

# Chapitre 9

## De la vague au tsunami

Le matin du 26 décembre 2004, un tremblement de terre de magnitude 9+ se déclenche au large de la côte ouest de Sumatra, en Indonésie. Le fond de l’océan se soulève de plusieurs mètres sur une centaine de kilomètres carrés, soulevant quelques  $30 \text{ km}^3$  d’eau et produisant une immense vague, dite tsunami, atteignant jusqu’à 30 m de hauteur au moment de son déferlement sur les côtes de l’océan Indien (voir Figure 9.1). À ce jour, les estimés du nombre de morts varient entre 170000 et 275000, faisant de ce tsunami une des plus meurtrières catastrophes naturelles recensées à date (espérons que ce triste record tiendra longtemps...).

Comment se fait-il qu’une vague si désastreuse n’ait causé de dégât que près des côtes et îles, sans balayer tous les bateaux navigant dans le Pacifique ouest et l’océan Indien? Vous vous rappellerez peut-être même avoir lu dans les journaux que plusieurs navires ont chevauché la vague meurtrière, sans même qu’aucun passager ou membre d’équipage ne ressente quoique ce soit. De plus, des observations satellites analysées *a posteriori* ont démontré qu’en haute mer, la vague responsable du tsunami se déplaçait entre 500 et 1000  $\text{km h}^{-1}$ , mais n’avait qu’une amplitude de  $\sim 60 \text{ cm}$ . Comment une telle vague a-t-elle pu croître d’un facteur 50 avant son déferlement sur les côtes? Ces questions sont le principe motivateur de ce chapitre, qui se concentre sur la dynamique des vagues à une interface fluide-air.

Nous commencerons par établir une formulation mathématique générale décrivant la propagation d’une onde de surface de faible amplitude le long d’une interface du genre fluide-air (§9.1). Nous obtiendrons par la suite des solutions spécifiques applicables aux cas d’une couche liquide de profondeur infinie (§9.2), puis de profondeur finie (§9.3), et ensuite de faible profondeur (§9.4). Nous poursuivrons (§9.5) avec un bref aperçu du déferlement, processus inhéremment nonlinéaire mais qui peut néanmoins être approché à l’aide de la théorie linéarisée. Ceci est suivi d’une parenthèse discutant des effets de la tension superficielle (§9.6), et le chapitre conclut, enfin, par un retour sur l’effet tsunami (§9.7), tel qu’il peut être (partiellement) compris sur la base des théories et solutions développées aux sections précédentes.

### 9.1 La vague en toute généralité

On s’intéresse dans ce qui suit au comportement d’un fluide parfait et incompressible globalement au repos, contenu dans un “bassin” (lac, océan, canal, etc) de très grandes dimensions horizontales. On suppose qu’une déformation est imposée à l’interface liquide-air, comme illustré schématiquement sur la Figure 9.2. Un élément de fluide déplacé au dessus du niveau moyen du liquide ressentira, au minimum, une force gravitationnelle vers le bas, et on peut donc s’attendre à ce que la déformation ne demeure pas stationnaire. Définissons une courbe paramétrique  $\eta(x, t)$  décrivant la variation horizontale de l’interface en fonction du temps, par rapport à la hauteur moyenne de l’interface, cette dernière définissant l’origine  $z = 0$  de la coordonnée verticale. L’interface est donc décrite par la relation

$$z = \eta(x, t) . \tag{9.1}$$



Figure 9.1: Deux vues, impressionnantes chacune à leur façon, du tsunami du 26 décembre 2004 dans l'océan Indien. En haut, le tsunami frappant les côtes de Thaïlande. En bas, son effet sur une partie de la ville de Banda Aceh (Ile de Sumatra, en Indonésie), vu par photographie satellite.

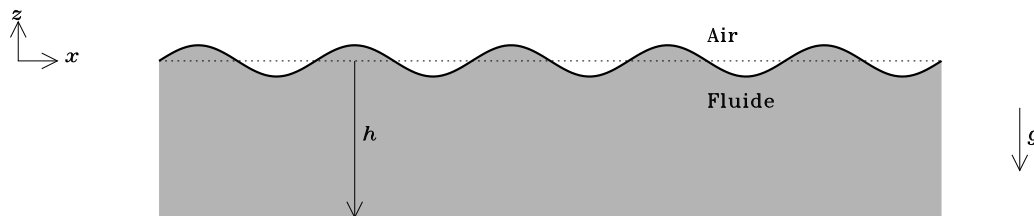


Figure 9.2: Géométrie et notation pour le problème de la vague. La couche de fluide est de profondeur  $h$ , la gravité pointe dans la direction  $-\hat{\mathbf{e}}_z$ , et le système est supposé invariant dans la direction- $y$ , ici perpendiculaire au plan de la page.

La propagation d'une vague correspond donc à une solution particulière pour  $\eta(x, t)$ . Le problème se complique en vertu du fait que la variation spatiotemporelle de l'interface produit un mouvement dans la couche de fluide sous-jacente, incontournable conséquence de la conservation de la masse. Comme notre fluide est parfait et incompressible, nous pouvons rechercher une solution en terme d'un écoulement potentiel:

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (9.2)$$

la seule contrainte introduite par cette supposition est que le fluide soit initialement irrotationnel. Comme on l'a vu au chapitre 3, le potentiel  $\varphi(x, z)$  doit satisfaire à l'équation de Laplace bidimensionnelle:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0}. \quad (9.3)$$

La condition limite qui devra être imposée à l'interface est cependant plus délicate. Quelle que soit l'évolution spatiotemporelle de l'interface, un élément de fluide ne peut que s'y déplacer tangentiellement, tout mouvement perpendiculaire ne revenant qu'à repositionner l'interface elle-même! C'est donc dire que la quantité

$$F(x, z, t) = z - \eta(x, t) \quad (9.4)$$

est conservée quand l'interface se déplace sous l'influence de l'écoulement. Exprimé mathématiquement:

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)F = 0, \quad \text{sur } z = \eta(x, t). \quad (9.5)$$

Les diverses dérivées apparaissant au membre de droite de cette expression peuvent être calculées en vertu de l'éq. (9.4):

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (9.6)$$

$$u_x \frac{\partial F}{\partial x} = -u_x \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (9.7)$$

$$u_z \frac{\partial F}{\partial z} = u_z, \quad (9.8)$$

ce qui conduit à:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_x \frac{\partial \eta}{\partial x} = u_z \quad (9.9)$$

ou encore, en terme du potentiel  $\varphi$  représentant l'écoulement:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (9.10)$$

Cette équation aux dérivées partielles décrit donc la variation de l'interface  $\eta$  en termes des propriétés de l'écoulement dans la couche de fluide. Tout ce qu'il nous reste à faire maintenant est de solutionner simultanément cette EDP et l'éq. (9.3) pour le potentiel  $\varphi$ . Petit problème à l'horizon cependant, l'éq. (9.10) est nonlinéaire, via le second terme au membre de gauche.

Il s'agit donc maintenant de se débarrasser de cette nonlinéarité en utilisant une procédure de linéarisation semblable à celle introduite au chapitre 4. Si la vague est de très faible amplitude, on peut s'attendre à ce que l'écoulement qu'il induit soit également très petit. Si c'est le cas (on le vérifiera *a posteriori*), alors le second terme au membre de gauche de l'éq. (9.10) est "quadratique" par rapport au membre de droite, et on peut donc remplacer cette équation par

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \text{sur } z = 0}. \quad (9.11)$$

Notre seconde condition limite est établie en termes de la continuité de la pression à l'interface. Revenons pour un instant à l'équation d'Euler pour un fluide incompressible et irrotationnel, que l'on peut ici écrire sous la forme

$$\frac{\partial(\nabla\varphi)}{\partial t} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \Phi \right), \quad (9.12)$$

où  $\Phi$  est le potentiel gravitationnel. Puisque nous travaillons en représentation eulérienne, ceci peut être réécrit comme

$$\nabla \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \Phi \right) = 0. \quad (9.13)$$

Ceci s'intègre immédiatement pour produire:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + gz = G(t), \quad (9.14)$$

où  $G$  est une fonction dont la valeur peut être choisie arbitrairement sans perte de généralité (elle joue un rôle semblable au point zéro du potentiel électrostatique). En particulier, sur la surface  $\eta(x, t)$  la pression doit être constante et égale à la pression atmosphérique  $p_0$ . On peut donc choisir  $G = p_0/\rho$ , ce qui conduit à

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + g\eta = 0, \quad \text{sur } z = 0. \quad (9.15)$$

Ceci nous emmène à l'étape de linéarisation, qui consiste ici à faire sauter le terme "quadratique" en  $u^2$ . On obtient finalement:

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\eta = 0, \quad \text{sur } z = 0}. \quad (9.16)$$

Les équations couplées (9.11) et (9.16) définissent les conditions limites qui doivent être satisfaites à l'interface. Nous sommes finalement prêt à calculer une solution!

## 9.2 Vagues en eau très profonde

Revenons à notre idée initiale de la vague se propageant dans la direction- $x$ ; dans un tel cas, on peut supposer que la déformation de l'interface puisse être décrite par une expression du genre

$$\eta(x, t) = A \cos(kx - \omega t), \quad (9.17)$$

où comme d'habitude  $\omega$  est la fréquence angulaire de l'onde sinusoïdale,  $k = 2\pi/\lambda$  son nombre d'onde, et la vitesse de phase est  $c = \omega/k$ . Similairement, le potentiel doit être donnée par une expression du genre:

$$\varphi(x, z, t) = f(z) \sin(kx - \omega t) , \quad (9.18)$$

la présence du  $f(z)$  étant nécessaire puisque l'écoulement produit par la vague n'est pas nécessairement limité à la surface même. Je vous laisse vérifier que la substitution de cette expression dans notre équation de Laplace (9.3) conduit à l'EDO suivante pour  $f(z)$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - k^2 f = 0 . \quad (9.19)$$

Ceci accepte une solution de la forme

$$f(z) = C \exp(kz) + D \exp(-kz) . \quad (9.20)$$

Dans le régime "très profond" on peut considérer que l'épaisseur de la couche fluide  $h \rightarrow \infty$ ; donc on doit poser  $D = 0$  pour éviter divergence (n'oubliez pas que  $z$  est négatif dans le fluide, cf. Fig. 9.2). Substituant l'éq. (9.20) avec  $D = 0$  et l'éq. (9.17) dans nos conditions de surface (9.11) et (9.16) conduit aux deux équations algébriques:

$$Ck = A\omega , \quad C\omega = gA . \quad (9.21)$$

Ces deux expressions ne peuvent être simultanément satisfaites que si

$$\boxed{\omega^2 = gk} . \quad (9.22)$$

Une telle expression, posant une contrainte reliant la fréquence  $\omega$  et le nombre d'onde  $k$ , est appelée **relation de dispersion**. Vous vous rappellerez certainement, de votre cours de physique des ondes, que la **vitesse de groupe**  $c_g$  d'un train d'ondes est donnée par

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} , \quad (9.23)$$

donc ici

$$c_g = \frac{1}{2} \sqrt{g/k} . \quad (9.24)$$

Le fait que la vitesse de groupe dépende du nombre d'onde  $k$  indique que l'onde est **dispersive**, i.e., toutes les longueurs d'onde ne se propagent pas à la même vitesse; imaginons qu'une perturbation spatialement localisée est introduite quelquepart sur l'interface à  $t = 0$ , comme sur la Figure 9.3A. Une telle perturbation, en général, peut être représentée par une superposition de modes harmoniques, chacun ayant un nombre d'onde  $k$  différent. Dans un système non-dispersif tous les modes se propagent à la même vitesse, donc la perturbation elle-même se propage à la vitesse de groupe *tout en conservant sa forme* (Fig. 9.3B). Dans un système dispersif, par contre, il y a séparation spatiale des différents modes à mesure que se propage la perturbation, et donc sa forme n'est pas conservée (Fig. 9.3C). Dans le cas des ondes de surface en eau profonde, l'éq. (9.24) nous indique immédiatement que ce sont les plus grandes longueurs d'onde ( $k$  petits) qui se propagent le plus rapidement.

Qu'en est-il de l'écoulement produit dans la couche de fluide? La substitution de l'éq. (9.21) avec  $D = 0$  et de (9.22) dans (9.18) conduit à

$$\boxed{\varphi(x, z, t) = \frac{A\omega}{k} \exp(kz) \sin(kx - \omega t) .} \quad (9.25)$$

Les composantes de la vitesse sont donc

$$u_x(x, z, t) = A\omega \exp(kz) \cos(kx - \omega t) , \quad (9.26)$$

$$u_z(x, z, t) = A\omega \exp(kz) \sin(kx - \omega t) . \quad (9.27)$$

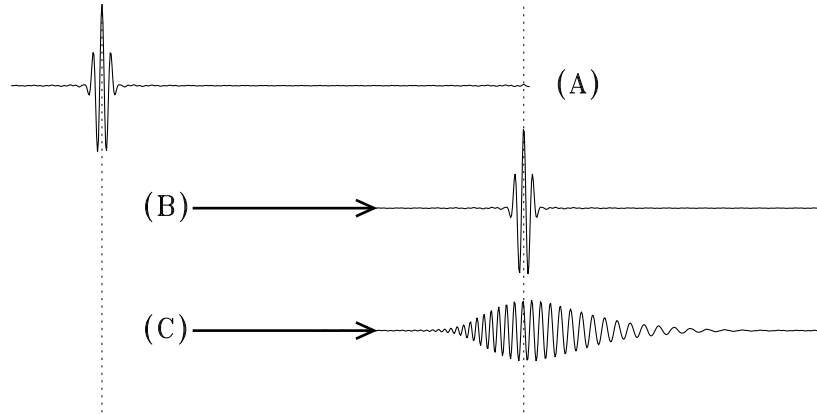


Figure 9.3: Evolution spatiotemporelle d'un train d'ondes (en "A"), dans une situation non-dispersive ("B") et dispersive, où la vitesse de phase croît avec la longueur d'onde ("C"). Remarquez comment, dans ce dernier cas, la dispersion implique à la fois un étalement spatial du train d'ondes, ainsi qu'une déformation associée à la séparation spatiale des diverses composantes harmoniques.

La trajectoire d'un élément de fluide initialement situé à  $(x_0, z_0)$  s'obtient en intégrant ces expressions par rapport à  $t$ :

$$x - x_0 = -A \exp(kz_0) \sin(kx_0 - \omega t) , \quad (9.28)$$

$$z - z_0 = A \exp(kz_0) \cos(kx_0 - \omega t) , \quad (9.29)$$

Les mouvements internes du fluide associées au passage de la vague ont donc la forme de cercles dans le plan  $[x, z]$ , dont le rayon décroît exponentiellement avec la profondeur, comme illustré schématiquement sur la Figure 9.4. Vous avez certainement déjà ressenti ce **roulis** si vous avez déjà eu la chance de vous baigner à la mer un jour de fortes vagues.

Ces mouvements circulaires des éléments de fluide près de l'interface, pris de pair avec la conservation de la masse dans un fluide incompressible, expliquent également pourquoi l'onde de surface se propage. Considérons ce qui se passe au point "A" sur la Figure 9.4; par rapport à ce point, l'écoulement le long de la surface est divergent, donc le niveau du liquide doit baisser pour conserver la masse; inversement, au point "B" l'écoulement le long de la surface est convergent, et la conservation de la masse impose donc que le niveau doit monter; c'est exactement ce qui doit se passer pour que l'onde se propage vers la droite! Notez également, car ce sera important plus loin, que la moitié du fluide "alimentant" la crête de la vague dans son déplacement provient du creux vers lequel elle se dirige.

Les équations (9.26) indiquent qu'ici  $u_x$  et  $u_z$  sont tous les deux de grandeur comparable. Cependant dans la procédure de linéarisation conduisant à l'éq. (9.11) nous avons supposé que

$$\left| u_x \frac{\partial \eta}{\partial x} \right| \ll |u_z| . \quad (9.30)$$

Comme  $u_x \sim u_z$ , on doit en conclure que la linéarisation ne tiendra la route que si

$$\left| \frac{\partial \eta}{\partial x} \right| \ll 1 . \quad (9.31)$$

Ceci sera le cas si *l'amplitude de la vague est beaucoup plus petite que sa longueur d'onde*. C'est ici la nature de notre critère de linéarisation.

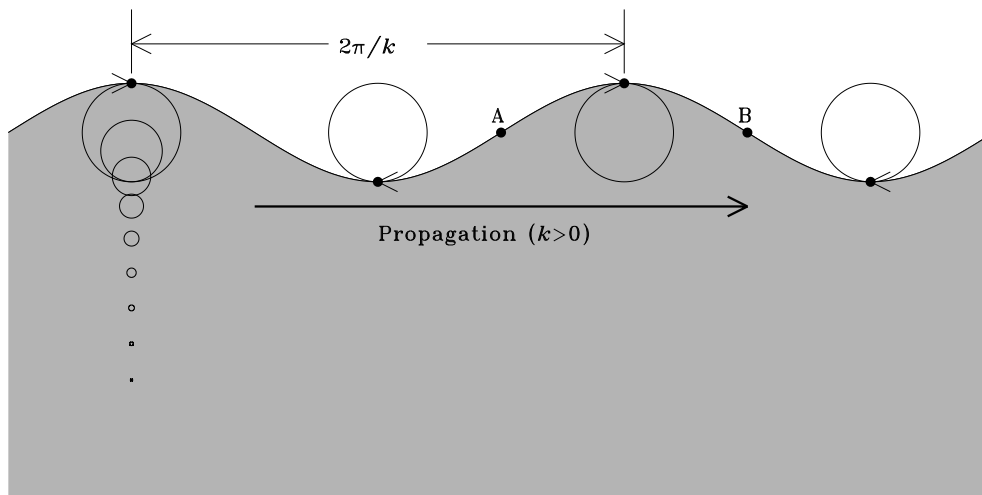


Figure 9.4: Trajectoires parcourues par quelques éléments de fluide durant une période d'oscillation de la vague. En surface, le fluide se déplace dans la direction de propagation de la vague près des crêtes, et dans la direction opposée dans les creux.

En guise de clôture à cette section, il convient de digresser un instant sur la nature du mouvement ondulatoire étudié ici, connu en termes techniques sous l'appellation **ondes de gravité de surface**; "de gravité", parce que la force de rappel est la gravité, qui, notons-le, pointe dans une direction perpendiculaire à celle de la propagation de l'onde. Donc, d'après la classification habituelle, nos ondes de gravité de surface sont des **ondes transversales**. Cependant, ici "ce qui vibre" le fait dans une direction qui n'est pas toujours orthogonale à la direction de propagation. Ce qui n'empêche pas l'onde d'être transversale; la catégorisation des divers types d'ondes est basée sur la dynamique, et non sur la cinématique. C'est tout simplement comme ça.

### 9.3 Vagues en eau moins profonde

Considérons maintenant une situation où la couche de fluide a une profondeur finie (cf. Fig. 9.2). À  $z = -h$  on doit avoir  $u_z = 0$ , mais il n'y a pas de contrainte sur  $u_x$  puisque nous travaillons ici avec un fluide parfait. La condition limite sur le potentiel  $\varphi$  est donc

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad \text{sur } z = -h. \quad (9.32)$$

Un des exercices de la troisième série vous fait refaire l'analyse de la section 9.2 avec cette nouvelle condition limite. Vous devriez trouver que la relation de dispersion prend maintenant la forme:

$$\omega^2 = gk \tanh(kh), \quad (9.33)$$

donc l'onde est toujours dispersive. La vitesse de phase est

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k} \tanh(kh). \quad (9.34)$$

Dans la limite  $kh \gg 1$ , donc une longueur d'onde  $\lambda \ll h$ , on a  $\tanh(kh) \simeq 1$ , et donc

$$c^2 \simeq \frac{g}{k}, \quad kh \gg 1, \quad (9.35)$$

soit le même résultat qu'obtenu précédemment dans le cas d'un bassin de profondeur infinie, comme il se doit. C'est la limite opposée qui est plus intéressante, soit celle des...

## 9.4 Vagues en eau peu profonde

Considérons maintenant une situation où la longueur d'onde de l'onde de surface est beaucoup plus grande que l'épaisseur de la couche de fluide, i.e.,  $kh \ll 1$ . Vous vous rappellerez de vos études cégepiennes de la diffraction optique que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1. \quad (9.36)$$

Je vous laisse vérifier, par application de la bonne vieille règle de l'Hospital, que similairement

$$\lim_{kh \rightarrow 0} \frac{\tanh(kh)}{kh} \rightarrow 1, \quad (9.37)$$

et donc que la relation de dispersion (9.33) devient

$$\omega^2 \simeq ghk^2, \quad kh \ll 1. \quad (9.38)$$

et donc les vitesses de phase et de groupe sont

$$\boxed{c \simeq \sqrt{gh}, \quad c_g \simeq \sqrt{gh}, \quad kh \ll 1,} \quad (9.39)$$

un résultat obtenu déjà en 1775 par Laplace. Ceci implique deux choses très importantes:

1. dans un bassin de profondeur finie, il existe une vitesse limite supérieure à laquelle une perturbation de faible amplitude peut se propager; pour une vague satisfaisant  $kh \ll 1$  dans un océan de profondeur  $\sim 4$  km, on a  $c \simeq 200 \text{ m s}^{-1} = 700 \text{ km à l'heure}^1$ ;
2. pour une eau peu profonde (toujours dans le sens  $kh \ll 1$ ), cette propagation est maintenant non-dispersive, puisque  $c$  ne dépend pas de  $k$ .

Encore une fois le fluide décrit un mouvement de roulis, comme à la §9.2, avec une importante distinction: l'amplitude horizontale du déplacement des éléments de fluide demeure essentiellement constante sur toute la profondeur de la couche, bien que l'amplitude du mouvement vertical, lui, décroisse avec la profondeur et tombe à zéro à  $z = -h$ , condition limite incontournable pour un fluide même parfait. Vous aurez l'occasion de démontrer dans un des exercices que les trajectoires ont maintenant la forme d'ellipses de plus en plus aplaties à mesure qu'on approche du fond. Au niveau du fond, le fluide se déplace selon un mouvement de va-et-vient parallèle au fond, phénomène facilement observable en apnée aux abords d'une plage: les jolis petits coquillages qu'on tente de ramasser se déplacent sur le fond —et se font enfouir dans le sable— chaque fois que passe une vague.

## 9.5 Énergétique et déferlement

L'énergie associée à la vague comprend deux contributions, soit l'énergie potentielle gravitationnelle associée à la déformation de la surface, et l'énergie cinétique du mouvement du fluide. On peut montrer (vous aurez à le faire en exercice...) que la somme de ces deux contributions, par unité de surface horizontale est

$$W = \frac{1}{2} \rho g A^2, \quad (9.40)$$

<sup>1</sup>En 1755 un fort tremblement de terre ravagea Lisbonne et déclencha un tsunami qui atteignit les côtes des Amériques. Vingt ans plus tard, à partir de la formule de Laplace (9.39) et connaissant le laps de temps écoulé entre le tremblement de terre et l'arrivée du tsunami en Amérique, on a pu ainsi estimer la profondeur moyenne de l'océan Atlantique à 3800 mètres, une valeur tout à fait raisonnable.



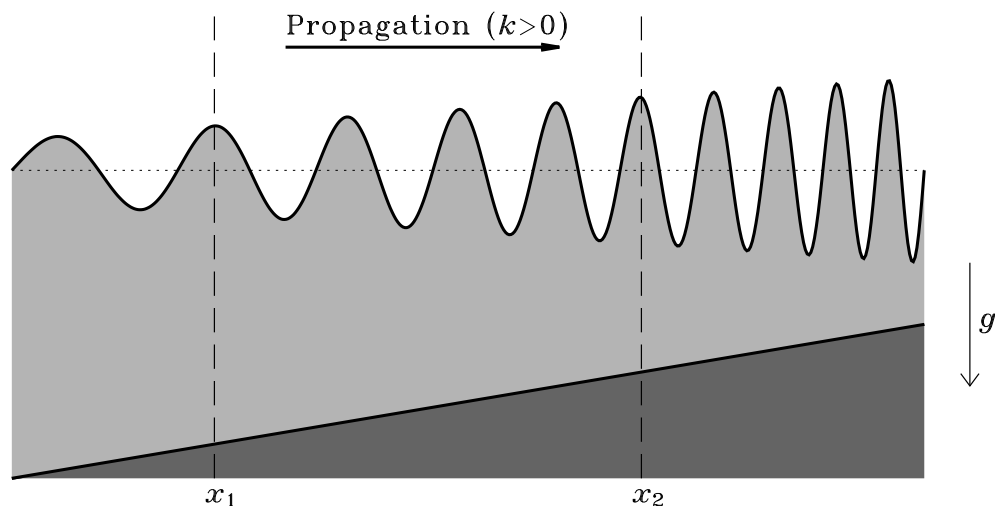


Figure 9.5: Représentation schématique de la décroissance de la longueur d'onde et croissance de l'amplitude lorsqu'une vague en régime de l'eau peu profonde se déplace dans une couche fluide dont la profondeur décroît graduellement.

peu importe la profondeur de la couche de fluide, mais en autant que  $\lambda \gg A$ , condition *sine qua non* de notre procédure de linéarisation.

Que se passera-t-il maintenant si la vague approche une côte, et que la profondeur de la couche se met à diminuer? En régime de l'eau peu profonde, les vitesses de groupe et de phase étant toutes deux proportionnelles à  $\sqrt{h}$ , la vague doit ralentir, et donc sa longueur d'onde va diminuer. L'énergie étant transportée à la vitesse de groupe, la conservation de l'énergie implique que le flux horizontal d'énergie  $c_g W \hat{e}_x$  doit demeurer constant pour un fluide parfait tel que considéré ici. Donc on s'attend à ce que l'amplitude croisse selon

$$A^2 \propto \frac{1}{c_g} \quad \rightarrow \quad A \propto h^{-1/4}. \quad (9.41)$$

Donc la longueur d'onde diminue et l'amplitude augmente lorsque la vague se propage dans une direction où la profondeur diminue (voir Figure 9.5). Pour une vague d'amplitude 1m de déplaçant initialement dans un océan de profondeur 5km, on prédirait que l'amplitude monte à 5m lorsque la vague approche à une profondeur de 10m d'une plage. C'est substantiel, mais encore loin du 20–30m observé dans le cas du tsunami du 26 décembre 2004. Cette dernière augmentation dramatique de l'amplitude se produit très près des côtes, et est associée au processus de **déferlement**.

Comme l'amplitude croît inexorablement à mesure que  $h$  diminue, il est inévitable que l'on atteigne éventuellement une situation où  $A \sim \lambda$ , rendant notre analyse linéaire inapplicable; cependant une analyse nonlinéaire dans le régime de l'eau peu profonde,  $\lambda \gg h$ , montre que même quand l'amplitude  $A$  n'est plus  $\ll \lambda$ , l'onde demeure non-dispersive, avec  $c = c_g = \sqrt{gh}$  comme dans le régime linéaire. Mais un autre problème apparaît lorsque  $A \rightarrow h$ . Revenons à la Fig. 9.4, et en particulier au fameux point “B”; le déplacement vertical de ce dernier est “alimenté” par l'eau entraînée depuis le creux devant la vague, et la crête derrière. Si cependant le creux approche le fond de la couche de fluide, l'arrivée d'eau de ce côté est réduite; le point “B” sera toujours alimenté par la crête à l'arrière, mais la symétrie avant-arrière est brisée; en plus de s'élever verticalement, le point “B” sera également propulsé dans la direction de propagation de la vague. Ceci produit un raidissement du profil de la vague au point “B” et un aplanissement en “A”, conduisant à son déferlement lorsque l'interface en “B” atteint une



Figure 9.6: Retrait de la mer à la plage de Kata Noi (Thaïlande), une trentaine de minutes avant l'arrivée de la troisième vague du tsunami.

orientation verticale<sup>2</sup>.

On notera finalement que durant la phase  $A \rightarrow h$  la “suction” de l'eau en avant de la vague peut causer une baisse marquée du niveau de l'eau des côtes vers lesquelles approche la vague, signe précurseur bien connu des tsunamis (voir Fig. 9.6).

## 9.6 Effet de la tension superficielle

Nous avons jusqu'ici négligé un effet important pour certain types d'ondes de surface: la **tension superficielle**. La tension n'est rien d'autre qu'une force orientée tangentiellement à une surface, concept familier depuis le chapitre 6. Cependant, la tension superficielle est un phénomène limité aux interfaces fluide-fluide (incluant eau-air). Son origine microscopique vient du fait que les interactions entre les constituants microscopiques d'un fluide ont des intensités différentes d'un fluide à l'autre; pour un constituant situé à une interface, il y a donc un déséquilibre entre les forces agissant du haut, et celles agissant du bas. Pour une interface plane, la composante verticale de cette différence est compensée par une différence de pression, mais la composante tangentielle ne peut l'être, et produit donc une force nette de tension.

Si maintenant la surface n'est pas plane, mais est définie par notre courbe paramétrique habituelle  $\eta(x)$ ; localement, la force de tension aura une composante verticale  $\propto \partial\eta/\partial x$ . Un élément infinitésimal de surface de longueur  $\delta x$  ressentira donc une force nette égale à la somme

<sup>2</sup>Un déferlement semblable se produit également en haute mer lorsque les stress dus au vent injectent de l'énergie dans la vague. C'est là le principal mécanisme d'échange d'énergie et de gaz entre l'atmosphère et l'océan, et sa modélisation réaliste représente un des plus grands défis de la modélisation numérique des changements climatiques sur les échelles temporelles allant de la décennie au millénaire.

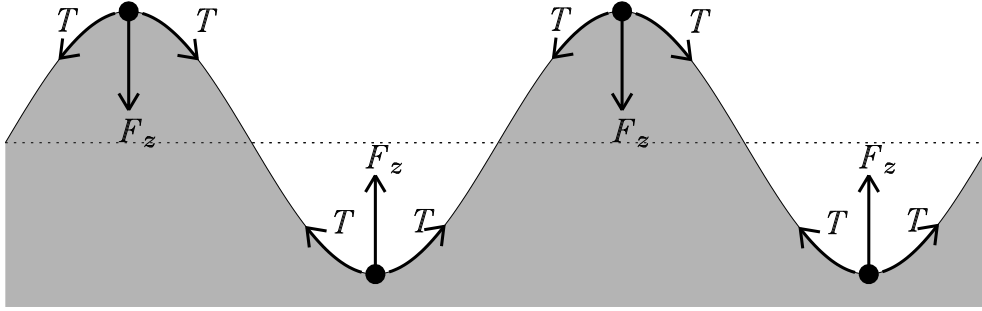


Figure 9.7: Effet de la tension superficielle sur une perturbation harmonique d'une interface entre deux fluides. Les composantes horizontales de la tension  $T$  s'annulent, mais les composantes verticales s'additionnent pour fournir une force de rappel face à la perturbation.

des composantes verticales des forces de tension agissant à chaque extrémités:

$$F_z \simeq T \left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x+\delta x} - T \left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_x \simeq T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \delta x . \quad (9.42)$$

La Figure 9.7 illustre ceci schématiquement pour une perturbation harmonique de la surface. On remarque que la force verticale  $F_z$  pointe dans le sens opposé à la déformation de la surface, *et donc peut agir comme force de rappel* s'ajoutant à la gravité. Nous devons donc en examiner les effets au niveau de la propagation des ondes de surface.

La composante verticale de la force de tension,  $F_z$ , doit être équilibrée par la différence de pression entre le fluide et la pression atmosphérique agissant sur le même interval  $\delta x$ , d'où:

$$(p - p_0) \delta x = T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} . \quad (9.43)$$

On suit maintenant la même procédure de linéarisation qu'à la §9.1, sauf qu'on obtient maintenant, à la place de l'éq. (9.16), l'expression:

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\eta - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 , \quad \text{sur } z = 0} . \quad (9.44)$$

Avant de se relancer tête baissée dans la procédure conduisant à la relation de dispersion, considérons l'astuce suivante. Nous recherchons une solution où  $\eta = A \cos(kx - \omega t)$ ; donc on aura

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = -Ak^2 \cos(kx - \omega t) , \quad (9.45)$$

d'où

$$g\eta - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \left( g + \frac{Tk^2}{\rho} \right) \eta . \quad (9.46)$$

Autrement dit, rien ne change à l'analyse des §§9.1 et 9.2 si on remplace partout  $g$  par  $g + Tk^2/\rho$  !! On trouve ainsi que

$$\omega^2 = gk + \frac{Tk^3}{\rho} , \quad (9.47)$$

$$c^2 = \frac{g}{k} + \frac{Tk}{\rho} , \quad (9.48)$$

$$c_g = \frac{g + 3Tk^2/\rho}{2\sqrt{gk + Tk^3/\rho}}. \quad (9.49)$$

L'importance relative de la tension superficielle par rapport à la gravité dans la propagation de l'onde est mesurée par le rapport entre les deux termes au membre de droite des éqs. (9.47) ou (9.48), qui correspond à l'importance relative de la force de tension versus la gravité pour une déformation de nombre d'onde  $k$ :

$$Je = \frac{Tk^2}{\rho g}; \quad (9.50)$$

Il s'agit ici d'un nombre non-dimensionnel qui, curieusement, n'a pas hérité du nom de qui que ce soit dans la littérature hydrodynamique. Comme il mesure la capacité qu'ont certains organismes à marcher sur l'eau, un hydrodynamicien contemporain au sens de l'humour raffiné a baptisé cette quantité le **Nombre de Jésus**<sup>3</sup>. Quand  $Je \gg 1$ , la tension domine, et pour  $Je \ll 1$  c'est la gravité qui contrôle la propagation de l'onde. À  $Je = 0$  nous avons une onde de gravité pure, et pour  $Je \rightarrow \infty$  une onde dite **capillaire**, où la gravité ne joue aucun rôle dans la dynamique.

La Figure 9.8 illustre la variation de la vitesse de phase  $c$  selon  $k$ , tel que décrite par l'éq. (9.48). La transition du régime dominé par la gravité au régime capillaire se produit au point où la vitesse de phase est minimale.

À partir de quelle longueur d'onde la tension devient-elle importante dans la dynamique de la vague? Si vous avez bien saisi le sens physique du nombre de Jésus, il devrait être clair qu'un estimé du nombre d'onde critique ( $k_c$ ) correspondant s'obtient en posant simplement  $Je = 1$ . La longueur  $1/k_c$  correspondante est appelée **longueur capillaire**:

$$\ell_c = \sqrt{\frac{T}{\rho g}}, \quad (9.51)$$

et est égale à environ 3 millimètres pour une interface air-eau à la "TPN". Sur la Fig. 9.8 elle correspond par ailleurs au nombre d'onde  $k$  où la vitesse de phase est minimale.

Il devrait être clair à ce stade (cf. les éq. (9.47)–(9.49)), que les ondes capillaires pures ( $Je \rightarrow \infty$ ) sont également dispersives, mais, contrairement aux ondes de gravité de surface pures, cette fois la vitesse de phase *décroit* avec la longueur d'onde. Ceci a une conséquence intéressante du point de vue des fronts d'onde concentriques se propageant à la surface de l'eau lorsqu'un objet y est jeté. On peut considérer que l'impact de l'objet produit une "perturbation" dont le spectre contient de la puissance sur des longueurs d'onde allant jusqu'à la dimension linéaire de l'objet. Si cette longueur d'onde maximale est plus petite que la longueur capillaire, alors la tension dominera la propagation radiale des vaguelettes, et les plus petites longueurs d'onde se propageront plus rapidement ( $c \propto \sqrt{k}$ , cf. l'éq. (9.48)). Si par contre la taille de l'objet dépasse de beaucoup la longueur capillaire, alors la majorité des modes excités seront dans le régime "onde de gravité", et les plus grandes longueurs d'onde se propageront plus rapidement ( $c \propto 1/\sqrt{k}$ ). On s'attend donc, dans ces deux cas, à des patrons de phase très différents, tel qu'illustré schématiquement sur la Figure 9.9.

Les éq. (9.47)–(9.49) s'appliquent au cas d'un bassin de profondeur infinie; Dans une couche d'eau de profondeur  $h$  (cf. §9.3) le comportement de la vague est qualitativement semblable. Un des exercices de la troisième série vous conduira à démontrer que

$$\omega^2 = \left( gk + \frac{Tk^3}{\rho} \right) \tanh(kh), \quad (9.52)$$

et vous fera construire une courbe de dispersion semblable à celle illustrée sur la Fig. 9.8, et réfléchir sur ses similarités et différences avec le cas  $h \rightarrow \infty$ .

<sup>3</sup>Jesus Christ (0000-0033); philosophe religieux juif de l'antiquité, en physique il s'est surtout intéressé à la transmutation des éléments. Des sources traditionnellement considérés comme fiables lui créditent également certains exploits médicaux dont plusieurs n'ont toujours pas été reproduits par la médecine moderne. Grand apôtre de la non-violence, certains de ses disciples intellectuels ne l'ont malheureusement pas été, et continuent de foutre régulièrement le bordel aux quatre coins de la planète.

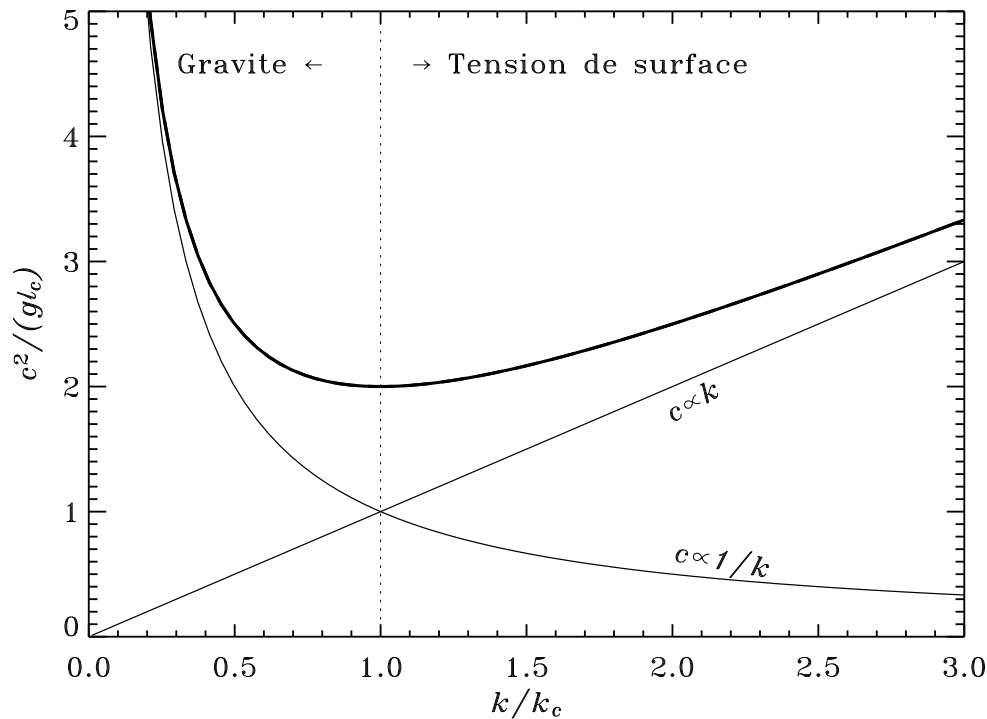


Figure 9.8: Variation de la vitesse de phase  $c$  en fonction de  $k$  pour une onde de gravité de surface en eau très profonde, incluant les effets de la tension superficielle. La relation de dispersion générale est indiquée en trait épais, tandis que les deux traits plus minces correspondent aux deux relations obtenues dans les deux cas limites  $Je \ll 1$  et  $Je \gg 1$ .

## 9.7 Le phénomène tsunami

Les sections précédentes nous ont permis d’assembler un certain nombre de résultats sur la propagation des ondes de surface, qui nous permettent de construire le scénario suivant, certainement incomplet mais néanmoins réaliste à bien des points de vue, du tsunami du 26 décembre 2004.

1. Le soulèvement du fond océanique causé par le tremblement de terre produit en surface une “perturbation” localisée contenant des longueurs d’onde allant jusqu’à la dimension de la zone de soulèvement, soit plusieurs dizaines de kilomètres.
2. Les ondes les plus longues sont ici déjà dans le régime de l’eau peu profonde. Elles se propagent à une vitesse  $\sqrt{gh} \sim 500 - 1000$  km/h, dépendant de la profondeur locale de l’océan. Les ondes plus courtes sont dans le régime de l’eau profonde, et donc retardent à cause de la dispersion.
3. Malgré sa grande vitesse, la vague demeure imperceptible par les bateaux, à cause de sa faible amplitude mais surtout de la grande disparité entre la taille de ceux-ci, et la longueur d’onde de celle-là.
4. La vague approche la côte; sa vitesse décroît et son amplitude augmente à mesure que la profondeur diminue.
5. Près des côtes, la vague a ralenti à  $\sim 10$  km/h, et la “suction” de l’eau vers la vague commence à drainer les plages.

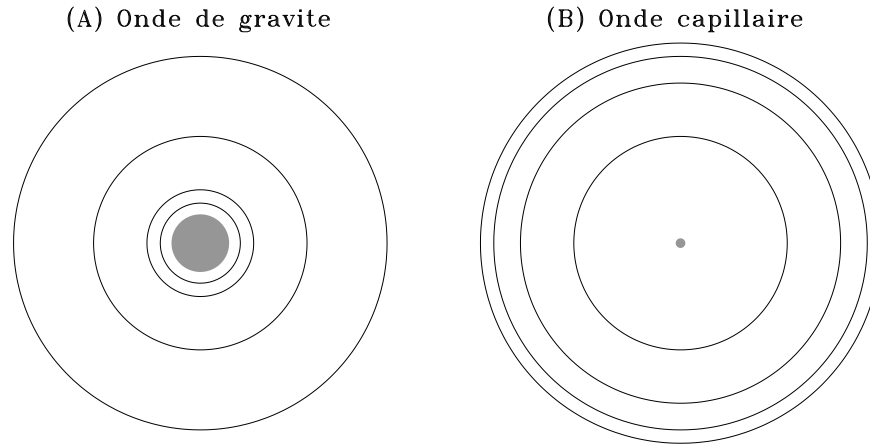


Figure 9.9: Vue schématique (et d'en haut) des fronts d'ondes produits à la surface de l'eau par la chute d'un caillou de quelques centimètres de diamètre (partie A), et d'une goutte de pluie (partie B). Les ondes sont dispersives dans les deux cas, mais en A la gravité domine la dynamique, tandis qu'en B c'est la tension superficielle (voir texte).

6. Son amplitude étant devenue comparable à la profondeur, la vague commence à raidir et déferler. Sauve-qui-peut, car dans les minutes qui suivront...

Une description quantitative des phases avancées de croissance de l'amplitude et de déferlement est évidemment impossible dans le cadre de la théorie linéarisée développée ci-dessus. Il existe cependant une théorie relativement simple<sup>4</sup>, limitée aux eaux peu profondes mais sans restriction sur l'amplitude de la vague, qui permet de pousser l'analyse quantitativement jusqu'au déferlement. Si ça vous intéresse, voir les références en bibliographie.

---

### Bibliographie:

Les ondes de surface sont discutées dans la plupart des bouquins d'introduction à l'hydrodynamique, mais selon une grande variété d'approches. Personnellement, je préfère celle présentée au chapitre 3 de l'ouvrage suivant:

Acheson, D.J., *Elementary Fluid Dynamics*, Oxford University Press (1990).

C'est en fait un excellent bouquin, pas du tout "élémentaire" cependant au niveau mathématique. Les développements mathématiques du présent chapitre, en particulier aux §§9.1 et 9.2, en suivent d'assez près les sections 3.2 et 3.5, mais les deux sections subséquentes en dévient graduellement pour se regreffer sur la présentation du sujet à la §6.4 de l'ouvrage de Guyon *et al.* cité en bibliographie au chapitre 1.

À un niveau physique et mathématique plus poussé que celui du cours, la référence classique sur les ondes et vagues dans les fluides est:

Lighthill, J. *Waves in fluids*, Cambridge University Press (1978).

Pour une discussion plus détaillée dans le contexte océanique, incluant les effets de la force de Coriolis ainsi que le modèle de Saint-Venant, voir, e.g.,

Bougeault, P., & Sadourny, R., *Dynamique de l'atmosphère et de l'océan*, Éditions de l'École Polytechnique (2001), chap. 4.

---

<sup>4</sup>C'est la théorie "Shallow water hydrodynamics", connue souvent sous le nom de "modèle de Saint-Venant" dans la littérature hydrodynamique francophone.

Pedlosky, J., *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer (2<sup>e</sup> édition 1987), chap. 3,  
Vallis, G.K., *Atmospheric and Oceanic Fluid dynamics*, Cambridge (2006),

Sur les organismes qui marchent sur l'eau, évitez le Nouveau Testament et voyez plutôt le chapitre 17 dans:

Vogel, S. *Life in Moving Fluids*, 2<sup>ème</sup> éd., Printeton University Press (1994).

ainsi que

Hu, D.L., Chan, B., & Bush, J. W., *Nature*, **424**, 663-666, 2003,

et les "galleries" d'images sur le site web de David Hu [Janvier 2007]:

<http://www.cims.nyu.edu/~dhu/>

(Cliquez sur "Water Striders" et "Meniscus Climbers"). Le tsunami du 26 décembre 2004 a laissé de nombreuses traces sur le Web, incluant une quantité hallucinante de montages photos à prime abord impressionnants mais qui en fait n'ont rien à voir avec la réalité. J'ai bien aimé le site suivant, qui m'a semblé tout à fait solide et équilibré, factuellement et scientifiquement [novembre 2005]:

[http://en.wikipedia.org/wiki/2004\\_Indian\\_Ocean\\_earthquake](http://en.wikipedia.org/wiki/2004_Indian_Ocean_earthquake)

Les images des Figs. 9.1 et 9.6 en sont d'ailleurs tirées.