Chapitre 5

Processus physiques II. Matière

Nous avons vu au chapitre précédent comment la radiation transporte et redistribue l'énergie à travers les différentes "sphères" de l'environnement physique. La matière en mouvement (vents, courants marins, précipitations, évaporation, écoulements de surface ou subsurface, etc.) peut également transporter de l'énergie, en plus évidemment de la masse, et de divers "contaminants" présents dans l'air ou dans l'eau. Du point de vue environnemental les bilans de masse sont aussi pertinents que les bilans d'énergie. En plus de ce **transport** par les écoulements, ces derniers peuvent également conduire au **mélange**, autre phénomène de grande importance dans un contexte environnemental.

La dynamique des écoulements définit l'**hydrodynamique**, sujet d'un cours de troisième annnée (PHY-3140) que je vous recommande fortement si le sujet vous intéresse. Dans le cadre de PHY-2100, nous allons, la plupart du temps, considérer les écoulements comme connus (soit mesurés, soit déjà calculés), et allons nous concentrer sur leurs effets en contexte environnemental.

Ce chapitre, de longueur substantielle, débute par une présentation d'un phénomènes physiques de grande importance contrôlant la dispersion et concentration spatiale de matière dans l'environnement: la **diffusion** (§5.1); ceci est suivi d'un survol de l'hydrodynamique, avec emphase sur le transport de masse par les écoulements (5.2). On se tourne ensuite vers deux processus physiques de grande importance environnementale, soit la **sédimentation** (§5.3) et la **percolation** (§5.4). On poursuit en considérant l'influence combinée de la diffusion et des écoulements sur le transport de la chaleur (§5.5), en on termine en discutant l'impact des changements de phase, spécifiquement l'évaporation et condensation de l'eau, sur le transport de la chaleur (§5.6).

5.1 La diffusion

Imaginons la situation suivante: un flacon d'aftershave Brut Magnum 45 est ouvert dans le coin d'une pièce fermée. La pression partielle des molécules puantes étant initialement nulle dans l'air, celles contenues dans le flacon commenceront à s'évaporer et se disperser dans l'air, en réponse aux perpétuelles collisions dues au mouvement thermique des molécules de N₂ et O_2 dans l'air. Après un certain temps la situation ressemblera à celle illustrée sur la Figure 5.1. Continuellement bousculées par N₂ et O_2 , les molécules puantes effectuent une forme de marche aléatoire qui, en moyenne, les éloignent de leur source, ici située en bas à gauche. Cette situation exemplifie les processus dit de **diffusion**.

Dans cette marche aléatoire, la direction de chaque pas est déterminée par les aléas des collisions inter-particules, leur longueur par la distance interparticule moyenne, et la durée du pas par le temps moyen s'écoulant entre deux collisions successives, Mais, puisque les molécules d'air (essentiellement N_2 et O_2) sont beaucoup plus nombreuses que celles de Brut 45 Magnum (heureusement d'ailleurs), ces dernières feront des collisions presqu'uniquement avec O_2 ou N_2 , et presque jamais avec une autre molécule de Brut 45. Donc le mouvement de chaque molécule



Figure 5.1: Représentation schématique d'un fluide à deux composantes, ici des molécules d'air $(80\%N_2+18\%O_2, \text{ composante 1, en gris})$ et de Brut Magnum 45 (composante 2, en rouge), vu ici à l'échelle microscopique. La source du Brut Magnum 45 est dans le coin inférieur gauche. La composante (2) agit comme un contaminant trace en autant que son nombre de particules N(2) est $\ll N(1)$; dans une telle situation, les paramètres thermodynamiques du gaz (densité, température, pression, etc.) sont complètement déterminés par la composante 1, et la diffusion de la composante 2 s'apparente à une marche aléatoire où les collisions avec la composante 1 réorientent aléatoirement la direction de déplacement des constituants microscopiques de la composante 2.

de Brut est complètement découplée des autres. On dirait ici du Brut 45 Magnum qu'il est un **contaminant trace** diffusant dans l'air.

5.1.1 La marche aléatoire

Dans sa forme la plus simple, la marche aléatoire décrit la variation d'un déplacement \mathbf{D}_n suite à une séquence de n pas \mathbf{s}_n de longueur constante s mais orientés aléatoirement dans l'espace. Physiquement, on peut imaginer la longueur s du pas comme équivalente au libre parcours moyen (ℓ) d'une particule du contaminant, tandis que le "pas de temps" associé à chaque pas de la marche correspondrait au temps inter-collision moyen $\ell/v_{\rm th}$, où $v_{\rm th}$ est la vitesse thermique moyenne.

Nous considérerons une situation où la grandeur du pas est toujours fixe $s = \sqrt{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}}$, mais son orientation dans l'espace est complètement aléatoire et indépendante de l'orientation du pas précédent. On parle alors d'un **processus stochastique sans mémoire**.

Le déplacement au pas n est clairement relié au déplacement du pas précédent n-1 via:

$$\mathbf{D}_n = \mathbf{D}_{n-1} + \mathbf{s}_n$$
, $n = 1, 2, 3...$ (5.1)

Le carré du déplacement au pas n devient:

$$D_n^2 = \mathbf{D}_n \cdot \mathbf{D}_n$$

$$= (\mathbf{D}_{n-1} + \mathbf{s}_n) \cdot (\mathbf{D}_{n-1} + \mathbf{s}_n)$$

$$= D_{n-1}^2 + s^2 + 2\mathbf{D}_{n-1} \cdot \mathbf{s}_n .$$
(5.2)

Considérons maintenant non pas une, mais l'ensemble de molécules de Brut 45 effectuant une telle marche aléatoire, et dénotons par des crochets $\langle ... \rangle$ la moyenne effectuée sur l'ensemble des marcheurs; ceci s'appelle une **moyenne d'ensemble**, et est défini de manière générale selon

$$\langle x \rangle = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} x(m) ,$$
 (5.3)

où x(m) dénote la valeur d'une mesure x pour le m-ième membre de l'ensemble, ici de taille M. Donc, par exemple, $\langle \mathbf{D}_n \rangle$ représenterait le déplacement moyen de l'ensemble des molécules de Brut 45. Il s'agit ici d'un opérateur linéaire, satisfaisant les propriétés:

$$\langle x+y\rangle = \langle x\rangle + \langle y\rangle , \qquad \langle ax\rangle = a\langle x\rangle , \qquad (5.4)$$

où a est un coefficient numérique quelconque. Appliquons maintenant cet opérateur à l'éq. (5.2):

$$\langle D_n^2 \rangle = \langle D_{n-1}^2 + s^2 + 2\mathbf{D}_{n-1} \cdot \mathbf{s}_n \rangle , = \langle D_{n-1}^2 \rangle + \langle s^2 \rangle + \langle 2\mathbf{D}_{n-1} \cdot \mathbf{s}_n \rangle , \langle D_{n-1}^2 \rangle + s^2 + 2\langle \mathbf{D}_{n-1} \cdot \mathbf{s}_n \rangle .$$
 (5.5)

la seconde égalité suivant de la linéarité notre opérateur de moyenne d'ensemble. Si chaque marche est vraiment aléatoire, sans mémoire, et qu'aucune "communication" n'existe entre les marcheurs leur permettant de synchroniser leurs marches individuelles, alors chaque marche est statistiquement indépendante des autres; autrement dit l'angle entre \mathbf{D}_{n-1} et \mathbf{s}_n est distribué équiprobablement dans $[0, 2\pi]$ sur l'ensemble des marcheurs. Donc on aura

$$\langle \mathbf{D}_{n-1} \cdot \mathbf{s}_n \rangle = 0 , \qquad (5.6)$$

d'où

$$\left\langle D_n^2 \right\rangle = \left\langle D_{n-1}^2 \right\rangle + s^2 \ . \tag{5.7}$$

Si l'on suppose maintenant que $\mathbf{D}_0 = 0$, alors on aura:

$$\left\langle D_1^2 \right\rangle = s^2 , \qquad (5.8)$$

$$\left\langle D_2^2 \right\rangle = \left\langle D_1^2 \right\rangle + s^2 = 2s^2 , \qquad (5.9)$$

$$\left\langle D_3^2 \right\rangle = \left\langle D_2^2 \right\rangle + s^2 = 3s^2 , \qquad (5.10)$$

$$... = ...$$
 (5.11)

et donc après n pas:

$$\left\langle D_n^2 \right\rangle = n \, s^2 \,, \tag{5.12}$$

et ce même si

$$\langle \mathbf{D}_n \rangle = 0 \ . \tag{5.13}$$

Maintenant, si l'on interprète le décompte n des pas comme une variable temps cette expression nous indique que le déplacement quadratique moyen augmente linéairement avec le temps, d'où:

$$\sqrt{\langle D_n^2 \rangle} = \sqrt{n} \, s. \tag{5.14}$$

Ceci s'appelle la **moyenne quadratique** du déplacement. Quelques points importants à retenir de tout ceci:

Marche aleatoire (100 pas)



Figure 5.2: Quatre marches aléatoires de n = 100 pas, en deux dimensions spatiales. Tous les marcheurs débutent au point noir au centre, et le cercle correspond à un déplacement $D \equiv \sqrt{\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}} = \sqrt{n} = 10$.

- L'hypothèse cruciale de l'analyse est l'éq. (5.6), qui n'est valide que pour un processus stochastique sans mémoire;
- À trictement parler, l'éq. (5.14) tient seulement dans la limite d'un nombre de marcheurs tendant vers l'infini; mais on verra sous peu que ça marche assez bien pour des N très loin de l'infini!
- Rien dans le développement ne dépend de la dimensionalité de l'espace dans lequel se fait la marche aléatoire; l'équation (5.14) est identique en 1D, 2D, 3D, etc.

La Figure 5.2 illustre quelques marches aléatoires en 2D, chacune de 100 pas. Le cercle tracé a un rayon égal à la taille du déplacement quadratique moyen attendu, soit ici $R = \sqrt{\langle D_{100} \rangle} =$ 10s. La nature statistique de l'argument ressort très clairement ici; les marcheurs bleu et mauve ont atteint des rayons > 10s, tandis que pour les macheur rouge et vert la distance du point de départ est < 10s. Néanmoins, même pour un si petit ensemble de seulement 4 membres, on a ici tout de même $R = \sqrt{\langle D_{100} \rangle} \simeq 8.8s$. Pas si mal!

5.1.2 Diffusion = marche aléatoire

Considérons la variation suivante sur le thème de la marche aléatoire en une dimension spatiale: chaque marcheur, comme auparavant, fait un pas $s = \pm 1$, mais la marche est limitée par deux "murs" à x = 100 et x = -100, et les marcheurs frappant le mur "rebondissent" d'un pas dans la direction opposée. De plus, choisissons une condition initiale où tous les marcheurs débutent à des positions distribuées de manière aléatoire mais statistiquement uniforme dans le sous-intervalle $-100 < x \leq 0$, soit dans la moitiée gauche du domaine. Tous les marcheurs font leur pas de manière synchronisée dans le temps, mais sinon de manière totalement découplée l'un de l'autre.

La Figure 5.3 montre une séquence temporelle d'histogrammes décrivant la distribution des positions des marcheurs à mesure que la marche aléatoire progresse. La distribution, initialement très raide à x = 0, s'étale graduellement avec le temps, mesuré en pas de marche aléatoire. Cet étalement résulte du fait que plus de marcheurs traversent de la moitié gauche du domaine vers la moitié droite que dans le sens inverse, en raison du simple fait qu'il y a initialement beaucoup plus de marcheurs du coté gauche. Ce n'est que lorsqu'il y aura autant de marcheurs de chaque coté de x = 0 que le système pourra devenir statistiquement stationnaire.

Cet étalement graduel d'une concentration de "particules" décrivant chacune une marche aléatoire est représentatif des processus dits de **diffusion**.

Dans un contexte environnemental, il est hors de question de commencer à simuler les processus de dispersion par diffusion en calculant explicitement la dispersion des contaminants comme des marches alétoires, le nombre de "marcheurs" impliqués étant carrément astronomique (plus précisément: plusieurs fois le nombre d'Avogadro), même si on se limitait à la diffusion du Brut Magnum 45 dans une petite salle de classe. On doit donc établir une représentation mathématique du processus de diffusion sous la forme d'équations différentielles impliquant des variables globales comme la densité, la concentration, etc.

Revenons à notre marche aléatoire en 1D confinée à l'intervalle $-100 \le x \le 100$ (Fig. 5.3). Examinons ce qui se passe à une position x_0 quelconque; comme l'illustre la Figure 5.5, seules les particules situées dans l'intervalle $x_0 - |s| < x < x_0 + |s|$ (région grise) ont une chance de traverser x_0 au prochain pas de marche, mais seulement si le pas se fait dans la bonne direction $(s = +1, \text{ en rouge, pour les particules situées dans <math>x_0 - |s| < x < x_0, \text{ et } s = -1$, en vert, pour celles dans dans $x_0 < x < x_0 + |s|$). Pour des directions équiprobables, la moitié des particules dans chaque intervalle feront ce pas dans la "bonne" direction. Donc le nombre *net* δN de particules traversant la position x_0 vers la droite sera donné par quelque chose comme

$$\delta N(x_0) = \frac{1}{2}N(x_0 - |s|) - \frac{1}{2}N(x_0 + |s|) .$$
(5.15)

Considérons maintenant l'intervalle $x_0 - |s| < x < x_0 + |s|$ dans son ensemble, et dénotons par $N(x_0, t)$ le nombre de particules contenues dans cet intervalle au temps t. Le nombre au temps $t + \Delta t$ sera donné par le nombre au temps t plus ce qui est entré du coté gauche (à $x_0 - |s|$) moins ce qui est sorti du coté droit (à $x_0 + |s|$). Évaluant l'éq. (5.15) à $x_0 - |s|$ et $x_0 + |s|$, on arrive à:

$$N(x,t+\Delta t) = N(x,t) + \delta N(x-s) - \delta N(x+s)$$

= $N(x,t) + \left[\left(\frac{1}{2} N(x-2s) - \frac{1}{2} N(x) \right) - \left(\frac{1}{2} N(x) - \frac{1}{2} N(x+2s) \right) \right]$
= $N(x,t) + \frac{1}{2} \left(N(x+2s) - 2N(x) + N(x-2s) \right) ,$ (5.16)

où on largué l'indice "0" sur le x et la valeur absolue sur s afin d'alléger la notation. Divisant les membres de gauche et de droite par Δt , on peut réécrire cette expression sous la forme équivalente:

$$\frac{N(x,t+\Delta t) - N(x,t)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{(2s)^2}{\Delta t} \right) \times \left(\frac{N(x+2s) - 2N(x) + N(x-2s)}{(2s)^2} \right).$$
(5.17)

La seconde parenthèse au membre de droite ressemble à quelque chose que vous avez déjà vu en PHY-1234 (j'espère), soit une formule de différence finie centrée pour la dérivée seconde par rapport à x pour un pas spatial $h \equiv 2s$, tandis que le membre de gauche ressemble tout autant à une formule de différence finie avant pour la dérivée temporelle, pour un pas temporel $h \equiv \Delta t$. Si l'on accepte ces interprétations, l'éq. (5.17) représenterait alors une discrétisation par différences finies de l'équation différentielle suivante:

$$\frac{\partial N(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 N(x,t)}{\partial x^2} , \qquad (5.18)$$



Figure 5.3: Évolution temporelle de la distribution de 30000 marcheurs aléatoires 1D confinés à l'intervalle $[-100 \le x \le +100]$, et initialement tous localisés aléatoirement dans le sousintervalle $[-100 \le x \le 0]$. Les lignes verticales le long de l'abcisse indiquent la position moyenne des marcheurs au temps correspondant, tel que codé par la couleur du trait.



Figure 5.4: Solution numérique de l'équation de diffusion (5.18) avec les conditions initiale et limites données par les équations (5.20), avec $\Delta x = 1$ et $\Delta t = 0.25$.



Figure 5.5: Pour un groupe de marcheurs aléatoires en 1D distribués aléatoirement en x, seuls ceux situés à une distance inférieure d'un pas s à une position quelconque x_0 auront la possibilité de traverser x_0 au prochain pas, mais seulement si ce pas est pris dans la "bonne" direction, soit vers la gauche (flèches vertes) pour les marcheurs situés dans l'intervalle $x_0 \le x \le x_0 + s$, ou vers la droite (flèches rouges) pour les marcheurs dans l'intervalle $x_0 - s \le x \le x_0$. La position verticale est arbitraire ici.

où on a défini le coefficient numérique

$$D = \frac{2s^2}{\Delta t} , \qquad (5.19)$$

La Figure 5.4 présente une solution numérique de l'éq. (5.18), avec D = 2 et conditions initiales et limites:

$$N(x,t=0) = \begin{cases} 1 & x \le 0\\ 0 & x > 0 \end{cases}, \qquad \frac{\partial N}{\partial x}\Big|_{x=-100} = \frac{\partial N}{\partial x}\Big|_{x=+100} = 0.$$
(5.20)

Comparez maintenant ceci à la Figure 5.3; La solution a été tracée aux mêmes temps équivalents, et avec le même code de couleur pour les différents traits. Il est clair que l'éq. (5.18) est une excellente représentation de la marche aléatoire en 1D, même dans la limite d'un nombre de marcheurs élevé mais encore très loin de l'infini.

En contexte environnemental, il est d'usage d'écrire l'équation (5.18) non pas en terme du nombre N de molécules de contaminant, mais plutôt de sa **concentration**, souvent définie comme le rapport de la densité contaminant (ρ_c) par rapport à la densité totale du milieu (ρ):

$$c = \frac{\rho_c}{\rho} , \qquad (5.21)$$

soit une quantité adimensionnelle. Mais je nai pu que constater que dans bien des ouvrages de sciences environnementales, le terme "concentration" est souvent utilisé pour caractériser la densité du contaminant (ρ_c) comme telle, dans lequel cas la concentration (dénotée par un "C" majuscule dans tout ce qui suit) a des unités de kg m⁻³. C'est en fait une définition souvent plus pratique quand vient le temps de quantifier la magnitude d'une source de contaminant, et

celle adoptée dans ce qui suit. Notre équation (5.18) devient alors:

$$\frac{\partial C(\mathbf{x},t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C(\mathbf{x},t)}{\partial x^2} , \qquad (5.22)$$

qui se généralise en plus d'une dimension spatiale à:

$$\frac{\partial C(\mathbf{x},t)}{\partial t} = D\nabla^2 C(\mathbf{x},t) , \qquad (5.23)$$

et est appelée **équation de diffusion**. Remarquons que puisque $\nabla^2 C \equiv \nabla \cdot (\nabla C)$, avec *D* constant cette expression a la forme de notre loi de conservation générique (2.55), en l'absence de sources ou puits et si l'on définit le **flux diffusif** selon

$$\mathbf{q}_D = -D\nabla C$$
, $[\mathrm{kg} \ \mathrm{m}^{-2} \, \mathrm{s}^{-1}]$ (5.24)

ce qui est tout à fait cohérent avec le développement ayant mené à $(5.18)^1$. La quantité D (unités: $m^2 s^{-1}$) est le **coefficient de diffusion**, et mesure le taux auquel se disperse le contaminant trace dans le milieu ambiant.

Notons bien que D caractérise la diffusion d'un contaminant spécifique dans un milieu ambiant tout aussi spécifique. Un calcul *ab initio* de D est possible via la théorie cinétique dite de Chapman-Enskog, mais c'est un exercice assez violent en physique statistique; en physique environnementale il est plutôt d'usage de mesurer D en laboratoire pour un mélange spécifique. Le Tableau 5.1 liste des coefficients de diffusion pour quelques contaminants d'intérêt, diffusant dans l'air ou l'eau.

Substance	dans l'air $(20^{\circ} \mathrm{C})$	dans l'eau $(25^{\circ}\mathrm{C})$
Ar	1.89×10^{-5}	2×10^{-9}
CH_4	2.1×10^{-5}	1.49×10^{-9}
CO	2.08×10^{-5}	2.03×10^{-9}
CO2	0.16×10^{-5}	1.92×10^{-9}
H_2O	2.42×10^{-5}	
Н	$7.56 imes 10^{-5}$	
NaCl		1.61×10^{-9}
Acetone		1.16×10^{-9}
Benzene		1.02×10^{-9}
Ethanol		0.84×10^{-9}
Nominal	10^{-5}	10^{-9}

Table 5.1: Coefficients de diffusion $D \, [\text{m}^2 \, \text{s}^{-1}]$ dans l'air et dans l'eau

Source: voir bibliographie

Revenons à la marche aléatoire, et plus spécifiquement à l'éq. (5.19); si on accepte l'équivalence $s \equiv \ell$ et $\Delta t \equiv \ell/v_{\text{th}}$, alors on aurait

$$D = 2v_{\rm th}\ell \ . \tag{5.25}$$

On en concluerait qu'un gaz peu dense (plus grand libre parcour moyen) conduira à une diffusion plus rapide. De même, dans un gaz chaud les constituants microscopiques se déplacent plus rapidement, et donc $v_{\rm th}$ est plus grand et (à densité égale) le temps inter-collisions est plus court, ce qui nous ferait prédire que D augmente avec la température. Ces deux attentes s'avèrent conformes à l'expérience. Pour l'Argon dans l'air, par exemple, D passe de $0.167 \times 10^{-5} \,\mathrm{m^2 \, s^{-1}}$

¹Petit quiz: où se trouve le gradient dans l'équation (5.16)?

à $0.289 \times 10^{-5} \,\mathrm{m^2 \, s^{-1}}$ quand l'air réchauffe de 0° à 100° C. Mais encore ici, aux fins de ce cours, en bonne première approximation on négligera la plupart du temps cette dépendance en température.

Pour la majorité des espèces chimiques d'intérêt en physique environnementale, en bonne première approximation et sauf avis contraire, on utilisera des valeurs nominales $D = 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ pour la diffusion dans l'air, et $D = 10^{-9} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ pour la diffusion dans l'eau.

5.1.3 Le temps de diffusion

Notre équation de diffusion est une équation différentielle linéaire aux dérivées partielles (EDPs), dont la solution n'est pas exactement de la tarte, comme on le verra sous peu. On peut cependant en extraire de l'information très pertinentes sans la solutionner formellement, via l'**analyse dimensionnelle**.

Travaillons avec l'équation de diffusion pure (5.22), et supposons que l'on puisse jauger "à l'oeil" une longueur caractéristique (L) et un temps caractéristique τ sur lesquels varie C. Dimensionnellement, on aurait alors:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial C}{\partial t} & \rightarrow & \frac{C_0}{\tau} \\ D\nabla^2 C & \rightarrow & \frac{D C_0}{L^2} \end{array}, \end{array}$$

Appliquant cette procédure à notre équation de diffusion:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\nabla^2 C , \qquad \rightarrow \qquad \frac{C_0}{\tau} \sim D\frac{C_0}{L^2}$$
(5.26)

Les C_0 se simplifient, conséquence du fait que notre équation de diffusion est linéaire en C. On a donc:

$$\frac{1}{\tau} \sim \frac{D}{L^2} . \tag{5.27}$$

Ceci permet d'estimer l'ordre de grandeur du temps caractéristique de la diffusion de C sur une échelle spatiale L:

$$\tau_D = \frac{L^2}{D} \ . \tag{5.28}$$

C'est le **temps de diffusion**. Ce genre d'analyse dimensionnelle permet d'obtenir assez facilement des estimés de type ordre de grandeur pour des phénomènes dont un calcul complet serait passablement plus complexe; on en fera usage à répétition au fil du cours.

Le temps de diffusion permet également d'**adimensionaliser** notre équation de diffusion. Introduisons les variables adimensionnelles suivantes:

$$x^* = x/L$$
, $t^* = t/\tau_D$, (5.29)

et substituons ces définitions dans l'éq. (5.22); on obtient:

$$\frac{\partial C(\mathbf{x}^*, t^*)}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 C(\mathbf{x}^*, t)^*}{\partial x^{*2}} .$$
(5.30)

Le coefficient de diffusion D a disparu de l'équation, ayant été absorbé dans le temps de diffusion qui est maintenant l'unité de temps pour la variable temporelle.

5.1.4 Solutions analytiques à l'équation de diffusion

En physique environnementale on s'intéressera souvent à la solution de l'équation de diffusion en présence d'une source de contaminant, dépendant potentiellement de temps et de la position. L'équation (5.23) devient alors:

$$\frac{\partial C(\mathbf{x},t)}{\partial t} = D\nabla C(\mathbf{x},t) + S(\mathbf{x},t) , \qquad (5.31)$$

où la concentration C est mesurée en k
g $\mathrm{m}^{-3},$ et sa source en kg $\mathrm{m}^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}.$

Débutant avec Jean-Baptiste Fourier (1968–1830), faisant par la suite une passe à Pierre-Simon de Laplace (1749–1827) qui fait un punt posthume de l'autre coté de la Manche à Georges Gabriel Stokes (1819–1903; grand matheux et expert du 2-pour-1 —et même parfois 3-pour-1— dans l'application de solution mathématiques à des problèmes physique), une panoplie de méthodes mathématiques ont été développées permettant d'obtenir des solutions analytiques à l'équation de diffusion (5.31), avec ou sans terme source, dans des situations géométriquement simples mais tout de même pertinentes en physique environnementale (entre autre): transformée de Laplace, solutions autosimilaires, solutions par fonctions de Green, etc. Vous avez déjà fait connaissance avec certaines de ces méthodes dans vos cours de math, et d'autres sont couvertes en PHY-3140. On se bornera ici à simplement lister quelques solutions qui nous seront utiles plus loin².

Aplanissement d'une discontinuité

On revient d'abord, mais en version continue, au petit problème introduit à la §5.1.2: l'aplanissement graduel d'une discontinuité initiale de la concentration dans un domaine spatial infini en 1D $(-\infty \le x \le \infty)$, en l'absence de toute source de *C* autre que la quantité présente à t = 0. On doit alors solutionner l'équation de diffusion (5.31) avec S = 0 et comme condition initiale:

$$C(x,t=0) = \begin{cases} 0 , & x < 0 \\ C_0 , & x \ge 0 \end{cases}$$
(5.32)

Notons que dans un tel problème 1D, la concentration est maintenant mesurée en kg m⁻¹. La solution prend la forme:

$$C(x,t) = \frac{C_0}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \right] .$$
(5.33)

avec $\operatorname{erf}(\beta)$ étant la **fonction d'erreur**, définie selon:

$$\operatorname{erf}(\beta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\beta \exp(-x^2) \mathrm{d}x \;. \tag{5.34}$$

Pour référence future, la fonction d'erreur complémentaire est définie ainsi:

$$\operatorname{erfc}(\beta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\beta}^{\infty} \exp(-x^2) \mathrm{d}x \;.$$
 (5.35)

de telle sorte que $\operatorname{erf}(\beta) + \operatorname{erfc}(\beta) = 1$. Notons également que $\operatorname{erf}(\beta) = -\operatorname{erf}(-\beta)$, et que la définition même de la fonction d'erreur (soit l'éq. (5.36) implique que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\mathrm{erf}(\beta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp(-\beta^2) \ . \tag{5.36}$$

La solution (5.33) est portée en graphique sur la Figure 5.6A, à des temps t exprimés en unités du temps de diffusion (5.28), ce qui revient ici à poser D = 1. Notez bien que les courbes successives sont espacées de manière approximativement uniforme en $\log(t)$, tel qu'indiqué par le code de couleur³.

On perçoit déjà sur cette Figure (en fait déjà sur les Figs. 5.3 et 5.4) une caractéristique importante des processus diffusifs: ils opèrent très rapidement en présence de fort gradients, mais deviennent de plus en plus inefficaces à mesure que les gradients s'aplanissent. C'est

 $^{^{2}}$ Cette sous-section est adapté pas mal directement de la Section 7.1.1 et l'Annexe C de l'ouvrage de Boeker & van Grondelle cité en fin de chapitre

 $^{{}^{3}}$ C'est aussi la solution qui a été utilisée pour produire la Figure 5.4, même si dans ce cas le domaine spatial était borné dans $-100 \le x \le +100$; une petite tricherie qu'on me pardonnera j'espère...



Figure 5.6: Diverses solutions analytiques à l'équation de diffusion (5.31), discutées à la §5.1.4. (A): Aplanissement d'une discontinuité 1D; (B): Source instantanée et spatialement localisée à x = 0 en 1D; (C) source instantanée d'étendue finie en x en 1D; et (D) source temporellement continue mais spatialement localisée à r = 0 en 3D (notez l'échelle log-log pour cette dernière). Le code couleur correspond au temps t, mesuré en unité du temps de diffusion, auquel chaque solution est tracée.

évidemment une conséquence du fait que le flux diffusif est lui-même proportionnel au gradient de C (revoir l'éq. (5.24) au besoin). La solution stationaire asymptotique est

$$\lim_{t \to \infty} \frac{C(x,t)}{C_0} = \frac{1}{2} , \qquad (5.37)$$

soit un mélange complet de la concentration initiale dans tout le domaine spatial.

Source ponctuelle instantanée en 1D

On considère une situation en une dimension spatiale, où à t = 0 une masse Q (en kg) de contaminant est injectée instantanément à la position x = 0, dans un environnemment où avant l'injection C = 0 partout. Le terme source S dans (5.31) est alors $S = 0 \forall t > 0$, et se retrouve entièrement "contenu" dans la condition initiale:

$$C(x,t=0) = Q\delta(x) , \qquad (5.38)$$

où $\delta(x)$ est la fonction delta de Dirac, et C est encore ici une densité linéaire (unités: kg m⁻¹) en raison de la nature 1D du problème.

La solution de l'équation (5.31) est donnée par

$$C(x,t) = \frac{Q}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-x^2/(2\sigma^2)\right)$$
(5.39)

où on a défini

$$\sigma(t) = \sqrt{2Dt} \ . \tag{5.40}$$

L'équation (5.49) décrit une Gaussienne centrée sur x = 0 et dont la largeur croit en \sqrt{t} selon (5.40), et est illustrée sur la Figure 5.6B. Cette solution satisfait également

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(x,t) \mathrm{d}x = Q \qquad \forall t , \qquad (5.41)$$

exprimant la conservation de la masse totale de contaminant injecté à t = 0. La diffusion ne fait que disperser le contaminant présent initialement. Ici la solution stationaire asymptotique est

$$\lim_{t \to \infty} C(x,t) = 0 , \qquad (5.42)$$

la concentration initiale se retrouvant complètement diluée dans le domaine spatial infini.

Notons finalement que cette même solution décrirait une situation en 3D où une densité surfacique (unités: kg m⁻²) de grandeur Q est injectée dans le plan x = 0, la solution demeurant alors invariante en y et z.

Source étendue instantanée en 1D

La linéarité de l'équation de diffusion permet de construire des solutions pour des sources spatialement étendues comme une somme (intégrale) de solutions spatialement ponctuelles, décalées spatialement l'une par rapport à la suivante et couvrant l'étendue spatiale de la source. Considérons par un exemple une injection instantanée de contaminant en 1D, comme précédemment, mais cette fois injectée à t = 0 sur un intervalle fini $-b/2 \le x \le b/2$. À une position x' dans cet intervalle on peut écrire:

$$C(x', t = 0) = C_0 \delta(x - x') dx', \qquad (5.43)$$

À ce petit segment linéaire infinitésimal dx' est associé une solution:

$$C(x,t) = \frac{C_0 \mathrm{d}x'}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{2\sigma^2}\right)$$
(5.44)

comme auparavant, viz. éq. (5.49). En vertu de la linéarité de notre équation de diffusion, la solution complète pour la source étendue est alors donnée par:

$$C(x,t) = \frac{C_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-b/2}^{+b/2} \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{2\sigma^2}\right) dx'$$
$$= \frac{C_0}{2} \left[\exp\left(\frac{b/2+x}{\sigma\sqrt{2}}\right) + \exp\left(\frac{b/2-x}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right]$$
(5.45)

où $\sigma(t)$ est toujours donné par l'éq. (5.40), et notre fonction d'erreur est réapparue dans le portrait. Cette solution est portée en graphique à la Figure Figure 5.6C. Qualitativement, le comportement est le même qu'en (B), soit un inexorable étalement du profil initial de la concentration. La solution stationaire asymptotique est encore une fois

$$\lim_{t \to \infty} C(x,t) = 0 , \qquad (5.46)$$

soit dilution complète de la masse de contaminant injecté à t = 0.

Source ponctuelle instantanée en 3D

Notre solution de la §5.1.4 est généralisable pour une source ponctuelle instantanée diffusant en 2D ou 3D. La concentration C est alors mesurée en kg m⁻ⁿ. La solution de l'équation (5.31) est alors donnée par

$$C(r,t) = \frac{Q}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{r^2}{(2\sigma^2)}\right) , \qquad (5.47)$$

où n = 2 en 2D (géométrie cylindrique avec invariance en z), avec le rayon $r^2 = x^2 + y^2$ pour une source linéaire sur l'axe de symétrie r = 0; et $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ en 3D (n = 3) pour une source ponctuelle à l'origine (r = 0). L'évolution de la solution est qualitativement semblable à la Figure 5.6B.

Source ponctuelle continue en 3D

Dans toutes les solutions présentées jusqu'ici, le contaminant est injecté instantanément à t = 0. Toujours en vertu de la linéarité de notre équation de diffusion, il est possible de modéliser une injection continue de contaminant en superposant des solutions pour injection instantané, décalées dans le temps l'une par rapport à l'autre, chaque injection ayant une intensité qdt' On doit maintenant remplacer (5.40) par

$$\sigma(t,t') = \sqrt{2D(t-t')} , \qquad (5.48)$$

donnant la contribution au temps t de l'injection instantanée au temps t'. Il s'agit maintenant d'intégrer la solution (5.47) de 0 à t:

$$C(r,t) = \frac{q}{(8(\pi D)^{3/2}} \int_0^{t'} (t-t')^{-3/2} \exp\left(-\frac{r^2}{4D(t-t')}\right) dt'$$
(5.49)

Cette intégrale, de type convolution, a l'air un peu méchante, mais la substitution de variable

$$\beta = \frac{r}{\sqrt{4D(t-t')}}\tag{5.50}$$

nous ramène à une forme plus gentille, donc la solution est:

$$C(r,t) = \frac{q}{4\pi Dr} \operatorname{erfc}\left(\frac{r}{2\sqrt{Dt}}\right)$$
(5.51)

où $\operatorname{erfc}(x)$ est la fonction d'erreur complémentaire. Cette solution est portée en graphique à la Figure 5.6D. La solution stationaire asymptotique prend la forme:

$$\lim_{t \to \infty} C(x,t) = \frac{q}{4\pi Dr}$$
(5.52)

Ce profil asymptotique est tel qu'en tout r, le flux diffusif intégré sur une sphère de rayon r équilibre le taux d'injection q du contaminant à r = 0.

5.2 Écoulements: transport et mélange

Notre étude de la diffusion s'est faite dans le cadre d'un milieu ambiant globalement au repos. Mais en contexte environnemental on devra souvent composer avec la présence de vents, de courant marins, ou d'écoulements surfaciques, allant du ruisssellement aux rivières et fleuves. Tous ces écoulements fluides peuvent avoir un fort impact sur la dispersion des contaminants (et aussi sur transport de la chaleur, sujet de la §5.5 ci-dessous), et doivent donc être pris en considération.

Le calcul d'un écoulement fluide $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ se développant en réponse à l'action de forces comme la gravité, la pression, la force de Coriolis, etc., est un sujet fort complexe⁴. Dans le cadre de ce cours on considérera \mathbf{u} comme connu (calculé ou mesuré), et on se concentrera sur ses effets environnementaux, en particulier sur le transport de "contaminant" ou d'énergie thermique dans l'atmosphere, l'océan, les écoulements de surface et les sols.

Dans bien des cas nous introduirons de surcroit une hypothèse simplificatrice qui peut paraitre plus que douteuse dans le cas du gaz atmosphérique: l'incompressibilité. Contrairement à l'eau et autres liquides, l'air est définitivement un milieu compressible. Cependant, on peut montrer⁵ que pour des écoulements qui sont lents par rapport à la vitesse du son dans le milieu ambiant, la dynamique des écoulements compressibles s'approche de celle des écoulements incompressibles à un très bon niveau d'approximation. La mesure-clef est le **nombre de Mach** $M = |\mathbf{u}|/c_s \ll 1$, où c_s est la vitesse du son. Même dans un ouragan, les vents atteignent des vitesses de "seulement" quelques dizaines de m s⁻¹, ce qui est beaucoup plus petit que la vitesse du son dans l'air à TPN, soit $c_s = 340 \text{ m s}^{-1}$, d'où $M \leq 0.1$.

5.2.1 L'équation de transport

Considérons la situation très simple illustrée schématiquement sur la Figure 5.7: travaillant en coordonnées cartésiennes, on s'imagine un un volume fictif $V = \Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ fixé dans l'espace (rectangle noir) traversé par un fluide de densité ρ se déplace horizontalement vers la droite (flèches rouges). La masse traversant les deux surfaces d'aire $A = \Delta y \Delta z$ perpendiculaire à l'écoulement par unité de temps est donné par $\rho u A$; pour vous en convaincre (au besoin...), il suffit d'examiner les unités:

$$\rho u A \equiv \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right] \times \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] \times \left[\mathrm{m}^2\right] = \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\right] \,. \tag{5.53}$$

Durant un intervalle de temps Δt la variation de la masse contenue dans $V (= \rho V)$ sera donc donnée par la différence entre la masse de fluide entrant de la gauche et sortant par la droite durant le même intervalle de temps. Dénotant par $\Delta \rho$ la variation de la densité produite par ces flux de masse entrant et sortant de V, on a alors:

$$\Delta \rho \Delta x \Delta y \Delta z = \rho(x) u(x) \Delta t \Delta y \Delta z - \rho(x + \Delta x) u(x + \Delta x) \Delta t \Delta y \Delta z , \qquad (5.54)$$

expression que l'on peut réorganiser algébriquement sous la forme équivalente:

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t} = -\left(\frac{\rho(x+\Delta x)u(x+\Delta x) - \rho(x)u(x)}{\Delta x}\right) .$$
(5.55)

⁴Sujet par ailleurs traité en détail dans le cours PHY-3140 *Hydrodynamique*, donné par mononcle ici présent. ⁵C'est fait en PHY-3140 *Hydrodynamique* !



Figure 5.7: Transport de masse par un écoulement u en 1D.

Dans la limite infinitésimale $\Delta x, \Delta t \to 0$, ceci devient une équation différentielle aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} . \tag{5.56}$$

La généralisation en 3D est simple une fois qu'on réalise que pour un écoulement de forme plus complexe, ce n'est que la composante de l'écoulement perpendiculaire à a surface qui contribue au transport. L'argument ci-dessus s'applique alors indépendamment dans chaque direction définie par les axes du système de coordonnées, ce qui conduit à:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} - \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} - \frac{\partial \rho u_z}{\partial z}$$

$$= -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) .$$
(5.57)

On retrouve ici encore une version spécifique de notre loi de conservation générique (2.55), en l'absence de source ou puit et un flux $\mathbf{f} = \rho \mathbf{u}$. Physiquement, ceci exprime la conservation de la masse de fluide transportée par l'écoulement \mathbf{u} .

Notons que dans bien des situations d'intérêt environnemental, l'écoulement effectuant le transport est **incompressible** (comme l'eau), ou se déplace suffisamment lentement (par rapport à la vitesse du son dans le milieu) pour être se comporter comme un fluide incompressible à un très bon niveau d'approximation. On a alors ρ =constante, et l'éq. (5.57) se réduit alors à:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$
. [incompressible] (5.58)

Ceci indique que le débit Q (unités: $m^3 s^{-1}$) de fluide incompressible s'écoulant dans un conduit ou canal de section variable devra ajuster sa vitesse de manière à assurer un débit constant, conservation de la masse oblige: L'idée est illustrée sur la Figure 5.8. Ici la constance du débit impose:

$$u_x(x_1)S(x_1) = u_x(x_2)S(x_2) , \quad \to \quad u_x(x_2) = u_x(x_1)\frac{S(x_1)}{S(x_2)} \quad \forall x_1, x_2$$
 (5.59)

Pour un fluide compressible, en régime stationnaire $(\partial/\partial t = 0)$, la constance du débit imposerait plutôt:

$$\rho(x_1)u_x(x_1)S(x_1) = \rho(x_2)u_x(x_2)S(x_2)$$
(5.60)



Figure 5.8: Un "tube de flux". Un écoulement incompressible **u** voyage dans un conduit de section S(x) variant en x. La conservation de la masse impose que le débit Q, donné par le produit $S(x)u_x(x)$, demeure constant, le fluide doit ralentir (accélérer) quand le conduit s'élargit (rétrécit), de manière à préserver le débit Q.

Tous ces développements peuvent s'appliquer au transport d'une concentration (C(x,t)), \equiv densité) d'un contaminant dans un fluide en mouvement. Si le contaminant est présent en quantités traces, c.-à-d. sa concentration est très petite par rapport à la densité du fluide en mouvement, alors en l'absence de diffusion on n'a qu'à remplacer ρ par C dans l'équation (5.64) et (5.60).

En présence de diffusion cependant, notre loi de conservation doit maintenant inclure le flux diffusif (5.24) en plus du flux advectif, le flux total devenant alors:

$$\mathbf{q}_{\text{tot}} = \mathbf{q}_a + \mathbf{q}_D = \mathbf{u}C - D\nabla C \ . \tag{5.61}$$

Notre nouvelle loi de conservation pour la concentration C a maintenant la forme

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u}C - D\nabla C) . \qquad (5.62)$$

Dans le cas particulier d'un écoulement incompressible, on a:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}C) = \mathbf{u} \cdot \nabla C + C \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{u}}_{=0}$$
(5.63)

en vertu de (5.60). Pour un coefficient de diffusion constant (ou variant sur une échelle spatiale beaucoup plus grande que celle des variations de C), l'éq. (5.62) devient alors

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C = D \nabla^2 C \ . \tag{5.64}$$

C'est l'équation de transport, de grande importance en physique environnementale, comme le verra sous peu.

5.2.2 Le temps advectif et le nombre de Peclet

On peut de nouveau appliquer l'analyse dimensionnelle (voir §5.1.3) à notre équation de transport (5.64). Avec τ , L et u_0 comme temps, longueur, et vitesse caractéristiques, on a maintenant:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial C}{\partial \tau} & \rightarrow & \frac{C_0}{\tau} \ , \\ \mathbf{u} \cdot \nabla C & \rightarrow & \frac{u_0 C_0}{L} \ , \\ D \nabla^2 C & \rightarrow & \frac{D C_0}{L^2} \end{array}$$

et donc,

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C = C \nabla^2 C , \qquad \rightarrow \qquad \frac{C_0}{\tau} + \frac{u_0 C_0}{L} \sim \frac{C_0}{L^2}$$
(5.65)

Comme notre équation de transport est toujours linéaire en C,

$$\frac{1}{\tau} \sim \frac{u_0}{L} + \frac{D}{L^2} \,. \tag{5.66}$$

Le rapport du premier terme au membre de gauche sur le second nous produit une quantité adimensionnelle, appelé **Nombre de Peclet**:

$$Pe = \frac{u_0 L}{D} . (5.67)$$

Le nombre de Peclet mesure l'importance relative de l'écoulement versus la diffusion dans le transport du contaminant. Dans la limite $Pe \gg 1$, le terme diffusif peut être considéré comme négligeable, ce qui permet alors d'obtenir un estimé d'ordre de grandeur pour le **temps advectif**, soit le temps caractéristique mesurant le transport du contaminant par l'écoulement sur une distance $\sim L$:

$$\tau_a = \frac{L}{u_0} \ . \tag{5.68}$$

5.2.3 Solutions analytiques à l'équation de transport

Pour un écoulement **u** le moindrement réaliste, même stationnaire $(\partial/\partial t \equiv 0)$, la solution de l'équation de transport doit être effectuée numériquement. Quelques solutions analytiques sont cependant possibles, (et utiles!) dans le cas très simple d'un écoulement constant dans le temps et l'espace.

Source ponctuelle instantanée

On revient à la situation d'une source spatialement ponctuelle, et injectant instantanément à t = 0 une masse de contaminant Q dans un fluide se déplaçant à vitesse constante u dans la direction-x (disons). Commençons par passer à un repère se déplaçant avec le fluide, par les transformations (Galiléennes) habituelles:

$$x' = x - ut , \qquad (5.69)$$

$$y' = y , \qquad (5.70)$$

$$z' = z$$
. (5.71)

Dans ce repère, le fluide est au repos, et la solution purement diffusive obtenue à la $\S5.1.4$ est directement applicable. On peut ainsi écrire l'éq. (5.47) dans le repère prime (en coordonnées cartésiennes), et la transformer au repère non-prime selon les éqs. (5.69)–(5.71):

$$C(x, y, z, t) = \frac{Q}{(\sigma\sqrt{2\pi})^3} \exp\left(-\frac{(x-ut)^2 + y^2 + z^2}{2\sigma^2}\right) , \qquad (5.72)$$

avec n = 3 pour une situation 3D, et comme auparavant $\sigma = \sqrt{2Dt}$. Cette expression décrit un profil Gaussien s'élargissant en \sqrt{t} tout en en se déplaçant à vitesse uniforme dans la direction positive de l'axe-x.

La Figure 5.9 illustre deux solutions en version adimensionnelle, pour des valeurs différentes du nombre de Peclet, qui ici fixe le rapport u/D, et le temps exprimé en unités du temps de diffusion (5.28). Le Peclet devient ainsi une mesure de la vitesse de l'écoulement. On notera déjà qu'au haut Peclet, à une distance donnée en aval du point de d'injection du contaminant, un observateur mesurera une plus haute concentration, mais moins longtemps, qu'il/elle ne le ferait à bas Peclet; au niveau de la "sécurité publique", ce genre de considération est vital à la réponse à apporter en cas de déversement de polluant toxique dans l'air ou un cours d'eau. On considérera en détail un exemple spécifique plus loin (§5.2.6). Encore ici la solution asymptotique en est une de dilution complète, i.e., $C(x, t \to \infty) = 0$.



Figure 5.9: Transport et diffusion d'une masse de contaminant injectée instantanément à (x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0) en présence d'un écoulement constant $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x$, à des nombres de Peclet Pe = 10 et 1. Notez bien que les temps portés en graphique sont espacés linéairement sur le graphique du haut, mais logarithmiquement sur celui du bas.

Source ponctuelle continue

Tout comme on l'avait fait dans le cas de la diffusion pure (§5.1.4), une injection continue de contaminant en un point fixe peut se modéliser comme une convolution d'injections instantanées décalées l'une par rapport à l'autre dans le temps. Utilisant ainsi notre solution (5.72), la solution est alors donnée par l'intégrale

$$C(x, y, z, t) = \frac{q}{8(\pi D)^{3/2}} \int_0^t (t - t')^{-3/2} \exp\left(-\frac{(x - u(t - t'))^2 + y^2 + z^2}{4D(t - t')}\right) dt'$$
(5.73)

La même substitution de variable que dans le cas purement diffusif, $\beta = r/\sqrt{4D(t-t')}$, permet de simplifier l'intégrale, mais plus au point de produire une solution analytique, sauf dans la limite asymptotique $t \to \infty$, dans lequel cas:

$$\lim_{t \to \infty} C(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi Dr} \exp\left(-\frac{u(r-x)}{2D}\right) , \qquad (5.74)$$

avec $r^2=x^2+y^2+z^2$ comme d'habitude. Introduisons maintenant les variables a dimensionnelles suivantes:

$$x^* = \frac{u}{D}x , \qquad (5.75)$$

$$y^* = \frac{u}{D}y , \qquad (5.76)$$

$$z^* = \frac{u}{D}z , \qquad (5.77)$$

$$C^* = \frac{4\pi D^2}{q \, u} C \,. \tag{5.78}$$

Substituant ces expressions dans (5.74), on arrive à un résultat particulièrement simple:

$$\lim_{t \to \infty} C^*(x, y, z, t) = \frac{1}{r^*} \exp\left(-\frac{r^* - x^*}{2}\right) , \qquad (5.79)$$

avec r^* le pendant adimensionnel de notre r habituel. La Figure 5.10 illustre cette solution, ici dans le plan $[x^*, y^*]$, mais la solution est axisymétrique sur rotation par rapport à l'axex. Il faut apprécier l'avantage pratique de cette forme adimensionnelle: elle peut servir à



Figure 5.10: Distribution spatiale asymptotique $(t \to \infty)$ de la concentration d'un contaminant injecté de manière continue à (x, y, z) = (0, 0, 0), distances et concentrations étant exprimées ici en terme des variables adimensionnelles (5.75)–(5.78). Celle solution est axisymmétrique sous rotation autour de l'axe-x.

modéliser n'importe quelle type de dispersion d'un polluant émanant à taux q constant d'une source spatialement ponctuelle, quels que soient la vitesse du vent et le coefficient de diffusion; pour revenir dans le monde physique on n'a qu'à reconvertir les C^* , x^* , etc., en quantités dimensionnelles, via les éqs. (5.75)–(5.78).

5.2.4 La turbulence

La prochaine fois que l'occasion se présentera, observez l'écoulement de l'eau dans une rivière ou un fleuve ayant un débit substantiel; sous l'influence de la gravité, l'eau s'écoule clairement dans une direction spécifique, ultimement vers la mer; mais si on y regarde de près, à ce mouvement global à peu près constant se superpose toutes sortes de fluctuations produites par des tourbillons, obstacles, etc. Ces fluctuations se développent sur des échelles spatiales (et temporelles) typiquement beaucoup plus petite que l'écoulement global régulier, de l'amont vers l'aval.

Les fluctuations observées à la surface de votre cours d'eau sont une manifestation de la **turbulence** dans l'écoulement, cette turbulence résultant du développement d'une (ou plusieurs) **instabilités** du fluide. Souvent caractérisé comme le dernier grand problème non-résolu de la physique classique (i.e., non-quantique), les écoulements turbulents jouent un rôle majeur dans plusieurs contextes environnementaux. Le sujet est couvert en détail, devinez où... en PHY-3140. En PHY-2100 nous nous limiterons à une approche particulière à la modélisation de la turbulence et de ses effets, basé sur la **séparation d'échelles**; l'idée étant que si on n'est pas particulièrement intéressés à modéliser les détails de l'écoulement à l'échelle des petits tourbillons, on peut faire une moyenne sur une échelle beaucoup plus grande que ces tourbillons, et en extraire l'effet net sur l'écoulement aux grandes échelles, par exemple la quantité de contaminant transportée en aval.

Considérons un écoulement fortement turbulent, dans le sens qu'un très grand nombre de petits tourbillons sont perpétuellement en train de se former, de tourbillonner pendant un temps, puis de se dissiper, etc. Observé sur un temps comparable à la durée de vie typique (τ) de ces petits tourbillons, un petit élément de fluide balloté par cet ensemble de tourbillons semble décrire une forme de marche aléatoire, la distance parcourue (ℓ) lorsqu'entrainé par un tourbillon de vitesse caractéristique u_t devenant l'équivalent du pas de marche, et τ mesure la durée d'un pas marche. On a alors $\ell = u_t \times \tau$. On a vu qu'on pouvait construire un coefficient de diffusion à partir de ces quantités (revoir l'éq. (5.19) au besoin). Invoquant la même logique, on peut définir un **coefficient de diffusivité turbulente** (D_T) pour capturer l'effet des petites échelles sur les grandes:

$$D_T = u_t \times \ell , \qquad [\mathrm{m}^2 \mathrm{s}^{-1}] \tag{5.80}$$

Tout ceci pourrait paraitre un grave abus du processus analogique, mais en contexte environnemental il est souvent possible de *mesurer* u_t , ℓ et/ou τ , et de valider expérimentalement le D_T en résultant.

Par exemple, en océanographie il est (relativement) simple de mesurer à bonne cadence temporelle l'écoulement à une profondeur donnée sous la surface. À partir de longues séquences temporelles de telles mesures, il est alors possible de calculer un écoulement moyen $\langle \mathbf{u} \rangle$, et la déviation quadratique moyenne par rapport à cet écoulement moyen devient une mesure de u_t . Le temps de corrélation ces déviations par rapport à la moyenne offre ensuite une mesure de τ , qui permet ensuite d'estimer $\ell \sim u_t \tau$.

Dans les couches superficielles de l'océan, on détermine ainsi $D_T \sim 10^{-3} \,\mathrm{m^2 \, s^{-1}}$, soit $\sim 10^6$ fois plus grand que le coefficient de diffusion D "microscopique" associé à l'agitation thermique (voir Tableau 5.1). Dans la troposphère, le coefficient de diffusion turbulente est estimé à $\sim 10 \,\mathrm{m^2 \, s^{-1}}$, soit encore 10^6 fois plus que la diffusion microscopique. Ce sont ici des résultats tout-à-fait typiques: quand une turbulence bien développée est présente —et elle l'est souvent la **diffusion turbulente** dominera largement sur la diffusion microscopique, et donc contrôlera (entre autre) le taux auquel se dispersera un contaminant aux grandes échelles spatiales. On peut toujours estimer un temps caractéristique de mélange via l'éq. (5.28), mais avec D_T remplaçant D:

$$\tau_D = \frac{L^2}{D_T} \ . \tag{5.81}$$

La bonne nouvelle ici est que si on accepte cette "recette", toutes les solutions analytiques aux équation de diffusion et de transport considérées dans les sections précédentes sont encore valides, mais avec $D \to D_T$.

5.2.5 Un exemple inspirant de mélange turbulent

La troposphère terrestre est surprenamment bien mélangée, conséquence des vents horizontaux très rapides dans la haute atmosphère, et du mélange turbulent dans la verticale, associée à la convection thermique et diverses autres instabilités fluides qui sont ÉVIDEMMENT discutées en détail en PHY-3140. Un modeste vent soutenu de 10 m s^{-1} (36 km/h) fait le tour de la terre en 1 mois! Et dans la haute troposphère et basse stratosphère, le jet stream souffle presque continuellement dans la direction W-E à 3–10 fois cette vitesse (pas pour rien qu'on l'appelle "jet stream"!). Dans la direction N-S le mélange est moins efficace, en l'absence d'équivalent du jet stream; on estime néanmoins que le temps caractéristique d'échange gazeux interhémisphérique est de l'ordre de l'année.

Considérant tout ça, on peut estimer, par exemple sur la base des solutions de la Fig. 5.6, qu'une homogénéisation complète de l'ensemble de l'atmosphère demandera de l'ordre de quelques $\sim 10^2$ temps de diffusion turbulente. On parle donc de plusieurs siècles pour *complètement* mélanger le gaz atmosphérique sous l'influence combinée des vents et de la turbulence atmosphérique.

On a vu (§3.1 et Tableau 3.1) que l'Argon est le troisième constituant atmosphérique en masse, avec $\simeq 7 \times 10^{16}$ kg pour l'ensemble de l'atmosphère. Le poids moléculaire de l'Argon étant de $\simeq 40$ et l'unité de masse atomique $m = 1.66 \times 10^{-27}$ kg, on a donc un très astronomique grand total de

$$N = \frac{7 \times 10^{16}}{40m} \simeq 10^{42} \,\mathrm{Ar} \tag{5.82}$$

atomes d'Argon dans l'atmosphère. L'Argon est un gaz lourd qui tend à se concentrer naturellement dans la basse atmosphère, on considérera ici qu'il réside en totalité dans le premier h = 2.5 km de la troposphère. Le volume total correspondant est

$$V = 4\pi R_{\oplus}^2 h \simeq 10^{18} \,\mathrm{m}^3 \,\,, \tag{5.83}$$

où $R_{\oplus} = 6371 \text{ km}$ est le rayon de la Terre. On en conclut qu'un litre ($\equiv 10^{-3} \text{ m}^3$) d'air près du sol contient

$$n = \frac{10^{42}}{10^{18}} \times 10^{-3} \simeq 10^{21} \,\mathrm{Ar} \;. \tag{5.84}$$

Maintenant; à la naissance, un.e nouveau-né.e aspire environ 1 litre d'air à sa première respiration. Ce litre d'air contient donc $n = 10^{21}$ atomes d'Argon, et l'Argon étant chimiquement inerte, ces n atomes seront renvoyés dans l'atmosphère au premier souffle expiratoire subséquent de notre nouveau-né.e. Supposons que par un processus quelconque on puisse marquer ces atomes d'Argon (en leur collant un "*", par exemple). Durant les siècles qui suivront ces atomes marqués seront dispersés dans l'atmosphère par mélange turbulent, y devenant éventuellement distribués de manière géographiquement uniforme. On aura donc, au bout de tout ce temps, et toujours dans la basse atmosphère ($0 \le z \le 2.5$ km):

$$n^* = \frac{10^{21}}{10^{18}} \operatorname{Ar}^* \mathrm{m}^{-3} \sim 1 \operatorname{Ar}^* \mathrm{litre}^{-1}$$
(5.85)

La suite exige d'utiliser votre imagination. Choisissez votre personnage historique préférée: Cléopâtre, Astérix, Attila le Hun, le p'tit Jésus, qui vous voulez... La seule contrainte, si on veut jouer prudent, est que le personnage en question soit né il y a plus d'un millénaire, histoire de laisser suffisamment de temps à la diffusion turbulente atmosphérique pour bien mélanger de manière homogène (fans de Jack Sparrow, Napoléon ou Galilée, je suis vraiment désolé...).

Au vu du petit calcul qui précède, on doit conclure qu'à votre première respiration comme nouveau-né.e, vous avez inspiré en toute probabilité un atome d'Ar^{*} qu'avait inspiré votre personnage historique préféré à sa propre naissance, il y a maintenant plus d'un millénaire. C'est ça, le mélange turbulent !

5.2.6 Exemple: déversement d'un contaminant

Comme si 47 morts et la destruction du petit centre-ville de Lac Mégantic n'était pas déjà assez, la catastrophe ferroviaire du 6 juillet 2013 a eu un impact environnemental important sur la rivière Chaudière, suite au déversement de $\sim 10^5$ litres de pétrole s'écoulant dans la rivière des wagons endommagés ou détruits. Quantifier ce genre d'impact est un "problème" courant en physique environnementale. On en rencontrera d'ailleurs une version atmosphérique plus tard dans le cours.

On s'intéressera donc ici au déversement instantané d'une masse M de contaminant dans une rivière profondeur et largeur potentiellement variables. Le problème consiste à calculer l'évolution temporelle de la concentration de contaminant en aval du déversement.

On commence par se définir un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) où \mathbf{e}_x pointe dans la direction de l'écoulement, \mathbf{e}_z perpendiculairement vers le fond, et \mathbf{e}_y perpendiculairement vers la berge⁶. Introduisons les variables et contraintes suivantes:

⁶Cette représentation localement Cartésienne demeure une excellente approximation dans le cas d'une rivière sinueuse, tant que l'échelle de variation de la sinusoité demeure beaucoup plus grande que la largeur ou la profondeur de la rivière.

- largeur (direction y) de la rivière: w(x, z);
- profondeur (direction z) de la rivière: h(x, z);
- vitesse de l'écoulement: $\mathbf{u}(x, y, z)$, avec $\mathbf{u} = 0$; aux fond (en z) et bords (en y) de la rivière;
- $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ puisque l'eau est un fluide incompressible.

Cette dernière condition permet de poser une contrainte sur la composante-x de **u**: à quelque position x que ce soit, le **débit** d'eau $(Q, \text{ en m}^3 \text{ s}^{-1})$ doit être le même à travers toute section x = constante de la rivière, conservation de la masse oblige:

$$Q = \int_0^{h(x,y)} \int_0^{w(x,z)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \ . \tag{5.86}$$

L'évaluation de cette intégrale exige de connaitre, en plus de $\mathbf{u}(x, y, z)$, la forme de la rivière, i.e., h(x, y) et w(x, z). On peut cependant définir une vitesse moyenne $\langle u_x \rangle(x)$ et (en anticipation de la suite) une concentration linéaire moyenne:

$$\langle u_x \rangle(x) = \frac{1}{S(x)} \int_0^{h(x,y)} \int_0^{w(x,z)} u_x(x,y,z) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \,, \qquad [\mathrm{m \ s}^{-1}]$$
(5.87)

$$\langle C \rangle(x) = \frac{1}{S(x)} \int_0^{h(x,y)} \int_0^{w(x,z)} C(x,y,z) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z , \qquad [\mathrm{kg \ m^{-3}}]$$
(5.88)

où S(x) est la section (unités: m²) de la rivière à la position x. On peut ainsi exprimer $\langle u_x \rangle$ directement en terme du débit:

$$\langle u_x \rangle(x) = \frac{Q}{S(x)} . \tag{5.89}$$

Autrement dit, connaissant (pour l'avoir mesuré) le débit Q quelque part, et si on peut mesurer la section de la rivière en fonction de x, alors on peut directement calculer la vitesse moyenne $\langle u_x \rangle(x)$, ce qui nous sera fort utile dans ce qui suit! Revoir la Figure 5.8 si ceci vous semble nébuleux comme idée.

Nous disposons d'une solution analytique pour la dispersion en 3D d'une d'une source instantané et spatialement ponctuelle de la concentration d'un contaminant quelconque en présence d'un écoulement constant, soit l'éq. (5.72) de la §5.2.3. Pour une rivière approximativement rectiligne, on peut imaginer que cette solution tiendra bien la route si on approxime $\mathbf{u} \to \langle u_x \rangle \mathbf{e}_x$, tant que la contaminant n'atteint pas le fond ou les bords de la rivière. Ces frontières bloqueront l'étalement en y et z du contaminant, bien que le transport et l'étalement diffusif de la concentration se poursuive dans la direction-x. On peut imaginer qu'on en arrivera éventuellement à une situation, quelque part en aval, où la concentration ne dépendra plus que de la coordonnée x, le mélange diffusif ayant homogénéisé latéralement et verticalement la concentration dans chaque section S(x) de la rivière.

Sauf dans des gorges ou canyons très encaissés, les rivières sont habituellement plus larges que profondes. Utilisons comme valeurs représentatives $h \sim 10 \text{ m et } w \sim 30 \text{ m}$, pour une rivière s'écoulant à $\sim 1 \text{ m s}^{-1}$ sur $L \sim 100 \text{ km}$. Combien de temps est nécessaire pour compléter cette homogénéisation ? En supposant des tourbillons turbulents de vitesse et taille caractéristiques $u_t \sim 0.3 \text{ m s}^{-1}$ et $\ell = 1 \text{ m}$, on a $D_T = 0.3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, ce qui conduit à des temps de diffusion turbulente $h^2/D_T = 5$ minutes dans la verticale, et $w^2/D_T = 50$ minutes sur la largeur de la rivière. En 50 minutes, à 1 m s⁻¹, l'écoulement aura transporté le fluide sur une distance de 3 kilomètres. On en conclut que 3 km en aval du point d'injection, la concentration ne dépend plus que de x, et sa dispersion redevient un problème 1D, décrit par l'équation de transport 1D avec $C \equiv S(x) \langle C \rangle (x, t)$:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \langle u_x \rangle \frac{\partial C}{\partial x} = D_T \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} , \qquad (5.90)$$

avec C étant ici devenu une densité linéaire, se mesurant donc en unités de kg m⁻¹. Une version 1D (n = 1) de la solution analytique obtenue à la §5.2.3 est ainsi applicable directement si $\langle u_x \rangle$ est constant:

$$\langle C \rangle(x) = \frac{M}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\langle u_x \rangle t)^2}{2\sigma^2}\right) ,$$
 (5.91)

avec $\sigma = \sqrt{2D_T t}$. La Figure 5.11 illustre quelques séquences temporelles de la concentration Cà des positions x en aval du point d'injection, obtenues via (5.91). On remarquera l'asymétrie des pics temporels, la montée de la concentration étant plus rapide que sa descente subséquente. Ceci est dû au fait qu'en aval de la masse de contaminant transporté, les flux advectif et diffusif agissent tous les deux dans la direction positive des x, tandis qu'en amont le flux diffusif est orienté dans la direction négative de l'axe-x.



Figure 5.11: Séquence temporelle de la concentration de contaminant à une position x de la source à (x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0). Il s'agit ici effectivement d'une version 1D de la même solution mathématique à Pe= 10 que sur la Figure 5.9.

Si $\langle u_x \rangle$ varie en x parce que la section S(x) n'est pas constante, la solution ci-dessus n'est plus valide. Cependant la définition du débit nous permet d'écrire $\langle u_x \rangle = Q/S(x)$, et de réexprimer l'éq. (5.91) sous la forme:

$$\frac{C\langle u_x \rangle}{Q} = \frac{M/Q}{\sqrt{4\pi D_T t/\langle u_x \rangle^2}} \exp\left(-\frac{(t-x/\langle u_x \rangle t)^2}{4D_T t/\langle u_x \rangle^2}\right) .$$
(5.92)

Le membre de gauche est la densité massique (kg m^{-3}) de contaminant à la position x au temps t; c'est la quantité requise pour déterminer si la baignade est permise ou pas, si l'eau doit être déclarée non-potable ou pas, et si il faut anticiper devoir (ou pas) ramasser des poissons morts loin en aval.

5.2.7 Viscosité et couches limites

Notre modélisation de la dispersion d'un contaminant dans une rivière s'est rapidement débarrassé de la dépendance en y et z de u_x en intégrant sur la section de la rivière. Mais pourquoi s'attendrait-on à une telle dépendance ? Dans n'importe quel écoulement confiné, l'interaction (friction) du fluide avec les parois tendra à ralentir le fluide, ce qui créera des gradients de vitesse dans l'écoulement. La **viscosité** du fluide tendra à amortir ces gradients de vitesse affectant donc potentiellement tout l'écoulement.

La description mathématique de la force visqueuse est en général est plutôt complexe, mais l'idée est facile à saisir dans le cas d'un écoulement plan **cisaillé**:

$$\mathbf{u} = u_x(z)\mathbf{e}_x , \qquad u_x(z) = u_0\left(\frac{z}{L}\right) .$$
(5.93)

On peut visualiser mentalement un tel écoulement comme une empilade de minces lamelles horizontales de fluide se déplaçant horizontalement à une vitesse constante en x mais augmentant linéairement avec leur position en z dans la pile. Ce genre d'écoulement est appellé **laminaire**, par opposition aux écoulements turbulents. Le diagramme de gauche sur la Figure 5.12 illustre le concept.



Figure 5.12: Origine microscopique et conséquences de la la viscosité dans un écoulement plan cisaillé.

Descendons maintenant à l'échelle microscopique et examinons ce qui se passe à l'interface entre deux lamelles (cercles bleus). Les "particules" composant le fluide ont une vitesse qui peut être décomposée en deux contributions:

- une composante thermique orientée aléatoirement, et
- une composante non-thermique pointant ici systématiquement dans la direction positive de l'axe-x.

Typiquement la composante thermique est \gg la composante systématique, ce qui n'est pas le cas sur le diagramme de droite de la Fig. 5.12 mais bon c'est pour des raisons pédagogiques...

Considérons maintenant ce qui se produit quand les perpétuelles collisions interparticules dues à leur mouvement thermique font passer une particule de la lamelle du haut vers celle du bas; cette particule a un excès de quantité de mouvement en x (p_x) par rapport à ses nouveaux voisins, et cet excès sera subséquemment redistribué collisionnellement aux particules de la lamelle inférieure. Similairement, une particule passant de la lamelle du bas à celle du dessus se retrouve avec un déficit de p_x , qui sera graduellement compensé par collisions, mais au dépend du p_x des particules de la lamelle du haut. Dans les deux cas, on transfère du p_x de la lamelle du haut vers celle du bas, à un taux constant déterminé par la densité des particules, leur vitsse thermique, leur libre parcours moyen, etc. À l'échelle macroscopique ceci correspond au **stress visqueux**, soit une force par unité de surface agissant *tangentiellement* à la surface de contact entre les deux lamelles de fluide. Dans la situation de la Figure 5.12 on écrirait ce stress comme:

$$\mathbf{s}_x = -\rho\nu A \frac{\partial u_x}{\partial z} \mathbf{e}_x , \qquad [\mathrm{N} \ \mathrm{m}^{-2}] , \qquad (5.94)$$

où ν est le coefficient de **viscosité cinématique** (unités: m²s⁻¹). Pour l'eau, on a $\nu \simeq 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, tandis que pour l'air à TPN $\nu \simeq 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Ce n'est *pas* un accident numérique que ces valeurs ressemblent fort à celles des valeurs nominales caractérisant nos coefficients de diffusion dans l'air et l'eau (Tableau 5.1); dans les deux cas, c'est le mouvement thermique des constituants microscopiques qui ultimement fait tout le travail.

Pour avoir une force nette en Newton, on n'a qu'à multiplier cette expression par la surface de contact A entre deux lamelles contigues:

$$\mathbf{F}_{\nu} = \mathbf{s}_x A \ . \tag{5.95}$$

L'importance de la force visqueuse par rapport à l'inertie du fluide se mesure par une quantité adimensionnelle appelée **Nombre de Reynolds** qui, en analogie à notre nombre de Peclet, s'obtient par analyse dimensionnelle de l'équation de Navier-Stokes gouvernant la dynamique des fluide; ce qui dépasse le cadre de ce cours⁷, mais le résultat de la manoeuvre est:

$$\operatorname{Re} = \frac{u_0 L}{\nu} \ . \tag{5.96}$$

Pour notre rivière de la §5.2.6, on avait $u_0 = 1 \text{ m s}^{-1}$ et h = 30 m, ce qui conduit à un gigantesque Re = 3×10^7 , suggérant que la viscosité puisse être négligée. Ceci s'avère être le cas pour le gros du fluide, mais pas près du fond ou des bords de la rivière. Aux bords d'un écoulement confiné par des parois (rigide ou à peu près), la viscosité interdit tout mouvement du fluide par rapport aux parois, et donc y doit y avoir $\mathbf{u} = 0$.

Quand le Re $\gg 1$, comme pour notre rivière, la transition de la vitesse globale u_0 du fluide vers zéro aux paroi s'effectue â travers une très mince **couche limite** adjacente aux parois. La Figure 5.13 illustre l'idée, ici pour un fluide s'écoulant "librement" le long d'une surface plane. Dans le cadre de la théorie dite de Prandtl-Blasius⁸, on peut montrer que l'épaisseur Δ de cette



Figure 5.13: Développement d'une couche limite visqueuse lorsqu'un fluide s'écoule le long d'une surface plane et ralentit en raison de son frottement (la viscosité) contre la surface. L'épaisseur $\Delta(x)$ de la couche à l'intérieur de la quelle le fluide ralentit augmente en \sqrt{x} de l'amont vers l'aval (voir texte).

couche de ralentissement fluide croit à mesure que l'on se déplace de l'amont vers l'aval, selon la relation:

$$\Delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{u_0}} . \tag{5.97}$$

⁷Mais pas celui de PHY-3140 !

⁸théorie qui est évidemment développée en détail en PHY-3140 "Hydrodynamique"...

Si on considère une situation où la couche limite se développe sur une étendue L dans la direction x, alors il est facile de calculer

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{L} \int_0^L \sqrt{\frac{\nu x}{u_0}} dx$$
$$= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\nu L}{u_0}} .$$
(5.98)

Le profil de $u_x(z)$ ne peut cependant pas être exprimé analytiquement, mais doit être obtenu numériquement. Notons qu'en présence d'une force extérieure agissant horizontalement sur le fluide, comme un gradient de pression, la couche limite se stabilise à une épaisseur constate, toujours $\propto \sqrt{\nu/u_0}$, une fois que le stress visqueux équilibre la force extérieure.

Dans la limite opposée Re $\ll 1$, l'effet de la viscosité se fait sentir à travers tout le fluide, ce qui conduit à des profils d'écoulement très différents du cas Re $\gg 1$. Ce serait le cas, par exemple, pour l'écoulement du sang dans les capillaires ($u_0 \simeq 0.5 \text{ mm s}^{-1}$, $\nu \simeq 4 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, diamètre $d \simeq 10 \mu \text{m}$, conduisant à Re $\simeq 10^{-4}$. La Figure 5.14 illustre schématiquement le profil d'écoulement dans un conduit rectiligne à bas et haut Re.



Figure 5.14: Représentation schématique du profil d'écoulement dans un conduit rectiligne, à bas (gauche) et haut (à droite) Nombre de Reynolds. Le profil parabolique à gauche est typique des écoulements à bas Re. Dans ce second cas, la transition vers $\mathbf{u} = 0$ près des parois se fait à travers une très mince couche limite leur étant adjacente, l'écoulement demeurant à vitesse constante partout ailleurs.

Notons finalement que si la turbulence est présente, on peut construire un coefficient de **viscosité turbulente** de la même manière que pour la diffusivité turbulente (5.80), et c'est la grandeur de cette viscosité turbulente qui contrôlera l'épaisseur des couches limites.

5.3 La sédimentation

Un écoulement ne fait que déplacer les gradients sur le temps advectif (5.68), tandis que la diffusion tend à aplanir les gradients dans la concentration de la quantité diffusante, sur un temps caractéristique donné par le temps de diffusion (5.28). Cependant d'autres processus physiques peuvent au contraire créer et amplifier des gradients à partir d'une distribution homogène. Un tel mécanisme, de grande importance en physique environnementale, est la

sédimentation, soit le tri gravitationnel de "particules" en suspension dans un fluide (air, eau, etc.) mais plus denses que le milieu ambiant. Comme on le déduira sous peu, la taille des particules en suspension est un paramètre déterminant dans le calcul de l'efficacité du processus de sédimentation.

Le tableau 5.2 liste (en ordre alphabétique) les intervalles de tailles typiques, mesurés en microns $(1\mu m \equiv 10^{-6} \text{ m})$ pour diverses particules fines d'intérêt en contexte environnemental. Histoire de bien borner les ordres de grandeur ici, les extrêmes sont la molécule de O₂ (5 × $10^{-5} \mu m \equiv 0.5 \text{nm}$), et les plus grosses cendres volcaniques, celles-ci dépassant le millimètre.

Particule	$d \ [\mu m]$		
Amiante	0.7 - 90		
Bactérie	0.3 - 60		
Béton (poussière)	3 - 100		
Bois (combustion)	0.2 - 3		
Bran de scie	30 - 600		
Brume (gouttellettes)	70 - 350		
Charbon (poussière)	1 - 100		
Café (moulu)	5 - 400		
Calcaire (poussière)	5 - 400		
Cendres volcaniques	100 - 2000		
Farine	10 - 300		
Insecticides (poudre)	0.5 - 10		
Limon	4 - 40		
Moisissure	3 - 12		
Moisissure (spores)	10 - 30		
Oxygène (molécule)	0.0005		
Pesticide/herbicide (vaporisé)	0.001		
Poivre de Cayenne	15 - 1000		
Pollen	10 - 1000		
Poussière (domestique)	0.05 - 100		
Poussière (atmosphére)	0.001 - 30		
Poussière (volcanique)	1 - 100		
Retombées radioactives	0.1 - 10		
Sable très fin	60 - 100		
Sable de plage	100 - 1000		
Spores (plantes)	3 - 100		
Tabac (combustion)	0.01 - 4		
Talc	0.5 - 50		
Virus	0.005 - 0.3		

Table 5.2: Taille typique (L) de diverses "micro-particules"

Source: engineeringtoolbox.com

La présence de particules fines dans l'air peut avoir des conséquences majeures sur le biota animal, car ces particules peuvent s'introduire dans les voies respiratoires. Pour un humain respirant normalement, les particules de tailles $\gtrsim 100\mu$ m sont filtrées et/ou capturées au niveau du nez et de la gorge, celles de taille $\lesssim 10\mu$ m, atteignent les poumons, et celles de taille $\lesssim 5\mu$, atteignent les alvéoles, où elles peuvent se fixer. De plus, à l'autre bout du spectre des échelles spatiales d'intérêt en physique environnementale, la présence de particules fines dans l'atmosphère ou l'océan peut avoir un impact majeur sur l'absorption et réflexion de la radiation électromagnétique, ou encore agir comme sites de nucléation pour la condensation de la vapeur d'eau.

Il sera donc intéressant de pouvoir calculer le mouvement de telles particules sous l'action de la gravité, des vents, courants océaniques, etc. La dynamique n'est rien de plus compliqué que $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, la complication (substantielle) venant du fait que pour des particules de petite taille (e.g., dans l'air, diamètre < 1 mm), la **viscosité** est une force devant être prise en considération.

5.3.1 La solution de Stokes

On considère ici une situation à prime abord très simple, soit l'écoulement d'un fluide incompressible (densité constante) arrivant à vitesse constante u_0 à grande distance et s'écoulant autour d'une sphère de rayon R, en régime stationnaire (i.e., $\partial/\partial t \equiv 0$). Même dans cette situation apparamment simple, la solution mathématique des équations hydrodynamiques n'est vraiment pas de la tarte⁹. Mais ici une solution analytique est en fait possible. Travaillant en coordonnées sphériques polaires (r, θ, ϕ) avec $\theta = 0$ aligné avec l'écoulement à grande distance en amont/aval et l'origine (r = 0) au centre de la sphère, la **solution de Stokes** pour l'écoulement prend la forme:

$$u_r(r,\theta) = u_0 \cos\theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) , \qquad (5.99)$$

$$u_{\theta}(r,\theta) = -u_0 \sin \theta \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) , \qquad (5.100)$$

$$u_{\phi} = 0 \tag{5.101}$$

$$p(r,\theta) = -\frac{3}{2}\mu R u_0 \frac{\cos\theta}{r^2} .$$
 (5.102)

Cette solution est illustrée à la Figure 5.15 sous la forme de vecteurs-vitesse, en rouge, ainsi que la différence de pression par rapport à l'amont lointain (loin en bas), sous forme d'isocontours. On remarque que la vitesse de l'écoulement chute à zéro à la surface de la sphère, conséquence de la friction associée à la viscosité du fluide, et qu'une surpression (dépression) est présente sur la partie de la sphère faisant face (opposée) à l'écoulement.

La solution de Stokes permet de calculer la force qu'exerce l'écoulement fluide sur la sphère, soit la **force de trainée** (F_D) , orientée par définition dans la direction de l'écoulement incident. Cette force peut être décomposée en deux contributions: (1) la pression, agissant perpendiculairement à la surface de la sphère, et (2) la force visqueuse, agissant tangentiellement à la surface de la sphère, et proportionnelle aux gradients de vitesse de l'écoulement à r = R. On doit calculer ces deux contributions en tout point à la surface de la sphère, en calculer les projections dans la direction z (verticale sur la Fig. 5.15)), et intégrer tout ça sur la surface r = R. Ce calcul, à partir des éqs. (5.99)–(5.99), nous plongerait un peu trop profondément en hydrodynamique, donc on s'en tiendra ici simplement au résultat final ¹⁰:

$$F_D = 6\pi \rho_f \nu R u_0 , \qquad [N] .$$
 (5.103)

où ρ_f est la densité du fluide et ν sa **viscosité cinématique** [unités: m² s⁻¹]. C'est la **Loi de Stokes**. Pour l'air à TPN, $\nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, tandis que pour l'eau (pure) à 20°C, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Il peut sembler contraire à l'expérience usuelle que l'air ait une viscosité cinématique plus grande que l'eau par près d'un facteur 10, mais dynamiquement c'est le produit $\rho_f \times \nu$ qui importe.

 $^{^{9}}$ Ceux/celles qui choisiront de s'inscrire en PHY-3140 Hydrodynamique auront l'occasion de le constater! 10 Avis aux intéressé.e.s, ce calcul est aussi fait en détail en PHY-3140 Hydrodynamique.



Figure 5.15: Solution de Stokes pour l'écoulement d'un fluide visqueux autour d'une sphère, telle que décrite par les éqs. (5.99) et (5.102), avec l'origine du système de coordonnées au centre de la sphère et $\theta = 0$ pointant verticalement vers le haut. La solution est tracée dans un plan parallèle à l'écoulement et bissectant la sphère. Le vecteurs-vitesses de l'écoulement sont tracés en rouges. Les isocontours représentent la différence de la pression par rapport à celle loin en amont (bleu \rightarrow jaune \equiv négatif \rightarrow positif). À gauche, l'écoulement vu d'un repère où la sphère est au repos; à droite, le même écoulement, vu d'un repère se déplaçant vers le haut à vitesse u_0 , i.e., un repère où le fluide loin et amont et en aval est au repos (voir texte).

5.3.2 La vitesse de sédimentation

La solution de Stokes de la Fig. 5.15A, telle que décrite par les éqs. (5.99)–(5.102), ainsi que la force de trainée F_D y étant associée, demeurent inchangées dans le cas d'une sphère qui se déplace vers le bas à vitesse u_0 dans un fluide au repos, comme sur la Figure 5.15B; la Figure 5.15A est alors ce qui est "vu" dans un repère se déplaçant vers le bas à la même vitesse u_0 que la sphère (Vive la relativité Galiléenne !).

On peut ainsi utiliser la Loi de Stokes pour calculer la vitesse terminale d'une particule sphérique chutant dans le champ gravitationnel de la Terre; cette vitesse terminale est atteinte lorsque la sphère atteint une vitesse de chute telle que la force visqueuse équilibre la force gravitationnelle nette agissant sur la sphère:

$$F_g = -(\rho - \rho_f)g \frac{4\pi R^3}{3} g \mathbf{e}_z \ . \tag{5.104}$$

Par "force gravitationnelle nette" on entend ici la force gravitationnelle habituelle agissant sur le volume V de la sphère ($\rho_S g V$), de laquelle est soustraite la force de flottaison ($\rho_f g V$), cette force étant donnée par le poids du volume de fluide ambiant déplacé, comme nous l'a enseigné le Sieur Archimède il y a très longtemps déjà. La sphère coule à une vitesse constante si cette force est égale en grandeur à la force de trainée (5.103):

$$6\pi\rho_f \nu R u_0 = (\rho_S - \rho_f) g \frac{4\pi R^3}{3} , \qquad (5.105)$$

d'où on obtient directement la vitesse terminale de chute:

$$u_0 = \frac{2gR^2}{9\nu} \left(\frac{\rho_S}{\rho_f} - 1\right) \ . \tag{5.106}$$

C'est la vitesse de sédimentation. Considérons maintenant la chute d'une gouttellette d'eau vers le sol dans l'atmosphère à TPN, en supposant que la gouttelette d'eau demeuse en tout temps sphérique. Il s'agit simplement d'écrire la composante-z de $\mathbf{F}=\mathbf{ma}$, avec les forces de gravité et de trainée contribuant à \mathbf{F} . Je vous laisse vérifier que ceci conduit à

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{9\nu}{2R^2} \left(\frac{\rho_f}{\rho_S}\right) \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_S}\right) g , \qquad (5.107)$$

où z mesure ici l'altitude de la gouttellette. C'est une petite équation différentielle ordinaire que vous êtes tout-à-fait capables de solutionner analytiquement.

La Figure 5.16 porte en graphique la trajectoire z(t) pour trois gouttelettes d'eau ($\rho_S = 10^3 \text{ kg m}^{-1}$ de diamètres D = 40, 80 et 200 microns (μ m), avec comme condition initiale vitesse nulle à z = 1 m. Plutôt que les trajectoires paraboliques auxquelles on s'attendrait si seulement la gravité jouait, ici on observe des pentes constantes, égales à la vitesse de sédimentation pour chaque diamètre considéré. Ce n'est qu'au tout début de la chute (encart dans le coin supérieur droit) qu'on reconnait ladite forme parabolique. Dans la trois cas, la vitesse de sédimentation est atteinte très rapidement, et demeure constante durant la plus grande partie de la chute.

La solution de Stokes repose sur un certain nombre d'hypothèse simplificatrices, la plus importante étant que la force visqueuse domine sur l'inertie du fluide, tel que mesuré par notre Nombre de Reynolds défini précédemment (voir l'éq. (5.96)), ici avec le rayon R de notre sphère comme échelle spatial caractéristique:

$$\operatorname{Re} = \frac{u_0 R}{\nu} \,. \tag{5.108}$$

La solution de Stokes n'est donc valide que pour des Re "petits". La force de trainée (5.103) peut se reécrire en terme du nombre de Reynolds: Les mesures expérimentales (voir Figure 5.17) indiquent que la force de trainée (5.103) s'accorde vraiment très bien aux mesures expérimentales pour Re ≤ 0.1 , y colle encore à mieux de $\simeq 1\%$ à Re = 1, et demeure à l'intérieur d'un facteur 2 jusqu'à Re $\simeq 10$; à plus haut Re, la force de trainée devient substantiellement inférieure à ce que prédit la Loi de Stokes, devenant même approximativement indépendante de u_0 (ou Re) dans l'intervalle 600 \leq Re ≤ 3000 , résultat du développment de la turbulence dans la trainée de l'écoulemement. L'équation (5.106) permet alors de traduire la contrainte Re ≤ 10 en une contrainte sur le diamètre maximal (D_{max}) sous lequel la solution de Stokes demeure valide:

$$D_{\max}^{3} = \frac{36\nu^{2}}{g} \left(\frac{\rho_{S}}{\rho_{f}} - 1\right)^{-1} , \qquad [\text{Re} = 10].$$
 (5.109)

Pour une gouttellette d'eau chutant dans l'air, on trouve $D_{\text{max}} \simeq 100 \,\mu\text{m}$.

5.3.3 Exemple: la règle du 2 mètres

Les années Covid-19 nous ont tous familiarisé (à l'écoeurement...) avec cette fameuse règle de distanciation sociale dite "du deux mètres". Pour un individu infecté, autant la respiration que la parole projettent dans l'air ambiant des microgouttelettes contenant potentiellement une charge virale. Ces gouttelettes ont des diamètres allant d'une dizaine jusqu'à quelques centaines de μm . À ces tailles la force de trainée associée à la viscosité joue un rôle important dans leur chute vers le sol, qui comme on vient de le voir peut différer substantiellement de la chute libre, mais peut être calculée à l'aide de notre solution de Stokes.

L'idée est la suivante: on considère une gouttelette éjectée horizontalement de la bouche d'un individu à une vitesse $u_0 = 5 \text{ m s}^{-1}$, vitesse qui peut sembler élevée mais qui a été mesurée comme telle lors de l'expression sonore de phonèmes débutant par une consonne dite "plosive", comme b..., k..., et p... (voir le fascinant petit article par Abkarian *et al.*, cité en fin de chapitre, pour plus de détails sur ce genre de considérations phonétiques). On supposera que l'orifice buccal en question est situé à une hauteur de 1.75m du sol. On cherche à déterminer si une



Figure 5.16: Chute de gouttelettes d'eau de diamètres 40, 80 et $200 \,\mu\text{m}$ d'une hauteur d'un mètre dans l'air à TPN. L'encart en haut à droite reproduit le premier 10^{-1} s des trajectoires de chute. La vitesse de sédimentation est atteinte très rapidement dans les trois cas.



Figure 5.17: Variation mesurée de la force de trainée exercée par un fluide visqueux s'écoulant autour d'une sphère. Le trait pointillé correspond à la variation prédite par la Loi de Stokes. Le coefficient de trainée est défini comme $C_D = 2F_D/\rho u_0^2 \pi R^2 \equiv 24/\text{Re}$ pour L = 2R dans l'éq. (5.108).

gouttellette ainsi projetée pourrait atteindre le torse (hauteur $\geq 1 \text{ m}$) d'un second individu situé à une distance d du premier.

L'équation du mouvement pour la gouttellette n'est encore une fois rien de plus compliqué que notre bon vieux $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. En plus d'une dimension spatiale la force de trainée par une sphère se déplaçant à vitesse \mathbf{u} dans l'air au repos se généralise simplement à

$$\mathbf{F}_D = -6\pi\rho_f \nu R \mathbf{u} , \qquad (5.110)$$

où pour l'air $\rho_f = 1.2 \text{ kg m}^{-3}$, et $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Les composantes x et z de l'équation du mouvement sont donc séparables; celle en z (verticale) demeure inchangée, et est donnée par l'éq. (5.107) déjà solutionnée pour produire la Fig. 5.17; la composante x (horizontale) est encore plus simple:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{9\nu}{2R^2} \left(\frac{\rho_f}{\rho_S}\right) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} , \qquad (5.111)$$

sa solution étant une décroissane exponentielle de la composante x de la vitesse:

$$u_x(t) = u_0 \exp\left(-\frac{9\nu}{2R^2}\frac{\rho_f}{\rho_S}t\right)$$
(5.112)

et en intégrant une seconde fois:

$$x(t) = x^* \left[1 - \exp\left(-\frac{9\nu}{2R^2}\frac{\rho_f}{\rho_S}t\right) \right]$$
(5.113)

avec x(t = 0) = 0 et u_0 la vitesse initiale en x. La quantité $x^* = 2R^2 u_0 \rho_S / 9\nu \rho_f$ est portée horizontale de la goutte.

Ls Figure 5.18 montre les trajectoires de trois gouttelettes, de diamètres 40, 80 et $200\mu m$, expulsées horizontalement à $u_0 = 5 \text{ m s}^{-1}$ de la bouche d'un individu infecté disant "papapipi-kaka" à un second individu lui faisant face. Le mouvement horizontal de la plus petite gouttellette (en rouge) est rapidement freiné, celle-ci parcourant moins de 10cm horizontalement. Par contre la plus grosse (en bleu) franchit 1 mètre horizontalement avant d'avoir chuté à la hauteur "sécuritaire" de 1 mètre; d'où cette fameuse règle du deux mètres pour la distanciation sociale.

Au printemps 2020, des résultats d'une étude très médiatisée (dont le pdf de la prépublication, Blocken *et al.*, est accessible sur la page web du cours) ont suggéré que la distance sécuritaire lors d'une activité comme la course à pied est en fait beaucoup plus grande que deux mètres. Il s'agit maintenant de reprendre le calcul ci-dessus, cette fois en ajoutant un "vent" soufflant horizontalement à vitesse u_v dans la direction négative des x, ce qui par changement (Galiléen) de repère est équivalent à avoir l'orifice buccal du coureur se déplaçant vers la direction positive en x à vitesse u_v . On supposera un eathlète bien entrainé.e, trottant à $u_v = 4 \text{ m s}^{-1}$ (5 minutes au kilomètre, un bon rythme marathon). Des mesures ont démontré qu'en course de fond, l'exhalation de l'air atteint une vitesse de 2.5 m s^{-1} à la sortie de la bouche (oui, deux fois plus lentement que quand on dit "papa pipi kaka", par exemple...). L'équation (5.110) devient maintenant:

$$\mathbf{F}_D = -6\pi\rho_f \nu R(\mathbf{u} - u_v \mathbf{e}_x) \ . \tag{5.114}$$

Ceci ne change pas la composante-z de l'équation du mouvement, mais celle en x décrit maintenant une décroissance exponentielle de la composante-x de la vitesse, de sa valeur initiale u_0 vers $u_x = -u_v$. La Figure 5.19 montre les trajectoires pour nos trois maintenant familières gouttellettes de diamètres 40, 80 et 200 μ m. Cette fois c'est la plus petite gouttellette qui est la plus dangereuse: ayant une vitesse de sédimentation plus faible, elle demeure plus longtemps dans le vent avant de toucher le sol, et donc est entrainée plus loin horizontalement. Donc ici un second coureur devrait demeurer $\simeq 40$ m derrière le premier (infecté) pour éviter de ramasser sur son torse une gouttellette potentiellement virale.



Figure 5.18: Trajectoires de gouttelettes d'eau de diamètres 40, 80 et $200 \,\mu\text{m}$ propulsées horizontalement à $u_0 = 5 \,\text{m s}^{-1}$ d'une hauteur initiale de $z_0 = 1.75 \,\text{m}$. Les points colorés donnent le temps écoulé (en secondes) jusqu'à la position correspondante. Le rapport d'aspect est 1:1 ici, donc la forme de la trajectoire est géométriquement correcte. La plus grosse gouttellette ($200 \,\mu\text{m}$, en bleu) est celle qui parcourt la plus grande distance en x, en raison de sa plus grande inertie.



Figure 5.19: Trajectoires de gouttelettes d'eau de diamètres 40, 80 et 200 μ m propulsées horizontalement à 2.5 m s⁻¹ d'une hauteur initiale de $z_0 = 1.75$ m, cette fois en présence d'un vent soufflant horizontalement à vitesse constante $u_v = 4$ m s⁻¹ dans la direction négative de l'axe-x. La plus petite gouttellette (40 μ m, en rouge) est maintenant celle qui est entrainée le plus loin par le vent, en raison de son plus long temps de chute. Rapport d'aspect x : y = 25 : 1PHV-2100, Physique Environnementale, Paul Charbonneau, Université de Montréal

Il est remarquable que les simulations numériques hydrodynamiques très sophistiqués de Blocken *et al.*, qui incluent (entre autres) la trainée turbulente produite par un coureur, conduisent à une distance sécuritaire très comparable à celle obtenue ici. Vive le Kamarade Stokes !

Les plus petites gouttellettes se comportent ici comme des **aérosols**, soit des particules dont le temps de résidence dans l'atmosphère peut aller de la journée à plusieurs années, dépendant de leur taille, densité, et altitude d'injection. Ces aérosols sont également entrainé en bloc avec tout vent soufflant horizontalement ou verticalement. Comme on le verra plus loin, leur impacts environnementaux et même climatiques peuvent être importants.

5.4 La percolation

5.5 Transport de la chaleur

Un écoulement ne transporte pas seulement de la masse et/ou un contaminant, il transporte aussi l'énergie interne du fluide, $e = \rho c_p T$, le flux correspondant étant

$$\mathbf{q}_u = \rho c_p T \mathbf{u} , \qquad [W \ m^{-2} \ s^{-1}] .$$
 (5.115)

On doit aussi prendre en considération le flux diffusif de chaleur (revoir la §2.3.3 au besoin):

$$\mathbf{q}_D = -\chi \nabla T$$
, $[W m^{-2} s^{-1}]$. (5.116)

Notre équation de bilan a sa forme habituelle:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{q}_u + \mathbf{q}_D) \tag{5.117}$$

où, en terme de la température et pour un fluide incompressible:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = -\frac{1}{\rho c_p} \nabla \cdot (-\chi \nabla T)$$
$$= \kappa \nabla^2 T \tag{5.118}$$

où $\kappa = \chi/\rho c_p$ (unités: m² s⁻¹) est le **coefficient de diffusivité thermique**, une quantité qui peut se mesurer expérimentalement ou, dans le cas de substances pas trop complexes à l'échelle microscopique, se calculer *ab initio*. La tableau 5.3 liste les coefficients de conductivité et diffusivité thermiques pour diverses substances d'intérêt.

Un survol rapide de ce tableau révèle déjà que les gaz plus légers sont de meilleurs conducteurs de la chaleur, et que du coté des solides les meilleurs conducteurs électriques —les métaux— sont également les meilleurs conducteurs thermiques, conséquence directe de la mobilité des électrons.

On remarquera que l'éq. (5.123) a exactement la même forme que notre équation de transport d'un contaminant (5.64), avec $C \to T$ et $D \to \kappa$. Donc, toutes nos belles solutions analytiques des §§5.1.4 et 5.2.3 sont directement applicables au transport de la chaleur!

On peut effectuer sur notre équation du transport de la chaleur (5.123) la même analyse dimensionnelle (5.2.2) que pour l'équation de transport (5.64), ce qui conduit aux deux nouvelles expressions suivantes pour le nombre de Peclet et le temps diffusif:

$$Pe = \frac{u_0 L}{\kappa} , \qquad (5.119)$$

$$\tau_D = \frac{L^2}{\kappa} , \qquad (5.120)$$

le temps advectif $\tau_u = L/u_0$ demeurant inchangé.

Substance	$\chi \; [{\rm W} \; {\rm m}^{-1} {\rm K}^{-1}]$	$\kappa \; [10^{-7} \mathrm{m^2 s^{-1}}]$
Air	0.026	225
Laine minérale	0.043	32
Mousse urethane	0.026	3.6
Liège	0.039	1.8
Verre	1.4	7.5
Plâtre	0.22	1.21
Bois mou	0.12	1.71
Bois dur	0.16	1.77
Brique	0.72	4.49
Béton	1.4	6.92
Asphalte	2.0	10
Eau	0.61	1.4
Glace (0°)	1.8	10
Peau humaine	0.37	
Caoutchouc	0.13	0.59
Fer	80.2	228
Aluminium	237	972
Acier	52	149
Cuivre	401	1166
Sable sec	0.27	2.23
Sol moyen	0.52	0.38
Ar		220
Не		1900
Н		1600

Table 5.3: Coefficients de conductivité (χ) et diffusivité (κ) thermiques (à T = 300 K sauf mention contraire)

Source: voir bibliographie

5.5.1 Exemple 1: l'asphalte brûlant

Le temps diffusif (5.120) est d'une grande utilité pour caractériser la réponse thermique d'une substance à un input de chaleur variant dans le temps sans formellement solutionner l'équation (5.123).

Considérons, par exemple, le chauffage d'une couche d'asphalte par l'insolation journalière. Le coefficient de diffusivité thermique de l'asphalte varie entre $0.7-1.4 \times 10^6 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, dépendant du mélange; on utilisera simplement $10^6 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ dans ce qui suit. Un bel asphalte frais et noir est très opaque à la radiation dans le visible (albedo $\alpha_a \simeq 0.05$, voir Tableau 4.2), donc l'insolation est à toutes fins pratiques entièrement absorbée dans le premier centimètre sous la surface. cependant, la diffusion thermique transporte cette chaleur plus profondément.

Si on imagine que le chauffage débute soudainement au lever du soleil, et se termine au coucher, alors on a un temps caractéristique de variation $\tau \simeq 12$ heures $\simeq 4.32 \times 10^4$ s. L'équation (5.28) nous permet d'estimer la profondeur à laquelle la chaleur diffusera en 12 heures: $L \sim \sqrt{\tau \kappa} \simeq 0.2$ m.

L'évolution de la température moyenne dans un mètre carré d'une couche d'asphalte de profondeur L = 0.2m serait décrite par

$$L \times \rho c_p \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \sim L \rho c_p \frac{\Delta T}{\tau} , = (1 - \alpha_a) S$$
 (5.121)

où $S = 500 \,\mathrm{W}\,\mathrm{m}^{-2}$ est une irradiance moyenne au sol, essentiellement obtenue en moyennant les

résultats de la Fig. 4.8 (courbe verte) sur l'angle zénithal, et on a remplacé la dérivée temporelle de T par rapport à t par la variation de température ΔT divisée par le temps caractéristique τ (= 12 heures). Avec $\rho c_p = 2 \times 10^6$ J m⁻³ K⁻¹ pour l'asphalte (voir Tableau 2.1), on trouve ainsi:

$$\Delta T = \frac{(1 - \alpha_s)S_0\tau}{L\rho c_p} = 55^{\circ} \text{C} .$$
 (5.122)

Ca commence à faire chaud pour les petits pieds nus... est c'est conforme à l'expérience ! Notons que le point de fusion de l'asphalte se situe dans l'intervalle $54^{\circ} \leq T \leq 175^{\circ}$ C, la valeur exacte dépendant du mélange, ~ 90°C étant une valeur typique. Donc, lors d'une très chaude journée d'été, l'asphalte de nos rues peut sérieusement ramollir lorsqu'exposée au soleil, comme l'illustre la Figure 5.20 pour un exemple passé à la postérité.



Figure 5.20: Exemple historique de fonte de l'asphalte par le rayonnement d'un corps céleste. Source: G. Rémi (alias Hergé), L'Étoile Mystérieuse, Casterman 1947.

5.5.2 Exemple 2: l'isolation thermique

En guise de second exemple, examinons maintenant la question de l'isolation thermique, un problème majeur pour la survie des animaux dans des climats froids, et un élément clef de l'économie énergétique dans les sociétés industrialisées.

En l'absence d'écoulement (**u**=0), une solution stationnaire $(\partial/\partial t = 0)$ à notre équation du transport de la chaleur revient à solutionner une équation de Laplace:

$$-\frac{1}{\rho c_p} \nabla \cdot (-\chi \nabla T) \equiv \kappa \nabla^2 T = 0$$
(5.123)

avec des conditions limites appropriées sur T. Notons qu'une première intégrale de cette expression impose que

$$-\chi \nabla T = \text{constante}$$
 (5.124)

Autrement dit, le flux de chaleur doit être le même partout, puisque toute variation conduirait à une divergence non-nulle du flux, et donc à un chauffage ou refroidissement local, dans lequel cas on n'aurait plus une solution stationnaire.

Considérons une situation simple en 1D, mais d'intérêt biologique immédiat: la perte de chaleur à laquelle doit composer un animal (comme nous) de température corporelle interne T_c se retrouvant dans un environnement où la température extérieure $T_a \ll T_c$. Le diagramme au haut de la Figure 5.21 illustre schématiquement cette situation en 1D, la direction \mathbf{e}_x étant perpendiculaire à la peau. La couche de peau (derme+épiderme) a une épaisseur $h_p = 4$ mm,



Figure 5.21: Représentation schématique du profil de température stationnaire s'établissant entre l'intérieur du corps (température $T_c = 37^{\circ}$ C) et le milieu extérieur (T_a) à travers une couche de peau d'épaisseur h_p , en l'absence (en haut) ou présence (en bas) d'une couche de matériau isolant (épaisseur h_i) entre la peau et le milieu.

et une conductivité thermique $\chi_p = 0.37 \,\mathrm{W} \,\mathrm{m}^{-1} \,\mathrm{K}^{-1}$ (voir Tableau 5.3). En 1D l'équation de Laplace se réduit à

$$\kappa \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} = 0 , \qquad T(x_c) = T_c , \qquad T(x_a) = T_a$$
(5.125)

dont la solution donne un profil linéaire de T(x)

$$T(x) = T_c + (T_a - T_c) \frac{x - x_c}{x_a - x_c} .$$
(5.126)

Remarquez que le coefficient de diffusion thermique n'apparait pas dans cette solution stationnaire; sa valeur a un impact sur le temps requis pour atteindre l'état stationnaire, mais pas sur le forme de l'état stationnaire même. Cette solution nous permet donc de calculer le flux d'énergie thermique perdue à travers la peau:

$$\mathbf{q}_T = -\chi_p \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \chi \frac{T_c - T_a}{h_p} , \qquad [\mathrm{W} \ \mathrm{m}^{-2}] .$$
 (5.127)

Pour des valeurs $T_c = 37^{\circ}$ C, $T_a = 0^{\circ}$ C et $h_p \equiv x_a - x_c = 4 \text{ mm}$, on trouve $|\mathbf{q}_T| \simeq 3400 \text{ W}$ m⁻². Approximons notre humain typique flambant nu (ni excessivement rondelet ou poilu) comme un cylindre d'eau de masse 68kg, de hauteur H = 1.5 m et diamètre d = 24 cm, pour une surface de contact avec l'air de $A = 1.22 \text{ m}^2$. Je vous laisse calculer que notre "humain" passif deviendra hypothermique ($T_c \leq 35^{\circ}$ C) après un petit $\simeq 2 \text{ minutes}^{11}$.

 $^{^{11}}$ En réalité le temps requis serait 5–10 fois plus long, car le corps humain dispose d'une variété de mécanismes

Que se passe-t-il maintenant si notre humain cylindrique typique lâche finalement son cell et a soudainement l'idée géniale de ne pas rester tout nu dehors, mais de se glisser dans un bon sac de couchage de calibre hivernal, en duvet de qualité supérieure et d'épaisseur moyenne $h_i = 5$ cm. La situation est maintenant celle illustrée schématiquement au bas de la Figure 5.21 (mais pas du tout à l'échelle). Le duvet emprisonne effectivement une couche d'air épaisse de 5cm, et caractérisée par une conductivité thermique $\chi_a = 0.026$ W m⁻¹ K⁻¹, soit $\simeq 15$ fois plus faible que celle de la peau humaine.

Ici la solution de l'équation de Laplace est compliquée par le fait que les conductivité et diffusivité thermiques ne sont pas les mêmes pour la peau que pour l'air. Mais en régime stationnaire, le flux thermique à travers la peau doit être le même que celui traversant la couche d'air isolante. Dénotons la grandeur de ce flux par q et écrivons

$$q = -\chi_p \frac{T_p - T_c}{h_p} , \qquad \text{[peau]}$$
(5.128)

$$q = -\chi_p \frac{T_a - T_p}{h_i} . \quad \text{[air isolant]}$$
 (5.129)

Ce système de deux équations pour les deux inconnus q et T_p se solutionne facilement:

$$T_p = \frac{h_p \chi_a T_a + h_a \chi_p T_c}{h_p \chi_a + h_a \chi_p} , \qquad (5.130)$$

$$q = (T_c - T_a) \left(\frac{h_p}{\chi_p} + \frac{h_i}{\chi_a}\right)^{-1}$$
 (5.131)

Pour $T_c = 37^{\circ}$ C et $T_a = 0^{\circ}$ C, on trouve $T_p = 36.8^{\circ}$ C, un minuscule 0.2°C de moins que la température corporelle interne T_c ; et un flux q = 19 W m⁻², soit $\simeq 170$ fois moins qu'en l'absence de la couche isolante; il n'y a plus de danger d'hypothermie!

C'est pourquoi la plupart des animaux dans nos contrées nordiques, qui n'ont pas le luxe des sacs de couchage en duvet, emprisonnent l'air près de leur épiderme dans des couches de poils, ou de duvet recouvert par des plumes. Des animaux comme le lynx ou le renard atteignent ainsi un niveau d'isolation thermique d'environ 2/3 de celui de l'air au repos, même quand ils sont en mouvement.

Et comme ont pu le constater tous ceux/celles qui ont eu le malheur de se faire pleuvoir dessus abondamment l'hiver à des températures avoisinnant le zéro, l'isolation thermique des vêtements chute dramatiquement lorsque l'isolant est imbibé d'eau; conséquence incontournable du fait que la conductivité thermique de l'eau est $\simeq 24$ fois plus grande que celle de l'air (sec).

5.5.3 Exemple 3: les ilôts de chaleur

On passe maintenant à une situation où le transport de chaleur par un écoulement joue un rôle important dans l'équilibre thermique: les ilôts de chaleur.

Les villes combinent de grandes surfaces sans végétation et d'albedo faibles (e.g., les stationnements) et une substantielle production locale d'énergie thermique résultant de l'activité industrielle, de la climatisation, du transport automobile, etc. Nous exprimerons cette source en unités de Watt par mètre carré de surface urbaine. Cette quantité a été estimé à $S_v = 280 \text{ W}$ m⁻² pour une ville "typique" dans un pays industrialisé.

Notre "ville" sera approximée par un parallépipède de base carrée $L \times L$, et incluant la masse d'air s'étendant verticalement au dessus de la surface jusqu'à une altitude h = 300 m. Plutôt que de tenter de solutionner formellement l'équation du transport de la chaleur, nous allons ramener dans le portrait notre bon vieux modèle RSPF. Comme l'illustre la Figure 5.22, le modèle commence à contenir pas mal d'éléments:

lui permettant de préserver sa chaleur, en réduisant l'apport sanguin à la peau, et d'en générer, en grelottant! On reviendra là-dessus quand on traitera plus spécifiquement de thermorégulation animale.

- Nous avons deux réservoirs thermiques: la masse d'air urbain, et le sol urbain, caractérisés par des températures T_v et T_s respectivement;
- Le réservoir "sol urbain" a une source, soit l'insolation solaire S_0 , qui par hypothèse traverse l'atmosphère sans atténuation, mais dont une fraction (1α) (α étant l'albedo) est réfléchie dans l'espace et donc ne contribue pas à l'insolation au sol;
- Le réservoir "air urbain" a une source (surfacique) S_v , d'origine anthropogénique;
- Comme dans le cas de l'effet de serre de la §4.8, le réservoir "air urbain" irradie une moitiée $(0.5\sigma T_v^4)$ de son énergie thermique vers le sol, et l'autre moitié vers l'espace.
- Une fraction t (la transmissivité) du flux thermique émis par le sol s'échappe vers l'espace, et la fraction absorbée, $(1 t)\sigma T_s^4$, est transféré au réservoir air urbain.
- Tous les flux surfaciques et sources surfaciques doivent être multipliés par L^2 pour obtenir les quantités de chaleur totale entrant ou sortant "verticalement" de nos deux réservoirs, soit notre "ville";
- Finalement, un vent horizontal soufflant à vitesse u produit un flux entrant de chaleur $\rho c_p u T_a$, où T_a est la température de l'air "froid" à l'extérieur de la zone urbaine, et un flux sortant $\rho c_p u T_v$. La quantité nette de chaleur sortant de notre ville parallépipédique est alors donnée par $\rho c_p u (T_v T_a) \times hL$.



Figure 5.22: Le système air+sol urbains, en représentation Réservoir+Source+Puit+Flux. On suppose ici que l'air urbain est complètement transparent à l'irradiance solaire, et transmet une fraction t (transmissivité) du rayonnement thermique du sol urbain vers les plus hautes couches de l'atmosphère. Comparez attentivement avec la Fig. 4.16.

Il ne nous reste plus qu'à écrire nos équations de bilan. On doit faire attention ici car les flux thermiques sont émis par une surface d'aire $L \times L$, mais le flux de chaleur transportée par le vent horizontal traverse une surface d'aire $L \times h$. On se limitera encore ici au régime stationnaire, où le système est globalement à l'équilibre (tous les d/dt = 0); les flux totaux entrant et sortant de chaque réservoir doivent alors équilibrer les sources internes; on aura donc:

Air Urbain :
$$0 = (1-t)\sigma T_s^4 - \sigma T_v^4 - \frac{h}{L}\rho c_p u(T_v - T_a) + S_v$$
, (5.132)

Sol Urbain :
$$0 = \frac{(1-\alpha)S_0}{4} + \frac{1}{2}\sigma T_v^4 - \sigma T_s^4$$
. (5.133)

où on a tout divisé par L^2 , ce qui a fait apparaitre le quotient h/L dans le terme de transport de chaleur par le vent. Comparez attentivement ceci aux éqs. (4.40)–(4.41). Si on pose u = 0, on trouve

$$\sigma T_v = \left[\left(\frac{(1-t)(1-\alpha)S_0}{4} + S_v \right) \left(\frac{1}{(t+1)\sigma} \right) \right]^{1/4}$$
(5.134)

Soit $T_v = 355 \text{ K} = 82^{\circ}\text{C}$ pour h = 300 m, t = 0.1, et $S_v = 280 \text{ W} \text{ m}^{-2}$. L'éq. (5.133) nous donne ensuite $T_s = 332 \text{ K} = 59^{\circ}\text{C}$. Notons que la température du sol se retrouve ici inférieure à celle de l'air urbain. Mais dans les deux cas, c'est définitivement inconfortable comme températures...

Revenons au cas où un vent horizontal souffle à vitesse u. De (5.133) on tire

$$\sigma T_s^4 = \frac{(1-\alpha)S_0}{4} + \frac{1}{2}\sigma T_v^4 \tag{5.135}$$

que l'on substitue dans (5.132), ce qui conduit à un polynôme quartique en T_v :

$$\left[\frac{(t+1)\sigma}{2}\right]T_v^4 + \left[\rho c_p u \frac{h}{L}\right]T_v - \left[\frac{(1-t)(1-\alpha)S_0}{4} + \rho c_p u T_a \frac{h}{L} + S_v\right] = 0.$$
(5.136)

Un polynôme quartique a quatre racines; ceux du genre (5.136), soit sans termes cubique ou quadratique, ont deux racines qui forment une paire des conjugués complexes, et deux autres sont purement réelles, l'une négative et l'autre positive; c'est évidemment cette dernière qui doit être conservée ici. En Python, la fonction numpy.roots fonctionne bien et est facile d'utilisation.

La Figure 5.23 montre la variation de la température de l'air urbain (T_v) en fonction de la vitesse du vent, pour deux "villes" de dimensions linéaires L = 2 et 20 km. On constate



Figure 5.23: Variation de la température de l'air urbain en fonction de la vitesse du vent horizontal traversant la ville. Le trait rouge correspond à une ville de dimension linéaire L = 20 km, et le trait vert L = 2 km. Le pointillé supérieur indique la température d'équilibre en absence de vent, et celui du bas la température de l'air que le vent souffle à travers la ville. Les traits en tirets correspondent à la solution approximative donnée par l'éq. (5.138). Notez l'échelle horizontale logarithmique.

que même pour des vitesses de vent relativement faibles, l'effet de refroidissement dû au vent peut être très significatif. Il faut évidemment qu'on ait accès à un réservoir d'air frais (à température T_a); si la Terre était complètement urbanisée, l'air soufflé par le vent serait partout uniformément à d $T_v(u=0)$ (= 82°C pour nos paramètres du modèle), et donc aucun apport d'air frais, et aucun transport horizontal net de chaleur. Il ferait vraiment très chaud, partout...

Considérons une situation limite où le vent horizontal est le seul mécanisme évacuant la chaleur produite par le chauffage anthropogénique —notre fameux terme source S_v . On doit donc avoir

$$\left[\rho c_p u (T_v - T_a)\right] \times hL \simeq \left[S_v\right] \times L^2 , \qquad (5.137)$$

d'où on peut tirer une expression approximative pour T_v dans ce cas limite:

$$T_v^* = S_v \left(\frac{L}{h}\right) \left(\frac{S_v}{\rho c_p u (T_v - T_a)}\right) .$$
(5.138)

Cette expression démontre explicitement que toute autre chose étant égale, une ville de plus grande superficie, (grand L) aura une T_v plus élevée; et pour une taille de ville donnée, T_v décroit en 1/u quand u augmente.

La solution approximative (5.138) est tracée en tirets sur la Fig.5.23, toujours pour L = 2 et 20 km. On observe divergence $(T_v \to \infty)$ dans la limite $u \to 0$, mathématiquement dûe à la présence de u au dénominateur de l'expression ci-dessus; et physiquement dû au fait qu'en l'absence de rayonnement thermique, si $u \to 0$ alors il ne reste plus rien pour contrebalancer l'apport de chaleur par le terme source S_v , conduisant alors à un surchauffage inexorable de l'air urbain.

Ce petit modèle RSPF néglige plusieurs phénomènes physiques importants qui tendraient à réduire les températures de l'air et du sol; un de ces phénomènes, l'évaporation, est en fait le prochain sur notre liste.

5.6 Évaporation et condensation

L'évaporation est un des principaux mécanimes utilisés par et animaux aux fins de thermorégulation, et par la plupart des plantes pour créer le déficit de pression permettant, par suction, la montée des fluides à partir des racines. Nous traiterons de ces sujets en détails au chapitre 8.

Il convient d'abord de bien distinguer la **vaporisation**, changement de phase se produiant pour l'eau (pure) à 100°C, de l'**évaporation**, qui en contexte environnemental est un phénomène opérant à une *interface* eau-air (habituellement). L'évaporation peut se produire même si l'eau n'est pas à 100°C, comme on peut facilement le constater en examinant en cuisine la vapeur émanant d'un chaudron rempli d'eau chaude.

La chaleur latente de vaporisation de l'eau est de $\Lambda = 2260 \text{ kJ kg}^{-1}$. Si on imagine que l'évaporation consiste à élever la température de l'eau à 100°C et ensuite la vaporiser, on en concluerait que l'input énergétique requis pour évaporer de l'eau à $T < 100^{\circ}$ est plus élevé que Λ , et c'est bien le cas comme le montre la Figure 5.24 ci-dessous. Attention cependant, cette **chaleur latente d'évaporation** L est toujours plus grande que Λ , mais significativement plus petite que la somme $\rho c_p(100 - T) + \Lambda$ (trait pointillé sur la Fig. 5.24). Du point de vue microscopique, la raison en est qu'à l'interface les molécules d'eau dans la queue élevée de la distribution de Maxwell-Boltzmann ont suffisamment d'énergie pour échapper aux forces intermoléculaires donnant au fluide sa cohésion.

5.6.1 Le cycle global de l'eau

L'évaporation est le moteur du cycle global de l'eau à l'échelle planétaire. Comme le résume le Tableau 5.4, en bonne première approximation ce cycle est dominé par l'échange vertical précipitations versus évaporation des eaux océaniques et d esurface, le transport horizontal de la vapeur d'eau dans les vents induisant un léger déficit précipitation/évaporation sur les océans, compensé par les écoulements de surface sur les continents (i.e., fleuves se déversant



Figure 5.24: Chaleur latente d'évaporation pour l'eau à pression atmosphérique. Source de données: Monteith & Unsworth, Tableau A.3. Le trait pointillé indique l'apport énergétique requis pour chauffer une masse d'eau d'une température T jusqu'à 100° et ensuite de la vaporiser entièrement (voir texte).

Tab	le 5.4 :	Cycle	plané	taire	de	l'eau
		•/				

Composante	$10^{12} \mathrm{m^3} \mathrm{yr^{-1}}$
Précipitations continentales	108
Précipitations océaniques	410
Évapo(transpi)ration continentale	62
Évaporation océanique	456
Écoulements surfaciques	46

Source: Harte 1988

dans la mer). Ceci étant dit sans minimiser l'usage de l'eau fait par la biosphère, interceptant et emmagasinant temporairement une fraction non-négligeable de l'eau présente dans les sols, pour la retourner à l'atmosphère par **évapotranspiration**.

L'évaporation est aussi un mécanisme permettant de prendre de l'énergie au sol et de la déplacer dans l'atmosphère. Le Tableau 5.4 indique des précipitations annuelles totales de $518 \times 10^{12} \text{ m}^3 \text{ yr}^{-1}$. toute cette eau provient de l'évaporation d'une cette même quantité d'eau au niveau du sol et de la surface des océans. Avec une chaleur latente d'évaporation $L = 2460 \text{ kJ} \text{ kg}^{-1}$ pour une température moyenne de surface de 14°, la quantité d'énergie requise est

$$E_{\text{evap}} = (1000 \text{kg m}^{-3}) \times (518 \times 10^{12} \text{ m}^3 \text{yr}^{-1}) \times (2460 \text{J kg}^{-1}) / (3.16 \times 10^7 \text{s yr}^{-1})$$

= $4 \times 10^{16} \text{ W}$ (5.139)

soit 78 W m⁻² sur toute la surface de la Terre. C'est une fraction substantielle du flux radiatif d'un corps noir $\sigma T_s^4 = 385 \,\mathrm{W} \,\mathrm{m}^{-2}$ pour une température moyenne de surface $T_c = 297 \,\mathrm{K}$.

Le taux d'évaporation dépend non seulement de la température, mais aussi de la pression partielle de vapeur d'eau dans l'air. Nous reviendrons sur les détails physiques du processus d'évaporation plus tard dans le cours. Pour le moment nous ne considérerons qu'un seul exemple illustrant bien l'importance de l'évaporation de l'eau au niveau du transport et bilan de la chaleur.

5.6.2 Exemple: Comment refroidir une centrale thermique

Dans une centrale dite thermique, la production d'électricité débute avec la vaporisation de l'eau et surchauffage de la vapeur d'eau ainsi produite afin d'en augmenter la pression (pensez à l'équation d'état du gaz parfait). Cette pression de vapeur est ensuite utilisée pour faire tourner une turbine qui actionne finalement une dynamo produisant l'électricité. Nous traiterons en détail de la physique de ce processus dynamo au chapitre 7; pour le moment nous nous limitons aux aspects thermodynamiques de l'utilisation de l'eau dans de telles centrales.

Commençons par un petit retour sur le concept de **machine thermique**, avec lequel vous avez déjà fait connaissance en PHY-2215, soit un système qui produit de l'énergie mécanique à partir d'un gradient de température, selon l'iconique concept du piston. L'idée est illustrée schématiquement sur la Figure 5.25. Un tube est séparé en deux régions par une surface mobile étanche (le fameux piston). Du coté droit du piston les pression et température sont p_1 et T_1 ; coté gauche on a $p_2 > p_1$, et $T_2 > T_1$. La force nette exercée sur le piston sera

$$F_x = (p_2 - p_1) \times A , \qquad (5.140)$$

où A est la surface du piston. En conséquence, ce dernier se déplacera vers la droite, disons d'une distance infinitésimale dx. Le travail mécanique produit est donc $dW = F_x dx$. Si le processus est adiabatique, le gaz/fluide dans la section droite réchauffera sous compression, et celui dans la section gauche refroidira, jusqu'à ce que les $p_1 = p_2$, signalant l'arrêt du piston. Si on désire



Figure 5.25: Représentation schématique du fonctionnement d'un piston développant un travail mécanique constant en puisant dans un réservoir thermique T_2 maintenu à cette température par un apport énergétique Q_2 . Pour demeurer en régime stationnaire l'augmentation de la température T_1 , qui résulterait normalement de la compression adiabatique, doit être éliminée en extrayant une quantité d'énergie Q_1 du système (voir texte).

développer un travail mécanique W soutenu (pas d'arrêt du piston), on doit continuellement déposer une quantité d'énergie Q_2 dans la section gauche, et en extraire une quantité Q_1 de la section de droite (flèches rouges sur la Fig. 5.25), de manière à préserver la différence de température $T_2 - T_1$ qui produit la différence de pression $p_2 - p_1$; Par conservation de l'énergie, on doit avoir:

$$Q_1 = Q_2 - W . (5.141)$$

Ces deux processus, agissant conjointement, ne peuvent cependant pas diminuer l'entropie totale du système:

$$\Delta S = -\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} = -\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_2 - W}{T_1} \ge 0 , \qquad (5.142)$$

d'où:

$$W \le Q_2 \left(1 - \frac{T_1}{T_2} \right) . \tag{5.143}$$

On définit l'efficacité thermique η de notre machine comme le rapport entre le travail mécanique produit et l'input énergétique au système:

$$\eta \equiv \frac{W}{Q_2} = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) \ . \tag{5.144}$$

Cette expression donne l'efficacité théorique maximale, applicable à une situation où tous les processus impliqués sont parfaitement réversibles; en pratique il y aura toujours des pertes de chaleur quelque part, et l'efficacité réelle sera $\eta_{\text{eff}} < \eta$.

Revenons à notre centrale thermique; Q_2 devient l'énergie produite par le processus de combustion utilisé pour vaporiser l'eau (combustion de gaz ou de charbon, fission nucléaire, etc.). Le piston est remplacé par les pales de la turbine. Pour une production continue d'énergie mécanique, il est essentiel qu'en aval de la turbine on maintienne la température à T_1 afin de préserver la différence de pression $p_2 - p_1$ produisant ultimement le travail mécanique. On doit donc refroidir la vapeur en aval, i.e. extraire de l'énergie (le Q_1 sur la Figure 5.25).

Dans une centrale thermique, l'eau produite par la recondensation de la vapeur en aval des turbine est refroidie et recirculée dans le système. C'est le circuit primaire de circulation, qui (en l'absence de fuites) opère à un volume d'eau constant. Dans une centrale thermique "moderne" opérant par la combustion du charbon, en produisant 1000 MW de puissance électrique, on a typiquement $T_2 = 800$ K, $T_1 = 300$ K, et donc $\eta = 0.625$; en pratique, on a plutôt $\eta_{\text{eff}} = 0.4$. Donc on doit injecter dans le système $Q_2 = 1000/\eta_{\text{eff}} = 2500$ W. Le 60% de ce 2500MW, soit 1500MW, qui n'est pas converti en énergie mécanique —et ultimement, en courant électrique doit donc être évacué de la centrale, sinon l'efficacité thermodynamique va chuter à zéro (et éventuellement tout finira par fondre!). Les gaz chauds résultant de la combustion sortant par les cheminées aident un peu, en emportant environ 15% de l'énergie libérée par la combustion. Le reste doit alors être évacué par un système de refroidissement, utilisant habituellement l'eau en raison de sa grande capacité thermique.

La Figure 5.26 résume schématiquement la situation:

- On cherche à produire 1000 MW d'électricité en régime continu;
- Avec une efficacité $\eta_{\text{eff}} = 0.4$, on doit donc générer 2500 MW en chaleur;
- Avec 15% de perte de chaleur via les cheminées, il reste donc $0.85 \times 1500 = 1275$ MW à évacuer via le système de refroidissement, quel qu'il soit, afin de maintenir T_1 à 300K.

La première option est de puiser dans une source d'eau (lac, fleuve) près de la centrale, et de laisser circuler cette eau dans un échangeur de chaleur avec le circuit primaire pour en extraire la chaleur. Disons que cette source d'eau environnementale est à $T_0 = 290$ K; la capacité thermique de l'eau étant $c_p = 4182$ J kg⁻¹ K⁻¹ (voir Tableau 2.1), pour extraire 1275 MW du circuit primaire à 300K en refroidissant de 10K on a besoin d'un débit Q donné par:

$$Q = \frac{1275 \times 10^6 \,\mathrm{W}}{c_p \times 10 \mathrm{K}} \equiv 30500 \,\mathrm{litres \, s^{-1}} \,, \tag{5.145}$$

soit $\equiv 10^{12}$ kg (ou litres) par année. C'est beaucoup d'eau ! Cette eau est retournée à l'environnement, mais peut générer une pollution thermique importante en aval de la centrale: 10K de réchauffement, dans un lac, fleuve ou ou rivière, c'est beaucoup; en on ne parle



Figure 5.26: Représentation schématique du fonctionnement d'une centrale thermique produisant 1000MW d'électricité avec une efficacité thermodynamique $\eta_{\text{eff}} = 0.4$ (voir texte).

même pas de tous les petits poissons et invertébrés qui se feront cuire en purée lorsque pompés dans l'échangeur de chaleur.

Une seconde option est la **tour d'évaporation** (voir Figure 5.27). Ici l'eau du circuit primaire circule dans une série de tuyau où lamelles, sur la surface desquels on vaporise (pas dans le sens d'un changement de phase) de l'eau provenant d'une source environnementale, encore une fois lac, fleuve ou rivière.

La chaleur latente de vaporisation pour l'eau à 290K est L = 2459 kJ/kg, donc pour extraire 1275 MW par évaporation on a besoin d'un débit:

$$Q = \frac{1275 \times 10^6 \text{W}}{2459 \times 10^3 \,\text{J kg}^{-1}} \equiv 518.5 \text{litres s}^{-1} , \qquad (5.146)$$

soit 1.6×10^{10} kg (ou litres) par année; c'est 62 fois moins que l'option 1. Ici l'eau n'est pas retournée à l'environnement local, mais finit éventuellement en précipitations en aval des vents dominants. La condensation en gouttellettes relâchera la chaleur latente dans l'environnement, mais de manière moins géographiquement localisée et donc moins dommageable pour les écosystèmes, du point de vue de la pollution thermique; mais possiblement dommageable via l'assèchement local de la source d'eau utilisée.

Mentionnons finalement que pour ces deux options distinctes de refroidissement, la même quantité de CO_2 est émise par la combustion du charbon.

Exercices:

5.1: Calculez la vitesse terminale de chute d'une balle de pingpong dans l'air, versus une balle du même rayon mais faite d'irridium ($\rho = 22420 \text{ kg m}^{-3}$). Estimez le nombre de Reynolds (Re) dans les deux cas. Répéter les mêmes calculs, mais dans l'eau.

5.2: Obtenez l'éq. (5.107) à partir de $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, en incluant la force de trainée dans \mathbf{F} ; ensuite, solutionnez cette expression (analytiquement ou numériquement) pour reproduire la Figure 5.16.

5.3: Démontrez que l'équation (5.123) résulte bien de la substitution de (5.115)–(5.116) dans (5.123).



Figure 5.27: Centrale nucléaire de Hope Creek (New Jersey, É.-U.). Les deux réacteurs situés les plus à gauche, plus anciens, utilisent notre option 1, soit siphonner de l'eau de la rivière Delaware pour refroidir le circuit primaire des réacteurs, tandis que le troisième, plus récent, utilise notre option 2, soit refroidir son circuit primaire via la tour d'évaporation au centre de l'image. Le panache blanc émis par la tour est de la vapeur d'eau. Source: blog.ucsusa.org.

5.4: Vérifiez, par substitution directe, que l'équation (5.49) est bien une solution valide de l'équation de diffusion (5.31) avec S = 0.

5.5: De son propre aveu, le Fonderie Horne à Rouyn-Noranda a émis en 2022 une moyenne annuelle de 73.1 nanogrammes (ng) d'arsenic par mètre cube de ses cheminées. En présence d'un vent constant soufflant à 1 m s⁻¹, et un taux constant d'émission correspondant à cette moyenne annuelle, calculez à quelle distances de la fonderie (en amont, aval, et latérale) on retombe sous la norme provinciale officielle de 3 ng m⁻³.

5.6: Suivant la procédure développée à la $\S5.5.1$, calculez jusqu'à quelle profondeur un sol de porosité p et saturé d'eau réagira aux variations saisonnières de la température de surface. Pensez bien à la manière de prendre en compte l'hétérogénéité du milieu.

5.7: Il s'agit ici de reformuler le calcul du réchauffement de l'asphalte de la §5.5.1 en terme du modèle RSPF.

- 1. Tracez un diagramme RSPF (genre Fig. 2.6) pour ce nouveau modèle
- 2. Écrivez les équations différentielles décrivant le comportment du modèle.
- 3. Solutionnez ces équations pour une variation journalière de l'irradiance au sol à latitude 45.5° au solstice d'été. À quelle heure de la journée la température de l'asphalte est-elle maximale ?
- 4. Incluez maintenant les pertes radiatives (flux $\propto \sigma T^4),$ et examinez-en l'impact sur votre température maximale.

5.8: Il s'agit ici d'approfondir les calculs d'isolation thermique de la §5.5.2;

- 1. Calculez le temps de refroidissement vers l'hypothermie pour notre humain tout nu dans l'air à 0°C.
- 2. Calculez maintenant la perte de chaleur (en W) que subit notre humain dans son sac de couchage, si le sac est complètement détrempé, et s'aplatissant à une épaisseur de 2cm.

5.9: On vous engage pour améliorer l'efficacité énergétique d'une centrale thermique du genre considérée à la §5.6.2; deux options sont à votre disposition: doubler la température de la vapeur sortant de la fournaise (T_2) , ou diminuer d'un facteur deux la température de l'eau dans le circuit primaire (T_1) . Laquelle de ce sdeux options est la plus avantageuse du point de vue de la production d'électricité ? et de la consommation en eau, selon nos deux options ? Que recommanderiez-vous dans votre rapport final ?

Bibliographie:

Les donnés numériques des tableaux 5.1, 5.2, et 5.3, proviennent respectivement des sources suivantes:

engineeringtoolbox.com/air-diffusion-coefficient-gas-mixture-temperature-d_2010.html

engineeringtoolbox.com/particle-sizes-d_934.html

engineersedge.com/heat-transfer/thermal_diffusivity_table_13953.htm

avec dans le dernier cas des ajouts provenant de l'ouvrage de Boeker et van Grondelle cité en bibliographie du chapitre 1. Les solutions numériques des §§5.1.4 et 5.2.3 sont également tirées et adaptées de cet ouvrage.

Sur la projection des gouttelettes de salive lors du parler, voir

Abkarian, M., Mendez, S., Xue, N., Yang, F., Stone, H.A., *PNAS* **117**(41), 25237–25245 (2020)

L'exemple de la dispersion de l'Argon dans l'atmosphère terrestre (5.2.5) est originellement dû à l'astrophysicien Georges Gamov, mais a été repris et très efficacement popularisé par le biologiste/environnementaliste David Suzuki, dont les ouvrages valent définitivement la lecture. Si ça vous intéresse je recommanderais:

Suzuki, D., The Sacred Balance, 4^{eme} éd., Greystones Books, 2022.

Sur l'incroyable gamme de mécanismes et trucs utilisés par les animaux pour survivre au froid hivernal, voir

Heinrich, B., Winter World, HarperCollins, 2003.