

Chapitre 2

La Magnétohydrodynamique

{chap:mhd}

Pour tout résumer en une seule phrase, la *magnétohydrodynamique* (ci-après MHD) est la branche de l'hydrodynamique qui s'intéresse au comportement des fluides (1) électriquement conducteurs mais globalement neutres, (2) s'écoulant de manière non-relativiste, (3) tout en demeurant assujettis à la Loi d'Ohm. Il est en fait remarquable que la majorité des écoulements astrophysiques satisfassent à ces trois conditions à prime abord plutôt contraignantes. Les exceptions les plus notables sont évidemment les écoulements très relativistes associés aux objets compacts comme les étoiles à neutrons et les trous noirs.

Notre tâche est maintenant de généraliser les équations de l'hydrodynamique de manière à y incorporer les effets des champs électrique et magnétique, et d'obtenir des équations gouvernant l'évolution de ces champs. Il ne faut pas perdre de vue que la neutralité électrique de la quasi-totalité des fluides astrophysiques n'exige pas que les constituants microscopiques desdits fluides soient eux-même électriquement neutres, mais plutôt que les densités de charges positive et négative soient identiques (ou vraiment pas loin). C'est là l'une des conditions définissant l'approximation dite magnétohydrodynamique (ci-après MHD).

2.1 L'équation d'induction magnétohydrodynamique

{sec:MHD}

Notre point de départ sera, vous l'avez pressenti j'espère, les très justement fameuses équations de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \quad [\text{Loi de Gauss}] , \quad (2.1) \quad \{\text{eq:max1}\}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad [\text{Loi Anonyme}] , \quad (2.2) \quad \{\text{eq:max2}\}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad [\text{Loi de Faraday}] , \quad (2.3) \quad \{\text{eq:max3}\}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad [\text{Loi d'Ampère/Maxwell}] , \quad (2.4) \quad \{\text{eq:max4}\}$$

où, dans le Système International d'unités, le champ électrique est mesuré en N C^{-1} ($\equiv \text{V m}^{-1}$), et le champ magnétique¹ \mathbf{B} en tesla (T). La quantité ρ_e est la densité de charge électrique (C m^{-3}), et \mathbf{J} est la densité de courant électrique (A m^{-2}). La permittivité ε_0 ($= 8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}$ dans le vide) et la perméabilité magnétique μ_0 ($= 4\pi \times 10^{-7} \text{N A}^{-2}$ dans le vide) peuvent être considérées constantes dans tout ce qui suit, les fluides électriquement polarisables ou ferromagnétiques étant plutôt rares dans les contextes qui nous occuperons dans les chapitres à venir.

¹A strictement parler, \mathbf{B} devrait être appelé densité de flux magnétique ou quelque chose du genre, mais j'ai choisi de nous en tenir ici à la terminologie communément utilisée en astrophysique.

Notre première étape sera, avec tout le respect qu'on doit au bonhomme, de faire sauter le courant de déplacement de Maxwell dans l'éq. (2.4). Ceci est justifiable si l'écoulement est non-relativiste et aucune batterie n'est branchée ou débranchée dans les environs; deux énoncés à prime abord aussi gratuits qu'étranges, mais qui se verront justifiés un peu plus loin (§2.3). Nous retombons donc à la forme originale de l'équation d'Ampère:

$$\{\text{eq:Ampere}\} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} . \quad (2.5)$$

L'interprétation physique de la Loi d'Ampère est sans équivoque: les courants électriques sont la seule source des champs magnétiques.

De manière générale, l'imposition d'un champ électrique \mathbf{E} à travers un milieu électriquement conducteur produira une densité de courant électrique \mathbf{J} . La Loi d'Ohm postule que la relation entre \mathbf{J} et \mathbf{E} est linéaire:

$$\{\text{eq:Ohmprime}\} \quad \mathbf{J}' = \sigma \mathbf{E}' , \quad (2.6)$$

où σ est la conductivité électrique (unités: $\text{C}^2 \text{s}^{-1} \text{m}^{-3} \text{kg}^{-1} \equiv \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$, $\Omega \equiv \text{Ohm}$). Dans un plasma, la Loi d'Ohm ne tient la route que si le plasma est *collisionnel*, dans le sens que la fréquence de collision entre les constituants microscopiques du plasma est beaucoup plus élevée que toutes les fréquences plasma caractérisant le milieu. Les primes (" $'$ ") dans l'éq. (2.6) sont ajoutés pour rendre explicite le fait que la Loi d'Ohm ne s'applique qu'à une substance conductrice *au repos*. Dans le cas d'un fluide s'écoulant à une vitesse \mathbf{u} (relativiste ou non), l'éq. (2.6) ne s'applique qu'à un référentiel se déplaçant avec le fluide. Nous devons donc effectuer une transformation de Lorentz vers le référentiel inertiel du "laboratoire". Dans la limite non-relativiste ($u/c \ll 1$, donc $\gamma \rightarrow 1$), la transformation habituelle pour la densité de courant se réduit à $\mathbf{J}' = \mathbf{J}$, et celle pour le champ électrique devient $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$. Ceci conduit à la version dite généralisée de la Loi d'Ohm:

$$\{\text{eq:Ohm}\} \quad \boxed{\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})} , \quad (2.7)$$

ou encore, en utilisant la Loi d'Ampère et quelques manipulations algébriques:

$$\{\text{eq:fullE}\} \quad \mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} (\nabla \times \mathbf{B}) . \quad (2.8)$$

Il s'agit maintenant d'introduire cette expression pour le champ électrique dans la Loi de Faraday (2.3), ce qui conduit directement à la très célèbre *équation d'induction magnétohydrodynamique*:

$$\{\text{eq:induction}\} \quad \boxed{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B})} , \quad (2.9)$$

où

$$\{\text{eq:magdiff}\} \quad \eta = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \quad [\text{m}^2 \text{s}^{-1}] \quad (2.10)$$

est la *diffusivité magnétique*. Le premier terme au membre de droite de l'éq. (2.9) représente l'action inductive d'un fluide s'écoulant dans un champ magnétique, tandis que le second terme capture la dissipation des courants électriques supportant ce même champ magnétique.

Il ne faut pas perdre de vue que toute solution de l'éq. (2.9) doit aussi satisfaire l'éq. (2.2) en tout temps. Il est en fait facile de démontrer (faites le!) que si $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ à $t = 0$, alors la forme même de l'éq. (2.9) assure que la divergence de \mathbf{B} demeurera nulle à tout temps subséquent ².

\{\text{sec:scaling}\} 2.2 Analyse dimensionnelle

L'évolution d'un champ magnétique sous l'action d'un écoulement \mathbf{u} dépendra beaucoup de l'importance relative du terme d'induction au membre de droite de l'éq. (2.9) par rapport

²Cette conclusion ne tient que sous une arithmétique exacte; si l'éq. (2.9) est solutionnée numériquement, on doit souvent prendre des mesures supplémentaires pour assurer $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ durant toute l'évolution temporelle.

au terme dissipatif. Sous quelles conditions le premier dominera-t-il le second ? C'est là une question fort complexe, mais une première réponse peut s'obtenir par analyse dimensionnelle de l'éq. (2.9); il s'agit de remplacer la dérivée temporelle par $1/\tau$ et les dérivées spatiales par $1/\ell$, où τ et ℓ sont des échelles temporelle et spatiale qui caractérisent adéquatement les variations de \mathbf{u} et de \mathbf{B} :

$$\frac{B}{\tau} = \frac{u_0 B}{\ell} + \frac{\eta B}{\ell^2}, \quad (2.11) \quad \{\text{eq:scalanal}\}$$

où u_0 et B représentent des valeurs “typiques” de la vitesse de l'écoulement et du champ magnétique dans le domaine d'intérêt. Le rapport du premier terme au membre de droite de l'éq. (2.11) sur le second est une quantité adimensionnelle appelée *Nombre de Reynolds magnétique*³:

$$\boxed{R_m = \frac{u_0 \ell}{\eta}}, \quad (2.12) \quad \{\text{eq:Rm}\}$$

Ceci mesure l'importance relative de l'induction par rapport à la dissipation *sur des échelles spatiales de l'ordre de ℓ* . Notez bien que R_m ne dépend pas de l'intensité du champ magnétique, une conséquence directe de la linéarité (en \mathbf{B}) de l'équation d'induction MHD. Notre analyse dimensionnelle indique simplement que dans la limite $R_m \gg 1$, l'induction par l'écoulement \mathbf{u} domine l'évolution de \mathbf{B} , tandis que dans la limite opposée $R_m \ll 1$, l'induction ne contribue que de manière négligeable et \mathbf{B} se dissipe tout simplement sous l'effet de la résistance Ohmique.

Travailler dans l'une ou l'autre de ces limites devrait nous simplifier grandement la vie. Si $R_m \ll 1$, alors on peut ne conserver que le second terme au membre de droite de l'éq. (2.11), dans lequel cas on a

$$\boxed{\tau = \frac{\ell^2}{\eta}}. \quad (2.13) \quad \{\text{eq:tdiff}\}$$

C'est le *temps de diffusion magnétique*. Il mesure le temps requis par un champ magnétique contenu dans un volume de dimensions linéaires de l'ordre de ℓ pour se dissiper. Il s'avère que pour la plupart des objets astrophysiques, ce temps caractéristique est immensément long, (voir Tableau 2.1), et même souvent plus grand que l'âge de l'Univers. Ce n'est pas que les plasmas astrophysiques soient de si bons conducteurs électriques —le cuivre à la température de la pièce conduit déjà beaucoup mieux,— mais plutôt que la taille des objets astrophysiques est vraiment... astronomique! L'omniprésence des champs magnétiques en astrophysique n'est donc pas surprenante; par exemple, tout champ magnétique à grande échelle présent à l'intérieur d'une étoile à son arrivée sur la ZAMS y serait encore aujourd'hui avec pratiquement la même intensité. Dans le cas des étoiles, le défi est souvent de reproduire leurs variations temporelles, et en particulier les cycles magnétiques se développant sur des échelles beaucoup, beaucoup plus courtes que le temps de diffusion.

La limite opposée, $R_m \gg 1$ est la limite dite de la *MHD idéale*. C'est maintenant le premier terme au membre de droite de l'éq. (2.11), qui demeure, ce qui conduit à:

$$\tau = \frac{\ell}{u_0}, \quad (2.14) \quad \{\text{eq:tturnover}\}$$

C'est le *temps de retournement* associé à l'écoulement \mathbf{u} . On peut déjà remarquer qu'en régime MHD idéal, la seule solution non-triviale (i.e., $\mathbf{u} \neq 0$ et $\mathbf{B} \neq 0$) qui soit stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) et pour laquelle \mathbf{B} chute à zéro à l'infini est une solution où l'écoulement est aligné avec le champ magnétique.

Le tableau 2.1 liste une série d'estimés du nombre de Reynolds magnétique (et quantités associées) pour les mêmes systèmes astrophysiques déjà considérés au tableau 1.1⁴ Le nombre

³Noter la similarité structurelle avec le nombre de Reynolds visqueux défini précédemment à la §1.2.3, la diffusivité magnétique η remplaçant la viscosité cinématique ν au dénominateur.

⁴Choix d'échelles de longueur ℓ ($\equiv L$) comme au Tableau 1.1. Vitesses caractéristiques correspondant aux cellules convectives profondes (intérieur solaire), granulation (photosphère), vent solaire (couronne et vent solaire), et turbulence (nuages moléculaires et milieu interstellaire). Tous ces chiffres, et en particulier les vitesses

Table 2.1: Propriétés de quelques systèmes et écoulements astrophysiques, bis

{pch_tab2}

Système	L [km]	σ [$\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$]	η [m^2s^{-1}]	τ [yr]	u [km/s]	R_m
Intérieur stellaire	10^6	10^4	100	10^9	0.1	10^9
Atmosphère solaire	10^3	10^3	1000	10^2	1	10^6
Couronne solaire	10^5	10^6	1	10^8	10	10^{12}
Vent solaire (1 AU)	10^5	10^4	100	10^8	300	10^{11}
Nuage moléculaire	10^{14}	10^2	10^4	10^{17}	100	10^{18}
Milieu interstellaire	10^{16}	10^3	1000	10^{22}	100	10^{21}
Sphère de cuivre	10^{-3}	10^8	10^{-1}	10^{-7}	—	—

de Reynolds magnétique est gigantesque dans tous les cas, ce qui suggérerait que la limite de la MHD idéale est la seule qui soit d'intérêt. Mais ce n'est pas du tout si simple. D'un point de vue purement mathématique, la limite $R_m \rightarrow \infty$ de l'équation d'induction est *singulière* car l'ordre de la plus haute dérivée chute de un. C'est en fait une situation semblable à celle caractérisant l'équation de Navier–Stokes dans la limite inviscide $\nu \rightarrow 0$: dans la limite $\eta \rightarrow 0$, en général les solutions de l'éq. (2.9) ne tendent *pas* vers les solutions obtenues en posant *a priori* $\eta = 0$. De plus, il ne faut pas perdre de vue que la distinction entre les deux régimes physiques $R_m \ll 1$ et $R_m \gg 1$ n'est bien définie que si une valeur de R_m peut être définie de manière non-ambigüe pour l'écoulement dans son ensemble, ce qui requiert qu'on puisse estimer a priori une échelle spatiale ℓ qui caractérise adéquatement les variations spatiales de l'écoulement ainsi que du champ magnétique, en tous points du domaine de solution et en tout temps. Au fil des chapitres à venir, il deviendra clair que ceci n'est pas toujours simple, ou même possible. Finalement, une analyse dimensionnelle du genre de celle effectuée ici perd tous les aspects géométriques du problème, e.g. en substituant $u_0 B$ pour $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$; on peut facilement imaginer des situations, par exemple un écoulement aligné au champ magnétique, où même un \mathbf{u} gigantesque n'a absolument aucun effet inductif sur \mathbf{B} .

Une autre quantité adimensionnelle qui s'avèrera importante plus loin est le *nombre de Prandtl magnétique*, défini comme le rapport des nombres de Reynolds magnétique sur visqueux, ou, de manière équivalente, de la viscosité cinématique sur la diffusivité magnétique:

$$\{???\} \quad P_m = \frac{\nu}{\eta} . \quad (2.15)$$

Pour bien des systèmes astrophysiques, cette quantité se retrouve nettement sous la valeur unitaire, typiquement 0.01–0.1, si les valeurs microscopiques de ces coefficients de transport sont utilisées; par contre, dans un système fortement turbulent, on s'attendrait plutôt à ce que $P_m \sim 1$.

En magnétohydrodynamique, le champ magnétique est ultimement produit par une densité de courant électrique, tel que stipulé par la Loi d'Ampère (éq. 2.5). Puisqu'on a supposé que le fluide/plasma est électriquement neutre aux échelles macroscopiques, cette densité de courant ne peut provenir que d'une vitesse de dérive \mathbf{v} entre les constituants microscopiques portant des charge électriques opposées. La densité de courant associée à une telle dérive est donnée par:

$$\{\text{eq:estJ}\} \quad \mathbf{J} = n q \mathbf{v} , \quad (2.16)$$

où n et q sont les densités numériques et charges des particules en dérive. Une analyse dimensionnelle de la Loi d'Ampère permet d'obtenir l'estimé suivant pour la densité de courant associée à un champ magnétique de grandeur B variant sur une échelle spatiale d'ordre L : $|\mathbf{J}| \sim B/\mu_0 L \simeq 10^{-5} \text{ A m}^{-2}$, pour un champ magnétique de 10^{-3} T dans une sphère de rayon

turbulentes, sont des estimés grossiers arrondis au facteur 10 le plus près. Les estimés de la diffusivité magnétique pour les nuages moléculaires et le milieu interstellaire dépendent de manière sensible du taux d'ionisation, et s'en retrouvent d'autant plus approximatifs.

7×10^8 m, ces valeurs étant inspirées du soleil. Substituant cette valeur dans l'éq. (2.16) et en supposant un plasma proton+électron de densité moyenne 10^2 kg m^{-3} (encore le soleil... à la base de sa zone convective, à $r/R \simeq 0.7$), la vitesse de dérive s'en retrouve absolument minuscule, soit $|\mathbf{v}| \sim 10^{-15} \text{ m s}^{-1}$. Ceci est une conséquence directe du nombre tout à fait astronomique (aha) de porteurs de charges disponibles pour soutenir ce courant de dérive, i.e., $n \sim 10^{29} \text{ m}^{-3}$ (toujours à une profondeur $r/R \simeq 0.7$ dans l'intérieur solaire). C'est également pourquoi l'approximation MHD est tout à fait valide dans un tel contexte. L'induction, telle que décrite par le terme $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ au membre de droite de l'équation d'induction (2.9), résulte d'une variation de cette vitesse de dérive causée par l'action de la force de Lorentz sur les constituants microscopiques électriquement chargés, et forcés mécaniquement à traverser le champ magnétique pré-existant.

2.3 La force de Lorentz

{sec:magF}

La dérivation de l'éq. (2.9) a été rondement menée, en partie parce que nous avons fait disparaître le courant de Maxwell, et ce de manière plutôt cavalière. De plus, nous n'avons réglé que la première partie du programme, et en fait la partie facile. Nous devons maintenant quantifier l'action de la force magnétique sur l'écoulement \mathbf{u} ; et ceci s'avère être la partie la plus subtile de l'approximation magnétohydrodynamique.

Vous vous rappelez j'espère que la *force de Lorentz* ressentie par une particule portant une charge électrique q et se promenant à vitesse \mathbf{u} dans une région de l'espace traversée par des champs électrique et magnétique s'exprime comme:

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad [\text{N}]. \quad (2.17) \quad \{\text{eq:lorentz1}\}$$

Considérons maintenant un élément de volume ΔV contenant un très grand nombre de particules portant cette même charge. Dans la limite du continu et pour un plasma collisionnel, la force totale par unité de volume (\mathbf{F}) agissant sur le volume sera la somme des forces agissant sur chacun de ses constituants microscopiques, divisé par le volume de l'élément en question:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{1}{\Delta V} \sum_k \mathbf{f}_k = \frac{1}{\Delta V} \sum_k q_k (\mathbf{E} + \mathbf{u}_k \times \mathbf{B}) \\ &= \left(\frac{1}{\Delta V} \sum_k q_k \right) \mathbf{E} + \left(\frac{1}{\Delta V} \sum_k q_k \mathbf{u}_k \right) \times \mathbf{B} \\ &= \varrho_e \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad [\text{N m}^{-3}], \end{aligned} \quad (2.18) \quad \{\text{eq:lorentz2}\}$$

où la dernière égalité provient de la définition conventionnelle de la densité de charge et de la densité de courant. À ce stade, il est très tentant de simplement éliminer le terme proportionnel à \mathbf{E} , puisqu'en MHD on traite de plasmas qui globalement sont électriquement neutres, ce qui implique $\varrho_e = 0$ et donc $\varrho_e \mathbf{E} \equiv 0$ et voilà c'est terminé. Non seulement ce serait trop facile, mais de surcroît cela ferait violence à la relativité restreinte; voyons en quoi.

Commençons par prendre la divergence des deux cotés de la forme généralisée de la Loi d'Ohm (eq. 2.7). On utilise ensuite la Loi de Gauss (eq. 2.1) pour se débarrasser du terme en $\nabla \cdot \mathbf{E}$, et de la Loi de conservation de la charge électrique

$$\frac{\partial \varrho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.19) \quad \{\text{eq:qcons}\}$$

pour se débarrasser du terme en $\nabla \cdot \mathbf{J}$. Le résultat final de toute cette jonglerie physico-algébrique est l'expression suivante:

$$\frac{\partial \varrho_e}{\partial t} + \frac{\varrho_e}{(\varepsilon_0/\sigma)} + \sigma \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = 0. \quad (2.20) \quad \{\text{eq:indE}\}$$

La combinaison ε_0/σ a une unité de temps, et est nommé *temps de relaxation électrostatique*, ci-après dénoté τ_e . C'est le même temps caractéristique associé à la séparation des charges

électriques dans un conducteur soudainement exposé à un champ électrique. Dans la grande majorité des conducteurs, ce temps est excessivement petit, soit de l'ordre de 10^{-18} s !! Ceci s'explique par le fait que le champ électrique s'ajuste au déplacement des charges à la vitesse de la lumière (dans le milieu en question, ce qui est plus lentement que dans le vide mais tout de même très rapidement en termes absolus). Dans un milieu conducteur au repos ($\mathbf{u} = 0$), l'expression ci-dessus s'intègre facilement pour donner:

$$\{\text{eq:electrorelax}\} \quad \varrho_e(t) = \varrho_e(0) \exp(-t/\tau_e), \quad (2.21)$$

d'où le nom "temps de relaxation" attribué à τ_e .

Supposons maintenant que le fluide se déplace lentement, dans le sens que son temps de retournement est beaucoup plus long que τ_e ; ceci implique que le champ électrique induit évoluera sur un temps caractéristique semblable à \mathbf{u} (au mieux), et donc que la dérivée temporelle de ϱ_e peut être négligée par rapport au terme ϱ_e/τ_e dans l'éq. (2.20). On en déduit alors que

$$\{\text{eq:rhoemhd}\} \quad \varrho_e = \varepsilon_0 \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (2.22)$$

Ceci indique qu'une densité de charge électrique nette peut être maintenue dans un fluide conducteur *en mouvement*. La force électrostatique par unité de volume y étant associée, $\varrho_e \mathbf{E}$, est clairement non-nulle; cependant elle se retrouve beaucoup plus petite que la force magnétique. Ceci se vérifie facilement par analyse dimensionnelle de l'éq. (2.18), en utilisant l'éq. (2.22) pour estimer ϱ_e :

$$\{\text{???\} \quad \varrho_e \mathbf{E} \sim \left(\frac{\varepsilon_0 u B}{\ell} \right) \left(\frac{J}{\sigma} \right) \sim \left(\frac{u \tau_e}{\ell} \right) JB, \quad (2.23)$$

$$\{\text{???\} \quad \mathbf{J} \times \mathbf{B} \sim JB, \quad (2.24)$$

où encore une fois la Loi d'Ohm a été utilisée pour exprimer \mathbf{E} en terme de \mathbf{J} , et ℓ est une échelle spatiale caractérisant les variations de l'écoulement ainsi que du champ magnétique. On en conclut que le rapport des forces électrostatique sur magnétique est de l'ordre de $u \tau_e / \ell$. Mais, on a déjà que $\tau_e \ll 1$, et de surcroît pour un écoulement non-relativiste on peut légitimement s'attendre à ce que le temps de retournement de l'écoulement, ℓ/u_0 , soit beaucoup plus grand que le temps de transit d'une perturbation électromagnétique, $\sim \ell/c \sim \tau_e$; ces deux effets se combinent pour rendre la force électrostatique absolument minuscule en comparaison à la force magnétique. Sous ces conditions, l'éq. (2.18) devient:

$$\{\text{eq:FMHD}\} \quad \boxed{\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad [\text{approximation MHD}]}. \quad (2.25)$$

Il ne reste qu'à introduire cette expression au membre de droite de l'équation de Navier–Stokes (1.23)... avec un préfacteur $1/\rho$ de manière à se retrouver avec une force par unité de masse plutôt que volume.

Il sera parfois utile d'exprimer différemment cette force de Lorentz. Utilisant les eqs. (2.2) et (2.5), ainsi que quelques identités du calcul vectoriel, on peut montrer que l'éq. (2.25) peut s'écrire alternativement comme

$$\{\text{eq:FMHD2}\} \quad \mathbf{F} = \frac{1}{\mu_0} \left[(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{B}^2) \right], \quad (2.26)$$

où $\mathbf{B}^2 \equiv \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$. Le premier terme au membre de droite représente une *tension magnétique*, tandis que le second prend la forme du gradient d'une *pression magnétique*.

Il ne nous reste plus qu'à régler cette fameuse question relative à la légitimité d'avoir fait sauter le courant de déplacement de la forme Maxwellienne de la Loi d'Ampère (eq. 2.4); ceci peut maintenant se justifier en notant, comme on l'a vu, que la dérivée temporelle de la densité de charge peut être négligée en régime non-relativiste. L'équation de conservation de la charge électrique (2.19) se réduit alors à

$$\{\text{???\} \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0; \quad (2.27)$$

prenant la divergence des deux cotés de l'éq. (2.4) conduit alors à

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\varepsilon_0 \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{\partial \rho_e}{\partial t} . \quad (2.28)$$

Ceci démontre que négliger la dérivée temporelle de la densité de charge est équivalent à omettre le courant de déplacement de Maxwell dans l'éq. (2.4).

En résumé, tant que des événements électromagnétiques rapides comme la connexion ou déconnexion d'une batterie ne se produisent pas, ou n'importe quel autre phénomène transitoire produisant un fort $\partial \rho_e / \partial t$, sous l'approximation magnétohydrodynamique les énoncés suivants sont tous équivalents:

- Les écoulements sont non-relativistes;
- La force électrostatique est négligeable en comparaison à la force magnétique;
- Le courant de déplacement de Maxwell peut être omis.

Tout ceci, évidemment, résultant de l'utilisation de la Loi d'Ohm, et ne s'appliquant donc qu'à des plasma collisionnels.

Dans bien des systèmes astrophysiques, le champ magnétique domine la dynamique et l'énergétique; en l'absence de forçage externe, un tel système devrait donc évoluer vers un état d'équilibre caractérisé par une force de Lorentz nulle:

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0 . \quad (2.29) \quad \{\text{???\}$$

De manière générale, cette contrainte peut être satisfaite de deux manières physiquement distinctes (et excluant évidemment la solution triviale $\mathbf{B} = 0$): La première est d'avoir $\mathbf{J} = 0$ dans tout le système; la Loi d'Ampère devient alors $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, ce qui implique que \mathbf{B} peut être exprimé comme le gradient d'un potentiel. Un tel champ magnétique est par conséquent appelé *champ potentiel*. La contrainte solénoïdale $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ conduit alors à une équation de Laplace:

$$\mathbf{B} = \nabla \varphi , \quad \nabla^2 \varphi = 0 \quad [\text{Champ potentiel}] . \quad (2.30) \quad \{\text{eq:potB}\}$$

La seconde possibilité permet la présence de courants électriques, mais tant que ceux-ci sont dirigés parallèlement au champ magnétique:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B} , \quad (2.31) \quad \{\text{eq:alphaB}\}$$

où le facteur numérique α peut varier d'une ligne de champ à l'autre, avec la position, ou même en fonction de la valeur locale de \mathbf{B} .

Imaginons maintenant une situation, par exemple le volume défini par l'extérieur d'une étoile magnétisée, à la surface de laquelle \mathbf{B} est donné, et où la tâche consiste à construire un champ magnétique à force-nulle. Supposer que ce champ est potentiel conduit à des reconstructions qui sont très différentes de champs construits en adoptant plutôt l'Ansatz correspondant à l'éq. (2.31). On notera en particulier (sans le démontrer car les maths requises sont ardues) que pour une condition frontière donnée, le champ potentiel est unique et représente l'état d'énergie magnétique minimal compatible avec la condition limite, par rapport aux multiples solutions possibles sous (2.31), et ce même sans contraintes sur la spécification de $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{B})$ dans le domaine. Ceci représente une contrainte importante à la quantité d'énergie qui peut être extraite d'un champ magnétique par n'importe quel processus magnétohydrodynamique.

2.4 Exemple: cisaillement d'un champ poloidal

{sec:shear}

Des dynamos stellaires aux disques d'accrétion, une situation de grand intérêt en astrophysique est l'induction d'un champ magnétique longitudinal via le cisaillement d'un champ magnétique

poloidal traversant une sphère ou un disque de fluide électriquement conducteur en état de rotation différentielle. Nous considérerons ici la première de ces géométries. Travaillant conséquemment en coordonnées sphériques polaires (r, θ, ϕ) et supposant axisymétrie ($\partial/\partial\phi \equiv 0$) pour le champ magnétique et la rotation différentielle, on peut exprimer l'écoulement comme:

$$\mathbf{u}(r, \theta) = r \sin \theta \Omega(r, \theta) \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (2.32) \quad \{\text{eq:shear1}\}$$

où la vitesse angulaire de rotation est supposé indépendante du temps ($\partial/\partial t = 0$); dans ce régime dit *cinématique*, seule l'équation d'induction est solutionnée, avec \mathbf{u} donné, sans se préoccuper de la dynamique de l'écoulement. Dans une telle situation on aura:

$$\{\text{eq:shear2}\} \quad \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \quad (2.33)$$

puisque $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ en vertu de l'éq. (2.32). Pour un champ magnétique axisymétrique, et avec \mathbf{u} orienté dans la direction longitudinale, seule les composantes r et θ de cette expression sont identiquement nulles. Il peut paraître surprenant qu'un terme comme $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ ait une composante ϕ non-nulle si \mathbf{u} n'a qu'une composante ϕ qui ne dépend pas de ϕ ; il faut se rappeler ici que $\mathbf{B} \cdot \nabla$ est un *opérateur différentiel* agissant sur une quantité vectorielle (voir l'Annexe A pour la forme explicite de cet opérateur en coordonnées sphériques).

Si on suppose maintenant que l'on travaille dans le régime de la MHD idéale ($\eta = 0$ dans l'éq. (2.9), alors celle-ci se réduit à:

$$\{\text{eq:shear3a}\} \quad \frac{\partial B_r}{\partial t} = 0, \quad (2.34)$$

$$\{\text{eq:shear3b}\} \quad \frac{\partial B_\theta}{\partial t} = 0, \quad (2.35)$$

$$\{\text{eq:shear3c}\} \quad \frac{\partial B_\phi}{\partial t} = r \sin \theta [B_r \hat{\mathbf{e}}_r + B_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta] \cdot \nabla \Omega. \quad (2.36)$$

Les éqs. (2.34)—(2.35) indiquent que le champ poloidal demeure constant, ce qui implique que le membre de droite de l'éq. (2.36) est également constant et s'intègre donc directement:

$$\{\text{eq:shear4}\} \quad B_\phi(r, \theta, t) = B_\phi(r, \theta, 0) + \left(r \sin \theta [B_r \hat{\mathbf{e}}_r + B_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta] \cdot \nabla \Omega \right) t. \quad (2.37)$$

La composante toroidale du champ magnétique croit donc linéairement en fonction du temps, à un taux qui dépend du gradient rotationnel local et de l'intensité de la composante poloidale. La composante toroidale est donc induite par le cisaillement de la composante poloidale, cette dernière conservant son intensité initiale malgré ce cisaillement, comme l'expriment les éqs. (2.34)—(2.35).

On notera que dans une telle configuration axisymétrique, les seules solutions stationnaires ($\partial/\partial t = 0$) possibles sont celles où

$$\{\text{eq:ferarro}\} \quad [B_r \hat{\mathbf{e}}_r + B_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta] \cdot \nabla \Omega = 0, \quad (2.38)$$

i.e., la vitesse angulaire doit avoir une valeur constante sur chaque surface de révolution tracée par une ligne de champ poloidale. C'est le *théorème de Ferraro*.

Un ingrédient essentiel au calcul de l'évolution de B_ϕ via l'éq. (2.37) est le profil de rotation $\Omega(r, \theta)$. La Figure 2.1A montre sur le diagramme de gauche une paramétrisation du profil de rotation interne du soleil, calibré via inversion héliosismique. Cette paramétrisation capture les principaux aspects des profils réels détaillés, soit (1) Une enveloppe convective ($r/R > 0.7$) où le cisaillement est principalement latitudinal, (2) un coeur radiatif tournant comme un corps solide, et (3) une transition continue entre ces deux régions via une mince couche de cisaillement centrée sur l'interface coeur-enveloppe (trait en tirets), et appelée *tachocline*. Un tel profil de rotation différentielle est plutôt complexe, dans le sens qu'il est caractérisé par trois régions de cisaillements se recoupant partiellement: un fort cisaillement radial positif (i.e., $\partial\Omega/\partial r > 0$) dans la partie équatoriale de la tachocline, un cisaillement radial négatif ($\partial\Omega/\partial r <$

0) encore plus intense dans la tachocline à hautes latitudes, et un cisaillement latitudinal positif ($\partial\Omega/\partial\theta > 0$) significatif dans toute la zone convective, chutant à zéro dans la tachocline. À mi-latitudes, ce cisaillement latitudinal est comparable en magnitude au cisaillement radial à l'équateur, dans le cas d'une tachocline d'épaisseur $w/R = 0.05$, soit la limite supérieure établie par l'héliosismologie.

La Figure 2.1A montre également une série de lignes de champ magnétique pour un champ poloidal axisymétrique de type dipolaire, du genre de ce à quoi on pourrait s'attendre dans un intérieur stellaire, et cohérent avec celui observé à la surface du soleil. La Figure 2.1B montre le champ toroidal produit par le cisaillement de ce champ poloidal, supposé d'amplitude 10^{-4} T, par la rotation différentielle pendant une durée de 10 ans, tel que produit par l'éq. (2.37) à partir d'un champ purement poloidal ($B_\theta = 0$). Le champ toroidal se retrouve concentré dans les régions où le cisaillement est le plus intense, mais la géométrie du champ poloidal joue évidemment aussi. On remarquera que le cisaillement d'un champ dipolaire, donc antisymétrique par rapport au plan équatorial, par une rotation différentielle symétrique par rapport à ce même plan, produit un champ toroidal lui aussi antisymétrique par rapport à l'équateur, en accord avec les observations de polarités magnétique des taches solaires. L'intensité du champ toroidal atteint ici ± 0.2 T, également en accord avec les mesures de champ magnétique dans les taches solaires. On reviendra sur le lien physique entre les taches solaires et le champ toroidal interne dans un chapitre ultérieur.

Bien que notre solution ait été obtenue dans le régime cinématique, connaissant la forme de la composante toroidale induite, il est possible de calculer la force de Lorentz associée au champ complet. Dans le cas d'un champ magnétique axisymétrique, la composante- ϕ de la force de Lorentz est également axisymétrique et se réduit à:

$$[\mathbf{F}]_\phi = \frac{1}{\mu_0 r \sin\theta} [B_r \hat{\mathbf{e}}_r + B_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta] \cdot \nabla (r \sin\theta B_\phi). \quad (2.39) \quad \{\text{eq:lorentzphi}\}$$

La distribution spatiale de cette quantité est illustrée à la Figure 2.1C. Comparant ceci à la rotation différentielle en A, on remarquera que la force de Lorentz tend à s'opposer au cisaillement: dans la tachocline polaire, le bas de la zone convective est accéléré ($[\mathbf{F}]_\phi > 0$), tandis que le haut de la zone stable est déccéléré ($[\mathbf{F}]_\phi < 0$). C'est là une propriété générale des interactions entre fluides et champ magnétiques dans le régime MHD: la force de Lorentz tend à s'opposer aux écoulements inductifs. Pour comprendre pourquoi, on doit considérer l'énergétique de ces interactions.

2.5 L'énergie magnétique

{sec:magE}

Dans le cas du cisaillement d'un champ poloidal que nous venons d'examiner, l'énergie magnétique augmente quadratiquement dans le temps, car B_ϕ croît (selon l'éq. (2.36), tandis que la composante poloidal demeure constante (éqs. (2.34)–(2.36)). D'où vient cette énergie ? La seule source énergétique ici est l'énergie cinétique de la rotation, donc il y doit y avoir transfert énergétique de l'écoulement vers le champ magnétique. Il existe d'autres situations astrophysiques où le processus inverse a lieu, i.e., le champ magnétique peut agir comme un réservoir d'énergie dans lequel peuvent puiser les écoulements. Plusieurs des phénomènes les plus énergétiques observés en astronomie sont associés à un tel transfert énergétique entre un champ magnétique et le plasma environnant. Voyons comment quantifier ce processus.

On considère un volume V contenant un plasma magnétisé, comme par exemple à la section précédente: une sphère de fluide magnétisée flottant dans le vide. Commençons par prendre le produit scalaire du champ magnétique \mathbf{B} avec les membres de gauche et droite de l'équation d'induction (2.9); on intègre ensuite sur V , et après un peu de jonglerie avec les identités du calcul vectoriel et une utilisation judicieuse du théorème de la divergence on arrive éventuellement à

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} dV = - \oint_S (\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS - \int_V (\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}) dV - \int_V \sigma^{-1} \mathbf{J}^2 dV, \quad (2.40) \quad \{\text{eq:emag}\}$$

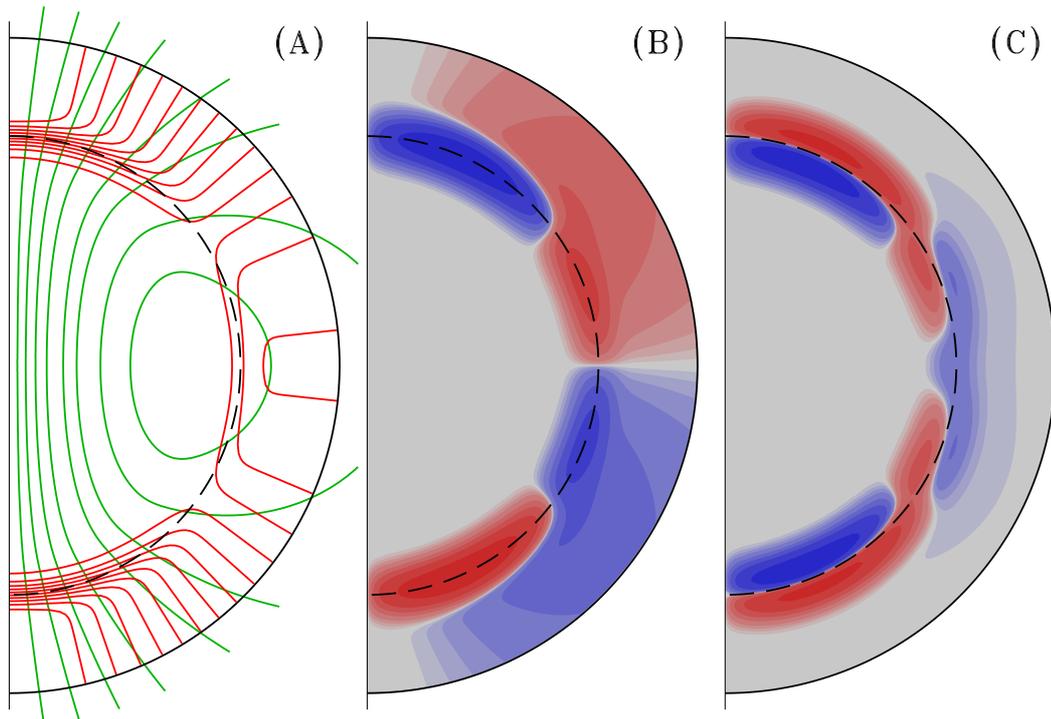


Figure 2.1: `{fig:shear}` Induction d'un champ magnétique toroidal via le cisaillement d'un champ poloidal dipolaire par une rotation différentielle de type solaire. La partie A montre des isocontours de la fréquence de rotation $\Omega(r, \theta)/2\pi$ (contours rouges, avec espacement de 10 nHz; en surface l'équateur tourne ici à 460.7 nHz, et les pôles à 329.2 nHz). Les lignes de champ magnétique d'un champ poloidal dipolaire sont tracés en vert, et l'arc de cercle en tirets indique l'interface coeur-enveloppe. La partie B montre les isocontours du champ toroidal B_ϕ , avec la gradation de bleu/rouge indiquant les valeurs négatives/positives respectivement, tel que calculé via l'éq. (2.37) pour $t = 10$ yr. Ce champ toroidal atteint ± 0.2 T ici, et l'espacement des contours est de 0.02 T. La partie C montre des isocontours de la composante- ϕ de la force de Lorentz associée au champ magnétique total, poloidal+toroidal.

où $\hat{\mathbf{n}}$ est un vecteur unitaire pointant extérieurement à la surface S délimitant le volume V , et \mathbf{S} est le *flux de Poynting*:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (2.41) \quad \{\text{E2.111}\}$$

Examinons un à un les différents termes apparaissant dans cette expression. Le terme au membre de gauche n'est que le taux de variation de l'énergie magnétique dans sa définition habituelle:

$$\mathcal{E}_B = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathbf{B}^2 dV. \quad (2.42) \quad \{\text{eq:emagdef}\}$$

la quantité $\mathbf{B}^2/2\mu_0$ décrivant la densité d'énergie magnétique. Au membre de droite maintenant; le premier terme est le flux de Poynting intégré sur les frontières du domaine, et décrit donc la quantité nette d'énergie électromagnétique entrant (intégrand < 0) ou sortant (intégrand > 0) du volume V . Ce terme sera évidemment nul en l'absence de champs électrique ou magnétique aux frontières. De même, et en l'absence de *sources* électromagnétiques à l'infini, si on laisse le volume d'intégration tendre vers l'infini, ce terme surfacique tombera toujours à zéro: dS croît en r^2 , mais \mathbf{E} décroît en r^{-2} au mieux (si le système porte une charge électrique nette), et \mathbf{B} décroît en r^{-3} au mieux (pour un dipole magnétique), et donc $\mathbf{S} \propto r^{-5}$ au mieux; conséquemment, l'intégrand dans l'intégrale surfacique chute au moins en r^{-3} , et très possiblement plus rapidement, dans la limite $r \rightarrow \infty$.

Le second terme au membre de droite de l'éq. (2.40) représente le travail exercé par la force de Lorentz sur l'écoulement dans l'ensemble du volume. Ce terme peut être soit négatif, soit positif. Dans le contexte de l'accélération ou du confinement magnétique des vents stellaires ou galactiques, on aura $\mathbf{u} \cdot \mathbf{F} > 0$, tandis que dans le cadre des processus dynamos on sera plutôt dans une situation où $\mathbf{u} \cdot \mathbf{F} < 0$. Dans l'exemple considéré à la section précédente, c'est donc le travail effectué par l'écoulement zonal (éq. (2.32)) contre la composante zonale de la force de Lorentz (éq. (2.39)), plus spécifiquement sa composante en tension, qui permet (énergétiquement parlant) l'amplification de la composante magnétique toroidale. Ceci représente un processus d'amplification potentiellement très intéressant, car que ce soit dans le cas d'une étoile, d'un disque d'accrétion, ou d'une galaxie, l'énergie cinétique associée à la rotation est absolument gigantesque.

Le troisième terme au membre de droite de l'éq. (2.40) est toujours négatif; il décrit la destruction du champ magnétique sous l'influence de la dissipation Ohmique de la densité de courant agissant comme la seule source du champ en MHD. Ceci nous mène naturellement à...

2.6 Le chauffage de Joule

{sec:Joule}

En présence d'une conductivité électrique finie, le chauffage volumique associé à la dissipation de la densité de courant électrique doit être inclus au membre de droite de l'équation de conservation de l'énergie, au même titre que le chauffage volumique dû à la dissipation visqueuse. La *fonction de chauffage de Joule* est la quantité requise:

$$\phi_B = \frac{\eta}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B})^2 \quad [\text{J m}^{-3} \text{s}^{-1}]. \quad (2.43) \quad \{\text{eq:Joule}\}$$

Notons que, comme avec la dissipation visqueuse, dans la grande majorité des situations d'intérêt en astrophysique, le chauffage de Joule ne contribue pas de manière significative au bilan énergétique. La dissipation de l'énergie magnétique aux échelles globales, quand elle se produit, est souvent causée par des effets dynamiques qui sont beaucoup plus efficaces, comme la reconnexion magnétique, et ce sont les temps caractéristiques associés à ces processus dynamiques qui contrôlent le taux de dissipation de l'énergie. Il n'en demeure pas moins qu'aux échelles dissipatives du système, ultimement ce sont bel et bien la viscosité et la résistivité qui font le travail.

2.7 Le théorème d'Alfvén

{sec:freeze}

Revenons à la forme différentielle de la Loi de Faraday:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.44) \quad \{???\}$$

Considérons une surface S fixe dans l'espace et délimitée par un contour γ . On projette l'expression ci-dessus sur un vecteur unitaire normal à S , et on applique le théorème de Stokes au membre de gauche de l'expression en résultant:

$$\{???\} \quad \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \oint_\gamma \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS. \quad (2.45)$$

La surface S est tout à fait arbitraire à ce stade; si elle est fixe dans l'espace, alors \int_S et $\partial/\partial t$ commutent et on retombe sur la forme intégrale familière de la Loi de Faraday:

$$\{\text{eq:almost}\} \quad \oint_\gamma \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS, \quad (2.46)$$

avec le membre de gauche correspondant à la force électromotrice, et le membre de droite au taux de variation du flux magnétique (Φ_B) à travers S :

$$\{\text{eq:Bflux}\} \quad \Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS. \quad (2.47)$$

Supposons maintenant que S est une surface matérielle se déplaçant avec le fluide. Le résultat ci-dessus tient toujours, si (1) la dérivée partielle $\partial/\partial t$ est remplacée par la dérivée Lagrangienne au membre de droite de l'éq. (2.46); et (2) on utilise la Loi d'Ohm pour remplacer \mathbf{E} par \mathbf{J}/σ , ce qui est légal puisque chaque point du contour matériel γ se déplace à la même vitesse que le fluide, par définition. Donc,

$$\{???\} \quad \frac{1}{\sigma} \oint_\gamma \mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{D}{Dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS. \quad (2.48)$$

De toute évidence, dans la limite MHD idéale d'un conducteur parfait ($\sigma \rightarrow \infty$), on aura

$$\{\text{eq:alfven}\} \quad \frac{D}{Dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0. \quad (2.49)$$

Ce résultat indique que dans le régime de la MHD idéale ($\sigma \rightarrow \infty$, ou encore $R_m \rightarrow \infty$), le flux magnétique traversant une surface quelconque est une quantité conservée durant le transport (et/ou déformation) de cette surface par l'écoulement. C'est le *théorème d'Alfvén*. Ce théorème peut être exprimé sous une forme physiquement équivalente via le théorème de Stokes, en terme de la circulation Γ du potentiel vecteur associé au champ magnétique:

$$\{\text{eq:alfven}\} \quad \frac{D}{Dt} \oint_\gamma \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0. \quad (2.50)$$

On notera en particulier que dans la limite d'une surface infinitésimale percée par une seule ligne de champ magnétique, une conséquence incontournable du théorème d'Alfvén est que la ligne de champ magnétique doit se déplacer avec le fluide. L'idée est illustrée schématiquement à la Figure 2.2. Ce résultat tient pour toute ligne de champ magnétique encerclée par un contour matériel. On dit que le champ magnétique est "gelé" dans le fluide. Les lignes de vorticité se comportent de la même façon dans la limite inviscide $\nu \rightarrow 0$.

Le théorème d'Alfvén s'applique au champ magnétique, qui est un champ vectoriel sol noidal, dans le sens que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$; on peut en fait montrer, purement mathématiquement, que tout

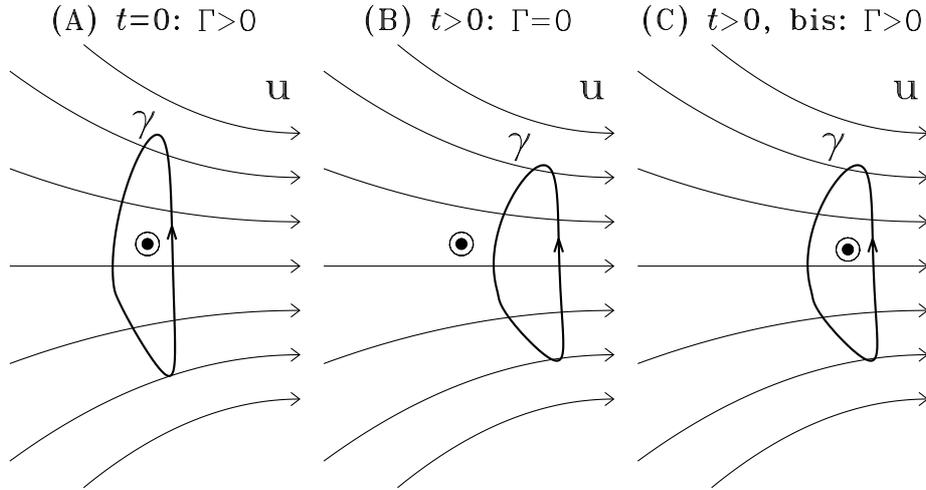


Figure 2.2: `{fig:thalfven}` En (A) Un contour matériel γ délimite une surface matérielle percée par une seule ligne de champ magnétique sortant de la page (indiquée ici par un “ \odot ”). La circulation Γ du champ —et donc le flux magnétique via le théorème de Stokes— est ici > 0 . En (B) le contour s’est déplacé vers la droite, de manière telle que la ligne de champ magnétique ne le traverse plus, donc la circulation et le flux magnétique sont maintenant tous les deux nuls. Ceci est exclu par l’éq. (2.50); on doit en conclure que la ligne de champ magnétique a du se déplacer avec le fluide, comme illustré en (C).

champ solénoïdal transporté par un écoulement \mathbf{u} est sujet au soi-disant théorème cinématique, stipulant que:

$$\text{{eq:kinth2}} \quad \frac{D}{Dt} \int_{S_m} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_m} \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (2.51)$$

La quantité entre parenthèses carrées au membre de droite sera nulle en vertu de notre équation d’induction magnétique en régime idéal (i.e., avec $\eta = 0$); et le membre de gauche est la dérivée Lagrangienne du flux magnétique. Et c’est tout.

Pensant plus physiquement que mathématiquement, on peut aussi comprendre le théorème d’Alfvén en se rappelant de ce qui est vraiment transporté par l’écoulement \mathbf{u} : c’est la densité de courant \mathbf{J} étant la source du champ magnétique tel que dicté par l’éq. (2.5). Cette densité de courant, on l’a vu, est causée par un très faible courant de dérive entre les constituants microscopiques de charge électrique opposée. En l’absence de résistance Ohmique, ces courants se déplacent avec le plasma sans atténuation, et donc le champ magnétique devra en faire de même. Et voilà, CQFD, comme le disait ce bon vieux Jules.

Comme les écoulements astrophysiques ont typiquement $R_m \gg 1$ (viz. le Tableau 2), on peut s’attendre à ce que le théorème d’Alfvén soit d’une applicabilité très générale. C’est le cas, et on peut déjà en apprendre beaucoup sur les champs magnétiques stellaires via une simple application de ce théorème.

Considérons une étoile contenant un champ magnétique dipolaire aux grandes échelles spatiales. C’est le cas du soleil, dont le dipole magnétique est de l’ordre de 10^{-3} T, et des étoiles dites Ap et Bp, où les champs magnétiques peuvent approcher la dizaine de Tesla. La Figure 2.3 illustre schématiquement ce qui se passe lorsque qu’une étoile comme le soleil finit par se contracter pour devenir une naine blanche, une fois son carburant nucléaire épuisé. En supposant que le champ magnétique soit gelé dans le fluide, dans le sens du théorème d’Alfvén, la conservation du flux magnétique traversant le plan équatorial de l’étoile implique que

$$B_{\odot} \pi R_{\odot}^2 = B_{\text{NB}} \pi R_{\text{NB}}^2 \quad \rightarrow \quad \frac{B_{\text{NB}}}{B_{\odot}} = \left(\frac{R_{\odot}}{R_{\text{NB}}} \right)^2. \quad (2.52) \quad \text{{eq:collapse}}$$

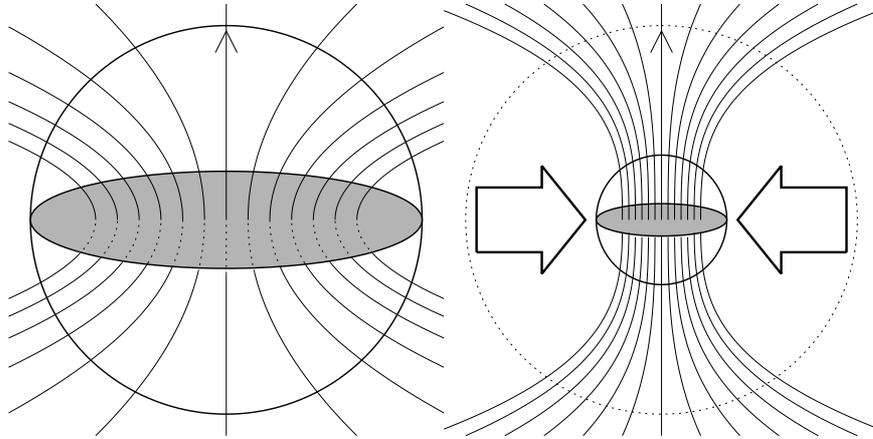


Figure 2.3: {fig:collapse} Amplification du champ magnétique via conservation du flux, lors de l’effondrement d’une étoile de type solaire vers le stade de naine blanche. On suppose un champ initial de géométrie dipolaire, conduisant à un flux net à travers le plan équatorial de l’étoile (en gris). Les deux diagrammes ne sont pas à la même échelle: en réalité une naine blanche a un rayon ~ 100 fois plus petit que le soleil.

Pour le soleil on a $R_{\odot} = 7 \times 10^8$ m et $B_{\odot} \sim 0.001$ T, et pour une naine blanche typique $R_{\text{NB}} \simeq 0.01 R_{\odot}$, ce qui conduit à $B_{\text{NB}} \sim 10$ T. Cette valeur, en apparence gigantesque, tombe confortablement dans la fourchette des champs magnétiques détectés dans les naines blanches, soit 1–100 T. Notons cependant qu’une faible fraction ($\lesssim 10\%$) de naines blanches présentent des champs magnétiques pouvant aller jusqu’à 100 kT; ces naines blanches magnétiquement extrêmes pourraient fort bien être les descendantes des étoiles Ap et Bp.

L’énergétique de ce processus d’amplification du champ magnétique mérite qu’on s’y attarde un peu. Comme $V \propto R^3$, alors $V_{\text{NB}}/V_{\odot} = (R_{\text{NB}}/R_{\odot})^3$; Pour simplifier le calcul on considère que le champ magnétique est constant dans le volume de l’étoile; en vertu des eqs. (2.42) et (2.52) on trouve $E_{\text{NB}}/E_{\odot} = R_{\odot}/R_{\text{NB}} \simeq 100 \gg 1$; d’où vient toute cette énergie ? Ultimement du potentiel gravitationnel, évidemment, mais la manière dont ce transfert opère passe par l’écoulement radial associé à l’effondrement. Cet écoulement devra effectuer un travail contre la force de Lorentz, cette fois principalement sa composante de pression magnétique.

Ce phénomène d’amplification magnétique se produit également lors de la formation des étoiles, les nuages protostellaires étant toujours magnétisés à un certain degré. Dans ce genre de situation, où la gravité est beaucoup plus faible que dans le cas de l’effondrement d’une étoile en fin de vie, on peut calculer que la pression magnétique atteint un point tel qu’elle peut stopper le processus d’effondrement du nuage; comment se débarrasser du champ magnétique demeure un problème majeur dans la théorie de la formation des étoiles.

{sec:MHDwaves}

2.8 Ondes magnétohydrodynamiques

La présence d’une force de Lorentz dans un fluide magnétisé a également de profondes conséquences au niveau des types d’ondes qui peuvent se propager —et propager de “l’information”— dans le fluide. Dans un fluide astrophysique non-magnétisé (si un tel fluide pouvait exister), on devrait considérer (1) les ondes sonores, où la pression agit comme force de rappel (voir §1.3); (2) les ondes de gravité, où la gravité agit comme force de rappel (un peu comme les vagues à la surface de l’eau); et (3) les ondes de Rossby, où la force de Coriolis agit comme force de rappel (voir §1.4). Il s’avère que la force de Lorentz introduit effectivement non pas une, mais deux forces de rappel. De plus, ces forces modifient, et parfois de manière complexe, le comportement des autres

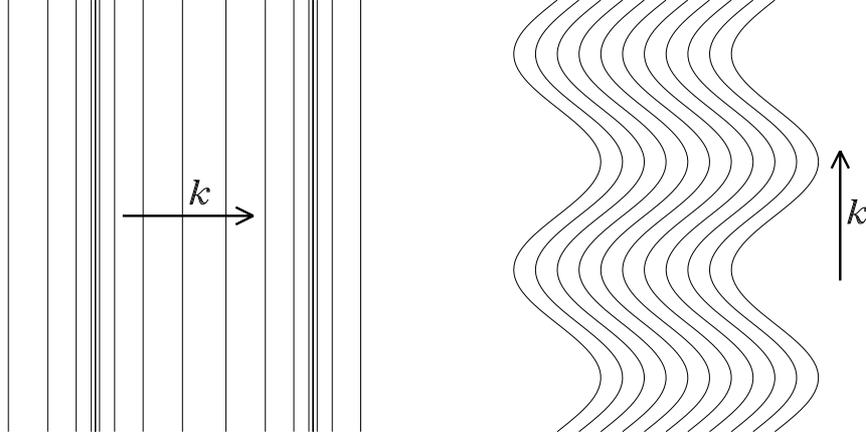


Figure 2.4: {fig:MHDwaves} Les modes fondamentaux de propagation ondulatoire dans un fluide compressible magnétisé, illustrés ici dans le cas d’un champ magnétique uniforme. En (A), une onde magnétosonique, et en (B) une onde d’Alfvén. L’orientation du vecteur d’onde \mathbf{k} indique que le mode magnétosonique est une onde longitudinale, tandis que le mode d’Alfvén est une onde transversale. En présence d’un plasma “chaud”, i.e. où la densité d’énergie interne du plasma est comparable à sa densité d’énergie magnétique, le mode magnétosonique se développe en deux modes dits “rapide” et “lent”, selon la phase relative des perturbations en pression gazeuse et magnétique (voir texte).

types d’ondes susmentionnées, conséquence incontournable de la nonlinéarité des équations de la magnétohydrodynamique.

Une perturbation de la pression magnétique peut se propager sous la forme d’une onde longitudinale, un peu comme une onde sonore. La Figure 2.4A illustre schématiquement ce type d’*onde magnétosonique*. Ces ondes se séparent en deux sous-classes, en fonction de la phase relative existant entre les perturbations en pression gazeuse et magnétique; si ces deux perturbations sont en phase, alors la force de rappel est maximale, produisant le mode magnétosonique dit *rapide*, tandis que si ces deux perturbations sont complètement déphasées on parle du mode magnétosonique *lent*. De plus, la tension magnétique introduit une force de rappel qui permet la propagation d’une perturbation transverse, un peu comme sur une corde de guitare, tel qu’illustré sur la Fig. 2.4B. Ces ondes sont appelées *ondes d’Alfvén*.

Il s’agit maintenant de quantifier un peu tout ça. L’idée sera de linéariser les équations MHD, comme nous l’avons fait à la section §1.3.1, mais en conservant cette fois la tridimensionalité des quantités perturbées. L’état de référence sera de nouveau un fluide au repos ($\mathbf{u}_0 = 0$) à pression p_0 et densité ϱ_0 toutes deux constantes, et traversé par un champ magnétique uniforme \mathbf{B}_0 . Travaillant en régime MHD idéal et inviscide ($\eta = 0$ et $\nu = 0$), les équations à l’ordre 1 prennent alors la forme:

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial t} = -\varrho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1, \quad (2.53) \quad \{\text{eq:mhdwave1a}\}$$

$$\varrho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -c_s^2 \nabla \varrho_1 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0, \quad (2.54) \quad \{\text{eq:mhdwave1b}\}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0). \quad (2.55) \quad \{\text{eq:mhdwave1c}\}$$

On a de plus supposé ici que la perturbation est adiabatique, ce qui a déjà permis d’éliminer p_1 via la relation $p_1 = c_s^2 \varrho_1$, avec $c_s^2 = \gamma p_0 / \varrho_0$ (voir §1.3.1 au besoin...). La forme relativement simple de ces équations linéarisées tient du fait qu’ici l’état de référence est supposé statique

($\mathbf{u}_0 = 0$) et uniforme en \mathbf{B}_0 ; sinon les membres de droite des expressions ci-dessus seraient passablement plus riches en termes supplémentaires. Il est encore possible de combiner tout ça en une équation d'onde, mais l'algèbre (vectorielle) est un peu fastidieuse. Le prélude consiste à définir la *vitesse d'Alfvén*:

$$\{\text{eq:valf}\} \quad \mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{\mu_0 \varrho_0}} . \quad (2.56)$$

Je vous laisse vérifier que le membre de droite a vraiment les dimensions d'une vitesse. Il s'agit ensuite de prendre la dérivée temporelle de (2.54); ceci fera apparaître des dérivées temporelles de \mathbf{B}_1 et ϱ_1 au membre de droite; ces dérivées peuvent être remplacées par les membres de droite des éqs. (2.53) et (2.54). On en arrive ainsi à une forme d'équation d'onde pour \mathbf{u}_1 , équivalent MHD de l'éq. (1.77) et s'y réduisant dans la limite $\mathbf{B}_0 \equiv \mathbf{u}_A \rightarrow 0$:

$$\{\text{eq:mhdwave2}\} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_1) + [\nabla \times (\nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_A))] \times \mathbf{u}_A . \quad (2.57)$$

L'état de référence étant uniforme, on peut rechercher des solutions ayant la forme d'ondes planes, i.e.,

$$\{\text{eq:mhdwave3}\} \quad \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_1 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] . \quad (2.58)$$

où \mathbf{U}_1 est l'amplitude (vectorielle et complexe) de la perturbation en vitesse. Substituant cette expression dans l'éq. (2.57), on trouve:

$$\{\text{eq:mhdwave3b}\} \quad \omega^2 \mathbf{U}_1 = c_s^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1) \mathbf{k} - \mathbf{u}_A \times \{ \mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times (\mathbf{U}_1 \times \mathbf{u}_A)] \} . \quad (2.59)$$

On utilise maintenant l'identité vectorielle $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ pour développer le second terme au membre de droite de (2.59), on en arrive (éventuellement..) à la relation de dispersion suivante:

$$\{\text{eq:mhdwave4}\} \quad \omega^2 \mathbf{U}_1 = (c_s^2 + u_A^2) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1) \mathbf{k} + \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{k} [(\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{k}) \mathbf{U}_1 - (\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{U}_1) \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1) \mathbf{u}_A] . \quad (2.60)$$

où $u_A^2 \equiv \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{u}_A$. L'idée générale à ce stade serait de solutionner cette relation de dispersion dans l'hyperplan $[\omega, \mathbf{k}]$ pour un c_s et \mathbf{u}_A considérés connus. C'est possible mais c'est du sport! Le résultat dépend évidemment de manière assez complexe des angles entre le vecteur de propagation \mathbf{k} , l'orientation du champ magnétique dans l'état de référence \mathbf{B}_0 , et l'orientation de la perturbation \mathbf{U}_1 . Il sera instructif de considérer en premier lieu quelques cas limites qui sont plus faciles à traiter et interpréter.

2.8.1 Cas 1: $\mathbf{U}_1 \parallel \mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$

On voit déjà qu'il s'agira ici d'une onde longitudinale, puisque $\mathbf{U}_1 \parallel \mathbf{k}$. Sous ces conditions on a $\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{k} = u_A k$, $\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{U}_1 = u_A U_1$, et $\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1 = U_1 k$. L'équation (2.60) se réduit alors à:

$$\{\text{eq:mhdwave5a}\} \quad \omega^2 = c_s^2 k^2 , \quad (2.61)$$

soit la relation de dispersion pour une onde acoustique pure. Une telle onde peut donc se propager le long d'une ligne de champ magnétique sans ressentir la présence de ce dernier. On obtient d'ailleurs le même résultat en posant directement $u_A = 0$ dans l'éq. (2.60).

2.8.2 Cas 2: $\mathbf{U}_1 \parallel \mathbf{k}$, $\mathbf{U}_1 \perp \mathbf{B}_0$

Il s'agit ici d'une situation correspondant à la Figure 2.4B, où cette fois l'onde est longitudinale et se propage dans une direction perpendiculaire au champ magnétique de l'état de référence. On a alors $\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{k} = 0$, $\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{U}_1 = 0$, et $\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1 = U_1 k$; Ce n'est que le premier terme au membre de droite de l'éq. (2.60) qui se retrouve non-nul, et on a alors:

$$\{\text{eq:mhdwave5b}\} \quad \omega^2 = (c_s^2 + u_A^2) k^2 . \quad (2.62)$$

La vitesse de phase de cette onde est $\sqrt{c_s^2 + u_A^2} > u_A$ et $> c_s$; c'est le mode magnéto-sonique rapide, dont la vitesse de phase est clairement plus grande que la vitesse d'Alfvén, d'où son qualificatif "rapide".

2.8.3 Cas 3: $\mathbf{U}_1 \perp \mathbf{k}$, $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$

On se tourne maintenant vers la situation illustrée à la Figure 2.4A, soit une onde transverse se propageant dans la direction du champ magnétique de l'état de référence. On a donc $\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{k} = u_A k$, $\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{U}_1 = 0$, et $\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1 = 0$; seul le second terme au membre de droite de l'éq. (2.60) demeure non-nul, ce qui conduit à:

$$\omega^2 = u_A^2 k^2 . \quad (2.63) \quad \{\text{eq:mhdwave5c}\}$$

Cette onde transverse se déplace à une vitesse de phase égale à la vitesse d'Alfvén; sa vitesse de propagation est donc directement déterminée par l'amplitude du champ magnétique et la densité du fluide.

2.8.4 Cas 4: orientations arbitraires

Examinons maintenant un cas plus général. On supposera le champ magnétique \mathbf{B}_0 de l'état de référence aligné à l'axe- z ; le vecteur de propagation \mathbf{k} à un angle θ de \mathbf{B}_0 ; et une perturbation \mathbf{U}_1 orientée arbitrairement par rapport à ces deux vecteurs. Spécifiquement:

$$\mathbf{u}_A = u_A \hat{\mathbf{e}}_z , \quad (2.64) \quad \{\text{eq:wave6a}\}$$

$$\mathbf{k} = k(\sin \theta \hat{\mathbf{e}}_x + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_z) , \quad (2.65) \quad \{\text{eq:wave6b}\}$$

$$\mathbf{U}_1 = U_{1x} \hat{\mathbf{e}}_x + U_{1y} \hat{\mathbf{e}}_y + U_{1z} \hat{\mathbf{e}}_z . \quad (2.66) \quad \{\text{eq:wave6c}\}$$

Contrairement aux trois cas traités précédemment, l'équation de dispersion a maintenant trois composantes non-triviales:

$$U_{1x}(-\omega^2 + k^2 u_A^2 + k^2 c_s^2 \sin^2 \theta) + U_{1z}(k^2 c_s^2 \sin \theta \cos \theta) = 0 , \quad (2.67) \quad \{\text{eq:wave7a}\}$$

$$U_{1y}(-\omega^2 + k^2 u_A^2 \cos^2 \theta) = 0 , \quad (2.68) \quad \{\text{eq:wave7b}\}$$

$$U_{1x}(k^2 c_s^2 \sin \theta \cos \theta) + U_{1z}(-\omega^2 + k^2 c_s^2 \cos^2 \theta) = 0 . \quad (2.69) \quad \{\text{eq:wave7c}\}$$

L'équation (2.68) donne immédiatement:

$$\frac{\omega}{k} = u_A \cos \theta , \quad (2.70) \quad \{\text{eq:wave8b}\}$$

ce qui retombe bien à l'éq. (2.63) pour $\theta = 0$, comme il se doit. Il s'agit donc ici d'une onde de type Alfvénique.

Les deux autres équation de dispersion sont couplées; on les réécrit sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + k^2 u_A^2 + k^2 c_s^2 \sin^2 \theta & k^2 c_s^2 \sin \theta \cos \theta \\ k^2 c_s^2 \sin \theta \cos \theta & -\omega^2 + k^2 c_s^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1x} \\ U_{1z} \end{pmatrix} = 0 . \quad (2.71) \quad \{\text{eq:wave8c}\}$$

Pour garantir l'existence d'une solution, on doit poser le déterminant de cette matrice égal à zéro, ce qui conduit à la relation de dispersion:

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}(c_s^2 + u_A^2) \pm \frac{1}{2}[(c_s^2 + u_A^2)^2 - 4c_s^2 u_A^2 \cos^2 \theta]^{1/2} . \quad (2.72) \quad \{\text{eq:wave8a}\}$$

Poser $\theta = \pi/2$ nous ramène bien à l'éq. (2.62) si on conserve la racine positive, indiquant qu'on a affaire ici à une onde magnétosonique rapide. L'onde magnétosonique lente émerge finalement de l'analyse: elle correspond à la racine négative, et ne peut se propager que si θ diffère d'un multiple de $\pi/2$. OUUUF !!

Les trois modes ondulatoires MHD —magnétosonique lent, magnétosonique rapide, et Alfvén— forment une base orthogonale, qui peut être utilisée pour représenter toute perturbation temporelle d'un fluide magnétisé. Notons finalement que contrairement aux ondes magnétosoniques rapide et lente, l'onde d'Alfvén peut se propager dans un fluide incompressible. C'est donc souvent ce type d'onde MHD qui dominera dans des situations où le nombre de Mach $\ll 1$.

2.9 Le potentiel vecteur et l'hélicité magnétique

{sec:Avec}

Il sera souvent pratique d'exprimer l'équation d'induction magnétique en termes d'un *potentiel vecteur* \mathbf{A} (unités T m), tel que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. L'équation (2.9) devient alors:

$$\nabla \times \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \eta \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] = 0. \quad (2.73) \quad \{\text{E2.02z}\}$$

On peut intégrer cette expression pour arriver à la forme:

$$\{\text{E2.02}\} \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \eta \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = C \nabla \varphi. \quad (2.74)$$

où C est une constante arbitraire, et la fonction scalaire résultant de la "dérotationnelisation" de l'équation d'induction n'a aucun impact sur \mathbf{B} puisque $\nabla \times \nabla \varphi \equiv 0$ identiquement. Cependant, φ peut contribuer au champ électrique, et agit donc comme un potentiel électrostatique. L'utilisation des identités du calcul vectoriel (voir Annexe A au besoin) permet de développer le troisième terme au membre de droite sous la forme:

$$\{\text{E2.02w}\} \quad \eta \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\eta \nabla^2 \mathbf{A} + \eta \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (2.75)$$

Comme la constante C et le potentiel électrostatique φ n'ont aucun impact sur \mathbf{B} , autant les choisir de manière à nous simplifier la vie. On posera donc $C = \eta$, et on adopte la jauge de Coulomb $\varphi = \nabla \cdot \mathbf{A}$; ceci réduit le terme de dissipation Ohmique à $\eta \nabla^2 \mathbf{A}$, et l'équation d'induction pour le potentiel vecteur devient alors:

$$\{\text{E2.02x}\} \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \eta \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (2.76)$$

Notons encore une fois qu'ici le Laplacien agit sur une quantité vectorielle, ce qui diffère de l'action du Laplacien sur les composantes scalaires par des termes métriques, sauf en coordonnées Cartésiennes (voir Annexe B).

Le potentiel vecteur permet une représentation élégante des champs axisymétriques ($\partial/\partial\phi \equiv 0$) en terme de deux fonctions scalaires, soit les composantes- ϕ du potentiel vecteur et du champ magnétique même. En coordonnées sphériques polaires:

$$\{\text{eq:axisym}\} \quad \mathbf{B}(r, \theta, t) = \nabla \times [A(r, \theta, t) \hat{\mathbf{e}}_\phi] + B(r, \theta, t) \hat{\mathbf{e}}_\phi. \quad (2.77)$$

Il est facile de vérifier qu'une telle expression satisfait identiquement la contrainte $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. La fonction scalaire A définit ici la composante poloidale du champ magnétique.

L'hélicité magnétique est définie comme

$$\{\text{???\} \quad h_B = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \quad (2.78)$$

et mesure la connectivité topologique du champ magnétique. Considérons la variation de l'hélicité totale ($\mathcal{H}_B \equiv \int_V h_B$) d'un élément de fluide de volume V lors de son déplacement dans un écoulement (représentation Lagrangienne). L'utilisation des eqs. (2.9), (2.74), et (2.5), suivi d'une bonne dose d'algèbre vectorielle, produit l'expression suivante:

$$\{\text{eq:maghe1}\} \quad \frac{D}{Dt} \underbrace{\int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV}_{\mathcal{H}_B} = -2\mu_0 \eta \underbrace{\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} dV}_{\mathcal{H}_J}, \quad (2.79)$$

où l'intégrale au membre de droite définit l'hélicité totale de courant \mathcal{H}_J , qui mesure la connectivité topologique du champ \mathbf{B} avec la densité de courant le supportant.

L'Équation (2.79) indique qu'en MHD idéale ($\eta = 0$), l'hélicité magnétique est une quantité conservée. Ceci s'avèrera une contrainte de taille pour l'amplification des champs magnétiques par effet dynamo; on y reviendra vers la fin de ce cours.

{sec:origB}

2.10 L'origine des champs magnétiques astrophysiques

Ce chapitre pourrait avoir donné l'impression d'une fixation obsessionnelle sur le champ magnétique \mathbf{B} . Qu'est-ce qui est arrivé au champ électrique \mathbf{E} ? Le fait demeure que partout dans l'univers, on observe des champs magnétiques de toute forme et intensité. Les champs électriques, par contre, n'y sont que rarement présents. Ceci est à prime abord étrange, considérant que \mathbf{E} et \mathbf{B} apparaissent à pied d'égalité dans les équations de Maxwell (2.1)–(2.4). De surcroît, un simple changement de référentiel peut transformer un \mathbf{B} en un \mathbf{E} . Où sont donc les champs électriques astrophysiques ?

La question du référentiel se règle via les observations; dans n'importe quel référentiel inertielle raisonnable (i.e., la Terre au repos; le système solaire au repos; la Voie Lactée au repos; le groupe local au repos, etc., ad infinitum), il y a du \mathbf{B} partout, et excessivement peu de \mathbf{E} . Cette asymétrie n'est pas une question de référentiel, mais plutôt de sources. Aussi vide soit-il, l'Univers contient une quantité astronomique de charges libres: électrons libres, molécules ou atomes ionisés, grains chargés photoélectriquement, etc. Si un champ électrique apparaît soudainement quelquepart, les charges dans le milieu ambiant se sépareront sur une échelle de temps correspondant au temps de relaxation électrostatique introduit précédemment (éq. (2.21)), jusqu'à ce que le champ électrique secondaire ainsi produit annule le champ appliqué, principe de superposition oblige. Les faibles densités de la plupart des plasmas astrophysiques impliquent aussi un grand libre parcours moyen pour leurs constituants microscopiques, ce qui conduit typiquement à des conductivités électriques raisonnables et des temps de relaxation électrostatique très courts, même quand le degré d'ionisation est très bas, comme dans les nuages moléculaires par exemple. Conséquemment, les champs électriques astrophysiques tendent à se court-circuiter très rapidement une fois créés.

Ce n'est pas le cas avec les champs magnétiques, car en autant qu'on puisse en juger en ce moment, il n'y a vraiment pas beaucoup de monopoles magnétiques dans l'Univers, donc court-circuiter les champs magnétiques par séparation de monopoles de charges (magnétiques) opposées n'est pas une option. Un champ magnétique ne peut que se dissiper, via l'action de la résistance Ohmique sur les courants électriques le supportant (viz. la Loi d'Ampère). On sait déjà que ce temps de dissipation (donné par l'éq. (2.13)) est immensément long (viz. le Tableau 2.1). Une fois créés, de quelque manière que ce soit, les champs magnétiques astrophysiques sont là pour rester, à moins qu'un processus dynamique (i.e. une instabilité) n'accélère leur dissipation.

Ce qui nous emmène à un problème crucial. La linéarité en \mathbf{B} de l'équation d'induction MHD (2.9) implique que si $\mathbf{B} = 0$ à un temps quelconque t_0 , alors $\mathbf{B} = 0$ à tous les temps subséquents $t > t_0$, une situation qui persiste même si t_0 est repoussé jusqu'au Big Bang. D'où originent alors les champs magnétiques observés aujourd'hui? On a déjà considéré (à la §2.4) une situation où un écoulement peut amplifier un champ magnétique, et on en verra bon nombre d'autres dans la suite de ce cours. Il serait donc suffisant d'identifier un mécanisme convaincant qui puisse produire un champ magnétique de très faible amplitude, et l'induction MHD peut en principe prendre le relais.

Une option est de supposer que le Big Bang "contenait" déjà un champ magnétique primordial; c'est possible, mais ce genre d'explication cosmologico-religieuse ne tombe pas dans la catégorie des mécanismes convaincants, à mon humble avis du moins. L'option des monopoles magnétiques, elle, peut au moins se quantifier à un certain niveau. La mécanique quantique permet l'existence de tels monopoles, tant que la charge magnétique est un multiple entier de $g \equiv hc/(4\pi e) \approx 69e$, où h est la constante de Planck et e la charge électrique fondamentale. Comme nous n'avons vraiment besoin que d'un seul de ces monopoles, l'option est attrayante. Certaines théories de grande unification, en vogue à diverses périodes, allaient même jusqu'à "prédire" que tôt après le Big Bang, une telle quantité de monopoles de masse $m_g \approx 10^{16}$ GeV/ c^2 devraient être produits qu'une cosmologie inflationniste devient essentielle pour s'assurer qu'un seul monopole se retrouve dans chaque sous-domaine inflationnaire.

Ceci dit, comme personne n'a jamais encore détecté ou vu passer un monopole magnétique, il serait plus rassurant de se trouver un mécanisme qui fonctionne sur la base de théories

physiques bien validées dans notre coin du cosmos. Il s'avère que ce n'est pas si compliqué que ça; après tout, la dérivation de l'équation MHD (voir §2.1) repose sur un certain nombre d'approximations, qui peuvent être relaxées. Conserver le courant de déplacement de Maxwell ne nous apporte pas grand chose. C'est au niveau de la Loi d'Ohm que se trouve notre meilleure candidat⁵.

Ramenons nous en physique des plasmas et écrivons l'équation du mouvement d'un fluide d'électrons (densité électronique n_e , en m^{-3}) dans un plasma d'Hydrogène complètement ionié:

$$\{\text{eq:bier1}\} \quad m_e n_e \frac{D\mathbf{u}_e}{Dt} = -\nabla p_e - n_e e (\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) - \nu m_e n_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_p), \quad (2.80)$$

où $\nu = n_e e^2 / m_e \sigma$ mesure le taux de collisions, et donc de transfert de quantité de mouvement, entre les électrons et les protons, que l'on suppose ici proportionnel à la vitesse de dérive entre ces deux composantes du fluide. Si on élimine le membre de gauche au vu de la très faible masse de l'électron, ainsi que le gradient de pression électronique, on retrouve bien l'éq. (2.7), puisque $n_e e (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_e) \equiv \mathbf{J}$. Si on conserve le gradient de pression électronique, on trouve au lieu de l'éq. (2.8) l'expression suivante:

$$\{\text{eq:fullEB}\} \quad \mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{\nabla p_e}{n_e e}, \quad (2.81)$$

et l'éq. (2.9) devient ainsi:

$$\{\text{???\}\} \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\nabla p_e}{n_e e}); \quad (2.82)$$

ou encore, sous utilisation judicieuse de quelques identités vectorielles classiques:

$$\{\text{eq:inductionB}\} \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B}) - \frac{\nabla n_e \times \nabla p_e}{n_e^2 e}. \quad (2.83)$$

Le dernier terme au membre de gauche est appelé *batterie de Biermann*, et, fondamentalement, capture la possibilité de produire une séparation de charges autrement que par l'application d'un champ électrique \mathbf{E} ; en fait, toute force électromotrice d'origine mécanique (ou chimique, d'où le qualificatif original de "batterie") peut faire l'affaire. Ce terme batterie n'est pas proportionnel à \mathbf{B} , et donc agit comme un véritable terme source dans l'équation d'induction MHD: il est maintenant possible de produire un champ magnétique même si $\mathbf{B} = 0$ à $t = 0$!

Dans un contexte astrophysique, la clef est de produire une configuration plasma où les gradients de densité et pression électroniques ne sont pas parallèles. Pas évident, mais possible dans quelques situations astrophysiques crédibles, toutes impliquant, à un niveau ou l'autre, la rotation. Considérons en brièvement quelques unes, en remontant de la période actuelle... presque jusqu'au Big Bang !

2.10.1 Batteries stellaires

On a vu à la §1.5.5 que dans une zone convective de type stellaire, la rotation, via la force de Coriolis, brise l'isotropie de la turbulence et conduit à des contributions non-diffusives (hors-diagonales) dans le tenseur des stress de Reynolds, qui propulsent une rotation différentielle et une circulation dans les plans méridiens. Écrivons l'équation d'Euler en régime stationnaire ($\partial/\partial t \equiv 0$) et intégrons le long d'une ligne d'écoulement (fermée) de cette circulation méridienne:

$$\{\text{eq:intmc}\} \quad \oint \left(-\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}' \right) \cdot d\mathbf{l} = \oint (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.84)$$

⁵Le reste de cette section est basé en majeure partie sur le travail de session de Simon Blouin à l'automne 2015.

où $\mathbf{g}' \equiv \mathbf{g} + \omega^2 r \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_s$, $\omega(r, \theta)$ étant la fréquence angulaire de rotation à la position (r, θ) dans l'étoile et $\hat{\mathbf{e}}_s$ un vecteur unitaire pointant perpendiculairement à l'axe de rotation. Cette ajout à la gravité correspond évidemment à la force centrifuge. Le membre de droite de cette expression est nul, puisque $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla(u^2/2) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$, et l'intégrale sur le parcours fermé d'un gradient l'est identiquement, tandis que $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \perp d\ell$, car on a (judicieusement!) choisi un parcours d'intégration coïncidant avec une ligne d'écoulement. Appliquant maintenant le théorème de Stokes au membre de gauche de (2.84):

$$\int_S \left[\nabla \times \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) \right] \cdot dS = \int_S (\nabla \times \mathbf{g}') \cdot dS ; \quad (2.85) \quad \{???\}$$

mais

$$\nabla \times \mathbf{g}' = \underbrace{\nabla \times \mathbf{g}}_{\equiv 0} + \underbrace{\nabla \times (\omega^2 r \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_s)}_{\neq 0} . \quad (2.86) \quad \{\text{eq:rotgpr}\}$$

On a donc

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) \equiv - \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} \neq 0 ; \quad (2.87) \quad \{???\}$$

Comme la densité $\rho \equiv n_e m_e + n_p m_p$ pour un fluide d'Hydrogène ionisé, on voit que ce terme a la forme du terme de batterie de Biermann dans l'éq. (2.83). Une étoile en rotation *différentielle*⁶ produira donc un effet batterie propulsant une densité de courant dans la direction azimutale, avec laquelle sera associé un champ magnétique poloidal, selon la Loi d'Ampère (2.5). Voilà !

2.10.2 Batteries galactiques

Dans les phases finales de la formation d'une galaxie imbuée d'un moment cinétique significatif (comme dans les galaxies spirales), un effet batterie peut se développer via l'interaction avec le rayonnement micro-onde primordial. Après le découplage photon-matière, considérons une proto-galaxie dont les régions externes tournent à vitesse $U = R\Omega$ par rapport à un référentiel où le rayonnement primordial micro-onde est isotrope. Le scattering de Thompson des photons micro-ondes sur les électrons conduit à l'effet de *drag de Compton*, qui induit une dérive relative des électrons dans une direction contraire à la rotation des ions. Ceci est équivalent à une densité de courant orientée azimutalement dans le plan galactique, à laquelle est associée un champ magnétique dipolaire, cette fois à l'échelle de la galaxie. Un effet analogue peut se développer dans une galaxie en formation, durant son effondrement gravitationnel. On estime que ces processus peuvent produire un champ magnétique d'une intensité de l'ordre de 10^{-20} aux échelles galactiques, et jusqu'à 10^{-18} G aux plus petites échelles. Ce n'est pas beaucoup de champ magnétique, mais il ne faut pas oublier que tout ce dont on a besoin c'est de se sortir de $\mathbf{B} = 0$.

2.10.3 Batteries cosmologiques

Si on remonte encore plus près du Big Bang, d'autres possibilités font leur apparition. Le processus dit de Harrison se base sur l'hypothèse d'un moment cinétique (ou vorticité) primordial originant du Big Bang. Dans la phase de l'expansion précédant le découplage radiation-matière, en raison de leur plus faible masse les électrons se retrouveront plus fortement couplés à la radiation que les protons. Dans cette phase cosmologique dominée par la radiation et où le couplage électron-proton est négligeable, le moment cinétique du "fluide" d'électrons évoluera différemment du "fluide" protonique, et donc développera une dérive par rapport à ce dernier en raison de l'expansion de l'univers. Ceci correspond à une densité de courant dans un plan

⁶Si la rotation est solide, i.e., $\omega(r, \theta) = \text{constante}$, alors la force centrifuge peut s'exprimer comme le gradient d'un potentiel et le second terme au membre de droite de (2.86) sera donc aussi aussi identiquement nul.

perpendiculaire à l'orientation du vecteur-vorticité primordial, à laquelle est associée un champ magnétique "dipolaire" à l'échelle de l'univers (en expansion). On estime que ce processus pourrait produire un champ magnétique d'une intensité de l'ordre de 10^{-19} aux échelles proto-galactiques; cependant, il dépend de manière critique de l'existence d'une vorticité "primordiale" au moment du Big Bang. Même si la vorticité primordiale requise s'avère être de faible amplitude, l'hypothèse demeure *ad hoc*, et l'efficacité de ce mécanisme demeure contestée.

Le mécanisme de Harrison sent un peu le mysticisme cosmologique; mais le message de cette section demeure: pas vraiment besoin de tomber dans les monopoles ou dans les cordes pour expliquer l'origine ultime des champs magnétiques !

Bibliographie:

Sauf pour quelques ajouts substantiels, en particulier au niveau des ondes MHD (§2.8), ce chapitre a été assemblé (et traduit) à partir de Notes de cours que j'ai écrites il y a quelques années pour la trente-neuvième mouture de l'École Avancée de Saas Fee de la Société Suisse d'Astronomie. Ces notes sont maintenant publiées:

Charbonneau, P., *Solar and Stellar Dynamos*, éd. O. Steiner, Springer, 2013.

Si vous avez besoin de vous rafraîchir la mémoire sur l'électromagnétisme, je vous recommande:

Griffith, D.J., *Introduction to Electrodynamics*, 3rd ed., Prentice Hall (1999).

En terme d'introduction à la magnétohydrodynamique, mon ouvrage préféré demeure:

Davidson, P.A., *An Introduction to Magnetohydrodynamics*, Cambridge University Press (2001).

Les sections 2.3 et 2.7 de ce chapitre sont d'ailleurs fortement inspirées de cet ouvrage, qui présente également une démonstration particulièrement claire du théorème cinématique (soit l'éq. (2.51)). Au niveau des ondes magnétohydrodynamiques, une présentation rigoureuse et complète se retrouve dans l'ouvrage suivant:

Goedbloed, H., & Poedts, S., *Principles of Magnetohydrodynamics*, Cambridge University Press (2004).

À ne pas rater, le petit vidéo suivant sur youtube; hilarant stylistiquement, mais physiquement parfait et vraiment très bien expliqué:

<http://www.youtube.com/watch?vQArcTy1NooQ>

Ceux et celles désirant approfondir les nombreuses subtilités de l'intersection entre la magnétohydrodynamique et la physique des plasmas trouveront se quoi se tenir occupé(e)s dans l'ouvrage suivant:

Kulsrud, R.M., *Plasma Physics for Astrophysics*, Princeton University Press (2005).

dont le chapitre 13 traite en détail des effets de batterie et des divers mécanismes pouvant conduire à la production de champs magnétiques primaires. Un scénario "complet" de l'inexorable croissance du champ magnétique dans l'Univers est présenté dans

Kulsrud, R.M., & Zweibel, E.G, *Rep. Prog. Phys.*, **7**, 046901 (2008).