PHY 1441
Les polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre font leur apparition dans la solution de l'équation de Laplace en coordonnées sphriques polaires (r, θ, ϕ), incluant les situations axisymmtriques $(\partial/\partial\phi = 0)$. Dans cette dernière situation l'équation de Laplace pour un potentiel φ prend la forme:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \ ,$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \ ,$$

on peut démontrer qu'une solution générale prend la forme

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(Ar^{\ell} + \frac{B}{r^{\ell+1}}\right) P_{\ell}(\cos\theta) \ ,$$

où les $P_\ell(\cos\theta)$ sont les **polynômes de Legendre**, et où les valeurs des coefficients numériques A_ℓ et B_ℓ sont en général déterminées par les conditions limites sur φ (ceci incluant la forme géométrique du domaine). Les polynômes de Legendre représentent la solution de l'équation différentielle:

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial P_\ell(\cos\theta)}{\partial \theta}\right) = -\ell(\ell+1)\sin\theta \, P_\ell(\cos\theta) \ ,$$

mais peuvent aussi être calculés directement via par le développement en série:

$$P_\ell(\mu) = \sum_{k=0}^{\ell/2} (-1)^k \frac{(2\ell - 2k)!}{2^\ell k!(\ell-k)!(\ell-2k)!}\mu^{\ell-2k} \ ,$$

où $x!$ est la factorielle de x. Voici les premiers cinq polynômes de Legendre, exprimés en terme de la variable $\mu = \cos\theta$:

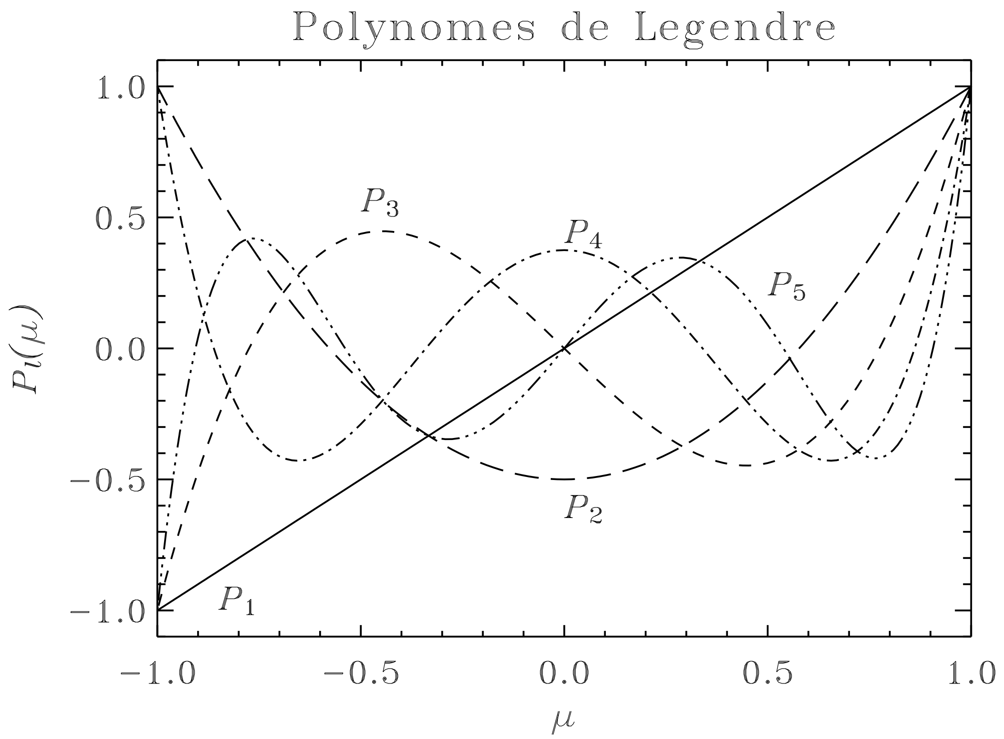
$$P_0(\mu) = 1 \ , \qquad P_1(\mu) = \mu \ , \qquad P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1) \ ,$$

$$P_3(\mu) = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu) \ , \qquad P_4(\mu) = \frac{1}{8}(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3) \ ,$$

$$P_5(\mu) = \frac{1}{8}(63\mu^5 - 70\mu^3 + 15\mu) \ .$$

Remarquez que l'ordre ℓ du polynôme correspond à la valeur de l'exposant le plus élevé du membre de droite, tel qu'il est de rigueur quand on parle de polynôme. Il ne serait pas particulièrement utile de lister les $P_\ell(\mu)$ jusqu'à $\ell \to \infty$, ou judicieux d'utiliser le développement en série donné ci-dessus pour les calculer. On préférera plutôt utiliser la relation de récurrence suivante, qui permet de calculer un $P_\ell(\mu)$ en autant que les $P_{\ell-1}$, $P_{\ell-2}$, ... P_0 soient déjà connus:

$$(2\ell+1)\mu P_\ell(\mu) = (\ell+1)P_{\ell+1}(\mu) + \ell P_{\ell-1}(\mu) \ , \qquad \ell = 1, 2, 3, ...$$



Notons que dans le calcul *numérique* des P_ℓ's d'ordre élevé, il est avantageux de reécrire cette relation sous la forme

$$P_{\ell+1}(\mu) = 2\mu P_\ell(\mu) - P_{\ell-1}(\mu) - \frac{\mu P_\ell(\mu) - P_{\ell-1}(\mu)}{\ell+1} , \qquad \ell = 1, 2, 3, ...$$

afin d'éviter l'accumulation des erreurs de troncation. Une autre possibilité consiste à utiliser la formule dite de Rodrigues, qui exprime les P_ℓ et terme de dérivées successives d'un polynôme dit "générateur":

$$P_\ell(\mu) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \right)^\ell (\mu^2 - 1)^\ell .$$

Les polynômes de Legendre sont sujets à une propriété d'orthogonalité souvent très utile:

$$\int_{-1}^{+1} P_\ell(\mu) P_{\ell'}(\mu) \mathrm{d}\mu = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq \ell' , \\ \frac{2}{2\ell+1} & \text{si } \ell = \ell' . \end{cases}$$

Quand les conditions limites du problème à l'étude sont suffisamment symmétriques, c'est cette propriété qui permet de calculer directement —et facilement— les A_ℓ et B_ℓ comme des intégrales de produit des valeurs des condition limites par les P_ℓ's, et ainsi obtenir une solution analytique exacte à l'équation de Laplace, même en plus d'une dimension spatiale.

Pour approfondir le sujet:

Griffith, D.J., *Introduction to electrodynamics*: §3.3.2.
Arfken, G., *Mathematical Methods for Physicists*, 2e éd., Academic Press (1970): chap. 12.