieux effectués par des fonctionnaires (ou consultants) habituellement compétents et prenant leur travail au sérieux. Tout le battage médiatique des dernières années vient du fait que les émissions d'Arsenic par la fonderie Horne ne sont pas du

tout constantes dans le temps, mais montrent occasionnellement des pics dépassant de loin la moyenne annuelle. Notre solution stationnaire n'est alors plus valide, et il faudrait plutôt passer à la solution décrivant une émission ponctuelle dans l'espace et dans le temps, soit l'éq. (4.58).

Pour compliquer encore plus le tableau, les précipitations peuvent capturer l'Arsenic (et autres métaux lourds toxiques) dans l'air et accélérer son accumulation au sol. La journée du 7 mars 2023 par exemple, suite à un pic d'émission dépassant 1000 ng m^{-3} durant une bonne partie de la journée et ayant été suivi d'une "neige noire", on a mesuré des concentrations d'Arsenic de 4130 mg kg^{-1} , 137 fois la norme provinciale pour les sols, dans un échantillon de sol prélevé... dans une cour d'école primaire! Le petit calcul de cette section est vraiment l'ordre zéro de la chose.

4.3 La sédimentation

Un écoulement ne fait que déplacer les gradients sur le temps advectif (4.54), tandis que la diffusion tend à aplanir les gradients dans la concentration de la quantité diffusante, sur un temps caractéristique donné par le temps de diffusion (4.14). Cependant d'autres processus physiques peuvent au contraire créer et amplifier des gradients à partir d'une distribution homogène. Un tel mécanisme, de grande importance en physique environnementale, est la **sédimentation**, soit le tri gravitationnel de "particules" en suspension dans un fluide (air, eau, etc.) mais plus denses que le milieu ambiant. Comme on le déduira sous peu, la taille des particules en suspension est un paramètre déterminant dans le calcul de l'efficacité du processus de sédimentation.

Le tableau 4.3 liste (en ordre alphabétique) les intervalles de tailles typiques, mesurés en microns ($1\mu\text{m} \equiv 10^{-6} \text{ m}$) pour diverses particules fines d'intérêt en contexte environnemental. Histoire de bien borner les ordres de grandeur ici, les extrêmes sont les pesticides vaporisés ($10^{-3} \mu\text{m}$), et les plus grosses cendres volcaniques, celles-ci dépassant le millimètre.

La présence de particules fines dans l'air peut avoir des conséquences majeures sur le biota animal, car ces particules peuvent s'introduire dans les voies respiratoires. Pour un humain respirant normalement, les particules de tailles $\gtrsim 100\mu\text{m}$ sont filtrées et/ou capturées au niveau du nez et de la gorge, celles de taille $\lesssim 10\mu\text{m}$, atteignent les poumons, et celles de taille $\lesssim 5\mu$, atteignent les alvéoles, où elles peuvent se fixer. De plus, à l'autre bout du spectre des échelles spatiales d'intérêt en physique environnementale, la présence de particules fines dans l'atmosphère ou l'océan peut avoir un impact majeur sur l'absorption et réflexion de la radiation électromagnétique, ou encore agir comme sites de nucléation pour la condensation de la vapeur d'eau.

Il sera donc intéressant de pouvoir calculer le mouvement de telles particules sous l'action de la gravité, des vents, courants océaniques, etc. La dynamique n'est rien de plus compliqué que $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, la complication (substantielle) venant du fait que pour des particules de petite taille (e.g., dans l'air, diamètre $< 1 \text{ mm}$), la **viscosité** est une force devant être prise en considération.

4.3.1 La solution de Stokes

On considère ici une situation à prime abord très simple, soit l'écoulement d'un fluide incompressible (densité constante) arrivant à vitesse constante u_0 à grande distance et s'écoulant autour d'une sphère de rayon R , en régime stationnaire (i.e., $\partial/\partial t \equiv 0$). Même dans cette situation apparemment simple, la solution mathématique des équations hydrodynamiques n'est vraiment pas de la tarte⁸. Mais ici une solution analytique est en fait possible. Travaillant en coordonnées sphériques polaires (r, θ, ϕ) avec $\theta = 0$ aligné avec l'écoulement à grande distance en amont/aval et l'origine ($r = 0$) au centre de la sphère, la **solution de Stokes** pour l'écoulement prend la forme:

$$u_r(r, \theta) = u_0 \cos \theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right), \quad (4.73)$$

⁸Ceux/celles qui choisiront de s'inscrire en PHY-3140 *Hydrodynamique* auront l'occasion de le constater!

Table 4.3: Taille typique (d) de diverses “micro-particules”

Particule	d [μm]
Amiante	0.7–90
Bactérie	0.3–60
Béton (poussière)	3–100
Bois (combustion)	0.2–3
Bran de scie	30–600
Brume (gouttellettes)	70–350
Charbon (poussière)	1–100
Café (moulu)	5–400
Calcaire (poussière)	5–400
Cendres volcaniques	100–2000
Farine	10–300
Insecticides (poudre)	0.5–10
Limon	4–40
Moisissure	3–12
Moisissure (spores)	10–30
Pesticide/herbicide (vaporisé)	0.001
Poivre de Cayenne	15–1000
Pollen	10–1000
Poussière (domestique)	0.05–100
Poussière (atmosphère)	0.001–30
Poussière (volcanique)	1–100
Retombées radioactives	0.1–10
Sable très fin	60–100
Sable de plage	100–1000
Spores (plantes)	3–100
Tabac (combustion)	0.01–4
Talc	0.5–50
Virus	0.005–0.3

Source: engineeringtoolbox.com

$$u_\theta(r, \theta) = -u_0 \sin \theta \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right), \quad (4.74)$$

$$u_\phi = 0 \quad (4.75)$$

$$p(r, \theta) = -\frac{3}{2}\mu R u_0 \frac{\cos \theta}{r^2}. \quad (4.76)$$

Cette solution est illustrée à la Figure 4.12 sous la forme de vecteurs-vitesse, en rouge, ainsi que la différence de pression par rapport à l’amont lointain (loin en bas), sous forme d’isocontours. On remarque que la vitesse de l’écoulement chute à zéro à la surface de la sphère, conséquence de la friction associée à la viscosité du fluide, et qu’une surpression (dépression) est présente sur la partie de la sphère faisant face (opposée) à l’écoulement.

La solution de Stokes permet de calculer la force qu’exerce l’écoulement fluide sur la sphère, soit la **force de trainée** (F_D), orientée par définition dans la direction de l’écoulement incident. Cette force peut être décomposée en deux contributions: (1) la pression, agissant perpendiculairement à la surface de la sphère, et (2) la force visqueuse, agissant tangentielllement à la surface de la sphère, et proportionnelle aux gradients de vitesse de l’écoulement à $r = R$. On

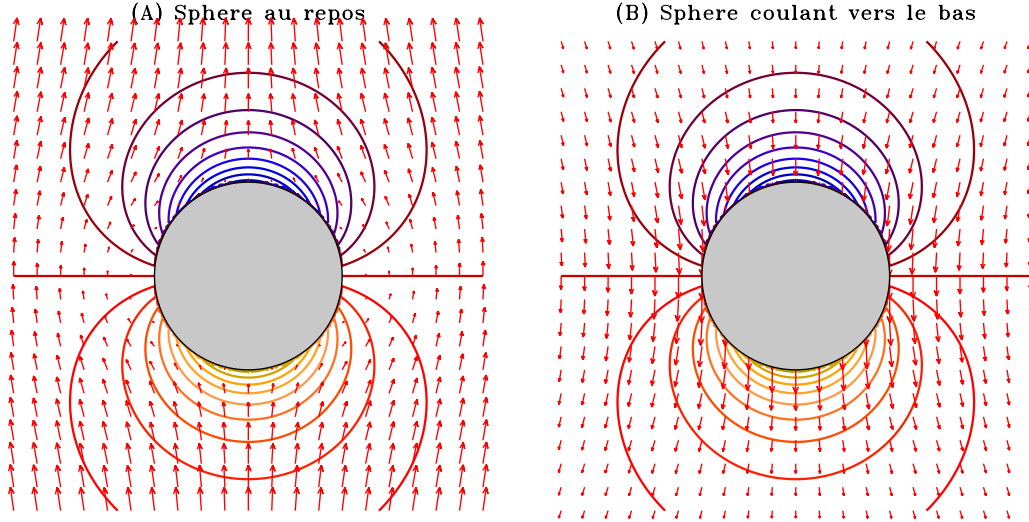


Figure 4.12: Solution de Stokes pour l'écoulement d'un fluide visqueux autour d'une sphère, telle que décrite par les éqs. (4.73) et (4.76), avec l'origine du système de coordonnées au centre de la sphère et $\theta = 0$ pointant verticalement vers le haut. La solution est tracée dans un plan parallèle à l'écoulement et bissectant la sphère. Les vecteurs-vitesses de l'écoulement sont tracés en rouges. Les isocontours représentent la différence de la pression par rapport à celle loin en amont (bleu→jaune $\equiv$ négatif→positif). À gauche, l'écoulement vu d'un repère où la sphère est au repos; à droite, le même écoulement, vu d'un repère se déplaçant vers le haut à vitesse u_0 , i.e., un repère où le fluide loin et amont et en aval est au repos (voir texte).

doit calculer ces deux contributions en tout point à la surface de la sphère, en calculer les projections dans la direction z (verticale sur la Fig. 4.12)), et intégrer tout ça sur la surface $r = R$. Ce calcul, à partir des éqs. (4.73)–(4.73), nous plongerait un peu trop profondément en hydrodynamique, donc on s'en tiendra ici simplement au résultat final ⁹:

$$F_D = 6\pi\rho_f\nu Ru_0, \quad [\text{N}]. \quad (4.77)$$

où ρ_f est la densité du fluide et ν sa **viscosité cinématique** [unités: m^2s^{-1}]. C'est la **Loi de Stokes**. Pour l'air à TPN, $\nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{m}^2\text{s}^{-1}$, tandis que pour l'eau (pure) à 20°C, $\nu = 10^{-6} \text{m}^2\text{s}^{-1}$. Il peut sembler contraire à l'expérience usuelle que l'air ait une viscosité cinématique plus grande que l'eau par près d'un facteur 10, mais dynamiquement c'est le produit $\rho_f \times \nu$ qui importe, ce dernier étant 100 fois plus grand pour l'eau que l'air.

4.3.2 La vitesse de sédimentation

La solution de Stokes de la Fig. 4.12A, telle que décrite par les éqs. (4.73)–(4.76), ainsi que la force de trainée F_D y étant associée, demeurent inchangées dans le cas d'une sphère qui se déplace vers le bas à vitesse u_0 dans un fluide au repos, comme sur la Figure 4.12B; la Figure 4.12A est alors ce qui est “vu” dans un repère se déplaçant vers le bas à la même vitesse u_0 que la sphère (Vive la relativité Galiléenne !).

On peut ainsi utiliser la Loi de Stokes pour calculer la vitesse terminale d'une particule sphérique chutant dans le champ gravitationnel de la Terre; cette vitesse terminale est atteinte lorsque la sphère atteint une vitesse de chute telle que la force visqueuse équilibre la force

⁹Avis aux intéressés.e.s, ce calcul est aussi fait en détail en PHY-3140 *Hydrodynamique*.

gravitationnelle nette agissant sur la sphère:

$$F_g = -(\rho - \rho_f)g \frac{4\pi R^3}{3} \mathbf{e}_z . \quad (4.78)$$

Par “force gravitationnelle nette” on entend ici la force gravitationnelle habituelle agissant sur le volume V de la sphère ($\rho_S g V$), de laquelle est soustraite la force de flottaison ($\rho_f g V$), cette force étant donnée par le poids du volume de fluide ambiant déplacé, comme nous l’a enseigné le Sieur Archimède il y a très longtemps déjà. La sphère coule à une vitesse constante si cette force est égale en grandeur à la force de trainée (4.77):

$$6\pi\rho_f\nu R u_0 = (\rho_S - \rho_f)g \frac{4\pi R^3}{3} , \quad (4.79)$$

d’où on obtient directement la vitesse terminale de chute:

$$u_0 = \frac{2gR^2}{9\nu} \left(\frac{\rho_S}{\rho_f} - 1 \right) . \quad (4.80)$$

C’est la **vitesse de sédimentation**. Considérons maintenant la chute d’une gouttelette d’eau vers le sol dans l’atmosphère à TPN, en supposant que la gouttelette d’eau demeure en tout temps sphérique. Il s’agit simplement d’écrire la composante- z de $\mathbf{F}=\mathbf{m}\mathbf{a}$, avec les forces de gravité et de trainée contribuant à $\mathbf{F}$. Je vous laisse vérifier que ceci conduit à

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{9\nu}{2R^2} \left(\frac{\rho_f}{\rho_S} \right) \frac{dz}{dt} - \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_S} \right) g , \quad (4.81)$$

où z mesure ici l’altitude de la gouttelette. C’est une petite équation différentielle ordinaire que vous êtes tout-à-fait capables de solutionner analytiquement.

La Figure 4.13 porte en graphique la trajectoire $z(t)$ pour trois gouttelettes d’eau ($\rho_S = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ de diamètres $D = 40, 80$ et 200 microns (μm), avec comme condition initiale vitesse nulle à $z = 1 \text{ m}$. Plutôt que les trajectoires paraboliques auxquelles on s’attendrait si seulement la gravité jouait, ici on observe des pentes constantes, égales à la vitesse de sédimentation pour chaque diamètre considéré. Ce n’est qu’au tout début de la chute (encart dans le coin supérieur droit) qu’on reconnaît ladite forme parabolique. Dans la trois cas, la vitesse de sédimentation est atteinte très rapidement, et demeure constante durant la plus grande partie de la chute.

La solution de Stokes repose sur un certain nombre d’hypothèses simplificatrices, la plus importante étant que la force visqueuse domine sur l’inertie du fluide. Ceci est quantifié par une quantité adimensionnelle appelée **Nombre de Reynolds**:

$$\text{Re} = \frac{u_0 R}{\nu} . \quad (4.82)$$

avec le rayon R de notre sphère comme échelle spatiale caractéristique: La solution de Stokes n’est donc valide que pour des Re “petits”. La force de trainée (4.77) peut se réécrire en terme du nombre de Reynolds: Les mesures expérimentales (voir Figure 4.14) indiquent que la force de trainée (4.77) s’accorde vraiment très bien aux mesures expérimentales pour $\text{Re} \leq 0.1$, y colle encore à mieux de $\simeq 1\%$ à $\text{Re} = 1$, et demeure à l’intérieur d’un facteur 2 jusqu’à $\text{Re} \simeq 10$; à plus haut Re , la force de trainée devient substantiellement supérieure à ce que prédit la Loi de Stokes, devenant même approximativement indépendante de u_0 (ou Re) dans l’intervalle $600 \lesssim \text{Re} \lesssim 3000$, résultat du développement de la turbulence dans la trainée de l’écoulement. L’équation (4.80) permet alors de traduire la contrainte $\text{Re} \leq 10$ en une contrainte sur le diamètre maximal (D_{max}) sous lequel la solution de Stokes demeure valide:

$$D_{\text{max}}^3 = \frac{36\nu^2}{g} \left(\frac{\rho_S}{\rho_f} - 1 \right)^{-1} , \quad [\text{Re} = 10]. \quad (4.83)$$

Pour une gouttelette d’eau chutant dans l’air, on trouve $D_{\text{max}} \simeq 100 \mu\text{m}$.

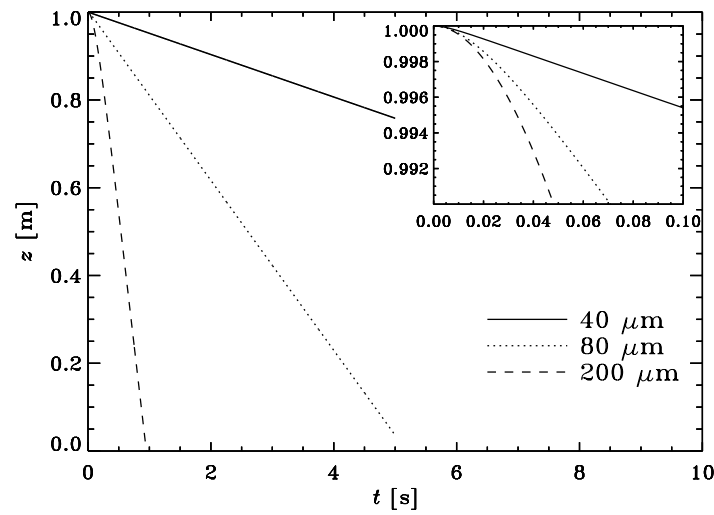


Figure 4.13: Chute de gouttelettes d'eau de diamètres 40, 80 et 200 μm d'une hauteur d'un mètre dans l'air à TPN. L'encart en haut à droite reproduit le premier 10^{-1} s des trajectoires de chute. La vitesse de sédimentation est atteinte très rapidement dans les trois cas.

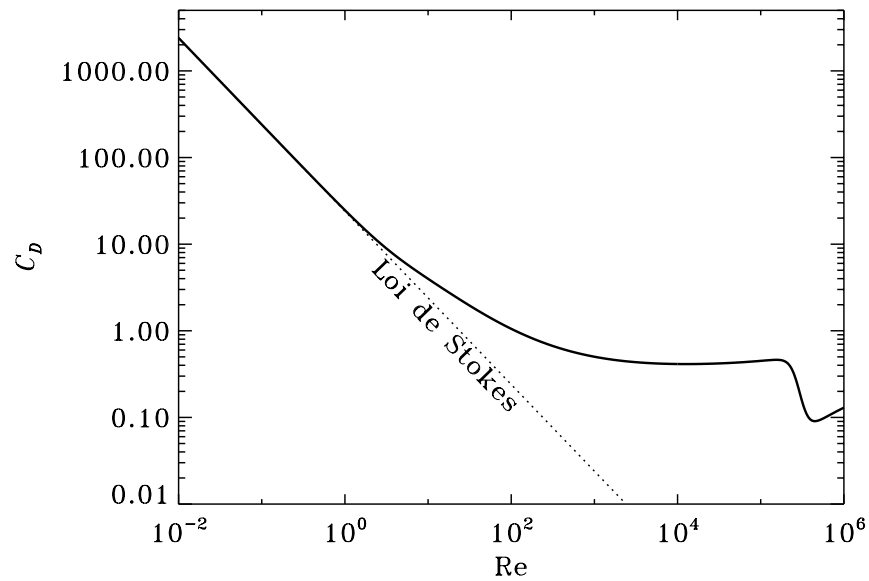


Figure 4.14: Variation mesurée de la force de trainée exercée par un fluide visqueux s'écoulant autour d'une sphère. Le trait pointillé correspond à la variation prédite par la Loi de Stokes. Le coefficient de trainée est défini comme $C_D = 2F_D/\rho u_0^2 \pi R^2 \equiv 24/\text{Re}$ pour $L = 2R$ dans l'éq. (4.82).

4.3.3 Exemple: la règle du 2 mètres

Les années Covid-19 nous ont tous familiarisé (à l'écoeurement...) avec cette fameuse règle de distanciation sociale dite “du deux mètres”. Pour un individu infecté, autant la respiration que la parole projettent dans l'air ambiant des microgouttelettes contenant potentiellement une charge virale. Ces gouttelettes ont des diamètres allant d'une dizaine jusqu'à quelques centaines de μm . À ces tailles la force de trainée associée à la viscosité joue un rôle important dans leur chute vers le sol, qui comme on vient de le voir peut différer substantiellement de la chute libre, mais peut être calculée à l'aide de notre solution de Stokes.

L'idée est la suivante: on considère une gouttelette éjectée horizontalement de la bouche d'un individu à une vitesse $u_0 = 5 \text{ m s}^{-1}$, vitesse qui peut sembler élevée mais qui a été mesurée comme telle lors de l'expression sonore de phonèmes débutant par une consonne dite “plosive”, comme b..., k..., et p... (voir le fascinant petit article par Abkarian *et al.*, cité en fin de chapitre, pour plus de détails sur ce genre de considérations phonétiques). On supposera que l'orifice buccal en question est situé à une hauteur de 1.75m du sol. On cherche à déterminer si une gouttelette ainsi projetée pourrait atteindre le torse (hauteur $\geq 1 \text{ m}$) d'un second individu situé à une distance d du premier.

L'équation du mouvement pour la gouttelette n'est encore une fois rien de plus compliqué que notre bon vieux $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. En plus d'une dimension spatiale la force de trainée par une sphère se déplaçant à vitesse $\mathbf{u}$ dans l'air au repos se généralise simplement à

$$\mathbf{F}_D = -6\pi\rho_f\nu R\mathbf{u} , \quad (4.84)$$

où pour l'air $\rho_f = 1.2 \text{ kg m}^{-3}$, et $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Les composantes x et z de l'équation du mouvement sont donc séparables; celle en z (verticale) demeure inchangée, et est donnée par l'éq. (4.81) déjà solutionnée pour produire la Fig. 4.14; la composante x (horizontale) est encore plus simple:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{9\nu}{2R^2} \left(\frac{\rho_f}{\rho_s} \right) \frac{dx}{dt} , \quad (4.85)$$

sa solution étant une décroissance exponentielle de la composante x de la vitesse:

$$u_x(t) = u_0 \exp \left(-\frac{9\nu}{2R^2} \frac{\rho_f}{\rho_s} t \right) \quad (4.86)$$

et en intégrant une seconde fois:

$$x(t) = x^* \left[1 - \exp \left(-\frac{9\nu}{2R^2} \frac{\rho_f}{\rho_s} t \right) \right] \quad (4.87)$$

avec $x(t=0) = 0$ et u_0 la vitesse initiale en x . La quantité $x^* = 2R^2 u_0 \rho_s / 9\nu \rho_f$ correspond à la portée horizontale de la goutte.

La Figure 4.15 montre les trajectoires de trois gouttelettes, de diamètres 40, 80 et 200 μm , expulsées horizontalement à $u_0 = 5 \text{ m s}^{-1}$ de la bouche d'un individu infecté disant “papa-pipi-kaka” à un second individu lui faisant face. Le mouvement horizontal de la plus petite gouttelette (en rouge) est rapidement freiné, celle-ci parcourant moins de 10cm horizontalement. Par contre la plus grosse (en bleu) franchit 1 mètre horizontalement avant d'avoir chuté à la hauteur “sécuritaire” de 1 mètre; d'où cette fameuse règle du deux mètres pour la distanciation sociale.

Au printemps 2020, des résultats d'une étude très médiatisée (dont le pdf de la prépublication, Blocken *et al.*, est accessible sur la page web du cours) ont suggéré que la distance sécuritaire lors d'une activité comme la course à pied est en fait beaucoup plus grande que deux mètres. Il s'agit maintenant de reprendre le calcul ci-dessus, cette fois en ajoutant un “vent” soufflant horizontalement à vitesse u_v dans la direction négative des x , ce qui par changement (Galiléen) de repère est équivalent à avoir l'orifice buccal du coureur se déplaçant vers la direction positive en x à vitesse u_v . On supposera un.e athlète bien entraîné.e, trotant à $u_v = 4 \text{ m s}^{-1}$ (5 minutes au kilomètre, un bon rythme marathon). Des mesures ont démontré qu'en course de

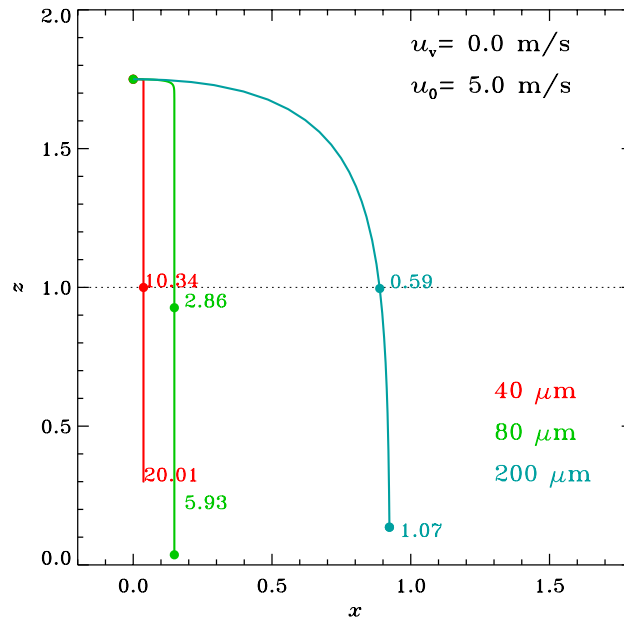


Figure 4.15: Trajectoires de gouttelettes d'eau de diamètres 40, 80 et 200 μm propulsées horizontalement à $u_0 = 5 \text{ m s}^{-1}$ d'une hauteur initiale de $z_0 = 1.75 \text{ m}$. Les points colorés donnent le temps écoulé (en secondes) jusqu'à la position correspondante. Rapport d'aspect 1:1 ici, donc la forme de la trajectoire est géométriquement correcte. La plus grosse gouttelette (200 μm , en bleu) est celle qui parcourt la plus grande distance en x , en raison de sa plus grande inertie.

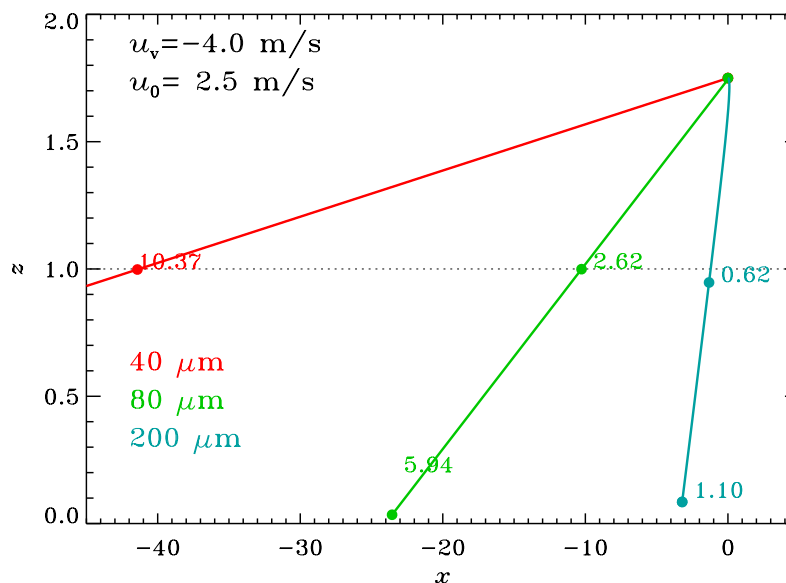


Figure 4.16: Trajectoires de gouttelettes d'eau de diamètres 40, 80 et 200 μm propulsées horizontalement à 2.5 m s^{-1} d'une hauteur initiale de $z_0 = 1.75 \text{ m}$, cette fois en présence d'un vent soufflant horizontalement à vitesse constante $u_v = 4 \text{ m s}^{-1}$ dans la direction négative de l'axe- x . La plus petite gouttelette (40 μm , en rouge) est celle qui est entraînée le plus loin par le vent, en raison de son plus long temps de chute. Rapport d'aspect $x : y = 25 : 1$ ici.

fond, l'exhalation de l'air atteint une vitesse de 2.5 m s^{-1} à la sortie de la bouche (oui, deux fois plus lentement que quand on dit “papa pipi kaka”, par exemple...). L'équation (4.84) devient maintenant:

$$\mathbf{F}_D = -6\pi\rho_f\nu R(\mathbf{u} - u_v\mathbf{e}_x) . \quad (4.88)$$

Ceci ne change pas la composante- z de l'équation du mouvement, mais celle en x décrit maintenant une décroissance exponentielle de la composante- x de la vitesse, de sa valeur initiale u_0 vers $u_x = -u_v$. La Figure 4.16 montre les trajectoires pour nos trois maintenant familières gouttellettes de diamètres 40, 80 et $200\mu\text{m}$. Cette fois c'est la plus petite gouttellette qui est la plus dangereuse: ayant une vitesse de sédimentation plus faible, elle demeure plus longtemps dans le vent avant de toucher le sol, et donc est entraînée plus loin horizontalement. Donc ici un second coureur devrait demeurer $\simeq 40 \text{ m}$ derrière le premier (infecté) pour éviter de ramasser sur son torse une gouttellette potentiellement virale.

Il est remarquable que les simulations numériques hydrodynamiques très sophistiquées de Blocken *et al.*, qui incluent (entre autres) la traînée turbulente produite par un coureur, conduisent à une distance sécuritaire très comparable à celle obtenue ici. Vive le Kamarade Stokes !

Les plus petites gouttellettes se comportent ici comme des **aérosols**, soit des particules dont le temps de résidence dans l'atmosphère peut aller de la journée à plusieurs années, dépendant de leur taille, densité, et altitude d'injection. Ces aérosols sont également entraînés en bloc avec tout vent soufflant horizontalement ou verticalement. Comme on le verra plus loin, leur impacts environnementaux et même climatiques peuvent être importants.

4.4 La percolation

Notre solution de Stokes nous permet d'aborder quantitativement un autre processus physique de grande importance en physique environnementale: la percolation. Ceci réfère au passage d'un fluide dans les interstices d'un **milieu granulaire**, comme le sable ou la roche concassée (voir Figure 4.17).

La solution de Stokes nous a permis de calculer la force exercée sur une sphère par un fluide visqueux s'écoulant autour de ladite sphère, soit l'éq. (4.77). Par action-réaction (vive Newton!), c'est également la force qu'exerce la sphère sur le fluide, qui devrait donc ralentir. Considérons maintenant un ensemble de N sphères contenues dans un volume V et faisant contact entre elles, de manière à former un assemblage non-déformable. Le volume de fluide contenu dans cet assemblage sera donné par pV , où p est la porosité du milieu (revoir la §2.3 au besoin). Si le fluide traverse le volume à vitesse u_0 , alors le débit volumique par unité de surface (q , unités m s^{-1}) à travers l'élément de volume sera donné par

$$q = p u_0 . \quad (4.89)$$

En supposant que la Loi de Stokes soit applicable ici (on y reviendra), la force nette que ressentira le fluide s'écoulant d'un côté à l'autre du volume sera donnée par:

$$F = N \times (6\pi\rho\nu R u_0) \quad (4.90)$$

La porosité mesurant la fraction de “vide” dans un milieu granulaire, la fraction complémentaire occupée par les “grains” sera alors:

$$1 - p = \frac{4\pi N R^3}{3V} \quad (4.91)$$

Ceci permet d'éliminer N de l'éq. (4.90) et d'exprimer la force par unité de volume agissant sur le fluide comme:

$$\frac{F}{V} = - \underbrace{\left(\frac{9(1-p)}{2R^2p} \right)}_{1/\kappa} \rho\nu q . \quad (4.92)$$



Figure 4.17: Un sable relativement grossier. Les grains, de taille, forme et composition diverses, font contact entre eux typiquement en quelques points, laissant beaucoup de “vide” entre les grains; c’est la porosité, déjà discutée à la §2.3. Source: Wikipedia Commons.

où on a réexprimé la vitesse de l’écoulement u_0 en terme du débit volumique q via (4.89), une quantité plus facilement mesurable dans un milieu granulaire, et le signe “−” indique que la force visqueuse agit dans la direction opposée à l’écoulement. Je vous laisse vérifier (exercice pédagogique!) que le membre de droite de cette expression a bien des unités de N m^{-3} . La quantité entre parenthèses, dépendant de la taille des particules et de la porosité, caractérise le sol. En hydrologie on définit souvent un **coefficient de perméabilité** (κ , unités: m^2), comme l’inverse du terme entre parenthèses dans l’expression ci-dessus:

$$\kappa = \frac{2R^2p}{9(1-p)} ; \quad (4.93)$$

On verra sous peu que le coefficient de perméabilité détermine effectivement la conductivité hydraulique k déjà introduite à la §2.3. Son calcul direct à partir de l’équation (4.93) conduirait à des valeurs beaucoup trop élevées pour κ ; cependant, les dépendances linéaires en ρ , ν et q prédites par (4.92) sont bien vérifiées expérimentalement.

Il ne nous reste plus qu’à généraliser l’équation (4.92) en ramenant dans le portait le caractère vectoriel de la vitesse et de la force visqueuse:

$$\mathbf{f} = -\frac{\rho\nu}{\kappa}\mathbf{q} , \quad [\text{N m}^{-3}] . \quad (4.94)$$

L’équation (4.94) permet donc de calculer la force (par unité de volume) qu’exerce un milieu granulaire de perméabilité κ sur un fluide de densité ρ et viscosité cinématique ν le traversant à un débit volumique q .

4.4.1 Exemple 1 : Infiltration des eaux de surface dans un sol

Commençons par considérer le cas d’un fluide s’infiltrant (coulant verticalement!) dans un milieu granulaire (un sol!) sous l’influence de la gravité. En régime stationnaire ($\partial/\partial t \equiv 0$) la

dynamique de l'écoulement se réduit à un équilibre entre la force gravitationnelle et la force visqueuse:

$$\rho g + \frac{\rho \nu}{\kappa} q_z = 0 , \quad (4.95)$$

d'où

$$q_z = -\frac{\kappa g}{\nu} . \quad (4.96)$$

La quantité au membre de droite a clairement des unités de vitesse, et définit la **conductivité hydraulique** (k) introduite à la §2.3 (voir Tableau 2.3):

$$k = \frac{\kappa g}{\nu} \quad [\text{m s}^{-1}] . \quad (4.97)$$

Notez bien que la conductivité hydraulique est une propriété conjointe du sol (via sa perméabilité κ) et du fluide (via son coefficient de viscosité ν)¹⁰.

4.4.2 Exemple 2 : bassin de rétention

Considérons maintenant une situation telle qu'illustrée schématiquement sur la Figure 4.18, soit un remblai d'un matériau granulaire de forme trapézoïdale agissant comme mur de confinement pour un réservoir de profondeur h . On a vu à la §2.2.1 que dans une couche de fluide

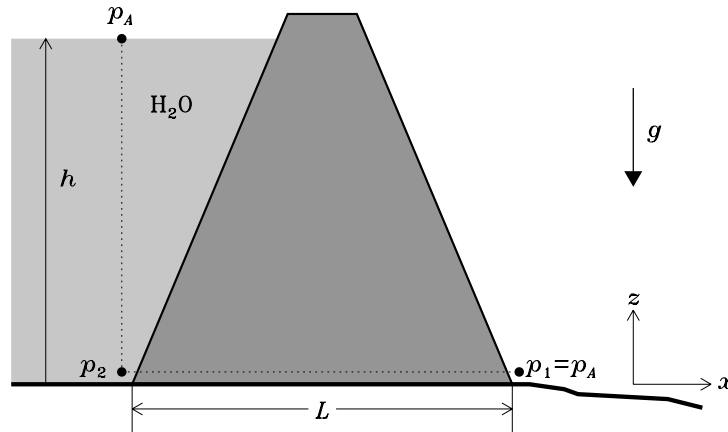


Figure 4.18: Représentation schématique d'un remblai fait d'un matériau granulaire (gris foncé) servant à contenir un réservoir d'eau de profondeur h .

incompressible au repos, l'équilibre hydrostatique dans la verticale conduit à une augmentation linéaire de la pression avec la profondeur:

$$p(z) = p_A + \rho g(h - z) , \quad (4.98)$$

où $z = 0$ au fond du réservoir, $z = h$ sa surface, et p_A la pression atmosphérique. Donc, sur la Fig. 4.18, on aura $p_2 = p_A + \rho g h$. Par contre, à la même hauteur de l'autre côté du remblai, on est à la pression atmosphérique, i.e., $p_1 = p_A$, donc $p_2 - p_1 = \rho g h$. La pression est une force par unité de surface, qui ici agit sur le fluide contenu dans les interstices du milieu granulaire dont est composé le remblai, ce qui propulsera un écoulement horizontal à travers le remblai; pas du

¹⁰Attention, la conductivité hydraulique est parfois exprimée en terme de la viscosité dynamique $\mu = \rho \nu$, dans lequel cas $k = \kappa \rho g / \mu$; c'est le cas, entre autres, dans l'ouvrage de Boeker & van Grondelle déjà souvent cité.

tout ce qu'on veut d'un réservoir, surtout si ce dernier est un bassin de décantation pour des résidus miniers toxiques...

La pression est définie comme une force par unité de surface; imaginons un cylindre de longueur L et de section A centré sur le trait pointillé horizontal reliant p_2 à p_1 sur la Fig. 4.18. La force nette exercée sur le fluide contenu dans le cylindre sera donnée par

$$\mathbf{F}_{\nabla p} = A(p_2 - p_1)\mathbf{e}_x \quad (4.99)$$

et la force par unité de volume est simplement $\mathbf{F}/V$, soit:

$$\mathbf{f}_{\nabla p} = \frac{(p_2 - p_1)}{L}\mathbf{e}_x \quad (4.100)$$

puisque $V = A \times L$. Examinons maintenant ce qui se passe si on tente d'équilibrer cette force à l'aide de notre force visqueuse globale (4.92). On trouve ainsi:

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{\kappa}{\rho\nu} \frac{(p_2 - p_1)}{L} \\ &= \frac{\kappa g}{\nu} \left(\frac{h}{L} \right), \\ &= k \left(\frac{h}{L} \right), \end{aligned} \quad (4.101)$$

où la seconde égalité résulte de l'utilisation de (4.98) pour évaluer p_2 à $z = 0$, et la troisième de notre définition de la conductivité hydraulique. Mis à part le facteur h/L , ceci est identique à l'équation (4.96), obtenue précédemment dans le cas d'un fluide s'infiltrant sous l'unique action de la gravité.

Un remblai efficace, du genre qu'on aimerait pour confiner des bassin de sédimentation de résidus miniers par exemple, doit donc minimiser le rapport h/L . Dans le cas du remblai du genre illustré sur la Figure 4.18 contenant de l'eau ($\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$) contaminée, si on suppose $h = 3 \text{ m}$ et largeur à la base $L = 10 \text{ m}$ fait d'un mélange de sable et gravier bien compacté (conductivité hydraulique $k \simeq 10^{-6} \text{ m s}^{-1}$), on obtient $q = 3 \times 10^{-7} \text{ m s}^{-1}$. Ceci peut sembler minuscule, mais sur une période d'un an ($\simeq \pi \times 10^7 \text{ s}$), le fluide aura déjà percolé à travers toute la largeur du remblai, marquant le début de la contamination environnementale.

Avec une vitesse d'écoulement dans le remblai $u_0 \sim 10^{-7} \text{ m s}^{-1}$ et des grains de sable de rayon $R \sim 10^{-3} \text{ m}$, il est facile de vérifier que le nombre de Reynolds est ici $\ll 1$, condition *sine qua non* à l'applicabilité de la Loi de Stokes (4.77). Néanmoins, l'estimé de la perméabilité qu'on pourrait tirer de l'éq. (4.92), conduirait à une conductivité hydraulique trop élevée par près de trois ordres de grandeur; la raison tient à plusieurs facteurs, incluant: (1) un sol granulaire véritable (e.g. la Fig. 4.17 ci-dessus) est tout sauf une assemblage régulier de sphères identiques; (2) notre calcul de la perméabilité basé sur l'écoulement de Stokes ne tiendrait (possiblement) que si la distance entre les sphères est passablement plus grande que leur diamètre, ce qui correspondrait à une situation de très grande porosité rarement rencontré dans des sols granulaires (et surtout pas dans la construction de remblais visant à contenir un liquide dangereux); (3) en situation de compaction élevée, de forts gradients de vitesse existent entre les constituants du milieu granulaire, ce qui, en combinaison avec leur forme irrégulière et rapport surface/volume plus grand que pour une sphère, augmente énormément la force visqueuse.

4.4.3 La Loi de Darcy

Les deux exemples considérés ci-dessus illustrent deux manières à prime abord distinctes de propulser un écoulement à travers un matériau granulaire: en laissant agir la gravité, ou en appliquant un gradient de pression. Ces deux scénarios peuvent être unifiés en définissant un **potentiel hydraulique**:

$$\varphi(x, y, z) = z + \frac{p(x, y, z)}{\rho g}, \quad (4.102)$$

où z est l'altitude mesurée par rapport à un point de référence, et le “ p ” est toujours la pression (ATTENTION, pas la porosité!). Le débit volumique peut alors s'exprimer comme:

$$\mathbf{q} = -k\nabla\varphi. \quad (4.103)$$

C'est la **Loi de Darcy**. Je vous laisse vérifier (en exercice!) que les expressions (4.96) et (4.101) sont bel et bien cohérentes avec les équations (4.102) et (4.103).

La Loi de Darcy permet ainsi de calculer le profil d'écoulement dans un milieu granulaire saturé en liquide, sujet évidemment à la contrainte de conservation de la masse. En régime stationnaire ($\partial/\partial t \equiv 0$) et dans le cas d'un liquide incompressible comme l'eau, on doit satisfaire $\nabla \cdot \mathbf{u} \equiv \nabla \cdot \mathbf{q} = 0$, ce qui, en combinaison avec l'éq. (4.103), conduit à une équation de Laplace pour la pression:

$$\nabla^2 p = 0, \quad (4.104)$$

sujette à l'imposition de conditions limites appropriées; celles-ci, dans le contexte de notre problème de bassin de rétention de la §4.4.2, dépendra (entre autre) de la perméabilité du substrat sur lequel est construit le remblai.

Exercices:

4.1: Calculez la vitesse terminale de chute d'une balle de pingpong dans l'air, versus une balle du même rayon mais faite d'irridium ($\rho = 22420 \text{ kg m}^{-3}$). Estimez le nombre de Reynolds (Re) dans les deux cas. Répéter les mêmes calculs, mais dans l'eau.

4.2: Obtenez l'éq. (4.81) à partir de $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, en incluant la force de trainée dans $\mathbf{F}$; ensuite, solutionnez cette expression (analytiquement ou numériquement) pour reproduire la Figure 4.13.

4.4: Vérifiez, par substitution directe, que l'équation (4.35) est bien une solution valide de l'équation de diffusion (4.17) avec $S = 0$.

4.5: De son propre aveu, le Fonderie Horne à Rouyn-Noranda a émis en 2022 une moyenne annuelle de 73.1 nanogrammes (ng) d'arsenic par mètre cube de ses cheminées. En présence d'un vent constant soufflant à 1 m s^{-1} , et un taux constant d'émission correspondant à cette moyenne annuelle, calculez à quelle distances de la fonderie (en amont, aval, et latérale) on retombe sous la norme provinciale officielle de 3 ng m^{-3} . Utilisez un coefficient de diffusion turbulente $D_T = 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

4.6: Comme mentionné à la §4.2.6, le 7 mars 2023 les émissions d'Arsenic par les cheminées de la Fonderie Horne ont atteint un pic de $\simeq 1000 \text{ ng m}^{-3}$. En supposant une journée sans vent et que ce pic d'émission ait duré six heures, calculez le pic de concentration atteint aux trois sites listés au Tableau 4.2. Vous pouvez supposer que le pic d'émission représente un pulse instantané de contaminant, et négliger l'émission “normale” en mode continu.

4.7: On considère un long tube ($L = 1 \text{ m}$) orienté parallèlement à la gravité, dont la moitié du bas est remplie d'un sable fin bien compacté (porosité $p = 0.35$, conductivité hydraulique $k = 3 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-1}$). On remplit lentement le tube d'eau jusqu'à raz bord, un fin grillage au bas du tube empêchant ce dernier d'en sortir, mais laisse passer l'eau. Une fois le sable saturé en eau, calculez le débit volumique et la vitesse d'écoulement de l'eau à la sortie du tube, et comment ces quantités varient (ou pas) à mesure que le tube se vide.

4.8: Refaites les calculs du débit volumique de percolation des sections 4.4.1 et 4.4.2, en utilisant cette fois la Loi de Darcy.

4.9: Revenons au bassin de rétention de la Fig. 4.18 et ses dimensions de $L = 10 \text{ m}$ à la base et hauteur $h = 3 \text{ m}$. Supposons de surcroît que le remblai est déjà saturé en eau.

1. Calculez le potentiel hydraulique à l'intérieur du remblai, et les grandeur et direction du débit volumique $\mathbf{q}$

2. Tracez (graphique, ou à main levée) les lignes d'écoulement associées à ce débit volumique. Croyez-vous que cette forme d'écoulement soit réaliste ici ? pourquoi ?

Bibliographie:

Les données numériques des tableaux 4.1 et 4.3 proviennent respectivement des sources suivantes:

engineeringtoolbox.com/air-diffusion-coefficient-gas-mixture-temperature-d_2010.html

engineeringtoolbox.com/particle-sizes-d_934.html

Les solutions numériques des §§4.1.3 et 4.2.3 sont tirées et adaptées de l'ouvrage de Boeker et van Grondelle cité en bibliographie du chapitre 1.

Sur la projection des gouttelettes de salive lors du parler, voir

Abkarian, M., Mendez, S., Xue, N., Yang, F., Stone, H.A., *PNAS* **117**(41), 25237–25245 (2020)

L'exemple de la dispersion de l'Argon dans l'atmosphère terrestre (4.2.5) est originellement dû à l'astrophysicien Georges Gamov, mais a été repris et très efficacement popularisé par le biologiste/environnementaliste David Suzuki, dont les ouvrages valent définitivement la lecture. Si ça vous intéresse je recommanderais:

Suzuki, D., *The Sacred Balance*, 4^{eme} éd., Greystones Books, 2022.