

Annexe A

Ondes Électromagnétisme

La radiation électromagnétique est de loin la principale source d'énergie pour toute vie sur Terre, ainsi que la source d'énergie propulsant tous les écoulements atmosphériques et océaniques. Aux plus grandes échelles, le bilan énergétique global de la Terre est complètement dominé par la radiation. Un petit rappel de l'électromagnétisme est donc d'intérêt.

A.1 Ondes électromagnétiques

Une des deux faces de la lumière se révèle sous la forme de la radiation électromagnétique, soit une solution de type ondulatoire aux équations de Maxwell. Dans le vide, i.e. en l'absence d'une densité de charge ou d'une densité de courant, les équations de Maxwell se réduisent à :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 , \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} , \quad (\text{A.4})$$

où $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ s}^2 \text{ C}^2 \text{ m}^{-3} \text{ kg}^{-1}$ est la permittivité du vide, et $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ m kg C}^{-2}$ la perméabilité magnétique du vide. Si on prend le rotationnel de (A.3) et la dérivée temporelle de (A.4), les deux expressions résultantes se combinent en une équation d'onde pour le champ électrique:

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{B} \quad (\text{A.5})$$

avec une manipulation complémentaire produisant une équation identique pour $\mathbf{B}$. La vitesse c de l'onde est donnée par

$$c = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} = 2.997924562 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} . \quad (\text{A.6})$$

Banzai ! Substituant dans (A.3) et (A.4) une solution de type onde plane, i.e.,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) , \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) , \quad (\text{A.8})$$

il est facile de démontrer que:

1. $\mathbf{E}$ vibre dans un plan orthogonal au plan de vibration de $\mathbf{B}$, i.e., $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$
2. l'onde est transverse, i.e., $\mathbf{k} \propto \mathbf{E} \times \mathbf{B}$,

3. les amplitudes des champs électrique et magnétique sont proportionnelles: $|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|$
4. L'onde est non-dispersive: sa vitesse de groupe $c_g = d\omega/dk$ est indépendante de k puisqu'ici $\omega k = c$.

Le flux instantané d'énergie (W m^{-2} dans la direction $\mathbf{k}$) associé au passage de l'onde électromagnétique est donné par le vecteur de Poynting:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} , \quad (\text{A.9})$$

ou encore, si l'on moyenne sur une période d'oscillation/longueur d'onde:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0| = \frac{c}{2\mu_0} E_0^2 . \quad (\text{A.10})$$

L'intensité (W m^{-2}) est donc proportionnelle au carré de l'amplitude.

Dans un milieu autre que le vide, non-conducteur mais polarisable, l'équation (A.5) tient toujours la route, mais on doit remplacer ε_0 et μ_0 par des valeurs appropriées au dit milieu, ε et μ , disons, ce qui permet d'obtenir la vitesse de phase (v) de l'onde électromagnétique dans ledit milieu via (A.6). L'indice de réfraction (n) est défini comme le rapport des vitesses de phase dans le vide versus le milieu:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} . \quad (\text{A.11})$$

Le tableau A.1 liste les indices de réfractions pour quelques substances d'intérêt. Le gros des

Table A.1: Indices de réfraction ($\lambda = 589 \text{ nm}$)

Substance	n
Air	1.000293
H	1.000132
He	1.000036
CO ₂	1.00045
Eau	1.333
Ethanol	1.361
Benzene	1.501
Ambre	1.55
Diamant	2.419
Silice (cristal)	1.458
Sel (cristal)	1.5
Verres	1.45–1.75

Gaz à 0° et 1 atm ; liquides/solides à 20°

variations provient de la permittivité ε , la perméabilité μ ne variant que très peu dans les diélectriques. L'indice de réfraction augmente quand la longueur d'onde diminue. Dans le domaine du visible l'augmentation dépasse rarement 10% en passant de 750 à 400 nm, mais s'accélère plus on s'enfonce dans l'ultraviolet.

A.2 Interfaces: transmission et réflexion

Une onde électromagnétique incidente sur une interface entre deux milieux d'indices de réfraction différents est en partie transmise, en partie réfléchi. Il est possible de calculer les fractions

transmises et réfléchies en fonction de l'angle d'incidence et des indices de réfraction caractérisant les milieux de chaque côté de l'interface. À l'interface, plusieurs contraintes de continuité sur $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ doivent être satisfaites:

- continuité de la composante de $\mathbf{E}$ tangentielle à l'interface;
- continuité de la composante de $\varepsilon\mathbf{E}$ perpendiculaire à l'interface;
- continuité de la composante de $\mathbf{B}$ perpendiculaire à l'interface;
- continuité de la composante de $\varepsilon\mathbf{B}/\mu$ parallèle
- conservation de l'énergie: à l'interface, la divergence du flux de Poynting est nulle (toute l'énergie incidente est soit transmise, soit réfléchie).

La réflexion et transmission d'une onde électromagnétique à une interface dépendra donc non seulement de sa direction de propagation $\mathbf{k}$ par rapport à l'interface (l'angle d'incidence θ_i), mais aussi de l'orientation du **plan de polarisation** de l'onde incidente par rapport au **plan d'incidence** de l'onde, soit le plan défini par sa direction de propagation $\mathbf{k}$ et la normale à l'interface. On peut distinguer deux cas limites, tel qu'illustré sur la Figure A.2: (A) $\mathbf{E}$ parallèle au plan d'incidence, et (B) $\mathbf{E}$ perpendiculaire au plan d'incidence. L'orientation de $\mathbf{B}$ suit directement de la contrainte $\mathbf{k} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Comme vous l'avez vu en PHY-2441, les contraintes de continuité énumérées ci-dessus fixent les amplitudes relatives des composantes de $\mathbf{E}$ (et $\mathbf{B}$) réfléchies (E_{0r}) et transmises (E_{0t}) par rapport à l'amplitude E_{0i} du faisceau incident. Ces rapports définissent les coefficients de réflectivité (r) et transmissivité (t). Pour des milieux diélectriques on trouve ainsi les équations de Fresnel:

$$r_{\perp} \equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}, \quad (\text{A.12})$$

$$t_{\perp} \equiv \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}, \quad (\text{A.13})$$

$$r_{\parallel} \equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i}, \quad (\text{A.14})$$

$$t_{\parallel} \equiv \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{2n_i \cos \theta_t}{n_t \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}. \quad (\text{A.15})$$

où n_i est l'indice de réfraction du milieu dans lequel se propage l'onde incidente, n_t celui du milieu sur lequel l'onde est incidente, θ_i est l'angle d'incidence, θ_r ($= \theta_i$) l'angle de réflexion, et θ_t l'angle de réfraction du faisceau transmis, donné par la Loi de Snell-Descartes:

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t. \quad (\text{A.16})$$

À incidence normale ($\theta_i = 0$), on trouve

$$r_{\parallel}(\theta_i = 0) = -r_{\perp}(\theta_i = 0) = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}. \quad (\text{A.17})$$

Pour une interface air-verre ($n_i = 1.0$, $n_t = 1.5$), $r = 0.2$ à incidence normale; et à une interface air-eau ($n_t = 1.34$), $r = 0.145$. Le signe “−” affectant $r_{\perp}$ indique un déphasage de π par rapport à la phase de l'onde incidente.

Sous usage de la Loi de Snell-Descartes (A.16) et de plusieurs identités trigonométriques bien connues, les équations de Fresnel (A.12)–(A.14) peuvent s'exprimer sous forme plus compacte:

$$r_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}, \quad (\text{A.18})$$

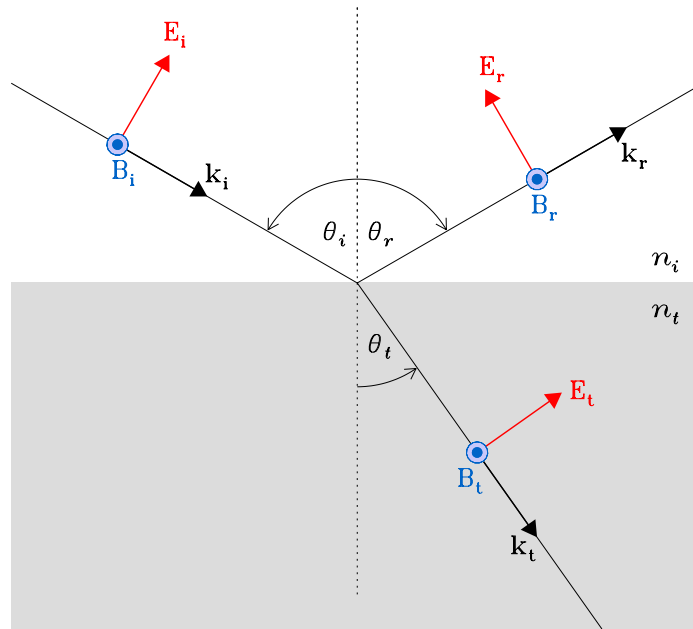
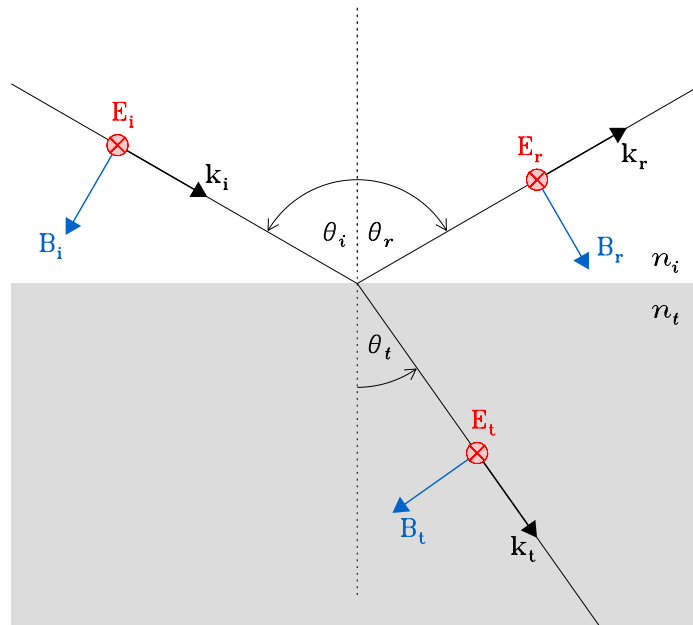
(A) E parallèle au plan d'incidence(B) E perpendiculaire au plan d'incidence

Figure A.1: Onde électromagnétique incidente sur une interface plane entre deux milieux d'indices de réfraction n_i , n_t , ici air et verre.

$$r_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}, \quad (\text{A.19})$$

$$t_{\perp} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)}, \quad (\text{A.20})$$

$$t_{\parallel} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)}. \quad (\text{A.21})$$

En physique environnementale on s'intéressera surtout au contenu énergétique, donc à l'intensité, d'une onde électromagnétique. L'intensité étant proportionnelle au carré des amplitudes, les coefficients de réflexion et transmission pour l'intensité sont alors simplement donnés par:

$$R_{\perp} = r_{\perp}^2, \quad R_{\parallel} = r_{\parallel}^2, \quad T_{\perp} = t_{\perp}^2, \quad T_{\parallel} = t_{\parallel}^2. \quad (\text{A.22})$$

La lumière naturelle peut être décrite comme une superposition de tous les plans de polarisation orientés de manière homogène dans le plan perpendiculaire au vecteur de propagation. Si on projette sur dans les plans parallèles ou perpendiculaire à une interface, la lumière naturelle est donc 50% “ $\parallel$ ” et 50% “ $\perp$ ”. Le coefficient de réflectivité totale (R) devient alors:

$$R = \frac{1}{2}(R_{\perp} + R_{\parallel}), \quad (\text{A.23})$$

et donc, à incidence normale,

$$R(\theta_i = 0) = \frac{1}{2}(R_{\perp} + R_{\parallel}) \left(\frac{n_t - n_i}{n_t + n_i} \right)^2. \quad (\text{A.24})$$

Pour notre interface air-verre, $R = 0.04$, et $R = 0.02$ pour air-eau. La Figure A.2 illustre la variation de $R_{\perp}$ (rouge), $R_{\parallel}$ (bleu) et R (noir, éq. (A.23)) en fonction de l'angle d'incidence, pour une interface air-verre ($n_i = 1.0$, $n_t = 1.5$). Il est remarquable qu'aux angles d'incidence

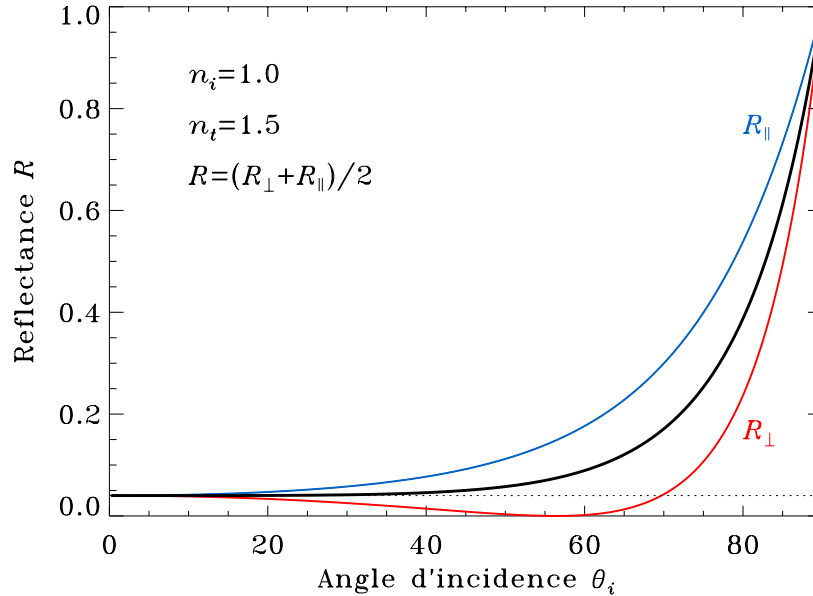


Figure A.2: Variation du coefficient de réflectivité totale pour la lumière naturelle (éq. (A.23)) en fonction de l'angle d'indice de l'onde. Les contributions $R_{\perp}$ et $R_{\parallel}$ sont tracées en rouge et bleu, tel qu'indiqué.

$\theta_i \lesssim 45^\circ$, l'augmentation de $R_{\parallel}$ avec θ_i est compensée par une diminution de $R_{\perp}$, de telle sorte que R demeure approximativement constant.

A.3 Flux et irradiance

Dans ce qui suit on aura à quantifier l'apport énergétique à un système par la radiation électromagnétique. Pour ce faire il est d'usage de définir un **flux radiatif** comme la quantité d'énergie par unité de temps ($\text{J s}^{-1} \equiv \text{W}$) émise par unité de surface par unité d'angle solide, tel qu'illustré sur la Figure Figure A.3. Un stéradian (abrévié “sr”) est l'angle solide

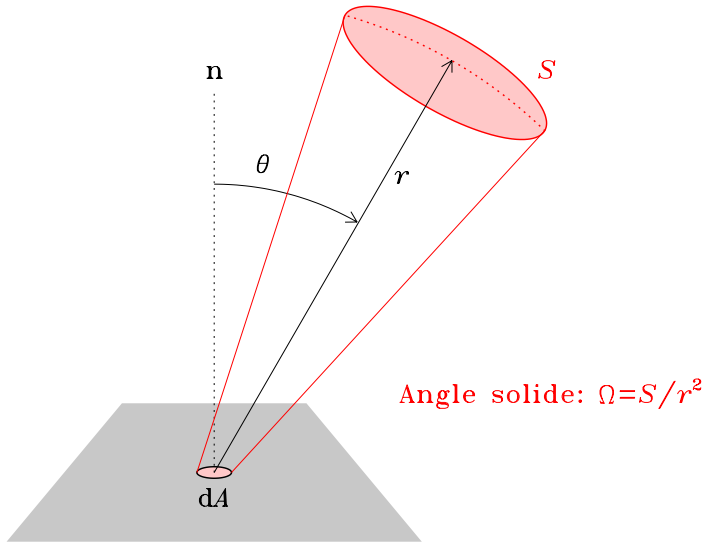


Figure A.3: Définition du flux radiatif. Un élément de surface dA émet un cône de radiation électromagnétique dont l'ouverture sous-tend un angle solide égal à l'aire S de la calotte en rouge divisé par r^2 . La géométrie est symétrique sur rotation par rapport à l'axe vertical (pointillés).

sous-tendu par une calotte sphérique de surface $S = 1 \text{ m}^2$ sur une sphère de rayon $r = 1 \text{ m}$. Un hémisphère sous-tend un angle solide de $2\pi \text{ sr}$, et la sphère complète $4\pi \text{ sr}$.

On distinguera parfois le **flux spectral** (F_λ ou F_ν), soit le flux radiatif à une longueur d'onde (ou fréquence) donnée; ses unités sont alors des $\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1}$ par unité de longueur d'onde (ou fréquence). Le flux radiatif total est alors l'intégrale du flux spectral sur toute la plage de longueurs d'onde (ou fréquences) d'intérêt.

A.4 Le spectre électromagnétique

Les ondes électromagnétiques sont une solution de équations de Maxwell dans le vide valide pour n'importe quelle longueur d'onde ou fréquence, tant que $\lambda\nu = c$. La “lumière” du parler courant se limite à la plage de longueur d'onde $\lambda = 400\text{--}700\text{nm}$, soit une toute petite partie du **spectre électromagnétique** complet.

Au fil des années une terminologie —avec acronymes— à peu près concensuelle s'est établie pour diviser le spectre électromagnétique en **domaine spectraux**. Le Tableau A.2 en offre une compilation. Du point de vue de la physique environnementale les plages importantes vont de l'ultraviolet rapproché (300nm) et s'étendent jusqu'à $\simeq 50 \mu\text{m}$, dans l'infrarouge éloigné.

Table A.2: Domaines du spectre électromagnétique

Domaine	Acronyme	Interval spectral
Gamma	γ	≤ 0.01
Rayons-X durs	HXR	0.01–0.1 nm
Rayons-X mous	SXR	0.1–10 nm
Extrême ultraviolet	EUV	10–121 nm
Ultraviolet moyen	UV	121–300 nm
Ultraviolet rapproché	NUV	300–400 nm
Visible	Vis	400–700 nm
Proche infrarouge	NIR	700–10 ³ nm
Infrarouge moyen	MIR	1–10 μm
Infrarouge éloigné	FIR	10–100 μm
Micro-ondes	EHF	0.1–1 cm
	SHF	1–100 cm
	UHF	100–10 ³ cm
	VHF	10–100 m
	HF	0.1–1 km
Ondes radio	MF	1–10 km
	LF	10–100 km
	VLf	100–1000 km

La frontière à 300nm entre l’ultraviolet moyen et l’ultraviolet rapproché correspond à la plus petite longueur d’onde qui peut atteindre le sol avec une amplitude significative, les plus courtes étant complètement absorbée par l’atmosphère terrestre. La frontière numériquement spécifique à 121 nm entre l’ultraviolet moyen et extrême mérite une explication: elle correspond à la longueur d’onde de la raie spectrale Lyman- α de l’Hydrogène, qui est présente en émission dans le spectre solaire, avec une amplitude significative pour la haute atmosphère terrestre.

Annexe B

La marche aléatoire

Dans sa forme la plus simple, la marche aléatoire décrit la variation d'un déplacement $\mathbf{D}_n$ suite à une séquence de n pas $\mathbf{s}_n$ de longueur constante s mais orientés aléatoirement dans l'espace. Physiquement, on peut imaginer la longueur s du pas comme équivalente au libre parcours moyen (ℓ) d'une particule du contaminant, tandis que le "pas de temps" associé à chaque pas de la marche correspondrait au temps inter-collision moyen ℓ/v_{th} , où v_{th} est la vitesse thermique moyenne.

Nous considérerons une situation où la grandeur du pas est toujours fixe $s = \sqrt{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}}$, mais son orientation dans l'espace est complètement aléatoire et indépendante de l'orientation du pas précédent. On parle alors d'un **processus stochastique sans mémoire**.

Le déplacement au pas n est clairement relié au déplacement du pas précédent $n - 1$ via:

$$\mathbf{D}_n = \mathbf{D}_{n-1} + \mathbf{s}_n, \quad n = 1, 2, 3... \quad (\text{B.1})$$

Le carré du déplacement au pas n devient:

$$\begin{aligned} D_n^2 &= \mathbf{D}_n \cdot \mathbf{D}_n \\ &= (\mathbf{D}_{n-1} + \mathbf{s}_n) \cdot (\mathbf{D}_{n-1} + \mathbf{s}_n) \\ &= D_{n-1}^2 + s^2 + 2\mathbf{D}_{n-1} \cdot \mathbf{s}_n. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Considérons maintenant non pas une, mais l'ensemble de molécules de Brut 45 effectuant une telle marche aléatoire, et dénotons par des crochets $\langle \dots \rangle$ la moyenne effectuée sur l'ensemble des marcheurs; ceci s'appelle une **moyenne d'ensemble**, et est défini de manière générale selon

$$\langle x \rangle = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M x(m), \quad (\text{B.3})$$

où $x(m)$ dénote la valeur d'une mesure x pour le m -ième membre de l'ensemble, ici de taille M . Donc, par exemple, $\langle \mathbf{D}_n \rangle$ représenterait le déplacement moyen de l'ensemble des molécules de Brut 45. Il s'agit ici d'un opérateur linéaire, satisfaisant les propriétés:

$$\langle x + y \rangle = \langle x \rangle + \langle y \rangle, \quad \langle ax \rangle = a \langle x \rangle, \quad (\text{B.4})$$

où a est un coefficient numérique quelconque. Appliquons maintenant cet opérateur à l'éq. (B.2):

$$\begin{aligned} \langle D_n^2 \rangle &= \langle D_{n-1}^2 + s^2 + 2\mathbf{D}_{n-1} \cdot \mathbf{s}_n \rangle, \\ &= \langle D_{n-1}^2 \rangle + \langle s^2 \rangle + \langle 2\mathbf{D}_{n-1} \cdot \mathbf{s}_n \rangle, \\ \langle D_{n-1}^2 \rangle + s^2 + 2\langle \mathbf{D}_{n-1} \cdot \mathbf{s}_n \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

la seconde égalité suivant de la linéarité notre opérateur de moyenne d'ensemble. Si chaque marche est vraiment aléatoire, sans mémoire, et qu'aucune "communication" n'existe entre les

marcheurs leur permettant de synchroniser leurs marches individuelles, alors chaque marche est statistiquement indépendante des autres; autrement dit l'angle entre $\mathbf{D}_{n-1}$ et $\mathbf{s}_n$ est distribué équiprobablement dans $[0, 2\pi[$ sur l'ensemble des marcheurs. Donc on aura

$$\langle \mathbf{D}_{n-1} \cdot \mathbf{s}_n \rangle = 0 , \quad (\text{B.6})$$

d'où

$$\langle D_n^2 \rangle = \langle D_{n-1}^2 \rangle + s^2 . \quad (\text{B.7})$$

Si l'on suppose maintenant que $\mathbf{D}_0 = 0$, alors on aura:

$$\langle D_1^2 \rangle = s^2 , \quad (\text{B.8})$$

$$\langle D_2^2 \rangle = \langle D_1^2 \rangle + s^2 = 2s^2 , \quad (\text{B.9})$$

$$\langle D_3^2 \rangle = \langle D_2^2 \rangle + s^2 = 3s^2 , \quad (\text{B.10})$$

$$\dots = \dots \quad (\text{B.11})$$

et donc après n pas:

$$\langle D_n^2 \rangle = n s^2 , \quad (\text{B.12})$$

et ce même si

$$\langle \mathbf{D}_n \rangle = 0 . \quad (\text{B.13})$$

Maintenant, si l'on interprète le décompte n des pas comme une variable temps cette expression nous indique que le déplacement quadratique moyen augmente linéairement avec le temps, d'où:

$$\sqrt{\langle D_n^2 \rangle} = \sqrt{n} s . \quad (\text{B.14})$$

Ceci s'appelle la **moyenne quadratique** du déplacement. Quelques points importants à retenir de tout ceci:

- L'hypothèse cruciale de l'analyse est l'éq. (B.6), qui n'est valide que pour un processus stochastique sans mémoire;
- À trictement parler, l'éq. (B.14) tient seulement dans la limite d'un nombre de marcheurs tendant vers l'infini; mais on verra sous peu que ça marche assez bien pour des N très loin de l'infini!
- Rien dans le développement ne dépend de la dimensionalité de l'espace dans lequel se fait la marche aléatoire; l'équation (B.14) est identique en 1D, 2D, 3D, etc.

La Figure B.1 illustre quelques marches aléatoires en 2D, chacune de 100 pas. Le cercle tracé a un rayon égal à la taille du déplacement quadratique moyen attendu, soit ici $R = \sqrt{\langle D_{100}^2 \rangle} = 10s$. La nature statistique de l'argument ressort très clairement ici; les marcheurs bleu et mauve ont atteint des rayons $> 10s$, tandis que pour les marcheur rouge et vert la distance du point de départ est $< 10s$. Néanmoins, même pour un si petit ensemble de seulement 4 membres, on a ici tout de même $R = \sqrt{\langle D_{100}^2 \rangle} \simeq 8.8s$. Pas si mal!

Marche aleatoire (100 pas)

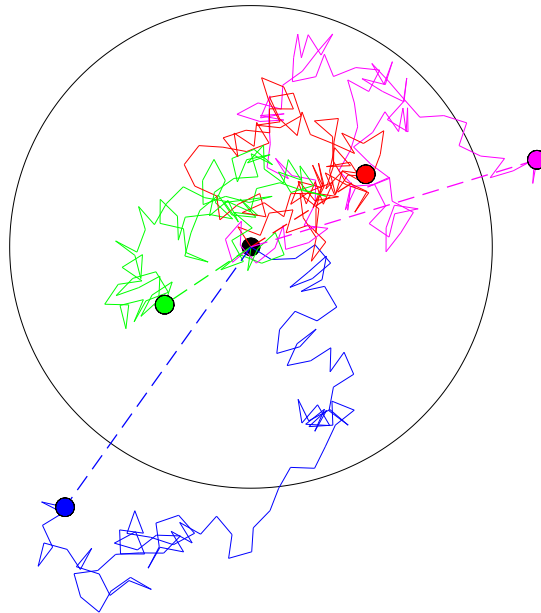


Figure B.1: Quatre marches aléatoires de $n = 100$ pas, en deux dimensions spatiales. Tous les marcheurs débutent au point noir au centre, et le cercle correspond à un déplacement $D \equiv \sqrt{\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}} = \sqrt{n} = 10$.