PHY 1441
Le Laplacien d'un champ vectoriel

Dans une expression telle la Loi d'Ampère exprimée en terme d'un potentiel vecteur $\mathbf{A}$,

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \ , \tag{1}$$

le Laplacien agit sur chaque composante du vecteur $\mathbf{A}$, *incluant les vecteur unitaires définissant le systèmes de coordonnées*, i.e., on a

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{\partial^2}{\partial i^2}(A_i \hat{\mathbf{i}}) + \frac{\partial^2}{\partial j^2}(A_j \hat{\mathbf{j}}) + \frac{\partial^2}{\partial k^2}(A_k \hat{\mathbf{k}}) \ .$$

Dans le cas des coordonnées cartésiennes (x, y, z), les $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ ne sont pas fonction de la position, et les composantes de l'équation (1) sont simplement:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_x = -\mu_0 J_x \ , \tag{2a}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_y = -\mu_0 J_y \ , \tag{2b}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_z = -\mu_0 J_z \ , \tag{2c}$$

comme on s'y attendrait (naivement) en appliquant ∇^2 sur A_x, etc. Cependant, en coordonnées sphériques et cylindriques, les vecteurs unitaires contiennent des dépendences explicites sur les coordonnées. Voici ci-dessous les composantes du Laplacien d'un vecteur dans ces deux systèmes de coordonnées.

Coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

Les composantes du Laplacien d'un vecteur $\mathbf{A}$ sont:

$$[\nabla^2 \mathbf{A}]_r = \nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial A_\theta \sin\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \ , \tag{3a}$$

$$[\nabla^2 \mathbf{A}]_\theta = \nabla^2 A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \ , \tag{3a}$$

$$[\nabla^2 \mathbf{A}]_\phi = \nabla^2 A_\phi + \frac{2}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2\theta} \ , \tag{3c}$$

avec le Laplacien habituel pour un scalaire A:,

$$\nabla^2 A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} \ . \tag{3d}$$

Coordonnées cylindriques (s, ϕ, z)

Les composantes du Laplacien d'un vecteur $\mathbf{A}$ sont:

$$[\nabla^2 \mathbf{A}]_s = \nabla^2 A_s - \frac{A_s}{s^2} - \frac{2}{s^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \ , \tag{4a}$$

$$[\nabla^2 \mathbf{A}]_\phi = \nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{s^2} + \frac{2}{s^2}\frac{\partial A_s}{\partial \phi} \ , \tag{4b}$$

$$[\nabla^2 \mathbf{A}]_z = \nabla^2 A_z \ , \tag{4c}$$

avec le Laplacien habituel pour un scalaire A:

$$\nabla^2 A = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial A}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ . \tag{4d}$$

Pour approfondir le sujet:

G.K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press (1967): Appendice 2

Arfken, G., *Mathematical Methods for Physicists*, 2$^{\text{e}}$ éd., Academic Press (1970): chap. 2.