PHY 1441
Notes supplémentaires

5.4 Stabilité d'une distribution de charges

Le potentiel électrostatique est un excellent objet mathématico-physique pour explorer les questions d'équilibre et de stabilité en électrostatique.

Un assemblage de charges sera en **équilibre** si la force de Coulomb totale sur chacune des charges est nulle; autrement dit, on veut avoir $\mathbf{E} = 0$ là où se situent chacune des charges. L'équilibre ainsi produit sera **stable** si et seulement si tout déplacement de faible amplitude de n'importe quelle des charges produit une force de rappel s'opposant au déplacement, i.e., ramenant la charge déplaçée vers son point d'équilibre.

Considérons tout d'abord un exemple simple en 1D. Deux charges positives sont "collées" aux positions $\pm q$ sur l'axe-x. Le potentiel électrostatique sur l'axe-x sera donné par

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{2}\frac{q_i}{|x-x_i|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|x-a|}+\frac{1}{|x+a|}\right)$$

Ce potentiel 1D est illustré au haut de la Figure 5.4.1. Notez la divergence à $x = \pm a$. Le point d'équilibre est évidemment à $x = 0$, là où $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x = 0$, comme vous auriez pu facilement le calculer directement à partir de la Loi de Coulomb.

Il est également clair sur la Figure que le négatif du gradient pointe vers $x = 0$; ceci implique donc qu'une charge-test positive déplacée de la position $x = 0$ ressentira une force tendant à la ramener vers son point de départ $x = 0$; un tel état d'équilibre est stable (pensez à l'analogie gravitationnelle, et à une boule plaçée sur une surface concave vers le haut). Cependant si la charge-test est négative, alors l'équilibre est instable, puisque la force électrostatique agissant sur une charge négative légèrement déplacée de la position $x = 0$ tendra à amplifier ce déplacement, même si initialement infinitésimal. Vous pouvez encore une fois facilement vérifier tout ceci directement à l'aide de la Loi de Coulomb.

Supposons maintenant que la charge test est libre de se déplacer également en y. Notre potentiel φ est maintenant fonction de deux coordonnées spatiales. Sa forme est illustrée au bas de la Figure 5.4.1. Le point d'équilibre ($\nabla\varphi = 0$) est toujours à $(x, y) = (0, 0)$. On remarque cependant que ce point d'équilibre est un point de selle, c'est à dire que

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} > 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} < 0 \qquad \text{pour } (x, y) = (0, 0)\ .$$

Revenons à l'analogie de la boule se déplaçant sur une surface sous l'influence de la gravité; un point de selle ne représente pas une position de stabilité: le mouvement est maximalement stabilisé dans une direction, mais maximalement déstabilisé dans la direction orthogonale. Et pour une charge de signe inverse, les directions de stabilité et instabilité sont simplement inversées. Dans les deux cas, charge-test positive ou négative, il existe donc une direction où un déplacement infinitésimal est instable, donc pas d'équilibre stable ici, à moins que le déplacement ne soit contraint dans une direction spécifique, comme dans le cas 1D considéré précédemment. On en

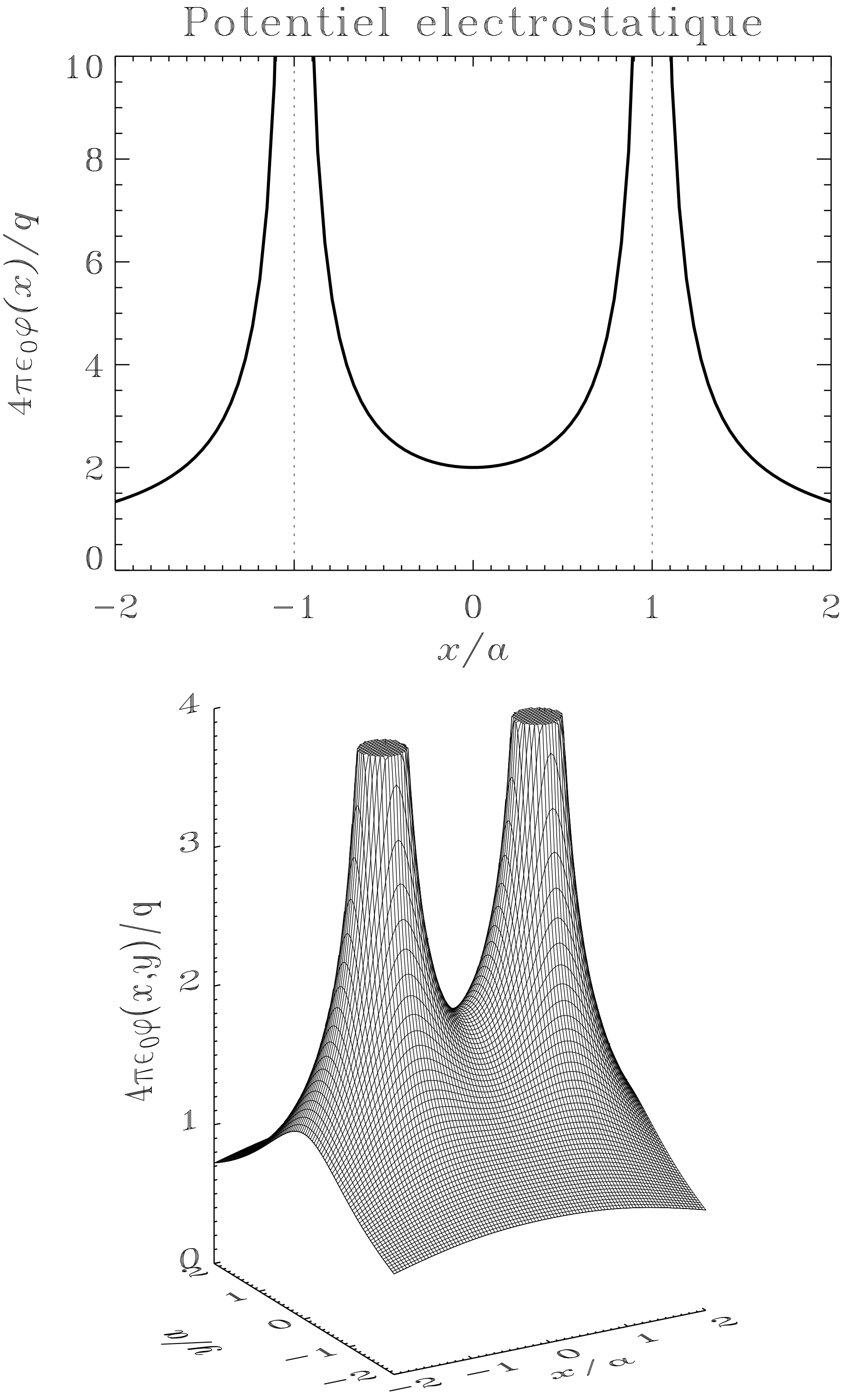

Figure 5.4.1: Potentiel électrostatique pour deux charges positives positionnées à $\pm a$ sur l'axe-x. La position d'équilibre pour une troisième charge "test" est à $x = 0$, Si le déplacement de la charge est contraint à l'axe-x, alors l'équilibre est stable si la charge test est positive; cependant, si le déplacement est permis dans la direction-y, l'équilibre est instable quelquesoit le signe de la charge test (voir texte).

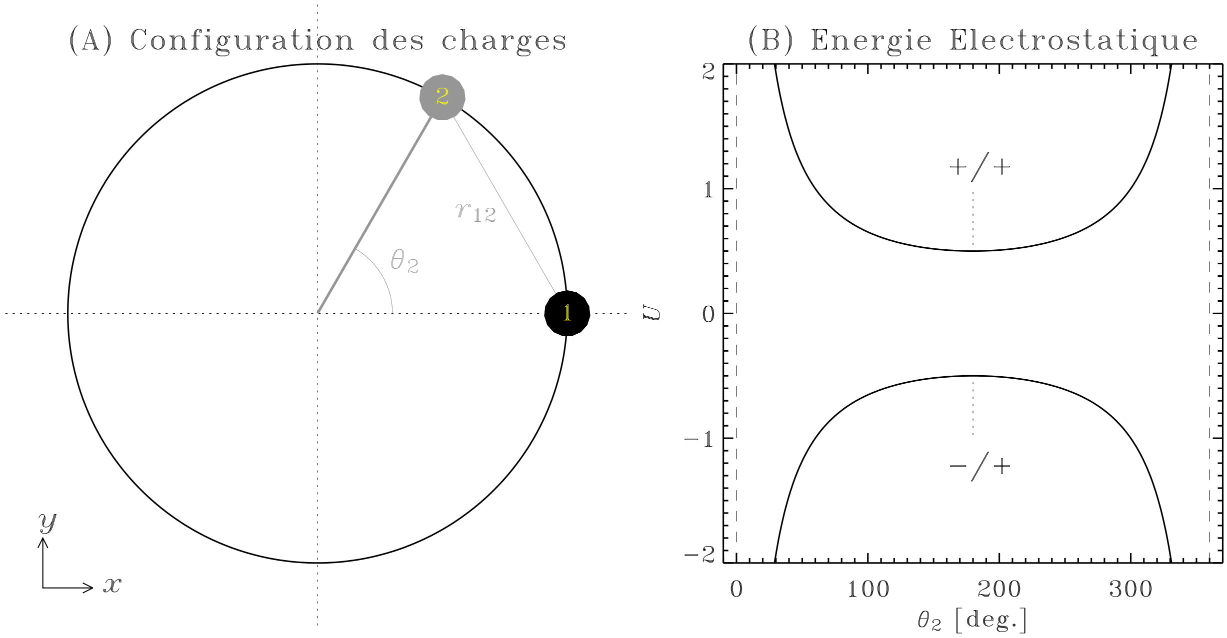

Figure 5.4.2: Système de deux charges contraintes à se déplacer le long d'un anneau circulaire de rayon R. Il n'y a ici effectivement qu'un seul degré de liberté dans le système, soit l'angle θ_2 sous-tendu par les deux charges. L'équilibre à $\theta_2 = \pi$ est stable ou instable, dépendant des signes des charges (voir texte).

conclut donc qu'il y a deux conditions sur φ qui doivent être satisfaites pour avoir un équilibre stable:

Équilibre: $\nabla\varphi = 0$

Stabilité: φ est un extremum

Considérons un second exemple, où deux charges sont confinées à un anneau circulaire de rayon R, mais libres de se déplacer le long de l'anneau, comme illustré sur la Figure 5.4.2A. On peut mesurer la position de chaque charge en terme d'un angle θ mesuré par rapport à la direction positive de l'axe des x, l'origine coincidant avec le centre de l'anneau. Cependant il n'y a vraiment qu'un degré de liberté dans le système, soit l'angle θ_2 sous-tendu entre les deux charges. On peut donc, sans perte de généralité, fixer la première à $\theta = 0$, et ne conserver que θ_2 comme variable du problème. Il s'agit maintenant de trouver l'angle θ_2 qui correspond à un état d'équilibre stable, si il en existe un.

Nous connaissons la marche à suivre: chercher un extremum de $\varphi(\theta)$. Dans le cas présent c'est facile, mais en anticipation de ce qui suit nous utiliserons une approche légèrement différente, (mais ici mathématiquement quasi-équivalente) consistant à chercher une position où l'énergie électrostatique U est minimisée:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} q_i\varphi(\mathbf{r}_i) = \pm\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{12}} = \pm\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(1-R\cos\theta_2)^2+(R\sin\theta_2)^2}} \ .$$

La Figure 5.4.2B illustre cette variation, pour une paire de charge positives ("+/+") et une paire négative/positive ("−/+"). Dans le premier cas U est minimisé à $\theta_2 = \pi$. Dans le second cependant $U(\theta_2)$ est minimale à $\theta_2 = 0$ ou $\theta_2 = 2\pi$, ce qui corresponds à placer les deux charges à la même position sur l'anneau. Intuitivement, ceci est tout-à-fait correct: deux charges de même signe vont tendre à s'éloigner le plus possible l'une de l'autre sous l'effet de la force de Coulomb, tandis que deux charges de signes opposé vont s'attirer jusqu'à collision.

À date ceci est essentiellement identique au premier problème considéré précédemment, et n'est pas moins compliqué que de passer par le potentiel. La puissance de la technique "énergie" devient apparente pour des problèmes plus complexes. Ajoutons une troisième charge à l'anneau, comme illustré sur la Figure 5.4.3. Il y a maintenant deux degrés de liberté dans le système, θ_2 et θ_3. Le point d'équilibre stable doit satisfaire simultanément aux quatre conditions sur le potentiel:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_2} = 0 \ , \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_3} = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial {\theta_2}^2} > 0 \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial {\theta_3}^2} > 0 \ .$$

Retroussez-vous les manches et exprimez-moi r_{12}, r_{13} et r_{23} en termes de θ_2 et θ_3, et imaginez maintenant dériver ça deux fois par rapport à x et y, et solutionner le problème de recherche de zéro correspondant... pas amusant...

La Figure 5.4.3B illustre la variation de l'énergie électrostatique U dans le plan $[\theta_2, \theta_3]$, pour la situation où les trois charges sont du même signe. On voit immédiatement qu'il y a deux configurations stables possibles, lorsque les charges sont positionnées aux sommets d'un triangle équilatéral (deux configurations car les charges 2 et 3 peuvent ici être "échangées" sans changement de l'énergie électrostatique).

On déduit de tout ceci un critère alternatif pour l'existence d'un équilibre stable, basé cette fois sur l'énergie électrostatique:

Pour avoir un équilibre stable,
l'énergie électrostatique U doit être est minimisée

Dans tous les cas considérés ci-dessus la structure de l'espace de phase en U est étroitement reliée à celle de l'espace de phase pour φ, puisque U peut être défini en termes de φ. Cependant l'approche énergétique aux problèmes de stabilité s'avère très puissante dans des situations beaucoup plus générales. Si un système physique est instable, ceci implique qu'un mouvement de certaines composantes du système peut être déclenché "spontanément", dans le sens qu'une perturbation extérieure d'amplitude infinitésimale est amplifiée par la dynamique du système lui-même. Dans les cas considérés ici, ceci implique, au minimum, un mouvement des charges; une énergie cinétique est associée à ces mouvements, et cette énergie doit venir de quelque part. Si un système est instable, *il doit exister dans le système un réservoir d'énergie dans lequel l'instabilité peut puiser.* Cependant si l'énergie d'un système est déjà minimale dans son espace de phase, alors il n'existe pas de tel réservoir (ou plus précisément, il est vide!), et donc le système ne peut être instable.

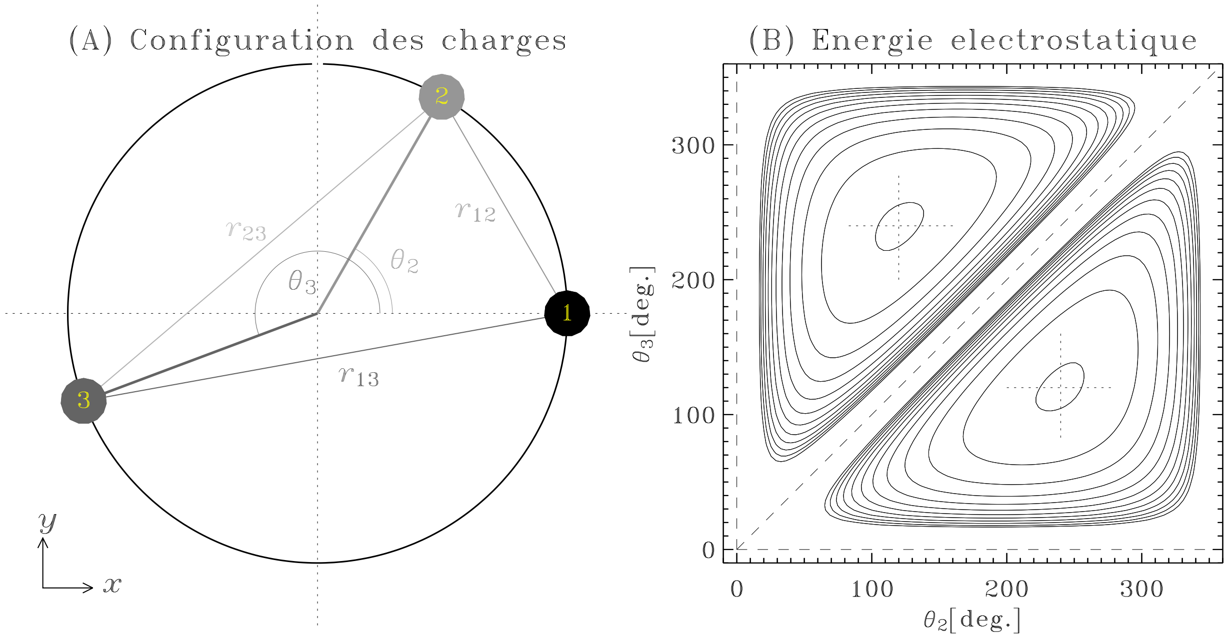

Figure 5.4.3: Système de trois charges contraintes à se déplacer le long d'un anneau circulaire. Il y a maintenant deux degrés de liberté dans le système, soit les angles θ_2 et θ_3. Si toutes les charges sont du même signe, il y a deux configurations d'équilibre possibles (deux extrema pour $\varphi(\theta_2, \theta_3)$ en B), mais qui sont effectivement identiques (interchange des charges 2 et 3). Les lignes en tirets indiquent des configurations "interdites", où deux charges occupperaient la même position.

5.5 Le théorème d'Earnshaw

Dans le contexte de l'électrostatique, vous aurez certainement compris que trouver un minimum de U revient essentiellement à trouver un extremum de φ. Nous avons également vu qu'en général, le potentiel électrostatique satisfait à une équation de Poisson, qui se simplifie à une équation de Laplace en l'absence de charges dans le domaine considéré. Les solutions à l'équation de Laplace s'avèrent à posséder une propriété qui est non seulement intéressante mathématiquement, mais qui a des conséquences physiques importantes dans le contexte de l'électrostatique, particulièrement au niveau des questions de stabilité.

Considérons un volume V délimité par une surface S, sur laquelle nous sommes libres de placer un grand nombre (N) de charges $q_1, q_2, ...q_N$. Le but de l'exercice est de positionner les N charges de manière à ce qu'une charge test q_0 subséquemment placée quelquepart dans V se retrouve en équilibre stable sous l'influence de la force de Coulomb totale produite par les N charges placées sur S. la Figure 5.5.1 illustre l'idée générale (mais en 2D).

Du point de vue du potentiel électrostatique, on veut donc que la distribution des N charges sur S produise un potentiel $\varphi(\mathbf{x})$ possédant un minimum ou un maximum quelquepart dans V (à $\mathbf{x}^*$, disons). Avant de placer la charge test, il n'y a aucune charge dans V, donc le potentiel recherché doit obéir à l'équation de Laplace:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \ . \qquad (5.5.1a)$$

En nous limitant à deux dimensions spatiales et aux coordonnées cartésiennes (x, y) pour les fins de cette discussion, l'équation (5.5.1a) devient:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial y^2} = 0 \ . \qquad (5.5.1b)$$

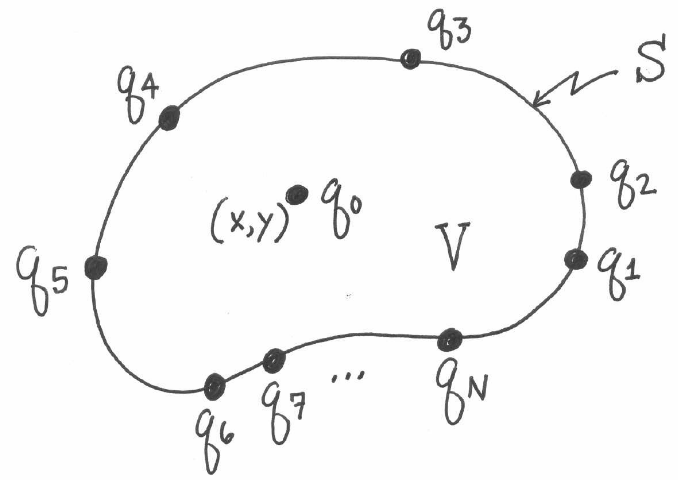

Figure 5.5.1: Représentation du problème, en version bi-dimensionnelle. Le volume V contenant la charge-test q_0 est délimité par une surface S sur laquelle N autres charges sont distribuées.

Considérons maintenant les trois premiers termes d'un développement en série de Taylor en x pour une fonction quelconque $f(x)$:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + ... \tag{5.5.2a}$$

Similairement, on peut aussi écrire:

$$f(x-\Delta x) = f(x) - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - ... \tag{5.5.2b}$$

Additionnant maintenant les cotés gauches et droits des équations (5.5.2a) et (5.5.2b), on obtient:

$$f(x+\Delta x) + f(x-\Delta x) = 2f(x) + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \ , \tag{5.5.3}$$

d'où on déduit immédiatement:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} \ . \tag{5.5.4a}$$

Notons que cette procédure demeure valide même si f est également fonction d'une autre variable spatiale (comme y, par exemple), tant et aussi longtemps que le déplacement Δx est choisi le long de la direction de l'axe des x de telle sorte qu'il ne produit aucune variation en y . Vous comprendrez certainement que la même procédure peut s'appliquer à un déplacement infinitésimal Δy dans la direction de l'axe des y, conduisant à:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f(y+\Delta y) - 2f(y) + f(y-\Delta y)}{(\Delta y)^2} \ . \tag{5.5.4b}$$

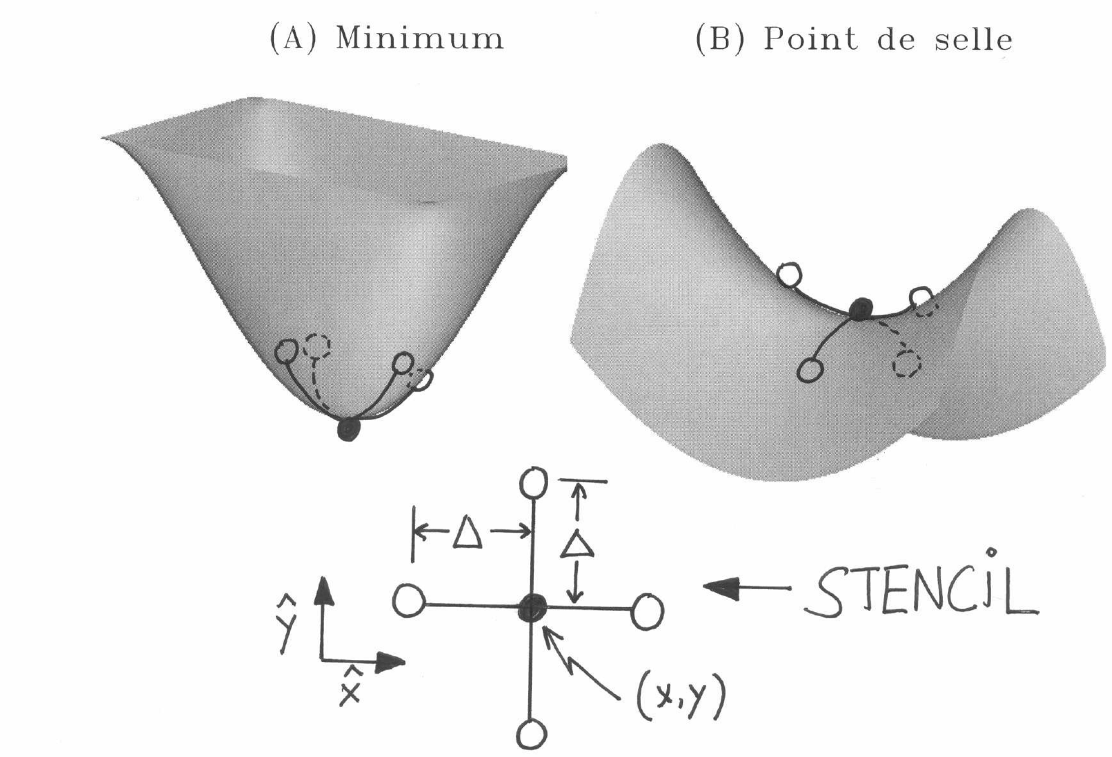

Figure 5.5.2: Deux fonctions de deux variables $f(x, y)$ pour lesquelles il existe un point (x^*, y^*) où $\nabla f = 0$. La première ne représente cependant pas une solution valide de l'équation de Laplace, tandis que la seconde est acceptable (voir texte). L'encadré défini le stencil utilisé pour calculer la valeur moyenne de $f(x, y)$ en terme de ses voisins sur une grille cartésienne.

Revenons à l'équation de Laplace, choisissant $\Delta x = \Delta y \equiv \Delta$. Après avoir substitué les équations (5.5.4a) dans l'équation (5.5.1b), un minimum d'algèbre produit l'expression suivante:

$$\nabla^2 \varphi(x, y) =$$

$$\frac{4}{(\Delta)^2}\left[\frac{1}{4}\left(\varphi(x+\Delta, y)+\varphi(x-\Delta, y)+\varphi(x, y+\Delta)+\varphi(x, y-\Delta)\right)-\varphi(x, y)\right] . \qquad (5.5.5)$$

Examinez bien la quantité entre parenthèses carrées; elle correspond à la différence entre la valeur de φ au point (x, y), et la moyenne des valeurs de ses quatres voisins sur un stencil cartésien en $(x \pm \Delta, y \pm \Delta)$. C'est donc dire que si $\nabla^2 \varphi = 0$, la solution $\varphi(x, y)$ doit être telle qu'en chaque point (x, y), φ assume localement la valeur moyenne de φ évalué dans son voisinage immédiat.

Considérons la fonction $f(x, y)$ illustrée à la Figure 5.5.2A. De toute évidence, les quatres voisins sont tels que $f(x \pm \Delta, y \pm \Delta) > f(x, y)$, donc il est hors de question que $f(x, y)$ assume la valeur moyenne de ses voisins. C'est donc dire qu'une fonction présentant un minimum comme sur la Fig. 5.5.2A ne peut être une solution de l'équation de Laplace.

On peut par contre concevoir qu'une fonction telle qu'illustrée sur la Figure 5.5.2B pourrait satisfaire à notre contrainte de "bon voisinage", et pourrait donc être, en principe, une solution adéquate à l'équation de Laplace (vous aurez reconnu ici, j'espère, le point de selle discuté précédemment à la §5.4...).

Revenons à notre problème d'équilibre tel que posé initialement. Un équilibre électrostatique exige que la force de Coulomb totale agissant sur une charge test soit nulle, ce qui s'exprime en terme du potentiel électrostatique par la relation

$$\nabla\varphi = 0 \ . \tag{5.5.6}$$

Les deux fonctions illustrées sur la Figure 5.5.2 satisfont à cette condition en un point (indiqué par un •). Par contre, nous avons également vu que pour que l'équilibre soit *stable*, le point en question doit être un extremum du potentiel $\varphi(x, y)$. Celui de la Figure 5.5.2A l'est, mais pas celui de la Figure 5.5.2B... mais, et malheureusement, nous venons de démontrer que seul 5.5.2B représente une solution valide! Ceci veut donc dire qu'aucune distribution de charges sur S ne pourra conduire à un potentiel présentant un minimum —et donc un point d'équilibre stable pour une charge test— quelquepart dans V. Tout ceci nous conduit à une conclusion aussi embêtante qu'incontournable:

Il est impossible de produire un équilibre stable à l'aide des seules forces électrostatiques

Cet énoncé est connu sous le nom de **Théorème d'Earnshaw**, en l'honneur de Samuel Earnshaw (1805-1888) qui le premier a obtenu ce résultat. Jugé à l'époque (i.e., bien avant la mécanique quantique) comme une contrainte fondamentale sur la structure de la matière, son coté désagréable est maintenant surtout perçu par les physiciens des plasmas intéressés à la fusion thermonucléaire dans un plasma confiné. Le confinement de tels plasmas dans les tokamaks aurait été technologiquement beaucoup plus simple si on n'avait eu qu'à jongler avec les forces électrostatiques.

Un corollaire immédiat (et mathématiquement intéressant) du théorème d'Earnshaw est que toute solution d'une équation de Laplace ne peut avoir d'extremum que sur les frontières du domaine considéré.

5.6 Solution numérique de l'équation de Laplace

L'analyse de la section précédente indique que dans une solution à l'équation de Laplace, la valeur de la solution en un point $\mathbf{x}$ doit être égale à la moyenne de la solution dans le voisinage de $\mathbf{x}$. Ceci suggère immédiatement un petit algorithme particulièrement simple pouvant servir à obtenir une solution *numérique* de l'équation de Laplace.

Décomposons le domaine spatial (2D, pour les fins de cette discussion) en un *maillage* Cartésien où chaque noeud est identifié par une paire d'indices (i, j), de telle sorte que $\varphi_{i,j}$ correspond au potentiel évalué à (x_i, y_j). Considérons le processus itératif suivant:

for $n = 1, N$ **do**
$$\varphi^n_{i,j} \leftarrow (\varphi^{n-1}_{i+1,j} + \varphi^{n-1}_{i-1,j} + \varphi^{n-1}_{i,j+1} + \varphi^{n-1}_{i,j-1})/4 \ , \qquad \forall\, i, j$$
enddo

où $\varphi^n_{i,j}$ corespond à la valeur du potentiel au noeud (i, j) à l'itération n, et $\varphi^0_{i,j}$ représente une "condition initiale" arbitraire. Cet algorithme permet de calculer facilement une solution à l'équation de Laplace, comme vous pourrez le vérifier en faisant un des exercices ci-dessous.

5.7 Unicité des solutions à l'équation de Laplace

Un cas particulièrement intéressant et sur lequel nous aurons l'occasion de revenir plus tard est celui d'une solution à l'équation de Laplace pour le potentiel électrostatique dans un volume V, sujet à la condition limite

$$\varphi(S) = \text{constante} . \tag{5.7.1a}$$

L'impossibilité d'avoir des extrema ailleurs que sur S nous force à conclure que la seule solution acceptable est

$$\varphi(\mathbf{x}) = \text{constante} \qquad \forall \mathbf{x} \in V, \tag{5.7.1b}$$

c'est-à-dire que le potentiel électrostatique assume partout dans V la même valeur qui est imposée aux frontières.

Cette conclusion s'avère à former un bon prélude à une discussion d'une dernière propriété mathématique et physiquement intéressante des solutions à l'équation de Laplace: *l'unicité*. Le contexte demeure celui d'une solution définie dans une région V délimitée par une surface S, mais où est maintenant spécifiée une condition limite plus générale, du genre:

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{x}) = 0, \qquad \varphi(S) = f(\mathbf{x}) \tag{5.7.2}$$

où $f(\mathbf{x})$ est donnée. Supposons maintenant qu'il existe *deux* solutions distinctes, $\varphi_1(\mathbf{x})$ et $\varphi_2(\mathbf{x})$, qui satisfassent tous les deux à la condition limite posée, i.e.,

$$\varphi_1(\mathbf{x}) \neq \varphi_2(\mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{x} \in V \ , \tag{5.7.3a}$$

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = \varphi_2(\mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{x} \in S \ . \tag{5.7.3b}$$

Puisque l'opérateur Laplacien est linéaire, toutes solutions connues à l'équation de Laplace peuvent être combinées linéairement pour produire automatiquement une troisième solution valide. Soit deux coefficients numériques a, b; de toute évidence,

$$\nabla^2 \Big(a\varphi_1(\mathbf{x}) + b\varphi_2(\mathbf{x}) \Big) = a\nabla^2\varphi_1(\mathbf{x}) + b\nabla^2\varphi_2(\mathbf{x}) = a \times 0 + b \times 0 = 0 \ . \tag{5.7.4}$$

Plus particulièrement, la combinaison linéaire suivante doit également être une solution valide:

$$\varphi_3(\mathbf{x}) = \varphi_1(\mathbf{x}) - \varphi_2(\mathbf{x}) \ . \tag{5.7.5}$$

Mais puisque $\varphi_1(S) = \varphi_2(S)$ selon notre hypothèse de départ, on aura donc $\varphi_3(S) = 0$... ce qui ne satisfait *pas* à la condition limite générale posée initialement (cf. éqs. (5.7.2)). Cette contradiction implique une inconsistance dans notre hypothèse de départ. On ne peut qu'en conclure que pour une condition limite donnée, il ne peut *pas* exister deux solutions distincte à l'équation de Laplace.

Autrement dit, si nous pouvons déterminer *une* solution à l'équation de Laplace qui satisfait aux conditions limites, alors nous pouvons être assuré que c'est la bonne et qu'il n'en existe aucune autre! Notre solution est dite *unique*. Cette propriété nous sera d'une grande utilité dans l'étude des conducteurs.

Questions/Exercices:

1. Revenez au premier problème considéré à la §5.4, soit celui de deux charges positives “collées” à $(x, y) = (\pm a, 0)$. Démontrez qu’une charge négative déplacée verticalement (direction-y) sur une petite distance et ensuite relâchée décrira un mouvement harmonique simple le long de l’axe-y, et calculez-en la fréquence.

2. Répétez l’analyse de stabilité en termes de l’énergie électrostatique U pour le système de trois charges confinées à un anneau circulaire (Figure 5.4.3A), mais cette fois dans le cas où l’une des charges est négative et les deux autres positives. Existe-t-il un (ou plusieurs) équilibre(s) stable(s)?

3. Intuitez (ou calculez, mais alors là bonne chance...) les configurations d’équilibre pour un système de 2, 3, 4 et 8 charges de même signe, et dont le déplacement dans l’espace est confiné à la surface d’une sphère de rayon R.

4. Il s’agit d’obtenir une solution numérique à l’équation de Laplace en coordonnées cartésiennes, en utilisant l’algorithme itératif décrit à la §5.6. Le problème, en deux dimensions spatiales (x, y), est défini comme suit:

Domaine spatial: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

conditions limites en y: $\varphi(x, 0) = 0$, $\varphi(x, 1) = x$.

conditions limites en x: $\varphi(0, y) = 0$, $\varphi(1, y) = y$.

Commencez avec un maillage spatial du genre 20×20. Choisissez une condition initiale, et itérez l’algorithme jusqu’à ce que la solution cesse d’évoluer. Combien d’itérations sont nécessaires? Comment ceci varie-t-il lorsque vous passez à un maillage spatial 40×40?