Chapitre 2

Les bases physiques

Ce chapitre se veut un rappel de certains concepts de base en électromagnétique et thermodynamique, que vous avez déjà couverts en PHY-2215 et PHY-2441, avec quelques "extras" qui nous seront utiles au fil du cours.

2.1 Propriétés des solides, liquides et gaz

Dans bien des applications en physique environnementale, il est d'usage de traiter la matière (gaz, liquide, solide...) comme un **milieu continu**, dont les caractéristiques seront définies par des variables globales, par exemple la densité ρ (unités: kg m⁻³), la température T (unités: degré K ou °C), la pression p (unités: Pa pour Pascal, $\equiv N m^{-2}$). Ce n'est vraiment que lorsqu'on doit considérer l'interaction de la radiation électromagnétique avec la matière que la nature microscopique de cette dernière (ainsi que la nature quantique de la lumière comme étant composée de photons d'énergie $h\nu$) devra être prise en considération.

2.1.1 Le gaz parfait

Le pont entre le microscopique et le macroscopique s'établit grâce à une expression tout à fait fondamentale résultant des travaux de Ludwig Boltzmann. Pour un ensemble de "particules" non-relativistes de masse m sans degrés de liberté internes, et donc interagissant uniquement via collisions élastique:

$$\frac{1}{2}mv_{\rm th}^2 = \frac{3}{2}k_BT , \qquad (2.1)$$

où $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \,\text{J K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann, et v_{th} est la vitesse thermique moyenne:

$$v_{\rm th}^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \tag{2.2}$$

où v_x^2, v_y^2, v_z^2 sont les composantes de la vitesse moyennés (rms) sur l'ensemble des particules. Le **théorème d'équipartition** stipule qu'à chacun des trois degré de liberté (translations en x, y et z) est associée une énergie moyenne $k_B T/2$. Ceci implique alors que les vecteurs-vitesse individuels sont orientés isotropiquement, et que $|v_x| = |v_y| = |v_z| = \sqrt{v_{\rm th}/3}$.

Considérons maintenant un volume V contenant n de nos particules de masse m. La densité est simplement:

$$\rho = \frac{nm}{V} , \qquad [\text{kg m}^{-3}] .$$
(2.3)

La densité d'énergie par unité de volume (e) s'écrit alors:

$$e = \frac{1}{2}\rho v_{\rm th}^2$$
, [J m⁻³]. (2.4)

Imaginons maintenant une surface perpendiculaire à la direction x (disons) contre laquelle nos particules rebondissent de manière élastique. En vertu de l'isotropie spatiale et du théorème

d'équipartition, le transfert de quantité de mouvement à 1 mètre carré de la surface par une densité ρ de particules ayant une vitesse thermique $v_{\rm th}$ est alors:

$$p = \frac{1}{3}\rho v_{\rm th}^2$$
, $[\rm J \ m^{-3}] \equiv [\rm N \ m^{-2}]$. (2.5)

ou, utilisant (2.1) pour exprimer $v_{\rm th}^2$ en fonction de T:

$$p = \rho \frac{k_B T}{m} . \tag{2.6}$$

C'est l'**équation d'état** pour la gaz parfait. En physique environnementale et/ou climatique on exprime souvent cette équation d'état sous la forme alternative:

$$pV = nRT (2.7)$$

où $n = \rho V/\mu$ est maintenant le nombres de particules contenues dans le volume V, exprimé en **mole**, par définition composée de $A = 6.02 \times 10^{23}$ particules, ce A étant le célèbre **Nombre d'Avogadro**, et $R \equiv k_B A = 8.314 \text{ J} \text{ mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ est la **constante des gaz**. La quantité μ (sans dimension) est la masse moléculaire moyenne des particules, exprimée en unités de la masse de l'atome d'Hydrogène, i.e., $\mu = m/m_H$ avec $m_H = 1.6735 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

Dans la plupart des situations que nous rencontrerons dans ce cours, l'idéalisation du gaz parfait est une excellente approximation, même si nous aurons à traiter de mélange gazeux dont les constituants microscopiques sont des molécules possédant des états d'énergie interne associés à la vibration et/ou rotation. Cependant, aux densités et températures d'intérêt dans un contexte atmosphérique, les collisions inter-particules ne sont pas suffisamment énergétiques pour exciter ces états vibrationnels ou rotationnels. L'équation état du gaz parfait (2.6) tient alors la route, avec un μ approprié. Par exemple, si on approxime l'air comme un mélange de 80% N₂ et 20% O₂, on a $\mu = 0.8 \times 28 + 0.2 \times 32 = 28.8$.

Ceci dit, on verra plus loin (§4.7) qu'au niveau de l'interaction avec la radiation électromagnétique, les états vibratoires et rotationnels de diverses molécules peuvent jouer un rôle de grande importance.

2.1.2 Capacités thermiques

Si on injecte un incrément d'énergie dans un gaz de "particules", cette énergie doit se retrouver quelque part, conservation de l'énergie oblige. À volume constant, la seule possibilité est d'augmenter la vitesse thermique des particules, et donc la température du gaz. On peut alors écrire:

$$dE = \rho c_v dT , \qquad (2.8)$$

où c_v (unités: J kg⁻¹ K⁻¹) est la **capacité thermique à volume constant**, et d*E* est l'énergie injectée par unité de volume.

Dans la plupart des des processus environnementaux, qui ne se développent pas dans des situations où le volume est fixé mécaniquement par des contenants rigides, un gaz dans lequel on injecte de l'énergie peut non seulement réchauffer, mais aussi prendre de l'expansion; dans ce dernier cas le travail devant être fait contre la pression aura comme conséquence que l'augmentation de température sera moins marquée que dans un processus à volume constant. On écrirait alors

$$dE = \rho c_p dT + p dV , \qquad (2.9)$$

Le travail par unité de volume fait par expansion étant donné par pdV, et c_p (unités: J kg⁻¹ K⁻¹) est maintenant la **capacité thermique à pression constante**, et clairement $c_p > c_v$. Si maintenant on prend la dérivée de l'équation d'état (2.7) à p constant on obtient immédiatement:

$$pdV = nRdT . (2.10)$$

notes24.tex, January 9, 2024

Substituant ainsi pour dV dans (2.9) et soustrayant (2.8), on arrive à:

$$c_p - c_v = \frac{nR}{\rho} . aga{2.11}$$

Les deux capacités thermiques dépendent évidemment de la nature microscopique de la substance considérée. Pour notre gaz parfait à trois degrés de liberté (et non relativiste), on a

$$\rho c_p = \frac{5nR}{2} , \qquad \rho c_v = \frac{3nR}{2} ,$$
(2.12)

Donc le rapport $c_p/c_v = 5/3$, ce rapport définissant l'**indice adiabatique** (γ). Le Tableau 2.1 liste les capacités thermiques à pression constante pour plusieurs milieux qui seront d'intérêt dans ce qui suit. La dernière colonne liste le produit ρc_p , soit la capacité thermique volumique, souvent plus pratique d'utilisation.

Substance	$\rho [\mathrm{kg} \mathrm{m}^{-3}]$	$c_p [\mathrm{J \ kg^{-1} \ K^{-1}}]$	$ ho c_p [\mathrm{J} \mathrm{m}^{-3} \mathrm{K}^{-1}]$
Air (sec)	1.2	1004	$1.2 imes 10^3$
Glace $(0^{\circ} C)$	917	2030	$1.8 imes 10^6$
Eau (pure)	1000	4182	4.2×10^6
Sol/organique	1300	1921	2.5×10^6
Sol/inorganique	2600	733	$1.9 imes 10^6$
Asphalte	2320	865	2.0×10^6
Béton	2400	880	2.1×10^6
Acier	7900^{*}	466	$3.5 imes 10^6$

Table 2.1: Chaleurs spécifiques pour quelques substances d'intérêt

* 7750–8050 dépendant de l'alliage

On verra plus loin (§3.1.1) qu'autant dans l'atmosphère que dans les océans, le profil vertical de pression est établi via l'équilibre hydrostatique, ce qui implique que la majorité des processus thermodynamiques d'intérêt opèrent à pression constante ou vraiment pas loin, ce qui fait que dans tout ce qui suit la capacité thermique c_p sera utilisée, sauf avis contraire explicite.

2.1.3 Changements de phase et chaleur latente

Qu'un processus thermodynamique opère à pression constante ou volume constant, il n'en demeure pas moins qu'un apport de chaleur à un volume de gaz/fluide causera une augmentation de sa température. Une exception importante est la **transition de phase**, qui conduit à des situations particulière où un apport (ou perte) de chaleur dans un élément de volume ne change pas la température de son contenu. On parle alors de **chaleur latente**. En contexte environnemental, les fusion/gel et évaporation/condensation de l'eau seront les deux transitions de phase dont nous aurons à nous préoccuper.

L'apport d'énergie requis pour la fusion de la glace à 0° (la **chaleur latente de fusion**) est de $3.34 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1}$; et le gel de l'eau liquide *libère* la même quantité d'énergie.

La chaleur latente de vaporisation de l'eau liquide à 100° est de 2.26×10^{6} J kg⁻¹, ce qui est très substantiel; c'est 5.4 fois plus que l'apport énergétique requis pour chauffer le même volume d'eau de 0 à 100° C. Comme on le verra ultérieurement, l'évaporation est utilisée efficacement par bon nombre d'organismes vivants (dont nous!) aux fins de régulation thermique. Comme dans le cas de la transition liquide/solide, la même substantielle quantité d'énergie est libérée quand la vapeur d'eau condense en gouttelettes liquides, avec des conséquences importantes pour la dynamique et énergétique atmosphériques.

2.1.4 Compressibilité et dilatation thermique

À venir...

2.2 Électromagnétisme

La radiation électromagnétique est de loin la principale source d'énergie pour toute vie sur Terre, ainsi que la source d'énergie propulsant tous les écoulements atmosphériques et océaniques. Aux plus grandes échelles, le bilan énergétique global de la Terre est complètement dominé par la radiation. Un petit rappel de l'électromagnétisme est donc d'intérêt.

2.2.1 Ondes électromagnétiques

Une des deux faces de la lumière se révèle sous la forme de la radiation électromagnétique, soit une solution de type ondulatoire aux équations de Maxwell. Dans le vide, i.e. en l'absence d'une densité de charge ou d'une densité de courant, les équations de Maxwell se réduisent à:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 , \qquad (2.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \qquad (2.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \qquad (2.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} , \qquad (2.16)$$

où $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \,\mathrm{s}^2 \mathrm{C}^2 \mathrm{m}^{-3} \mathrm{kg}^{-1}$ est la permittivité du vide, et $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \mathrm{m \ kg \ C}^{-2}$ la perméabilité magnétique du vide. Si on prend le rotationnel de (2.15) et la dérivée temporelle de (2.16), les deux expressions résultantes se combinent en une équation d'onde pour le champ électrique:

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{B} \tag{2.17}$$

avec une manipulation complémentaire produisant une équation identique pour **B**. La vitesse c de l'onde est donnée par

$$c = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} = 2.997924562 \times 10^8 \,\mathrm{m \, s^{-1}}$$
 (2.18)

Banzai ! Substituant dans (2.15) et (2.16) une solution de type onde plane, i.e.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) , \qquad (2.19)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) , \qquad (2.20)$$

il est facile de démontrer que:

- 1. **E** vibre dans un plan orthogonal au plan de vibration de **B**, i.e., $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$
- 2. l'onde est transverse, i.e., $\mathbf{k} \propto \mathbf{E} \times \mathbf{B}$,
- 3. les amplitudes des champs électrique et magnétique sont proportionnelles: $|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|$
- 4. L'onde est non-dispersive: sa vitesse de groupe $c_g = d\omega/dk$ est indépendante de k puisqu'ici $\omega k = c$.

Le flux instantané d'énergie (W m⁻² dans la direction \mathbf{k}) associé au passage de l'onde électromagnétique est donné par le vecteur de Poynting:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} , \qquad (2.21)$$

ou encore, si l'on moyenne sur une période d'oscillation/longueur d'onde:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0| = \frac{c}{2\mu_0} E_0^2 .$$
 (2.22)

L'intensité (W m $^{-2}$) est donc proportionnelle au carré de l'amplitude.

Dans un milieu autre que le vide, non-conducteur mais polarisable, l'équation (2.17) tient toujours la route, mais on doit remplacer ε_0 et μ_0 par des valeurs appropriées au dit milieu, ε et μ , disons, ce qui permet d'obtenir la vitesse de phase (v) de l'onde électromagnétique dans ledit milieu via (2.18). L'indice de réfraction (n) est défini comme le rapport des vitesses de phase dans le vide versus le milieu:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} \,. \tag{2.23}$$

Le tableau 2.2 liste les indices de réfractions pour quelques substances d'intérêt. Le gros des

Substance	n
Air	1.000293
Н	1.000132
He	1.000036
CO_2	1.00045
Eau	1.333
Ethanol	1.361
Benzene	1.501
Ambre	1.55
Diamant	2.419
Silice (cristal)	1.458
Sel (cristal)	1.5
Verres	1.45 - 1.75

Table 2.2: Indices de réfraction ($\lambda = 589 \text{ nm}$)

Gaz à 0° et 1 atm ; liquides/solides à 20°

variations provient de la permittivité ε , la perméabilité μ ne variant que très peu dans les diélectriques. L'indice de réfraction augmente quand la longueur d'onde diminue. Dans le domaine du visible l'augmentation dépasse rarement 10% en passant de 750 à 400 nm, mais s'accélère plus on s'enfonce dans l'ultraviolet.

2.2.2 Interfaces: transmission et réflexion

Une onde électromagnétique incidente sur un interface entre deux milieux d'indices de réfraction différents est en partie transmise, en partie réfléchie. Il est possible de calculer les fractions transmise et réfléchies en fonction de l'angle d'incidence et des indices de réfraction caractérisant les milieux de chaque coté de l'interface. À l'interface, plusieurs contraintes de continuité sur \mathbf{E} et \mathbf{B} doivent être satisfaites:

- continuité de la composante de **E** tangentielle à l'interface;
- continuité de la composante de $\varepsilon \mathbf{E}$ perpendiculaire à l'interface;
- continuité de la composante de **B** perpendiculaire à l'interface;

- continuité de la composante de $\varepsilon \mathbf{B}/\mu$ parallèlle
- conservation de l'énergie: à l'interface, la divergence du flux de Poynting est nulle (toute l'énergie incidente est soit transmise, soit réfléchie).

La réflection et transmission d'une onde électromagnétique à une interface dépendra donc non seulement de sa direction de propagation \mathbf{k} par rapport à l'interface (l'angle d'incidence θ_i), mais aussi de l'orientation du **plan de polarisation** de l'onde incidente par rapport au **plan d'incidence** de l'onde, soit le plan défini par sa direction de propagation \mathbf{k} et la normale à l'interface. On peut distinguer deux cas limites, tel qu'illustré sur la Figure 2.2: (A) \mathbf{E} parallèle au plan d'incidence, et (B) \mathbf{E} perpendiculaire au plan d'incidence. L'orientation de \mathbf{B} suit directement de la contrainte $\mathbf{k} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Comme vous l'avez vu en PHY-2441, les contraintes de continuité énumérées ci-dessus fixent les amplitudes relatives des composantes de \mathbf{E} (et \mathbf{B}) réfléchies (E_{0r}) et transmises (E_{0t}) par rapport à l'amplitude E_{0i} du faisceau incident. Ces rapports définissent les coefficients de réflectivité (r) et transmissivité (t). Pour des milieux diélectriques on trouve ainsi les équations de Fresnel:

$$r_{\perp} \equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{\perp} = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} , \qquad (2.24)$$

$$t_{\perp} \equiv \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{\perp} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} , \qquad (2.25)$$

$$r_{\parallel} \equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{\parallel} = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i} , \qquad (2.26)$$

$$t_{\parallel} \equiv \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{\parallel} = \frac{2n_i \cos \theta_t}{n_t \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} .$$
(2.27)

où n_i est l'indice de réfraction du milieu dans lequel se propage l'onde incidente, n_t celui du milieu sur lequel l'onde est incidente, θ_i est l'angle d'incidence, θ_r (= θ_i) l'angle de réflexion, et θ_t l'angle de réfraction du faisceau transmis, donné par la Loi de Snell-Descartes:

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t . \tag{2.28}$$

À incidence normale ($\theta_i = 0$), on trouve

$$r_{\parallel}(\theta_i = 0) = -r_{\perp}(\theta_i = 0) = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i} .$$
(2.29)

Pour une interface air-verre $(n_i = 1.0, n_t = 1.5), r = 0.2$ à incidence normale; et à une interface air-eau $(n_t = 1.34), r = 0.145$. Le signe "-" affectant r_{\perp} indique un déphasage de π par rapport à la phase de l'onde incidente.

Sous usage de la Loi de Snell-Descartes (2.28) et de plusieurs identités trigonométriques bien connues, les équations de Fresnel (2.24)–(2.26) peuvent s'exprimer sous forme plus compacte:

$$r_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}, \qquad (2.30)$$

$$r_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}, \qquad (2.31)$$

$$t_{\perp} = \frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)}, \qquad (2.32)$$

$$t_{\parallel} = \frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i - \theta_t)}.$$
(2.33)

En physique environnementale on s'intéressera surtout au contenu énergétique, donc à l'intensité, d'une onde électromagnétique. L'intensité étant proportionnelle au carré des amplitudes, les coefficients de réflexion et transmission pour l'intensité sont alors simplement donnés par:

$$R_{\perp} = r_{\perp}^2 , \qquad R_{\parallel} = r_{\parallel}^2 , \qquad T_{\perp} = t_{\perp}^2 , \qquad T_{\parallel} = t_{\parallel}^2 .$$
 (2.34)



(A) E parallele au plan d'incidence

(B) E perpendiculaire au plan d'incidence



Figure 2.1: Onde électromagnétique incidente sur une interface plane entre deux milieux d'indices de réfraction n_i , n_t , ici air et verre.

La lumière naturelle peut être décrite comme une superposition de tous les plans de polarisation orientés de manière homogène dans le plan perpendiculaire au vecteur de propagation. Si on projette sur dans les plans parallèles ou perpendiculaire à une interface, la lumière naturelle est donc 50% "||" et 50% " \perp ". Le coefficient de réflectivité totale (R) devient alors:

$$R = \frac{1}{2}(R_{\perp} + R_{\parallel}) , \qquad (2.35)$$

et donc, à incidence normale,

$$R(\theta_i = 0) = \frac{1}{2} (R_\perp + R_\parallel) \left(\frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}\right)^2 .$$
(2.36)

Pour notre interface air-verre, R = 0.04, et R = 0.02 pour air-eau. La Figure 2.2 illustre la variation de R_{\perp} (rouge), R_{\parallel} (bleu) et R (noir, éq. (2.35)) en fonction de l'angle d'incidence, pour une interface air-verre ($n_i = 1.0, n_t = 1.5$). Il est remarquable qu'aux angles d'incidence



Figure 2.2: Variation du coefficient de réflectivité totale pour la lumière naturelle (éq. (2.35)) en fonction de l'angle d'indice de l'onde. Les contributions R_{\perp} et R_{\parallel} sont tracées en rouge et bleu, tel qu'indiqué.

 $\theta_i \lesssim 45^\circ$, l'augmentation de R_{\parallel} avec θ_i est compensée par une diminution de R_{\perp} , de telle sorte que R demeure approximativement constant.

2.2.3 Flux et irradiance

Dans ce qui suit on aura à quantifier l'apport énergétique à un système par la radiation électromagnétique. Pour ce faire il est d'usage de définir un **flux radiatif** comme la quantité d'énergie par unité de temps $(J \ s^{-1} \equiv W)$ émise par unité de surface par unité d'angle solide, tel qu'illustré sur la Figure Figure 2.3. Un stéradian (abbrévié "sr") est l'angle solide sous-tendu par une calotte sphérique de surface $S = 1 \ m^2$ sur une sphère de rayon $r = 1 \ m$. Un hémisphère sous-tend un angle solide de $2\pi \ sr$, et la sphère complète $4\pi \ sr$.

On distinguera parfois le **flux spectral** $(F_{\lambda} \text{ ou } F_{\nu})$, soit le flux radiatif à une longueur d'onde (ou fréquence) donnée; ses unités sont alors des W m⁻² sr⁻¹ par unité de longueur d'onde (ou fréquence). Le flux radiatif total est alors l'intégrale du flux spectral sur toute la plage de longueurs d'onde (ou fréquences) d'intrêt.



Figure 2.3: Définition du flux radiatif. Un élément de surface dA émet un cone de radiation électromagnétique dont l'ouverture sous-tend un angle solide égal à l'aire S de la calotte en rouge divisé par r^2 . La géométrie est symétrique sur rotation par rapport à l'axe vertical (pointillés).

2.2.4 Le spectre électromagnétique

Les ondes electromagnétiques sont une solution de équations de Maxwell dans le vide valide pour n'importe quelle longuur d'onde ou fréquence, tant que $\lambda \nu = c$. La "lumière" du parler courant se limite à la plage de longueur d'onde $\lambda = 300-700$ nm, soit une toute petite partie du **spectre électromagnétique** complet.

Au fil des années une terminologie —avec acronymes— à peu près concensuelle s'est établie pour diviser le spectre électromagnétique en **domaines spectraux**. Le Tableau 2.3 en offre une compilation. Du point de vue de la physique environnementale les plages importantes vont de l'ultraviolet rapproché (300nm) et s'étendent jusqu'à $\simeq 50 \,\mu$ m, dans l'infrarouge éloigné.

La frontière à 300nm entre l'ultraviolet moyen et l'ultraviolet rapproché correspond à la plus petite longueur d'onde qui peut atteindre le sol avec une amplitude significative, les plus courtes étant complètement absorbée par l'atmosphère terrestre. La frontière numériquement spécifique à 121 nm entre l'ultraviolet moyen et extrême mérite une explication: elle correspond à la longueur d'onde de la raie spectrale Lyman- α de l'Hydrogène, qui est présente en émission dans le spectre solaire, avec une amplitude significative pour la haute atmosphère terrestre.

2.3 Thermodynamique radiative

2.3.1 Équilibre thermodynamique et corps noir

Le **corps noir** est un concept iconique de la physique statistique, et est illustré schématiquement sur la Figure Figure 2.4. Une cavité creusée dans un solide maintenu à une température T

Domaine	Acronyme	Interval spectral
Gamma	γ	≤ 0.01
Rayons-X durs	HXR	$0.01{-}0.1 \text{ nm}$
Rayons-X mous	SXR	$0.1{-}10 \text{ nm}$
Extrême ultraviolet	EUV	$10{-}121 \text{ nm}$
Ultraviolet moyen	UV	121–300 nm
Ultraviolet rapproché	NUV	300–400 nm
Visible	Vis	400 - 700 nm
Proche infrarouge	NIR	$700 - 10^3 \text{ nm}$
Infrarouge moyen	MIR	$110~\mu\mathrm{m}$
Infrarouge éloigné	FIR	$10-100 \ \mu m$
Micro-ondes	$\mathbf{E}\mathbf{H}\mathbf{F}$	0.1–1 cm
	SHF	$1-100 \mathrm{~cm}$
	UHF	$100{-}10^3 {\rm ~cm}$
Ondes radio	VHF	10–100 m
	$_{ m HF}$	$0.1{-}1 {\rm ~km}$
	MF	110 km
	LF	10–100 km
	VLF	100–1000 km

Table 2.3: Domaines du spectre électromagnétique

contient un "bain" de radiation électromagnétique (ou de photons, dépendant du point de vue!). L'appellation "corps noir" vient du fait que la paroi de la cavité est supposée absorber toute la radiation incidente (réflectivité R = 0!); l'équilibre themodynamique impose alors que la cavité émette des photon au même taux où elle les absorbe, quelle que soit leur énergie (mesurée par leur fréquence ou leur longueur d'onde). L'émissivité d'un corps noir est donc par définition égale à son absorptivité; c'est la Loi de Kirchhoff. Sur la Fig. 2.4, le bain de radiation dans la cavité est observé via un très petit trou, d'où ne s'échappent que quelques photons, afin de ne pas perturber l'équilibre thermodynamique entre le bain de radiation et les parois de la cavité.

Dans ce qui suit on appliquera le principe du corps noir, et en particulier son spectre électromagnétique (§2.3.2 ci-dessous) à l'émission radiative du soleil ou de la terre; on serait en droit de penser ces deux corps célestes seraient très mal approximés par une cavité percée d'un très petit trou! Mais ce qui importe vraiment ici c'est l'équilibre thermodynamique, autrement dit le champs de radiation doit être en équilibre thermique avec la matière, ce qui ne sera possible que si le flux radiatif reçu ou perdu (observable) demeure beaucoup plus petit que le contenu thermique du système durant la période d'observation. Pour une étoile comme le soleil, l'énergie perdue radiativement par sa surface (la photosphère) n'est qu'une minuscule fraction du contenu thermique de l'intérieur. C'est vrai aussi pour la Terre, même si on ne s'en tient qu'à son atmosphère.

2.3.2 La Loi de Planck

Si le système est en équilibre thermodynamique, alors le spectre électromagnétique est entièrement déterminé par la température T du corps noir lui étant associé; c'est la Loi de Planck, ou spectre du corps noir:

$$B_{\nu}(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(h\nu/kT\right) - 1} , \qquad [\mathrm{W}\,\mathrm{m}^{-2}\,\mathrm{Hz}^{-1}\,\mathrm{sr}^{-1}]$$
(2.37)

où $h = 6.626 \times 10^{-34} \,\text{J s}^{-1}$ est la constante de Planck, et $k = 1.38 \times 10^{-23} \,\text{J K}^{-1}$ la constante de Boltzmann. Attention aux unités ici, $B_{\nu}(T)$ donne des Watt par mètre carré par Hertz par



Figure 2.4: Le corps noir de la physique expérimentale. Une cavité creusée dans un solide maintenu par un agent extérieur à une température T. Un très petit trou dans le solide permet de mesurer le spectre de la radiation électromagnétique s'en échappant.

steradian; soit un flux spectral d'énergie par unité de fréquence par unité d'angle solide.

Il est souvent pratique d'exprimer le spectre du corps noir en terme de la longueur d'onde λ plutôt que la fréquence ν . Ce n'est pas simplement une question de remplacer ν par c/λ dans (2.37). Que l'on mesure le flux spectral en terme de λ ou de ν , la quantité d'énergie émise dans un intervalle spectral donné doit être la même:

$$|B_{\nu}(T)\mathrm{d}\nu| = |B_{\lambda}(T)\mathrm{d}\lambda| , \qquad (2.38)$$

Comme $\lambda \nu = c$, on a que $|d\nu| = |d(c/\lambda)| = c d\lambda/\lambda^2$, et donc

$$B_{\lambda}(T) = \frac{2hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/\lambda kT) - 1} , \qquad [W \, m^{-3} \, sr^{-1}]$$
(2.39)

Attention encore aux unités, il s'agit ici d'un flux spectral d'énergie par unité d'angle solide, soit la quantité d'energie émise dans un intervalle de longueur d'onde par unité de surface émettrice par unité d'angle solide du faisceau lumineux (viz. Fig. 2.3).

La Figure 2.5 présente une série de spectres de corps noir, couvrant les plages de longueurs d'onde et de températures qui seront particulièrement importantes pour ce cours. Sur une telle échelle linéaire en longueur d'onde, à basses températures ($T \leq 1000 \text{ K}$) le spectre est plutôt plat, mais à plus hautes température développe un pic marqué aux courtes longueurs d'ondes. Il est facile de montrer, en dérivant le membre de droite de l'éq. (2.39), que le pic du spectre du corps noir est situé à une longueur d'onde λ_{\max} (en nm $\equiv 10^{-9}$ m) donnée par:

$$\lambda_{\max} = \frac{2.897 \times 10^6}{T}$$
 [nm] (2.40)

avec T en degrés Kelvin. C'est la Loi de déplacement de Wien. On peut vérifier que le spectre "corps noir" du soleil ($T \simeq 6000 \,\mathrm{K}$) pique à $\lambda_{\max} \simeq 480 \,\mathrm{nm}$, et celui de la Terre ($T \simeq 300 \,\mathrm{K}$) à $\simeq 10^4 \,\mathrm{nm}$, ou encore $10 \,\mu\mathrm{m}$.

Le flux d'énergie émise par une surface à température T dans l'hémisphère la recouvrant se calcule en intégrant la la Loi de Planck (2.39) sur les longueurs d'onde. On obtient ainsi la Loi de Stefan:

$$F = \sigma T^4 , \qquad [\mathrm{W}\,\mathrm{m}^{-2}] \tag{2.41}$$



Figure 2.5: Spectre du corps noir, pour diverses températures d'intérêt (indiquées en K). Les points marquent le pic de chaque spectre, correspondant à la Loi de déplacement de Wien (2.40). Notez l'échelle verticale logarithmique.

où la constante de Stefan-Boltzmann σ est donnée par

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5.67 \times 10^{-8} \,\mathrm{W} \,\mathrm{m}^{-2} \,\mathrm{K}^{-4} \;. \tag{2.42}$$

On verra plus loin que le spectre solaire n'a pas exactement la forme d'un spectre de corps noir, bien que ce dernier en offre une bonne première approximation. Connaissant (c'est mesurable!) le rayon ($R_{\odot} = 6.96 \times 10^8$ m) et la luminosité ($L_{\odot} = 3.83 \times 10^{26}$ W) du soleil, on peut définir une **température effective** via la Loi de Stefan:

$$L_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T^4 \qquad \rightarrow \qquad T_{\text{eff}} = \left(\frac{L_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^2 \sigma}\right)^{1/4}$$
 (2.43)

Pour le soleil, on arrive à $T_{\rm eff} = 5750 \,\mathrm{K}$.

Notons finalement qu'un corps noir émet sa radiation de manière spatialement **isotrope**, i.e. sans aucune dépendance sur la direction d'émission; par exemple, sur la Figure 2.3, le flux radiatif est indépendant de l'angle θ .

2.3.3 Flux de chaleur

Considérons deux corps noir placés "en contact" via leur champ de radiation. Chaque corps noir, étant un absorbeur parfait, absorbera la radiation émise par l'autre. Si les deux corps noirs ne sont pas à la même température, le plus froid des corps noirs gagnera au change, obtenant un gain net d'énergie. Ce gain net sera proportionnel à la différence de l'énergie totale émise par chaque corps noir.

Considérons une situation où le corps noir plus chaud est à une température T_b légèrement plus élevé que la température T_a du plus froid, i.e., $T_b = T_a + \delta T$, avec $\delta T \ll T_a, T_b$. Utilisant la Loi de Stefan (2.41), on peut écrire:

$$L_b - L_a = \sigma (T_b^4 - T_a^4)$$

$$= \sigma((T_a + \delta T)^4 - T_a^4)$$

= $\sigma((T_a^4 + T_a^3 \delta T + ...) - T_a^4)$
 $\simeq \sigma T_a^3 \delta T$. (2.44)

La dernière égalité approximative résulte d'avoir négligé tous les termes en $(\delta T)^2$, $(\delta T)^3$, etc., dans le développement du polynôme d'ordre 4 $(T_a + \delta T)^4$. Un flux d'énergie radiative (\mathbf{q}_R) s'écoule donc du chaud vers le froid. De manière plus générale on écrit:

$$\mathbf{q}_R = -\chi_R \nabla T , \qquad (2.45)$$

où χ_R est le coefficient de conductivité radiative (unités: W m⁻¹ K⁻¹).

Dans un corps noir, la radiation est en équilibre thermodynamique avec la matière; ceci revient à dire qu'il y a équipartition d'énergie entre l'énergie thermique des constituants microscopiques (vitesse thermique, excitation d'états vibratoires, phonons, etc.) et le champ de radiation. Deux corps noirs mis en contact échangeront donc de l'énergie via collisions/vibrations de leur constituants. Comme on a équipartition de l'énergie, le même argument que ci-dessus s'applique à cette **conduction thermique**, conduisant, pour deux corps noirs en contact, à un flux de chaleur qu'on écrira maintenant comme:

$$\mathbf{q}_C = -\chi_C \nabla T , \qquad (2.46)$$

où χ_C est maintenant le coefficient de conduction thermique (unités: toujours W m⁻¹ K⁻¹).

2.4 Réservoirs, flux, sources et puits

Bien des questions en physique environnementale impliquent des systèmes complexes, que l'on peut souvent représenter comme un réseau de **réservoirs** (de chaleur, de d'eau, de CO_2 , etc.), sujets à des gains ou pertes associés à des **sources** ou **puits** externes au système, et interconnectés de manière telle qu'il existe des **flux** entre réservoirs. Nous introduisons ici une formulation sous forme d'équations différentielles ordinaires couplées qui permettent de modéliser quantitativement ce genre de situations. Cette formulation pourra paraitre plutôt ad hoc à prime abord, mais on verra au fil des chapitres qui suivent qu'elle est en fait tout à fait appropriée à bien des systèmes d'intérêt en physique environnementale.

On considére ici deux réservoirs, A et B, contenant une certaine quantité de quelque chose (Q), et on cherche à modéliser l'évolution temporelle de Q(t) dans chacun des réservoir, en réponse à la présence d'une source et d'un puit de Q dans le réservoir A, ainsi qu'un flux entre les deux réservoirs; aux fins de ce petit exercice on définira ces "ingrédients" comme suit:

- Source pour réservoir A: S(t)
- Puit pour réservoir A: σQ_A^4
- Flux entre réservoirs A et B: $\pm (Q_A Q_B)/\tau$

L'idée est illustrée schématiquement à la Figure 2.6 pour un système à deux réservoirs. Ici τ est un temps caractéristique d'échange de Q entre les deux réservoirs, et on a choisi une forme particulière pour le puit de Q dans le réservoir A, soit $\propto Q_A^4$. Si vous avez encore en tête la fin de la section précédente, le fait que le flux soit proportionnel à la différence de contenu Q entre les deux réservoir suggère que ceux-ci pourraient être deux corps noirs en contact, et Q la température, dans lequel cas le flux de chaleur entre les réservoir devrait effectivement être proportionnel à la différence de température (revoir les éqs. (2.44)–(2.45) au besoin). De plus, avec $Q \equiv T$, le puit $\propto \sigma Q_A^4$ ressemble aussi dangereusement à l'énergie irradiée dans le vide par un corps noir... Mais Q pourrait aussi bien être la quantité de fluide dans deux vases communicants, la source un robinet déversant du fluide dans un des vases, et le puit une forme particulière d'évaporation. Ce genre de formulation est d'applicabilité très générale!



Figure 2.6: Représentation schématique d'un système Réservoir+Source+Puit+Flux. On a ici deux réservoirs, A et B, entre lesquels peut exister un flux d'une quantité Q, qui peut aller de A vers B ou l'inverse. Ici une source S ajoute du Q au réservoir A, à un taux spécifié par la fonction S(t), et un puit qui évacue Q à un taux $\propto Q^4$. Ce petit modèle peut être interprété comme une représentation très simplifiée du bilan de chaleur de la couche externe de l'océan (voir texte).

Écrivons maintenant les équations d'évolution pour la quantité Q contenue dans chaque réservoir, utilisant les formes mathématiques listées plus haut pour nos différents ingrédients:

$$\frac{\mathrm{d}Q_A}{\mathrm{d}t} = -\widetilde{\frac{Q_A - Q_B}{\tau}} + \widetilde{S(t)} - \widetilde{\sigma Q_A^4} , \qquad (2.47)$$

$$\frac{\mathrm{d}Q_B}{\mathrm{d}t} = +\underbrace{\frac{Q_A - Q_B}{\tau}}_{\mathrm{Flux}A \to B} . \tag{2.48}$$

Notons que le terme de flux apparait avec des signes opposés aux deux membres de droite, conséquence du fait que (trivialement) le flux sortant du réservoir A vers B est le même flux qui entre dans le réservoir B du A, autrement dit la quantité totale de Q (soit $Q_A + Q_B$) est conservée lors du transfert entre les deux réservoirs.

Ces deux équations différentielless ordinaires (EDO) nonlinéaires et couplées se solutionnent aisément numériquement¹. La Figure 2.7 montre deux exemples, différant seulement dans la forme du terme source: constant dans le graphique du haut, mais périodique dans celui du bas. L'amplitude de S dans la solution du haut a été ajustée de manière à ce que sur la durée de la simulation, la même quantité de Q soit injectée dans chaque solution. Dans les deux cas la condition initiale est $Q_A = Q_B = 0$. Le comportement de la simulation du haut (Sconstant) est facile à saisir intuitivement: initialement Q_A augmente car le puit est $\simeq 0$, ce qui crée une différence $Q_A - Q_B > 0$ qui alimente le réservoir B, qui augmente à son tour, en retard sur le A par un temps de l'ordre de τ (= 1 ici), le temps caractéristique d'échange de Q entre les réservoirs. On arrive éventuellement à une solution stationnaire (d/dt = 0) des

¹par exemple via un des nombreux solveur d'EDOs contenus dans la librarie SciPy en Python.



Figure 2.7: Solutions numériques des équations (2.47)–(2.48) pour $\sigma = 1$ et $\tau = 1$, à partir d'une condition initiale $Q_A = Q_B = 0$, pour deux termes sources (pointillés) différents: en haut, S constant; et bas, S(t) variant périodiquement, mais non-sinusoidalement (voir texte).

éqs. (2.47)-(2.48), soit:

$$Q_A = \left(\frac{S}{\sigma}\right)^{1/4} , \qquad Q_B = Q_A . \tag{2.49}$$

La solution du bas, avec terme source périodique (mais non-sinusoidal) suit la même tendance générale d'augmentation suivie de stabilisation, mais dans sa phase stabilisée conserve la périodicité imposée par celle du terme source. On remarquera comment la séquence temporelle du réservoir A (rouge) retarde par rapport à celle du terme source, conséquence de "l'inertie" du réservoir A, et similairement comment la phase de la séquence pour le réservoir B (vert) oscille à plus faible amplitude et retarde par rapport au A, conséquence du temps fini requis pour échanger entre A et B (constante τ).

Vous aurez à expérimenter avec ce genre de petit modèle dans le cadre de votre premier TP. En fait, le "modèle" de la Figure 2.6 et la partie périodiquement stationnaire de la Figure 2.7 pourrait décrire en première approximation l'évolution de la température (Q) de la couche superficielle des océans (réservoir A) en réponse à l'irradiance solaire (Source S(t) périodique, maximale à midi et nulle durant toute la nuit), les pertes radiatives vers l'atmosphère (Puit σQ_A^4), et les échanges par transport de chaleur vers les couches profondes de l'océan (réservoir B).

2.5 Lois de conservation

Les couches superficielles de l'océan ne sont pas vraiment un "contenant" genre réservoir, et ne sont pas démarquées des couches profondes par une interface bien définie. Cependant l'idée générale sous-jacente au modèle très simple de la Fig. 2.6, soit un principe de conservation (on pourrait même dire "de plomberie") peut se reformuler de manière beaucoup plus réaliste, en considérant notre fameuse quantité générique Q, ainsi que ses flux, sources et puits comme des variables physiques continues qui dépendent de la position et du temps.

Considérons un volume V de forme arbitraire, délimité par une surface fermée S, et contenant une "substance" $q(\mathbf{x}, t)$ (qui pourrait être la température, la densité d'un polluant, etc.). Le contenu total de q dans le volume V à un temps t se calculerait en intégrant q sur V:

$$Q(t) = \int_{V} q(\mathbf{x}, t) \mathrm{d}V \ . \tag{2.50}$$

Similairement, si une source $s(\mathbf{x}, t)$ (unités: "q" par unité de volume et par unité de temps) ou un puit $p(\mathbf{x}, t)$ (unités: idem que s) est présent à l'intérieur du volume, la quantité de q gagnée via la source ou perdue via le puit, par unité de temps, sera donnée par une intégrale du genre:

$$\int_{V} (s(\mathbf{x},t) - p(\mathbf{x},t)) \mathrm{d}V \ . \tag{2.51}$$

Dénotons maintenant par $\mathbf{f}_q(\mathbf{x}, t)$ le flux (unités: "q" par unité de surface par unité de temps) de notre quantité q traversant un élément de surface dS. La quantité nette de q entrant ou sortant de V par unité de temps t est alors donnée par:

$$\Phi(t) = -\oint_{S} \mathbf{f}_{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} \mathrm{d}S , \qquad (2.52)$$

où $\hat{\mathbf{n}}$ est un vecteur normal défini en chaque point de la surface S, et orienté extérieurement au volume, ce qui impose d'inclure le signe "—" de manière à ce qu'un flux net Φ positif corresponde à un gain de q dans le volume (par convention). Notez bien que Φ est un scalaire, mais \mathbf{f}_q est un champ vectoriel.

Nous avons maintenant tous les morceaux requis pour écrire une loi de conservation pour notre substance q:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V} q(\mathbf{x}, t) \mathrm{d}V = -\oint_{S} \mathbf{f}_{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} \mathrm{d}S + \int_{V} (s(\mathbf{x}, t) - p(\mathbf{x}, t)) \mathrm{d}V .$$
(2.53)

Mais, on peut faire mieux! En interchangeant la dérivée temporelle et l'intégrale de volume au membre de gauche, et en appliquant le théorème de la divergence au premier terme du membre de droite, on peut écrire notre loi de conservation sous la forme:

$$\int_{V} \left[-\frac{\partial q}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{f}_{q} + s(\mathbf{x}, t) - p(\mathbf{x}, t) \right] \mathrm{d}V = 0 \ . \tag{2.54}$$

Comme le volume V est de forme tout à fait arbitraire, pour que l'intégrale soit nulle en général, il faudra que l'intégrant soit lui-même nul, d'où:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}_q = s(\mathbf{x}, t) - p(\mathbf{x}, t) . \qquad (2.55)$$

Fondamentalement, cette équation différentielle aux dérivées partielles représente une représentation continue du système discret "Réservoirs+Source+Puit+Flux" introduit à la §2.4. Dans les deux cas, en pratique pour une quantité q donnée la principale difficulté sera de développer des expressions appropriées pour les flux, sources et puits. Cela nous tiendra pas mal occupés aux chapitres 4 et 5 !

notes24.tex, January 9, 2024

Exercices:

2.1: Vous disposez d'un four domestique typique développant une puissance tout aussi typique de 3000 W. Calculez le temps requis pour

- 1. Chauffer 0.25 m^3 d'air de 20 à 180°C ;
- 2. Faire fondre 1 kg de glace;
- 3. Chauffer l'eau ainsi produite jusqu'à son point d'ébulition;
- 4. Évaporer la totalité de cette eau à 100°.

2.2: Manipulez les équations de Maxwell dans le vide (2.13)–(2.16) pour obtenir une équation d'onde pour le champ magnétique.

2.3: Démontrez les quatre caractéristiques de l'onde plane électromagnétique, énumérées tout juste avant l'éq. (2.21).

2.4: À partir de la Loi de Planck (2.39), obtenez la Loi de déplacement de Wien (2.40) et la Loi de Stefan (2.41).

2.5: Considérons que le soleil émet un spectre d'onde électromagnétique bien décrit par la Loi de Planck pour un corps noir à T = 5770 K. Calculez la fraction de l'énergie totale émise dans les bandes de longueur d'onde suivantes:

- 1. Ultraviolet éloigné: $10 \le \lambda \le 121 \text{ nm};$
- 2. Ultraviolet moyen: $121 \le \lambda \le 300 \text{ nm}$;
- 3. Ultraviolet rapproché: $300 \le \lambda \le 400 \text{ nm}$;
- 4. Lumière visible rapproché: $400 \le \lambda \le 700$ nm;
- 5. Infrarouge rapproché: $700 \le \lambda \le 10^3$ nm;
- 6. Infrarouge moyen: $10^3 \le \lambda \le 10^4 \,\mathrm{nm}$;
- 7. Infrarouge éloigné: $10^4 \le \lambda \le 10^5$ nm;

2.6: Refaites les calculs de l'exercice précédent, cette fois pour un corps noir de température T = 287 K, caractéristique de l'émission thermique de la Terre.

Bibliographie:

Ce chapitre se veut un rappel —et non une présentation systématique et/ou rigoureuse et/ou complète— de notions et concepts que vous avez en grande partie déjà couverts dans les deux cours qui sont pré-requis à PHY-2100: *Optique et ondes électromagnétiques* (PHY-2441) et *Physique thermique et statistique* (PHY-2215). Je vous réfère à vos notes de cours pour détails et/ou clarifications supplémentaires, au besoin.

Je prend cette occasion pour aussi dire un gros merci à mon collègue Pierre Bergeron, pour m'avoir refilé ses excellentes notes de cours de PHY-2215, ce qui m'a permi de me rafraichir efficacement la mémoire sur certaines subtilités du sujet; la mémoire étant une faculté qui oublie !