PHY 6756
FLUIDES ASTROPHYSIQUES
PROBLÈMES: SÉRIE 1

Distribué le: 21 septembre 2022
Chapitres couverts: 1 et 2

Problème 1

On a introduit à la §1.2.4 des notes de cours le concept de vorticité ($\boldsymbol{\omega}$) d'un écoulement, via la définition $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$. En commençant par prendre le rotationnel de chaque coté de l'équation d'Euler (i.e., inviscide) pour un fluide compressible, démontrez qu'on peut obtenir l'équation suivante décrivant l'évolution temporelle de $\boldsymbol{\omega}$:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot\nabla\right)\mathbf{u} + \frac{(\nabla\rho)\times(\nabla p)}{\rho^3} \ .$$

Problème 2

Un fluide incompressible et très visqueux remplit l'espace entre deux longs cylindres co-axiaux de rayons a et b ($> a$). Le cylindre extérieur est fixe, mais le cylindre intérieur tourne autour de son axe de symétrie à une vitesse angulaire ω_a.

(a) Calculez la forme de l'écoulement du fluide qui résulte de cette rotation du cylindre intérieur, en régime stationnaire ($\partial/\partial t = 0$).
(b) Calculez la vorticité de cet écoulement
(c) Calculez le couple de torsion requis pour maintenir la rotation du cylindre intérieur.
(d) Calculez le taux de dissipation de l'énergie par la force visqueuse, et vérifiez qu'il est bien égal au travail mécanique exercé par le couple de torsion.

La procédure à suivre ici est (1) choisir un système de coordonnées; (2) établir les symétries du problème, i.e., quelles composantes de $\mathbf{u}$ sont non-nulles et de quelles variables spatiales dépendent-elles; (3) identifier quelles composantes du tenseur des stress visqueux sont non-nulles (voir Annexe B des Notes); (4) écrire les composantes de l'équation du mouvement qui sont pertinentes au problème, au vu des symétries et des conditions limites; (5) solutionner ces équations (ce qui peut se faire analytiquement ici).

Problème 3

Il s'agit ici de vous faire approfondir un aspect important de l'approche statistique à la turbulence, soit l'énergétique de la composante fluctuante de l'écoulement. La procédure de moyenne spatiale, indiquée ici par des $\langle\rangle$, est la même que décrite en classe dans notre dérivation des stress de Reynolds. Vous pouvez encore une fois supposer que l'écoulement est incompressible, et donc que les fluctuations de vitesse vont satisfaire à la relation $\nabla\cdot\mathbf{u}' = 0$.

(a) A partir des équations de Navier-Stokes écrites en notation indicielle, obtenez la relation suivante caractérisant l'évolution de la valeur moyenne des $\left\langle (u'_i)^2 \right\rangle$:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \left\langle (u'_i)^2 \right\rangle}{\partial t} + \frac{1}{2} u_j \frac{\partial \left\langle (u'_i)^2 \right\rangle}{\partial x_j} = - \left\langle u'_i u'_j \right\rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle (u'_i)^2 u'_j \right\rangle - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle p' u'_i \right\rangle + \nu \left\langle u'_i \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle$$

(b) Donnez une interprétation physique à chaque terme dans l'équation ci-dessus. Y a-t-il un (ou plusieurs) terme(s) de type "source" au coté droit?

Problème 4

À partir des équations (1.65), (1.69) et (1.72), obtenez une équation d'onde pour la variable pression p.

Problème 5

Obtenez l'éq. (1.82) à partir de (1.79)–(1.81).

Problème 6

Et maintenant un problème du type défi-internet: trouvez sur le web une belle image d'un rémanant de supernova, du genre "bulle" bien définie, comme sur la Fig. 1.5 des notes de cours. Trouvez également la taille physique et la vitesse d'expansion mesurée de votre rémanant, et déduisez-en son âge à l'aide de la solution autosimilaire de la §1.3.3. Comment cet âge se compare-t-il à la date de naissance "officielle" de votre supernova ?

Problème 7

Complétez les étapes mathématiques manquantes pour arriver à l'éq. (2.40).

Problème 8

Il s'agit ici de vous faire compléter quelques étapes mathématiques incomplètes dans la §2.8;

(a) Obtenez les éqs. (2.53)–(2.55) par linéarisation des équations MHD sous la configuration géométrique et pour l'état de référence décrit dans le paragraphe les précédant;

(b) Vérifiez que la substitution de (2.58) dans (2.57) conduit bien à (2.59) et (2.60).

(c) Vérifiez que la substitution des éqs. (2.64)–(2.66) dans la relation de dispersion (2.60) conduit bien à (2.67)–(2.69).

Problème 9

Démontrez que dans le cas d'un écoulement consistant en une rotation (différentielle) du type donné par l'éq. (2.32), sous substitution de l'éq. (2.77) dans l'équation d'induction (2.9), cette dernière peut se séparer en deux équations différentielles pour les composantes scalaires A et B:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) \ ,$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) + \varpi (\nabla \times A \hat{\mathbf{e}}_\phi) \cdot \nabla \Omega \ ,$$

où $\varpi = r \sin\theta$ et on a supposé que la diffusivité magnétique η est constante.

Problème 10

En coordonnées cartésiennes, on considère l'action de l'écoulement incompressible suivant:

$$u_x(x) = v_0 x \ , \qquad u_y(y) = -v_0 y$$

sur un champ magnétique purement horizontal, i.e.,

$$\mathbf{B} = B_x(x,y)\hat{\mathbf{e}}_x \ .$$

Attention, ici la constante v_0 mesurant l'amplitude de l'écoulement a des dimensions de s^{-1} ! On suppose qu'à une distance $y = \pm L$, ce champ magnétique est fixé aux valeurs

$$B_x(x, -L) = -B_0 \ , \qquad B_x(x, L) = B_0 \ .$$

On considère que cet écoulement est fixé, et on s'intéresse à son effet sur le champ magnétique, tel que décrit par l'équation d'induction magnétohydrodynamique (2.9).

(a) Effectuez une séparation des variables, et démontrez que le problème est invariant en x et accepte donc des solutions de la forme $B_x(y,t)$.

(b) En adimensionnalisant les longueurs par L et les temps par $1/v_0$, montrez que la composante y de l'équation d'induction se réduit à:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = B_x + y\frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{\eta}{v_0 L^2}\frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2}$$

(c) Obtenez (analytiquement ou numériquement) des solutions à la forme stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) de cette équation, pour des valeurs du paramètre adimensionnel $\alpha \equiv \eta/(v_0 L^2) = 10^{-2}$, 10^{-1}, et $10^0 = 1$. Portez en graphique vos solutions, i.e., $B_x(y)$ en fonction de y.

(d) Calculez (analytiquement ou numériquement) la densité de courant électrique $\mathbf{J}$ associée à ces solutions. Dans quelle direction est orientée cette densité de courant ?

(e) Calculez maintenant (analytiquement ou numériquement) la force de Lorentz; dans quelle direction est-elle orientée ?

(f) Calculez (analytiquement ou numériquement) le taux de dissipation Ohmique de ces courants (par unité de longueur en x) en fonction de α. Ici α peut être interprété comme une mesure de la diffusivité magnétique η (pour un v_0 fixe), comment expliquez-vous votre résultat ?

Problème 11

Dans la dérivation du modèle de reconnexion magnétique de Sweet-Parker (§2.10.3), nous avons supposé que l'écoulement était incompressible et que la pression à l'intérieur de la nappe (p_N) était identique à celle à l'extérieur (p_o), éliminant effectivement le gradient de pression du problème. Il s'agit ici de relaxer ces hypothèses de travail.

(a) Conservant l'hypothèse d'incompressibilité mais sans supposer $p_N = p_o$, montrez que l'éq. (2.94) devient:

$$v_i = \sqrt{\frac{\eta v_{A,i}}{L}} \left[2 \left(1 + \frac{p_N - p_o}{\rho v_{A,i}^2} \right) \right]^{1/4}$$

(a) Conservant l'hypothèse $p_N = p_o$ mais sans supposer incompressibilité, montrez que l'éq. (2.94) devient:

$$v_i = \sqrt{\frac{\eta v_{A,i}}{L}} \left(\frac{\rho_i}{\rho_o} \right)^{1/4}$$

Problème 12

Ce problème vise à vous faire explorer certains aspects de l'énergétique du modèle de reconnexion de Sweet-Parker. Dans le contexte de la géométrie très simplifiée de la Figure 2.9,

(a) démontrez que le rapport des énergies cinétique $E_{k,i}$ et magnétique $E_{B,i}$ entrantes dans la nappe est tel que $E_{k,i}/E_{B,i} \ll 1$;
(b) démontrez que le rapport de l'énergie cinétique sortante $E_{k,o}$ sur l'énergie magnétique entrante $E_{B,i}$ est $E_{k,o}/E_{B,i} = 1/2$;
(c) démontrez que le rapport des énergies magnétiques sortante et entrante est $E_{B,o}/E_{B,i} \ll 1$.
(d) À la lumière de vos résultats en (a) et (b), quelle est la fraction de l'énergie magnétique entrante qui est convertie en énergie thermique dans la nappe même ?