

PHY-6756

FLUIDES ASTROPHYSIQUES

Notes de cours

par

Paul Charbonneau
Département de Physique
Université de Montréal

Août 2016

MINI-PRÉFACE

Ces notes contiennent toute la matière couverte dans le cadre du cours gradué PHY-6756, **Fluides Astrophysiques**, offert par le Département de Physique de l'Université de Montréal. Cette mouture 2016 contient plusieurs ajouts et/ou modifications par rapport à la version originale de 2015, mais au niveau du contenu global il n'y a pas de changements majeurs.

Table des Matières

1	L'essentiel de l'hydrodynamique	7
1.1	Qu'est-ce qu'un fluide ?	7
1.1.1	L'approximation du milieu continu	7
1.1.2	Solide Versus Fluide	9
1.2	Les équations de l'hydrodynamique	9
1.2.1	Masse: L'équation de continuité	10
1.2.2	L'opérateur D/Dt	11
1.2.3	Quantité de mouvement: les équations de Navier–Stokes	12
1.2.4	Moment cinétique: l'équation de la vorticité	15
1.2.5	L'équation d'Euler et le Principe de Bernoulli	16
1.2.6	Énergie: L'équation de l'entropie	17
1.3	Écoulements compressibles	18
1.3.1	Les ondes acoustiques	18
1.3.2	Les ondes de choc	20
1.3.3	Ondes de détonation	22
1.4	Fluides en rotation	24
1.4.1	Les forces de Coriolis et centrifuge	24
1.4.2	L'équilibre géostrophique et le théorème de Taylor-Proudman	26
1.5	La turbulence	26
1.5.1	Les instabilités hydrodynamiques	26
1.5.2	Analyse de stabilité: un survol	27
1.5.3	La cascade turbulente	28
1.5.4	L'approche de Reynolds	31
1.5.5	Convection et cascade inverse	33
1.5.6	Les diffusivités turbulentes	35
2	La Magnétohydrodynamique	39
2.1	L'équation d'induction magnétohydrodynamique	39
2.2	Analyse dimensionnelle	40
2.3	La force de Lorentz	43
2.4	Exemple: cisaillement d'un champ poloidal	45
2.5	L'énergie magnétique	47
2.6	Le chauffage de Joule	49
2.7	Le théorème d'Alfvén	50
2.8	Ondes magnétohydrodynamiques	52
2.8.1	Cas 1: $\mathbf{U}_1 \parallel \mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$	54
2.8.2	Cas 2: $\mathbf{U}_1 \parallel \mathbf{k}, \mathbf{U}_1 \perp \mathbf{B}_0$	54
2.8.3	Cas 3: $\mathbf{U}_1 \perp \mathbf{k}, \mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$	55
2.8.4	Cas 4: orientations arbitraires	55
2.9	Le potentiel vecteur et l'hélicité magnétique	56
2.10	L'origine des champs magnétiques astrophysiques	57
2.10.1	Batteries stellaires	58

2.10.2 Batteries galactiques	59
2.10.3 Batteries cosmologiques	59
A Identités et théorèmes du calcul vectoriel	61
A.1 Identités vectorielles	61
A.2 Le théorème du gradient	61
A.3 Le théorème de la divergence	62
A.4 Le théorème de Stokes	62
A.5 Les identités de Green	62
B Systèmes de coordonnées et équations fluides	63
B.1 Coordonnées cylindriques (s, ϕ, z)	63
B.1.1 Conversion aux coordonnées Cartésiennes	63
B.1.2 Éléments infinitésimaux	63
B.1.3 Opérateurs	63
B.1.4 La divergence d'un tenseur symétrique d'ordre deux	65
B.1.5 Composantes du tenseur des stress visqueux	65
B.1.6 Équations du mouvement	65
B.1.7 Conservation de l'énergie	65
B.1.8 L'équation d'induction MHD	66
B.2 Coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)	66
B.2.1 Conversion aux coordonnées Cartésiennes	66
B.2.2 Éléments infinitésimaux	66
B.2.3 Opérateurs	67
B.2.4 La divergence d'un tenseur symétrique d'ordre deux	68
B.2.5 Composantes du tenseur des stress visqueux	68
B.2.6 Équations du mouvement	68
B.2.7 Conservation de l'énergie	69
B.2.8 L'équation d'induction MHD	69

Chapitre 1

L'essentiel de l'hydrodynamique

1.1 Qu'est-ce qu'un fluide ?

1.1.1 L'approximation du milieu continu

Il aura fallu deux millénaires pour clarifier tout ça, mais nous savons maintenant que Démocrite avait raison: la matière est composée de constituants microscopiques “atomiques”. Mais à l'échelle macroscopique de la vie de tous les jours (sur Terre), la matière s'approche très bien comme un milieu continu. Sous quelles conditions peut-on considérer qu'un très grand nombre d'atomes ou molécules se comportent comme un milieu continu? La réponse peut se formuler de bien des façons, mais la contrainte-clef est qu'il existe une bonne *séparation d'échelles* entre le “microscopique” and “macroscopique”.

Considérons la situation illustrée à la Figure 1.1: une substance amorphe décrivable à l'échelle microscopique par une distribution aléatoire de particules. Dénotons par λ la distance inter-particules moyenne (ou libre parcours moyen), et par L l'échelle macroscopique du système. Il s'agit maintenant de construire des variables caractérisant adéquatement les propriétés physiques de cette substance à l'échelle macroscopique. Par exemple, si toutes les particules ont une masse m , alors la *densité* (ρ) associée à un élément de volume Cartésien de dimensions linéaire l (ρ) et centré à la position \mathbf{x} pourrait être définie de la manière suivante:

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{l^3} \sum_k m_k \quad [\text{kg m}^{-3}], \quad (1.1)$$

où la somme inclut toutes les particules contenues dans l'élément de volume. On entend souvent dire que pour qu'une description en terme d'un continu soit valide, la densité doit être “grande”. Mais grande par rapport à quoi ? Pour que l'expression ci-dessus soit bien définie, dans le sens que la valeur numérique de ρ ne dépende pas de la taille et position exacte de l'élément de volume, ou du temps si les particules sont en mouvement et entrent et sortent du volume (comme ce serait généralement le cas), il est essentiel que l'élément de volume en question contienne un très grand nombre de particules, De plus, si mathématiquement nous désirons exprimer les lois d'évolution de nos quantités macroscopiques sous la forme d'équations différentielles, l'élément de volume devra également être infinitésimal, soit beaucoup plus petit que les échelles de variations des variables macroscopiques comme ρ . Ces deux contraintes conduisent à la double inégalité:

$$\lambda \ll l \ll L. \quad (1.2)$$

Comme les systèmes et écoulements astrophysiques considérés dans tout ce qui suit sont tous de très grande taille, la représentation continue des fluides tient bien la route même dans des situations où la densité est minuscule en termes absolus, comme on peut le constater sur examen de la liste présentée au tableau 1.1 ci-dessous¹. Dans tous les cas considérés, une bonne séparation d'échelle existe entre le microscopique (λ) et le macroscopique (L).

¹Tous les estimés impliquant la densité sont calculés pour un gaz d'Hydrogène complètement ionisé ($\mu = 0.5$),

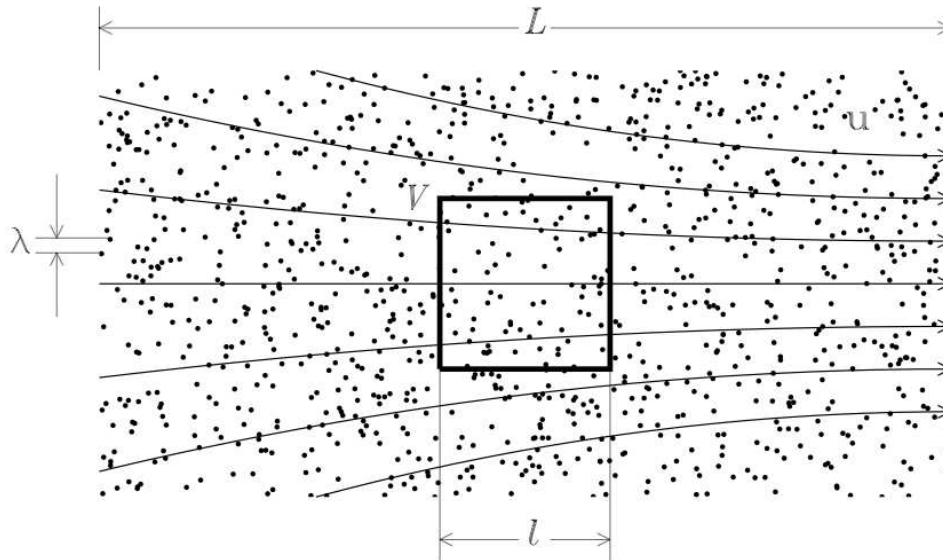


Figure 1.1: Vision microscopique d'un fluide. De manière générale la vitesse des constituants microscopiques se décompose en deux contributions: une composante thermique orientée de manière aléatoire, et une vitesse de dérive systématique qui, à l'échelle macroscopique, correspond à la vitesse de l'écoulement \mathbf{u} . Une représentation en terme d'un milieu continu fluide n'est possible que si la distance inter-particule moyenne λ est beaucoup plus petite que l'échelle de longueur L caractérisant les variations spatiales au niveau macroscopique.

Table 1.1: Propriétés de quelques systèmes et écoulements astrophysiques

Système	ρ [kg/m ³]	N [m ⁻³]	λ [m]	L [km]
Intérieur stellaire	100	10^{29}	10^{-10}	10^5
Atmosphère solaire	10^{-4}	10^{23}	10^{-8}	10^3
Couonne solaire	10^{-11}	10^{17}	10^{-6}	10^5
Vent solaire (1 AU)	10^{-21}	10^7	0.006	10^5
Nuage moléculaire	10^{-20}	10^7	0.001	10^{14}
Milieu interstellaire	10^{-21}	10^6	0.01	10^{16}

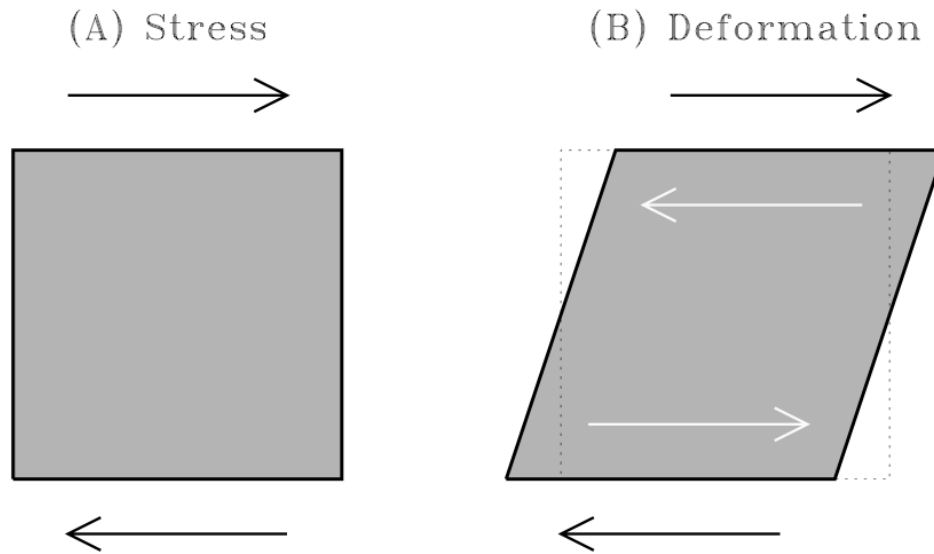


Figure 1.2: Déformation d'un élément de masse en réponse à l'application d'un stress produisant un cisaillement horizontal (flèches noires). Un solide trouve rapidement un nouvel état d'équilibre où les stress internes (flèches blanches) équilibrent le stress imposé de l'extérieur. Un fluide, au contraire, ne peut offrir aucune résistance à un stress extérieur, conduisant à une déformation qui ira en s'amplifiant tant et aussi longtemps que le stress extérieur est présent.

1.1.2 Solide Versus Fluide

La grande majorité des milieux continus peuvent être divisés sans ambiguïté en deux grandes catégories, soit les *solides* et les *fluides*. Ces derniers incluent les “liquides” du vernaculaire, mais également les gaz et les plasmas. Du point de vue physique, la distinction est établie sur la base de la réponse du milieu à l'application d'un *stress* (force par unité de surface), tel qu'illustré à la Figure 1.2. Un élément de masse y est sujet à l'application d'un cisaillement, i.e., deux vecteurs-force agissant tangentiellement et en directions opposées sur deux des surface parallèles définissant la surface du volume (flèches noires). Un *solide* produira immédiatement une force de rappel substantielle (flèches blanches), ultimement due aux interactions électrostatiques entre ses constituant microscopiques, s'opposant solidement (!) à la déformation (essayez le truc avec une brique, pour voir). Un nouvel état d'équilibre est rapidement atteint, caractérisé par une déformation finie du volume, avec une relaxation vers l'état initial tout aussi rapide lorsque le stress extérieur disparaît. Un *fluide*, par contre, n'offre aucune résistance au stress, du moins dans la phase initiale de la déformation.

1.2 Les équations de l'hydrodynamique

Les principes fondamentaux de l'hydrodynamique sont les mêmes qu'en mécanique classique, mais transposés aux milieux continus: conservation de la masse, de la quantité de mouvement, du moment cinétique, et de l'énergie. Techniquement, les complications viennent du fait que ces lois de conservation doivent être appliquées non pas à des masses ponctuelles, mais à des

sauf pour le milieu interstellaire (Hydrogène neutre, $\mu = 1$) et les nuages moléculaires (Hydrogène moléculaire, $\mu = 2$). Les valeurs de densité pour les étoiles correspondent à la base de la zone convective solaire (intérieurs stellaires), profondeur optique unitaire (atmosphère), et boucle coronale typique (couronne). N est la densité de particules. Les échelles de longueurs correspondent à la granulation solaire (atmosphère), longueur d'une boucle coronale (couronne), taille de la magnétosphère terrestre (vent solaire), et épaisseur du disque galactique (milieu interstellaire); dans tous les cas arrondis au facteur 10 le plus près.

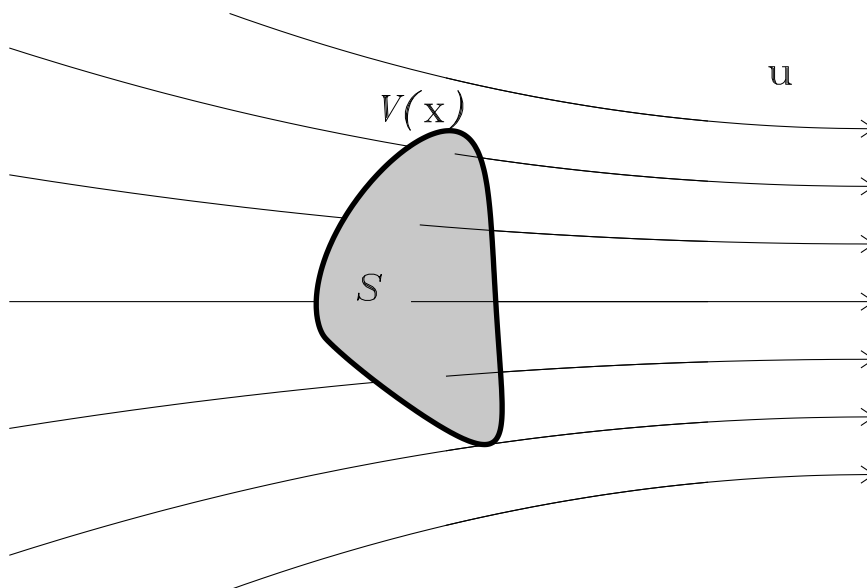


Figure 1.3: Un élément de volume V de forme arbitraire, délimité par une surface fermée S . Tous deux sont fixes dans l'espace, et traversés par un écoulement \mathbf{u} .

éléments de volume de fluide qui sont spatialement étendus et déformables, et qui bien qu'étant infinitésimaux, n'en demeure pas moins d'une taille finie! Il sera utile de commencer avec la plus simple de nos lois de conservation, pour la masse, puisqu'elle illustre bien la façon dont sont formulées mathématiquement les lois de conservations pour un milieu continu.

1.2.1 Masse: L'équation de continuité

Considérons la situation illustrée à la Figure 1.3, soit un élément de volume délimité par une surface fermée et de forme arbitraire S , fixe dans l'espace et contenant un volume V d'un fluide de densité $\rho(\mathbf{x})$ s'écoulant à vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Le *flux de masse* à travers la surface S associé à cet écoulement est défini comme:

$$\Phi = \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad [\text{kg s}^{-1}], \quad (1.3)$$

où $\hat{\mathbf{n}}$ est un vecteur unitaire partout perpendiculaire à la surface, et orienté extérieurement par convention. La masse contenue dans V est simplement

$$M = \int_V \rho dV \quad [\text{kg}]. \quad (1.4)$$

Cette quantité variera évidemment si le flux de masse, tel que défini par l'éq. (1.3), est non-nul; on peut donc écrire:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\Phi. \quad (1.5)$$

Notez le signe moins, qui est une conséquence directe de l'orientation extérieure de $\hat{\mathbf{n}}$. Insérant les eqs. (1.3) et (1.4) dans (1.5), et appliquant le théorème de la divergence au membre de droite de l'expression en résultant, conduit à:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV. \quad (1.6)$$

C'est la forme intégrale de la conservation de la masse. Mais comme V est fixe dans l'espace, les opérateurs $\partial/\partial t$ et \int_V commutent, et donc

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0. \quad (1.7)$$

Le volume V étant d'une forme arbitraire, en général cette expression ne peut être satisfaite que si

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0}. \quad (1.8)$$

Ceci exprime maintenant la conservation de la masse sous forme différentielle; c'est *l'équation de continuité*. La structure mathématique de cette expression mérite qu'on s'y attarde. Au membre de gauche, on a la dérivée temporelle d'une quantité physique, ici la densité ρ ; au membre de droite, on a la divergence du flux de cette quantité. Une telle structure est appelée la *forme conservative* de l'équation d'évolution pour la quantité physique en question.

Les *fluides incompressibles* ont une densité constante par définition. Dans un tel cas l'équation de continuité se réduit à:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad [\text{incompressible}]. \quad (1.9)$$

L'eau est le prototype d'un fluide effectivement incompressible. La nature gazeuse de la plupart des fluides astrophysiques pourrait porter à croire que cette approximation ne nous sera d'aucune utilité, mais on verra plus loin que ce n'est pas du tout le cas.

La densité d'un fluide peut varier en raison d'un forçage mécanique (compression), mais dans bien des situations astrophysiques la dilatation thermique est également un processus important. La plupart des fluides se dilatent lorsque chauffés, une propriété que mesure le *coefficient de dilatation thermique*:

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \quad [\text{K}^{-1}]. \quad (1.10)$$

L'eau, par exemple, a un coefficient de dilatation thermique substantiel, $\simeq 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ at $T = 10^\circ \text{ C}$. C'est la dilatation thermique de l'eau de mer, beaucoup plus que la fonte des glaces polaires, qui est responsable du gros de l'élévation du niveau de la mer qu'on nous prédit pour la seconde moitié de ce siècle, en raison du réchauffement climatique terrestre.

Dans un environnement stratifié par la gravité, comme les atmosphères et intérieurs des étoiles, ou encore les disques d'accrétion, un apport localisé de chaleur peut conduire, via la dilatation thermique, à l'apparition d'une force de flottaison via une baisse de la densité dans l'élément de fluide sujet à chauffage. A moins que la diffusion thermique ne puisse rapidement redistribuer la chaleur, ceci produira un écoulement appelé *convection thermique*, qui joue un rôle prépondérant dans un grand nombre de phénomènes astrophysique de grand intérêt. On y reviendra.

1.2.2 L'opérateur D/Dt

Supposons que l'on veuille calculer la variation temporelle d'une quantité physique quelconque (Z , disons) à une position fixe \mathbf{x}_0 dans un écoulement $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Nous devons prendre en considération le fait que Z est en général une fonction à la fois explicite en implicite du temps, en raison du fait que l'élément de volume "contenant" Z se déplace avec le fluide, i.e., $Z \rightarrow Z(t, \mathbf{x}(t))$. L'utilisation de la dérivée en chaîne nous permet cependant d'écrire:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}. \quad (1.11)$$

Comme $\mathbf{u} = d\mathbf{x}/dt$ par définition, ceci devient

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial x} u_x + \frac{\partial Z}{\partial y} u_y + \frac{\partial Z}{\partial z} u_z = \frac{\partial Z}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) Z. \quad (1.12)$$

Ceci correspond à la variation temporelle de Z en suivant l'élément de fluide durant son déplacement dans l'écoulement. C'est un opérateur très spécial en hydrodynamique, connu sous le nom de *dérivée Lagrangienne*, auquel on assignera une notation particulière:

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)} . \quad (1.13)$$

Notons déjà que la dérivée Lagrangienne de \mathbf{u} correspond à l'accélération de l'élément de fluide:

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} , \quad (1.14)$$

une idée qui nous sera très utile très bientôt quand viendra le temps d'écrire $F = ma$ pour un fluide.

Une *surface matérielle* est définie par un ensemble de "points" se déplaçant avec le fluide. Dans un référentiel S' se déplaçant avec un élément infinitésimal d'une surface matérielle, on aura donc $\mathbf{u}' = 0$. La distinction entre surfaces matérielle et fixe dans l'espace (comme dans l'éq. (1.3)) devient importante dans le contexte des propriétés commutatives des dérivées et intégrales spatiales et temporelles. En représentation dite *Eulérienne*, c'est-à-dire pour des surfaces ou volumes fixes dans l'espace, \int_V commute avec $\partial/\partial t$, tandis que pour des surfaces matérielles c'est D/Dt qui commute avec \int_V (et \oint_S , etc.).

1.2.3 Quantité de mouvement: les équations de Navier–Stokes

Un vecteur-force \mathbf{F} agissant sur une masse ponctuelle m produit une accélération $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ dans la direction de la force appliquée (on le prend pour acquis mais ça a tout de même pris un génie comme Newton pour l'établir). Cependant, dans le cas d'un élément de fluide d'étendue spatiale finie, l'effet d'une force agissant sur la surface de l'élément dépendra à la fois de l'orientation de la force et de celle de la surface sur laquelle elle agit. On commence donc par généraliser le concept de force à celui d'un *tenseur des stress*

$$\mathbf{t}_x = \hat{\mathbf{e}}_x s_{xx} + \hat{\mathbf{e}}_y s_{xy} + \hat{\mathbf{e}}_z s_{xz} , \quad (1.15)$$

$$\mathbf{t}_y = \hat{\mathbf{e}}_x s_{yx} + \hat{\mathbf{e}}_y s_{yy} + \hat{\mathbf{e}}_z s_{yz} , \quad (1.16)$$

$$\mathbf{t}_z = \hat{\mathbf{e}}_x s_{zx} + \hat{\mathbf{e}}_y s_{zy} + \hat{\mathbf{e}}_z s_{zz} , \quad (1.17)$$

où la composante " s_{xy} " dénote la force par unité de surface agissant dans la direction x sur une surface perpendiculaire à la direction y , et \mathbf{t}_x est la force nette agissant dans la direction x . Considérons maintenant un vecteur unitaire normal à une surface orientée arbitrairement dans l'espace:

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_x n_x + \hat{\mathbf{e}}_y n_y + \hat{\mathbf{e}}_z n_z , \quad n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 . \quad (1.18)$$

La force nette agissant dans cette direction s'écrira comme:

$$\mathbf{t}_{\hat{\mathbf{n}}} = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x) \mathbf{t}_x + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y) \mathbf{t}_y + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z) \mathbf{t}_z = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s} . \quad (1.19)$$

Il est maintenant temps d'utiliser la dérivée Lagrangienne afin d'écrire " $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ " pour un fluide occupant un volume infinitesimal V délimité par une surface S :

$$\frac{D}{Dt} \int_V \mathbf{u} dV = \frac{1}{\rho} \oint_S \mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS , \quad (1.20)$$

où le membre de droite représente l'accélération (Lagrangienne) de l'élément de fluide, et ρ sa densité. Bien que travaillant maintenant en représentation Lagrangienne, on suit ensuite essentiellement la même logique (et procédure mathématique) qu'à la §1.2.1: utilisation du théorème de la divergence pour transformer l'intégrale volumique en intégrale de surface, commutation des dérivées spatiale et temporelle au membre de gauche, regroupement de tous les termes sous

la même intégrale et utilisation du fait que le volume même est de forme arbitraire pour extraire du tout une équation différentielle. Une utilisation judicieuse de l'équation de continuité (1.8) permet finalement d'en arriver à l'équation différentielle suivante pour l'évolution de \mathbf{u} :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{s} \quad [\text{m s}^{-2}]. \quad (1.21)$$

On définit maintenant la *pression* (unités: pascal; $1 \text{ Pa} \equiv 1 \text{ N m}^{-2}$) comme la partie isotropique de la force agissant perpendiculairement à la surface du volume, et on la sépare explicitement du tenseur des stress:

$$\mathbf{s} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}, \quad (1.22)$$

où \mathbf{I} est le tenseur identité, et le signe moins résulte d'une autre convention, celle-ci voulant que la pression agisse vers l'intérieur de l'élément de volume. Le tenseur $\boldsymbol{\tau}$ deviendra sous peu le tenseur des *stress visqueux*. Puisque $\nabla \cdot (p\mathbf{I}) = \nabla p$, l'éq. (1.21) devient

$$\boxed{\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}}. \quad (1.23)$$

Ceci est l'*équation de Navier–Stokes*. Toute force volumique (i.e., agissant directement à l'intérieur du volume, plutôt que sur sa surface), comme la gravité, la force de Coriolis, la force de Lorentz, etc., est simplement ajoutée directement au membre de droite. Notez bien que l'équation (1.23) représente ici trois équation différentielles (couplées), soit une pour chacune des composantes de \mathbf{u} .

On aurait pu arriver au même résultat en travaillant en représentation Eulérienne, comme pour notre dérivation de l'équation de continuité à la §1.2.1. Il aurait alors fallu établir nos équations de bilan en terme de la quantité de mouvement $\rho\mathbf{u}$ et de son flux \mathbf{T} , maintenant une quantité tensorielle; en notation indicielle:

$$T_{ij} = -s_{ij} + \rho u_i u_j = -\tau_{ij} + p\delta_{ij} + \rho u_i u_j. \quad (1.24)$$

L'étape suivante consiste à exprimer les composantes du tenseur des stress visqueux en fonction de la vitesse de l'écoulement et des propriétés physiques du fluide. La force visqueuse peut être considérée comme une forme de friction agissant entre deux lamelles contigues de fluide se déplaçant à des vitesses différentes; on s'attendrait donc à ce que la force visqueuse soit proportionnelle à cette différence de vitesse. Considérons la décomposition suivante d'un gradient de vitesse:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)}_{D_{kl}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)}_{\Omega_{kl}}. \quad (1.25)$$

Le premier terme au membre de droite est un *cisaillement pur*, et est décrit par un tenseur symétrique appelé *tenseur des déformations* et qu'on dénotera D_{kl} ; tandis que le second décrit une *rotation pure*, représentée mathématiquement par un tenseur antisymétrique appelé *tenseur de vorticité*, dénoté Ω_{kl} . Puisque ce dernier ne cause aucune déformation de l'élément de fluide, la force visqueuse ne peut qu'impliquer D_{kl} . Dans un fluide dit *Newtonien* la relation (tensorielle) entre $\boldsymbol{\tau}$ et D_{kl} est supposée linéaire:

$$\tau_{ij} = f_{ij}(D_{kl}), \quad i, j, k, l = (1, 2, 3) \equiv (x, y, z). \quad (1.26)$$

Comme $\boldsymbol{\tau}$ et \mathbf{D} sont tous les deux des tenseurs symétriques, cette relation linéaire ne peut impliquer plus de 36 coefficients numériques indépendants. Cependant, l'invariance de l'éq. (1.26) par rapport au choix de systèmes de coordonnées permet de poser à zéro plusieurs de ces coefficients. La procédure, qui consiste à exiger invariance sous diverses rotations par rapport aux axes de coordonnées, est plutôt laborieuse mais le jeu en vaut la chandelle puisqu'en bout de

ligne on se retrouve avec:

$$\tau_{xx} = 2\mu D_{xx} + (\mu_\vartheta - \frac{2}{3}\mu)(D_{xx} + D_{yy} + D_{zz}), \quad (1.27)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu D_{yy} + (\mu_\vartheta - \frac{2}{3}\mu)(D_{xx} + D_{yy} + D_{zz}), \quad (1.28)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu D_{zz} + (\mu_\vartheta - \frac{2}{3}\mu)(D_{xx} + D_{yy} + D_{zz}), \quad (1.29)$$

$$\tau_{xy} = 2\mu D_{xy}, \quad (1.30)$$

$$\tau_{yz} = 2\mu D_{yz}, \quad (1.31)$$

$$\tau_{zx} = 2\mu D_{zx}, \quad (1.32)$$

ce qui n'implique plus que deux coefficients numériques, μ et μ_ϑ , appelés respectivement *viscosité dynamique* et *viscosité volumique*. On définit souvent une *viscosité cinématique* comme

$$\nu = \frac{\mu}{\varrho} \quad [\text{m}^2 \text{s}^{-1}]. \quad (1.33)$$

Pour un fluide statique ($\mathbf{u} = 0$), on aura donc tous les $\tau_{ij} = 0$, indiquant que la force visqueuse ne joue pas. Si de plus le système est stationnaire ($\partial/\partial t = 0$), alors l'équation de Navier–Stokes indique que la pression doit être constante dans le fluide. Si la gravité est ajoutée au membre de droite cependant, sous les mêmes conditions on obtient plutôt:

$$\boxed{\nabla p = \varrho \mathbf{g}}. \quad (1.34)$$

C'est la très célèbre équation de l'*équilibre hydrostatique*. On peut souvent exprimer la gravité comme le gradient d'un potentiel, $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$, dans lequel cas ce dernier doit satisfaire à l'équation de Poisson:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\varrho. \quad (1.35)$$

Dans bien des situations (e.g., atmosphères et vents stellaires, disques d'accrétion), la gravité est due à la concentration centrale de masse, et le potentiel est alors donné directement par GM/r .

Dans le cas d'un fluide incompressible, le terme multipliant μ_ϑ disparaît, et il devient possible de réécrire l'équation de Navier–Stokes sous la forme simplifiée suivante:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\varrho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} \quad [\text{incompressible}]. \quad (1.36)$$

Notez bien que l'opérateur Laplacien agit ici sur une quantité *vectorielle* (soit \mathbf{u}); ceci n'est mathématiquement équivalent à l'action du Laplacien sur les composantes scalaires de \mathbf{u} que dans le cas spécial des coordonnées Cartésiennes².

Incompressible ou pas, le comportement des fluides dépendra souvent de manière critique de l'importance relative des termes inertiel et visqueux dans l'équation de Navier–Stokes:

$$\varrho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \quad \leftrightarrow \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (1.37)$$

Il s'agit maintenant de remplacer les dérivées spatiales par $1/L$, où L est une échelle spatiale qui caractérise adéquatement les variations de \mathbf{u} , et d'introduire les grandeurs caractéristiques u_0 , ν_0 et ϱ_0 pour remplacer \mathbf{u} , ν et ϱ . Une telle *analyse dimensionnelle* appliquée à (1.37) conduit alors à:

$$\varrho_0 \frac{u_0^2}{L} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{L} \varrho_0 \nu_0 \frac{u_0}{L}, \quad (1.38)$$

²Voir l'Annexe B pour les expressions complètes des opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques et sphériques.

où il faut se rappeler ici que, dimensionnellement, le tenseur des stress visqueux $\propto \mu \times D_{ik}$ avec $\mu = \rho\nu$, et que le tenseur des déformations D_{ik} a des unités de vitesse par unités de longueur (viz. eq. 1.25), i.e., u_0/L ici. Le rapport de ces deux termes définit une quantité adimensionnelle appelée *Nombre de Reynolds*:

$$\boxed{\text{Re} = \frac{u_0 L}{\nu_0}}. \quad (1.39)$$

Ceci mesure l'importance relative de l'inertie du fluide par rapport à la force visqueuse. C'est une quantité clef en hydrodynamique, car elle contrôle effectivement la transition vers la turbulence, ainsi que plein d'autres trucs plus techniques comme l'épaisseur des couches limites. Dans le régime $\text{Re} \ll 1$, on peut négliger le terme inertiel et introduire un temps caractéristique τ permettant de remplacer la dérivée temporelle par u_0/τ ; l'analyse dimensionnelle donne alors

$$\rho_0 \frac{u_0}{\tau} = \frac{1}{L} \rho_0 \nu_0 \frac{u_0}{L}, \quad (1.40)$$

d'où:

$$\boxed{\tau = \frac{L^2}{\nu_0}}. \quad (1.41)$$

C'est le *temps de dissipation visqueuse*, mesurant le temps caractéristique d'amortissement d'un écoulement par la force visqueuse, en l'absence de forces propulsant cet écoulement.

Quelques remarques importantes concernant les conditions limites; en présence de viscosité, la vitesse de l'écoulement doit chuter à zéro là où le fluide est en contact avec une surface rigide S :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S. \quad (1.42)$$

Ceci demeure vrai même dans la limite où la viscosité devient très faible. Dans le cas d'une *surface libre* (e.g., la surface d'une sphère de fluide flottant dans le vide), les composantes normales de la vitesse *et* du stress visqueux doivent être nuls:

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = 0, \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in S. \quad (1.43)$$

1.2.4 Moment cinétique: l'équation de la vorticité

La "rotation" ou le "moment cinétique" d'un fluide ne peuvent se réduire, comme dans les cas d'un objet solide, à la simple spécification d'un moment d'inertie et d'une vitesse angulaire, puisque l'action d'un couple de torsion sur un élément de fluide peut changer non seulement sa vitesse angulaire, mais aussi sa forme et distribution de masse. Une mesure plus utile de la "rotation" est la *circulation* Γ le long d'un contour fermé se déplaçant avec le fluide:

$$\Gamma(t) = \oint_{\gamma} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (1.44)$$

où la seconde égalité provient de l'utilisation du théorème de Stokes, et la troisième de la définition de la *vorticité* :

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (1.45)$$

L'avantage d'exprimer un écoulement \mathbf{u} en terme de sa vorticité tient à l'existence du théorème de Kelvin, qui stipule que dans un écoulement inviscide $\nu \rightarrow 0$ (ou, de manière équivalente, $\text{Re} \rightarrow \infty$), la circulation Γ le long d'une boucle fermée γ advectée par le fluide est une quantité conservée:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0. \quad (1.46)$$

Sous utilisation de l'éq. (1.44), ceci peut s'exprimer de manière physiquement équivalente comme:

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0}. \quad (1.47)$$

Cette expression indique que le flux de vorticité traversant une surface mati elle S quelconque délimitée par un contour γ est aussi une quantité conservée. Dans les deux cas il s'agit ici d'expressions intégrales du principe de conservation du moment cinétique.

1.2.5 L'équation d'Euler et le Principe de Bernoulli

La limite inviscide $\nu \rightarrow 0$, ou de manière équivalente $Re \rightarrow \infty$, définit le *fluide parfait*. L'équation de Navier-Stokes se réduit alors à l'* quation d'Euler*:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi, \quad (1.48)$$

où on a ajouté explicitement la gravité au membre de droite, exprimée en terme du gradient d'un potentiel gravitationnel Φ tel que $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$. L'identité vectorielle

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (1.49)$$

permet d'écrire:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla\left(\frac{u^2}{2}\right) - \nabla \times \mathbf{u}, \quad (1.50)$$

où $u^2 \equiv \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$. Considérons maintenant le terme en gradient de pression, sous l'hypothèse que l'écoulement est adiabatique; on peut alors exprimer la pression en terme de la densité via la relation:

$$\left(\frac{p}{p_0}\right) = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma, \quad (1.51)$$

où γ est le rapport des chaleurs spécifiques. On peut déduire de cette expression que $\nabla p = (\gamma p/\rho)\nabla\rho$. Écrivons maintenant

$$\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{p}{\rho^2}\nabla\rho \quad (1.52)$$

$$= \frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{p}{\rho^2}\left(\frac{\rho\nabla p}{\gamma p}\right) \quad (1.53)$$

$$= \frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{1}{\gamma\rho}\nabla p \quad (1.54)$$

$$= \frac{1}{\rho}\nabla p \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right); \quad (1.55)$$

donc,

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{\gamma}{\gamma-1}\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right), \quad (1.56)$$

Insérant cette expression ainsi que l'éq. (1.50) dans l'équation d'Euler (1.48), on peut récrire cette dernière sous la forme:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{u} = -\nabla\left(\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + \Phi\right), \quad (1.57)$$

Supposant maintenant un écoulement stationnaire (dans le sens que tous les $\partial/\partial t \equiv 0$), on projette cette équation sur \mathbf{u} , et on obtient:

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \nabla\left(\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + \Phi\right) = 0}. \quad (1.58)$$

Cette expression implique que le long de chaque ligne d'écoulement, la quantité entre parenthèse est une constante. C'est le *Principe de Bernoulli*, un résultat remarquable qui mérite qu'on s'y attarde un peu. Le premier terme au membre de droite est la quantité d'énergie cinétique par unité de masse dans l'écoulement; le second est, à un facteur γ près, la quantité d'énergie interne (i.e., thermique) par unité de masse du fluide; et le troisième est l'énergie potentielle gravitationnelle par unité de masse. Le Principe de Bernoulli est donc une expression de la conservation de l'énergie, qui, historiquement parlant, précède la formulation officielle de la conservation de l'énergie par plus d'un siècle!

1.2.6 Énergie: L'équation de l'entropie

Voyons maintenant comment formuler la conservation de l'énergie pour des écoulements plus généraux que ceux auxquels s'applique le Principe de Bernoulli. Négligeant temporairement la chaleur produite par la dissipation visqueuse, l'établissement d'une équation de bilan pour l'énergie thermique entrant et sortant d'un élément de volume V fixe dans l'espace (comme à la §1.2.1 pour la masse) conduit à l'équation différentielle suivante exprimant la conservation de *l'énergie interne* par unité de masse (e , in units J/kg) du plasma:

$$\frac{De}{Dt} + (\gamma - 1)e\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\varrho} \nabla \cdot [(\chi + \chi_r)\nabla T], \quad (1.59)$$

où, dans le cas d'un gaz parfait, on a

$$e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\varrho} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{kT}{\mu m}, \quad (1.60)$$

avec $\gamma = c_p/c_v$ étant le rapport des chaleurs spécifiques, et $(\chi + \chi_r)\nabla T$ le flux diffusif de chaleur, avec χ et χ_r étant les coefficients de conductivité thermique et radiative, respectivement (unités: $\text{JK}^{-1}\text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$). L'équation (1.59) indique que toute variation de l'énergie interne spécifique dans un volume de plasma transporté par l'écoulement (membre de gauche) ne peut être due qu'à un flux de chaleur à ses frontières causé soit par conduction, soit par la radiation (ici dans l'approximation dite de diffusion). Le second terme $\propto \nabla \cdot \mathbf{u}$ au membre de gauche de l'éq (1.59) représente le travail par (ou contre) la pression pour compresser (ou dilater) l'élément de volume; c'est l'équivalent fluide de notre bon vieux pdV de la thermodynamique.

Il est souvent pratique de réexprimer cette équation pour la conservation de l'énergie en terme de *l'entropie* du plasma, $S \propto \varrho^{-\gamma} p$. On obtient ainsi une forme plus compacte:

$$\boxed{\varrho T \frac{DS}{Dt} = \nabla \cdot [(\chi + \chi_r)\nabla T]}, \quad (1.61)$$

qui démontre maintenant de manière claire que toute variation de l'entropie S d'un élément de fluide transporté par un écoulement (membre de gauche) ne peut être causée que par un flux chaleur à travers sa surface (membre de droite).

Bien que ce soit rarement un facteur important dans les écoulements astrophysiques (avec quelques exceptions dont une que l'on considérera sous peu), le membre de droite de l'éq. (1.61) doit également inclure l'apport volumique de chaleur dû à l'action de la dissipation visqueuse à l'intérieur de l'élément de fluide (et aussi, comme on le verra au chapitre suivant, par la dissipation Ohmique). La quantité requise est la *fonction de dissipation visqueuse*, plus facilement exprimable en notation indicielle:

$$\phi_\nu = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \right)^2 + \mu_\vartheta \left(\frac{\partial u_s}{\partial x_s} \right)^2 \quad [\text{J m}^{-3} \text{s}^{-1}], \quad (1.62)$$

où la convention de somme sur les indices répétés doit être appliquée. Comme ϕ_ν est toujours une quantité positive, son inclusion au membre de droite de l'éq. (1.61) ne peut que faire augmenter l'entropie, ce qui est tout à fait normal puisque la viscosité est l'équivalent fluide de la friction, qui est un processus thermodynamique irréversible.

1.3 Écoulements compressibles

Les fluides astrophysiques se retrouvent pratiquement tous sous forme gazeuse et/ou dans l'état de plasma. Dans bien des cas la dynamique des écoulements conduit à des variations importantes de la densité, i.e., ces écoulements sont *compressibles*.

1.3.1 Les ondes acoustiques

Écrivons les équations décrivant le comportement d'un fluide inviscide, compressible, en une dimension spatiale, i.e., $\mathbf{u} = u(x, t)\hat{\mathbf{e}}_x$, $p = p(x, t)$, et $\varrho = \varrho(x, t)$:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}, \quad [\text{cons. masse}], \quad (1.63)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad [\text{N} - \text{S}], \quad (1.64)$$

On considère que l'écoulement peut être représenté par un **état de référence** (u_0, p_0, ϱ_0) sur lequel est superposé une **perturbation** (u_1, p_1, ϱ_1) de faible amplitude, i.e.,

$$u = u_0 + u_1, \quad u_1/u_0 \ll 1, \quad (1.65)$$

$$p = p_0 + p_1, \quad p_1/p_0 \ll 1, \quad (1.66)$$

$$\varrho = \varrho_0 + \varrho_1, \quad \varrho_1/\varrho_0 \ll 1. \quad (1.67)$$

Il s'agit maintenant de *linéariser* ces équations par rapport à un état de référence stationnaire ($\partial t/\partial = 0$), hydrostatique ($u_0 = 0$), et homogène (p_0 et ϱ_0 sont tous deux constants). On substitue les équations (1.65)–(1.67) dans les équations (1.63)–(1.64), et on néglige tous les termes *d'ordre deux*, c'est à dire tous les termes impliquant les produits de deux perturbations, e.g., $\varrho_1 u_1$; mais on conserve tous les termes impliquant un produit d'une quantité caractérisant l'état de référence et d'une perturbation, e.g., $\varrho_0 u_1$, etc. Pour l'équation de la conservation de la masse (1.63) on obtient

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial t} = -\varrho_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(u_1 \varrho_1)}_{\text{ordre } 2, \equiv 0}; \quad (1.68)$$

L'équation (1.64) est travaillée de la même manière:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + (u_1) \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{1}{\varrho_0 + \varrho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x}. \quad (1.69)$$

On doit maintenant développer en série le quotient de la densité au membre de gauche via le développement du binôme, prenant avantage du fait que $\varrho_1 \ll \varrho_0$:

$$\frac{1}{\varrho_0 + \varrho_1} = \left(\frac{1}{\varrho_0}\right) \left(\frac{1}{1 + (\varrho_1/\varrho_0)}\right) \simeq \frac{1 - (\varrho_1/\varrho_0)}{\varrho_0} = \frac{\varrho_0 - \varrho_1}{\varrho_0^2}, \quad (1.70)$$

d'où on arrive à

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \underbrace{u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}}_{\text{ordre } 2, \equiv 0} = -\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \underbrace{\frac{\varrho_1}{\varrho_0^2} \frac{\partial p_1}{\partial x}}_{\text{ordre } 2, \equiv 0}; \quad (1.71)$$

encore une fois on élimine tous les termes d'ordre deux, pour arriver à

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x}. \quad (1.72)$$

Nous voici pris avec 2 équations impliquant trois variables, u_1 , p_1 et ϱ_1 ; la troisième équation requise est reliée à l'énergétique de la perturbation. Pour une perturbation adiabatique, on doit avoir $p \propto \varrho^\gamma$, ou, de manière équivalente:

$$\left(\frac{p}{p_0}\right) = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^\gamma, \quad (1.73)$$

où γ est l'indice adiabatique ($= 5/3$ pour un gaz parfait monoatomique); en prenant la dérivée par rapport à x on arrive à (faites le!):

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\gamma}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial x}. \quad (1.74)$$

On introduit maintenant notre procédure de linéarisation dans cette expression, toujours pour un état de référence à densité et pression constantes. À l'ordre un on trouve:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\gamma p_0}{\varrho_0} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}, \quad [\text{adiabat., ordre 1}] \quad (1.75)$$

Il s'agit maintenant d'utiliser cette expressions pour éliminer p_1 des équations à l'ordre un. Vous pourrez vérifier facilement que le résultat de cette opération est

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial t} = -\varrho_0 \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\gamma p_0}{\varrho_0^2} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}. \quad (1.76)$$

Le reste n'est que de l'algèbre; on prend la la dérivée par rapport au temps de la seconde de ces expressions, et on inverse les dérivées spatiales et temporelles (permis puisque nous travaillons en représentation Eulérienne); puis on utilise l'éq. (1.76) pour se débarrasser de $\partial \varrho_1 / \partial t$ et on arrive finalement à:

$$\boxed{\frac{\gamma p_0}{\varrho_0} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}}. \quad (1.77)$$

Il s'agit ici d'une **équation d'onde** pour la perturbation en vitesse $u_1(x, t)$. Il est facile de vérifier que deux équations d'onde équivalentes pour p_1 et ϱ_1 peuvent aussi être obtenues par des manipulations algébriques différentes des équations à l'ordre un. Cette expression accepte des solutions sous la forme d'ondes planes:

$$u_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t), \quad (1.78)$$

où la vitesse (de phase) de l'onde est donc déterminée par les propriétés de l'état de référence:

$$\boxed{c_s = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\varrho_0}}}, \quad (1.79)$$

La première égalité dans cette expression représente la *relation de dispersion* pour notre onde sonore. La quantité au membre de droite est la **vitesse adiabatique du son**. Notons que les ondes sonores sont des ondes **longitudinales**, dans le sens que la force de rappel (ici ∇p) est parallèle à la direction de propagation de l'onde.

On définit le **Nombre de Mach** (M) comme le rapport entre la vitesse d'un fluide et la vitesse adiabatique du son dans le milieu:

$$\boxed{M = \frac{|\mathbf{u}|}{c_s}}. \quad (1.80)$$

Cette quantité nondimensionnelle peut être utilisée pour estimer sous quelles conditions un écoulement compressible peut être traité comme incompressible. Le critère en question est simplement que le nombre de Mach soit $M \ll 1$. Forcé à “choisir” entre se comprimer contre un “obstacle” ou contourner ledit obstacle, la quasi-totalité des fluides compressibles préfèrent la seconde option. Comme c’est le champ de pression qui “informe” le fluide de la présence de l’obstacle en aval, dans un écoulement supersonique le fluide frappe l’obstacle avant de l’avoir “détecté” dans ce champ de pression; il n’est alors plus possible de contourner, et on doit alors comprimer.

1.3.2 Les ondes de choc

Revenons à notre onde sonore. L’équation d’onde (1.77) a été obtenue en supposant l’amplitude de l’onde très petite par rapport à l’état de référence du fluide, mais on peut facilement imaginer que de telles ondes seront toujours supportées dans un fluide même si leur amplitude n’est pas infinitésimale; c’en est bien le cas, mais une complication importante se pointe le nez, conséquence inévitable de notre très fameux terme $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$.

Restons pour l’instant dans une situation en 1D, en considérons le membre de gauche de l’équation de Navier–Stokes ³:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) u = \dots \quad (1.81)$$

De manière générale, l’opérateur au membre de droite décrit l’advection d’une fonction $f(x)$ à vitesse u dans la direction x , i.e., $f(x, t) = f_0(x - ut)$. Si u est constant alors la forme du profil $f(x)$ demeure fixe; mais ici, pour une onde de type sonore, non seulement u n’est pas fixe, mais en plus u est une des quantités transportée. Ceci conduit à la situation illustrée schématiquement à la Figure 1.4. Une perturbation initialement harmonique (sinusoidale) de la vitesse se déplace ici dans la direction- x (vers la droite); cependant, la vitesse de phase de l’onde varie spatialement, en fonction de son amplitude: les crêtes se déplacent plus rapidement que les creux, comme l’indiquent les flèches noires. Ceci conduit à un raidissement graduel de l’onde, se poursuivant jusqu’à ce que le profil devienne vertical, i.e., causant une discontinuité du profil $u(x)$. Une telle “vague” dans un fluide incompressible comme l’eau ne pourrait que déferler, mais dans un fluide compressible cette discontinuité peut se stabiliser sous la forme d’une *onde de choc*.

L’idée est illustrée, toujours schématiquement, au bas de la Figure 1.4, montrant une vue rapprochée d’une de ces discontinuités, indiquée par le rectangle gris sur le profil à $t + 2\Delta t$ plus haut. Si on se place dans un référentiel qui se déplace avec le choc, alors le fluide atteint le choc avec une vitesse u_1 , le traverse et en ressort avec une vitesse $u_2 < u_1$. Comment varieront les autres propriétés du fluide, comme la pression ou la densité ? La première étape consiste à établir les quantités physiques qui sont conservées dans le système. En l’absence de réaction thermonucléaire et de processus dissipatifs, il s’agit simplement des flux de masse, de quantité de mouvement, et de l’énergie totale du fluide. Le flux de ces quantités doit donc être le même de chaque côté du choc:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \quad (1.82)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2, \quad (1.83)$$

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma p_1}{(\gamma - 1)\rho_1} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{\gamma p_2}{(\gamma - 1)\rho_2}. \quad (1.84)$$

où la seconde de ces expressions provient de l’éq. (1.24) en régime inviscide (seul p contribue au stress), et la dernière de ces expressions résulte directement de l’application du principe de Bernoulli (1.58), valide ici puisque l’écoulement est stationnaire dans le référentiel où le choc est

³Cette sous-section et la suivante sont fortement inspirées des sections 6.5 et 6.6 de l’ouvrage de Choudhuri cité en bibliographie en fin de chapitre.

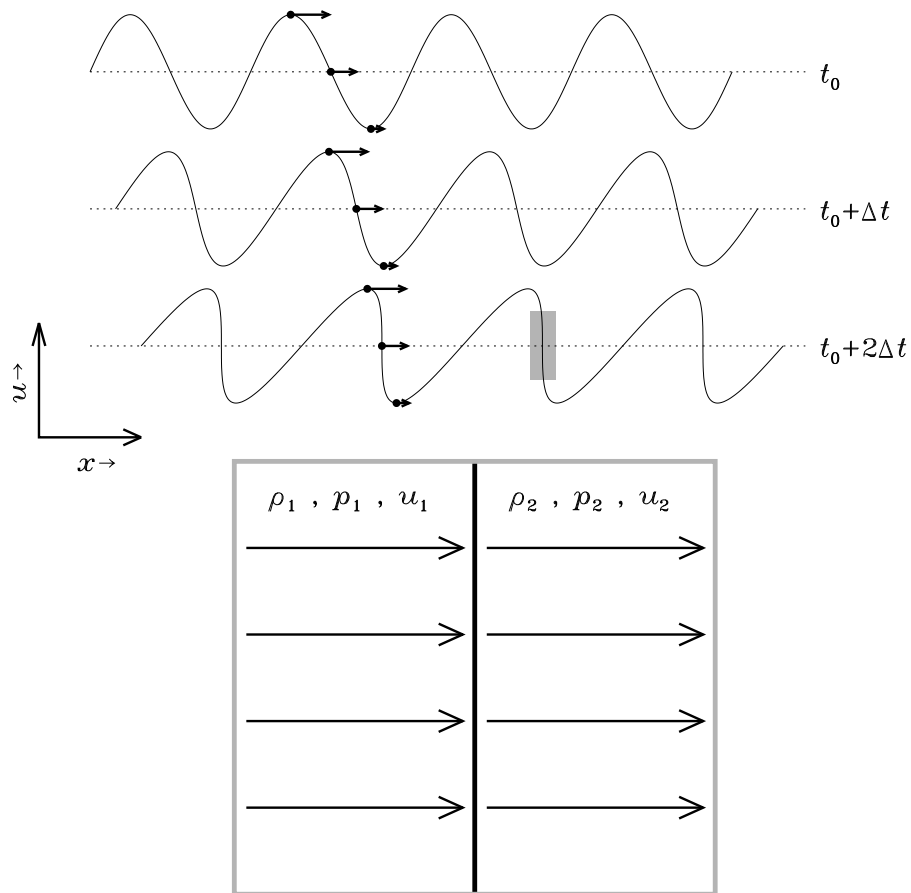


Figure 1.4: Représentation schématique du raidissement d’une onde compressive dans le régime nonlinéaire. Ici la vitesse de l’onde augmente avec son amplitude, tel qu’indiqué par les flèches horizontales, avec comme conséquence que les “crêtes” rattrapent les “creux”, produisant éventuellement un gradient divergent ($\rightarrow \infty$). Le diagramme du bas illustre la variation discontinue des variables physiques dans la région indiquée par le rectangle gris sur le profil d’onde le plus raidi.

au repos. Quelques manipulations algébriques simples permettent de combiner ces expressions sous la forme:

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{(\gamma + 1)}{2/M^2 + (\gamma - 1)}, \quad (1.85)$$

où $M = u_1/c_{s,1}$ est le nombre de Mach dans le fluide en amont du choc, et $c_{s,1}$ est la vitesse adiabatique du son dans ce milieu (voir l'éq. (1.79)). Dans un choc le fluide en amont est typiquement supersonique ($M > 1$), sinon le fluide “ressentirait” la présence du choc et le gradient de pression le ralentirait; Donc si $M > 1$, l'éq. (1.86) indique que $\varrho_2 > \varrho_1$, i.e., le fluide est comprimé en traversant le choc. Pour un gaz parfait ($\gamma = 5/3$), il est facile de vérifier que le niveau maximal de compression possible est

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} = 4. \quad (1.86)$$

L'équation (1.82) indique immédiatement que le rapport des vitesses u_2/u_1 varie en proportion inverse à ϱ_2/ϱ_1 :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{2/M^2 + (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)}, \quad (1.87)$$

et l'éq. (1.83) conduit alors à:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)}. \quad (1.88)$$

Les équations (1.86)—(1.88) sont appelées *relations de Rankine-Hugoniot*. Pour calculer l'écoulement complet, il nous manque cependant une information clef: la vitesse de propagation du choc dans un référentiel inertiel.

1.3.3 Ondes de détonation

Plusieurs phénomènes énergétiques en astrophysique conduisent à la formation d'ondes de choc. L'explosion d'une supernova est certainement l'exemple le plus extrême. Une quantité E d'énergie est soudainement libérée dans un très petit volume au centre de l'étoile. Cette détonation produit un gigantesque gradient de pression qui propulse les couches externes de l'objet dans le milieu interstellaire, à une vitesse supersonique. Cette *onde de détonation* se propage sous la forme d'un choc, dont l'expansion se fait souvent de manière quasi-sphérique par rapport à la position de la supernova même (voir la Figure 1.5 pour un exemple particulièrement joli).

Il est possible de calculer la vitesse d'expansion du choc en supposant que son expansion radiale se fait de manière *autosimilaire*. Travaillant en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , on suppose que les quantités physiques comme ϱ , \mathbf{u} , etc, qui dépendent de r et t , peuvent voir ces dépendances combinées en un *facteur d'échelle* η incorporant implicitement ces dépendances en r et t ; par exemple:

$$\varrho(r, t) = \varrho(\eta), \quad \eta \rightarrow \eta(r, t). \quad (1.89)$$

Il s'agit maintenant de choisir une forme appropriée pour $\eta(r, t)$. L'idée est d'établir cette forme sur la base d'une analyse dimensionnelle. On s'attend à ce que l'expansion dépende de l'énergie E libérée par la détonation, ainsi que des propriétés du milieu traversé par l'onde de détonation. Supposant le milieu interstellaire au repos (u_1) et sa pression beaucoup plus faible que celle caractérisant l'éjecta ($p_1 \ll p_2$) ne laisse que E et ϱ_1 comme variables pertinentes. La combinaison la plus simple des quantités dimensionnelles E , ϱ_1 et t ayant une dimension de longueur est:

$$\eta = \left(\frac{E t^2}{\varrho_1} \right)^{1/5}. \quad (1.90)$$



Figure 1.5: Onde de détonation produite par une supernova ayant pété il y a plus de 400 ans (SNR 0509-67.5). Cette image combine des données optiques (rouge) et en rayon-X (vert-bleu). L'émission optique est associée au chauffage du milieu interstellaire par le passage de l'onde de choc. Image de la NASA, en domaine public.

On utilise ce facteur d'échelle pour adimensionaliser le rayon r :

$$\xi = \frac{r}{\eta} = r \left(\frac{\rho_1}{E t^2} \right)^{1/5}. \quad (1.91)$$

Si l'expansion est autosimilaire, alors on peut assigner à chaque coquille sphérique une valeur de ξ , et cette valeur demeurera inchangée durant l'expansion. Assignons la valeur ξ_0 à la coquille sphérique ($r = r_c(t)$ coïncidant avec le choc en expansion; on aura alors

$$r_c(t) = \xi_0 \left(\frac{E t^2}{\rho_1} \right)^{1/5}, \quad (1.92)$$

et sa vitesse d'expansion est donnée par

$$v_c(t) = \frac{dr_c}{dt} = \frac{2\xi_0}{5} \left(\frac{E}{\rho_1 t^3} \right)^{1/5}. \quad (1.93)$$

Ces expressions indiquent que le rayon de l'onde de détonation augmente en $t^{2/5}$, et sa vitesse de propagation chute en $t^{-3/5}$. Ces prédictions ont été vérifiées expérimentalement (mais *a posteriori*) à partir de photographies de la première explosion atomique produite par l'humanité⁴, dans le désert du Nouveau-Mexique en 1945.

Un éjecta de supernova "typique" peut contenir $\sim 1 M_\odot$ de plasma éjecté à une vitesse $\sim 10^4 \text{ km s}^{-1}$, correspondant à une énergie $\sim 10^{44} \text{ J}$. Une valeur typique pour la densité dans le

⁴Comme c'était le prélude-test aux seconde et troisième explosions, sur Hiroshima et Nagasaki, l'utilisation du terme "humanité" n'est peut-être pas appropriée ici...

milieu interstellaire est $10^{-21} \text{ kg m}^{-3}$ (viz. Tableau 1). Insérant ces valeurs dans les éqs. (1.92)–(1.93) et avec t exprimé en années, on obtient:

$$r_c(t) \simeq 0.3 t^{2/5} \quad [\text{parsec}] , \quad (1.94)$$

$$v_c(t) \simeq 10^5 t^{-3/5} , \quad [\text{km s}^{-1}] . \quad (1.95)$$

Ces expressions peuvent être utilisées pour “dater” une supernova à partir du rayon observé de son onde de détonation. La méthode ne fonctionne que pour des supernovae relativement récentes, mais pas trop récentes non plus. La solution autosimilaire comporte en effet certaines limites intrinsèques; ayant supposé que la vitesse initiale de l'éjecta est $\sim 10^4 \text{ km s}^{-1}$, les éqs. (1.94) ne peuvent être valides que pour $t \gtrsim 100 \text{ yr}$. De plus, l'approche ci-dessus présuppose que toute l'énergie demeure contenue dans l'éjecta, ce qui ne sera pas le cas; les pertes d'énergie par radiation peuvent être importantes, particulièrement au niveau du choc même, où elles sont amplifiées par le chauffage associé à la compression ainsi qu'à la dissipation visqueuse. C'est d'ailleurs cet excès de pertes radiatives qui rend l'onde de détonation si joliment visible sur des images optiques comme à la Figure 1.5.

1.4 Fluides en rotation

Tout tourne en astrophysique; toutes les planètes, toutes les étoiles, toutes les galaxies, et c'est probablement le cas également des amas de galaxies. C'est là une conséquence de la conservation du moment cinétique couplée au fait que la grande majorité des objets astrophysiques primaires se forment par *effondrement gravitationnel* à partir d'un milieu de basse densité et spatialement diffus. La forte réduction du moment d'inertie associée à la toute aussi grande réduction de la taille physique de l'objet conduit inévitablement à une augmentation de la vitesse angulaire de la structure, via la conservation du moment cinétique. En fait, on verra plus loin qu'un des grands problèmes de la théorie de la formation des étoiles est d'identifier le (ou les) mécanisme(s) permettant d'évacuer le moment cinétique du système protoétoile-disque d'accrétion, afin que la barrière centrifuge ne bloque pas l'accrétion de masse.

Il sera donc important de pouvoir reformuler les équations de l'hydrodynamique dans un référentiel en rotation; conceptuellement il ne s'agit que d'inclure les forces de Coriolis et centrifuge dans l'équation de Navier-Stokes. Ici le contexte du milieu continu ne nous complique pas trop la chose mathématiquement puisque ce sont des forces volumiques, mais l'influence de la rotation sur les écoulements a quelques conséquences dynamiques non-intuitives qu'il est important de clarifier déjà à ce stade.

1.4.1 Les forces de Coriolis et centrifuge

Plaçons nous dans un référentiel en rotation (“ R ”), et examinons comment l'accélération $D\mathbf{u}/Dt$ d'un élément de fluide telle que mesurée dans ce référentiel s'exprimerait dans un référentiel inertiel (“ I ”) fixe dans l'espace. De manière tout à fait générale, une vitesse \mathbf{u}_I dans un référentiel inertiel se transforme dans un référentiel en rotation selon

$$\mathbf{u}_I = \mathbf{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} , \quad (1.96)$$

où \mathbf{r} est un rayon vecteur mesurant la position de l'élément de fluide par rapport à un point de référence quelconque, $\boldsymbol{\Omega}$ le vecteur-vitesse angulaire définissant le référentiel en rotation, et \mathbf{u}_R est la vitesse de l'écoulement dans ce référentiel, et où on a supposé que toutes les vitesses impliquées demeurent confortablement non-relativistes. De même, toute variation Lagrangienne se transforme selon

$$\left(\frac{D}{Dt} \right)_I = \left(\frac{D}{Dt} \right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \quad (1.97)$$

L'accélération (Lagrangienne) d'un élément de fluide se transforme donc selon:

$$\left(\frac{D\mathbf{u}_I}{Dt}\right)_I = \left(\frac{D\mathbf{u}_I}{Dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_I \quad (1.98)$$

Substituant l'éq. (1.96) dans cette dernière expression, on développe comme suit:

$$\left(\frac{D\mathbf{u}_I}{Dt}\right)_I = \left(\frac{D\mathbf{u}_R}{Dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \underbrace{\frac{D\mathbf{r}}{Dt}}_{=\mathbf{u}_R} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (1.99)$$

$$= \left(\frac{D\mathbf{u}_R}{Dt}\right)_R + \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})}_{\text{Centrifuge}} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R}_{\text{Coriolis}} \quad (1.100)$$

Tout ceci revient (évidemment) à introduire dans le référentiel R les accélérations centrifuge et Coriolis, tel qu'indiqué. Les équations de Navier-Stokes (gravité incluse) en régime incompressible deviennent donc, dans R :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R + \nu\nabla^2\mathbf{u}, \quad [\text{incompressible}] \quad (1.101)$$

Si $\boldsymbol{\Omega}$ est aligné avec l'axe de symétrie du système de coordonnées polaire (r, θ, ϕ) habituel, alors on a $|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}| = \Omega r \sin \theta$, et donc $|\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})| = \Omega^2 r \sin \theta = \Omega^2 s$, ce qui permet d'écrire

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = -\nabla \left(\frac{1}{2} \Omega^2 s^2 \right). \quad (1.102)$$

L'équation (1.101) devient

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \Phi - \frac{1}{2} \Omega^2 s^2 \right) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad [\text{incompressible}] \quad (1.103)$$

où l'on a abandonné à partir d'ici les indices R . La force centrifuge peut être "absorbée" dans le terme de pression sous la forme d'un potentiel centrifuge. Physiquement, ceci indique que le profil de pression peut toujours s'ajuster pour équilibrer la force centrifuge, tout comme elle le fait pour équilibrer la gravité dans l'atmosphère hydrostatique (c'est d'ailleurs pourquoi la surface d'un liquide dans un récipient en rotation assume une forme parabolique). La quantité entre parenthèses dans l'équation ci-dessus représente donc une forme de "pression effective". La force de Coriolis, par contre, dépend explicitement de \mathbf{u} et ne peut être exprimée sous la forme du gradient d'un potentiel.

L'analyse dimensionnelle permet encore une fois, d'estimer l'importance relative des termes inertiel $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ et visqueux $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$ par rapport au terme de Coriolis $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$:

$$\frac{[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]}{[2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}]} = \frac{U^2/L}{\Omega U} = \boxed{\frac{U}{\Omega L} \equiv \text{Ro}}, \quad (1.104)$$

$$\frac{[\nu \nabla^2 \mathbf{u}]}{[2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}]} = \frac{\nu U/L^2}{\Omega U} = \boxed{\frac{\nu}{\Omega L^2} \equiv \text{Ek}}. \quad (1.105)$$

Le premier de ces paramètres non-dimensionnels est appelé **Nombre de Rossby** (Ro), et mesure l'importance relative des effets inertiels versus Coriolis dans l'écoulement; le second est le **Nombre d'Ekman** (Ek), et mesure l'importance des forces visqueuses par rapport à la force de Coriolis.

1.4.2 L'équilibre géostrophique et le théorème de Taylor-Proudman

Dans un écoulement incompressible, stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) et perpendiculaire à la gravité, et où $Ro \ll 1$ et $Ek \ll 1$, l'équation (1.103) se réduit à

$$\boxed{\nabla \left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} \Omega^2 s^2 \right) = -2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}}, \quad (1.106)$$

Ceci exprime un équilibre entre le gradient de pression et la force de Coriolis; c'est l'**équilibre géostrophique**. Puisque $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}$ est perpendiculaire à \mathbf{u} , alors ∇p le sera aussi. C'est un état d'équilibre très différent qu'en l'absence de rotation, dans lequel cas \mathbf{u} est plus souvent *parallèle* à ∇p . C'est pourquoi, sur les cartes météo, les vents soufflent *le long* des isobares, plutôt que directement le long du gradient de pression, perpendiculairement aux isobares.

L'équilibre géostrophique peut avoir des conséquences plutôt surprenantes. Prenons le rotationnel de chaque coté de l'éq. (1.106):

$$\nabla \times (2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}) = \underbrace{\nabla \times \nabla \left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} \Omega^2 s^2 \right)}_{\equiv 0}. \quad (1.107)$$

On développe le membre de gauche via l'identité vectorielle

$$\nabla \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}) = (\mathbf{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{\Omega} + \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{\Omega}) - \mathbf{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}); \quad (1.108)$$

mais $\nabla \mathbf{\Omega} = 0$ et $\nabla \cdot \mathbf{\Omega} = 0$ puisqu'ici $\mathbf{\Omega}$ est un vecteur définissant l'axe de rotation du référentiel R . On a également $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ en vertu de notre hypothèse d'incompressibilité. On en conclut que

$$\boxed{\mathbf{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0}. \quad (1.109)$$

Cette expression indique que \mathbf{u} ne varie pas dans la direction de l'axe de rotation, tel que définie par $\mathbf{\Omega}$; c'est le **théorème de Taylor-Proudman**, qui stipule que tout écoulement dans le régime $Ro \ll 1$, $Ek \ll 1$ ne peut être que bi-dimensionnel.

1.5 La turbulence

Le développement nonlinéaire des instabilités hydrodynamiques (et magnétohydrodynamiques) conduit habituellement à la turbulence, et cette turbulence peut jouer un rôle majeur dans la structure et dynamique des systèmes astrophysiques. Les exemples abondent, e.g., le transport de l'énergie thermique dans les zones convectives stellaires, le transport du moment cinétique dans les disques d'accrétion, ou encore le mélange chimique dans les enveloppes de supernovae de type II. Il est donc essentiel d'identifier (1) les conditions sous lesquelles tel ou tel écoulement devient instable, et (2) l'impact de cette turbulence sur la dynamique globale de l'écoulement.

La turbulence est souvent considérée comme le dernier "grand problème" non-résolu de la physique classique, i.e., pré-relativiste et pré-quantique. Le sujet a par ailleurs été caractérisé comme étant un "grand cimetière de théories"; on doit donc approcher la turbulence posément, et avec prudence et circonspection...

1.5.1 Les instabilités hydrodynamiques

Le fait qu'un écoulement soit stationnaire, dans le sens habituel que $\partial/\partial t = 0$, implique un équilibre entre les forces agissant sur tout élément de fluide (coté droit des équations de Navier-Stokes), et le terme inertiel ($\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$) au coté gauche. Supposons maintenant qu'un agent extérieur impose une perturbation prenant la forme d'un déplacement additionnel $\boldsymbol{\xi}$ à un élément de fluide localisé quelquepart dans l'écoulement. En général, l'élément de fluide ainsi déplacé ne sera plus

en équilibre, dans le sens que, localement, l'équation de Navier-Stokes ne sera plus satisfaite. Ceci revient à dire qu'une force nette \mathbf{F} agira sur l'élément de fluide. Si cette force s'oppose au déplacement initial, alors l'écoulement est stable; dans le cas contraire il est évidemment instable. Dans un tel cas, l'énergie cinétique par unité de masse du fluide ($u^2/2$) augmente, et cette énergie doit venir de quelquepart. C'est donc qu'il existe un réservoir d'énergie dans le système, dans lequel l'instabilité est en mesure de puiser.

En hydrodynamique, il existe plusieurs sources possibles d'énergie, auxquelles sont associées toute une gamme d'instabilités. Les plus familières dans le contexte astrophysique sont les instabilités de Jeans et de Rayleigh-Taylor (puisant dans l'énergie potentielle gravitationnelle), l'instabilité de Kelvin-Helmholtz (puisant dans l'énergie cinétique de l'écoulement), et l'instabilité convective (propulsée par la force de flottaison mais ultimement puisant dans l'énergie thermique). Il existe également tout en zoo d'instabilités qui puisent dans l'énergie magnétique, mais on oublie celles-là... pour l'instant!

1.5.2 Analyse de stabilité: un survol

Une analyse formelle de stabilité débute par la définition d'une perturbation harmonique infinitésimale du genre:

$$\boxed{\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\Xi}(\mathbf{x}) \exp[(\sigma + i\omega)t] ,} \quad (1.110)$$

où l'amplitude spatiale $\boldsymbol{\Xi}(\mathbf{x})$ est en général une quantité complexe. Ici, $\boldsymbol{\xi}$ représente une perturbation pouvant, en principe, affecter toutes les variables hydrodynamiques importantes au problème considéré. En terme de la notation utilisée en linéarisation, on écrirait:

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) \equiv [\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \delta\rho(\mathbf{x}, t), \delta p(\mathbf{x}, t), \dots] . \quad (1.111)$$

La clef de l'analyse est de supposer que la perturbation est infinitésimale, donc

$$\frac{\delta\mathbf{u}}{\mathbf{u}} \ll 1 , \quad \frac{\delta\rho}{\rho} \ll 1 , \quad \frac{\delta p}{p} \ll 1 , \quad \text{etc.} \quad (1.112)$$

On peut donc *linéariser* les équations de continuité, Navier-Stokes, etc, comme nous l'avons fait dans notre étude des ondes sonores (§1.3.1), de façon à obtenir des équations linéaires incluant explicitement un terme en $\partial/\partial t$ pour les perturbations. Il s'agit ensuite de manipuler algébriquement les équations résultantes de manière à se retrouver avec une seule équation différentielle, possiblement d'ordre élevé, pour une seule des quantités perturbées (par exemple $\delta\rho$). On substitue alors la forme appropriée de l'éq. (1.110), ce qui conduit à un problème aux valeurs propres, où la quantité σ correspond au taux de croissance de l'instabilité. Dans plusieurs situations il est possible d'exprimer la dépendance spatiale de la perturbation ($\boldsymbol{\Xi}$) sous la forme

$$\boldsymbol{\Xi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Xi}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) , \quad (1.113)$$

où $\boldsymbol{\Xi}_0$ est maintenant un simple coefficient numérique. La substitution d'une telle relation dans le problème aux valeurs propres susmentionné conduit à une relation, souvent de type polynomiale et habituellement nonlinéaire, reliant les composantes de \mathbf{k} et la valeur propre $\sigma + i\omega$, appelée **relation de dispersion**, et impliquant habituellement une ou plusieurs quantités adimensionnelles caractérisant la dynamique globale de l'écoulement de référence, par exemple le nombre de Reynolds. Si à un Re donné il existe une valeur de k pour laquelle $\sigma > 0$, alors une perturbation de la longueur d'onde correspondante croît exponentiellement, et le système est donc instable. Si, par contre, $\sigma < 0 \forall k$, alors le système est stable. Cette idée est illustrée schématiquement à la Figure 1.6, pour une instabilité fluide générique où le nombre de Reynolds Re agit comme paramètre de contrôle. À bas Re l'écoulement est stable pour tous les k . Le premier mode instable k_c apparaît au nombre de Reynolds critique Re_c , et si Re continue d'augmenter une plage de plus en plus large de nombre d'onde k seront linéairement instables, dans le sens que $\sigma > 0$.

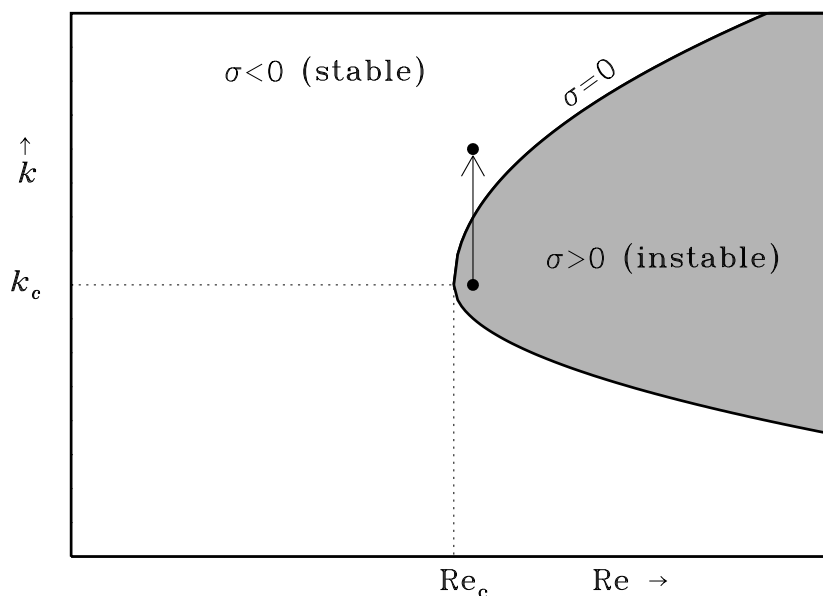


Figure 1.6: Diagramme de stabilité générique pour une instabilité hydrodynamique. Le diagramme est tracé dans le plan $[k - Re]$. La région en gris correspond à la portion du plan où le taux de croissance σ est positif, conduisant à une croissance exponentielle de la perturbation du nombre d'onde k correspondant. Le sens des deux points noirs reliés par une flèche sera expliqué au moment opportun.

1.5.3 La cascade turbulente

Si la turbulence se développe dans un écoulement suite à la croissance d'une instabilité, c'est qu'il existe dans l'écoulement initial une source d'énergie dans laquelle cette instabilité peut puiser. Pour revenir à un état statistiquement stationnaire du point de vue énergétique, cette énergie doit être dissipée, et la viscosité est souvent le seul agent disponible. Cependant, à haut nombre de Reynolds la viscosité ne peut agir que sur les petites échelles spatiales. La turbulence est le moyen utilisé par la Nature pour produire les petites échelles spatiales requises.

On considère un écoulement fluide marginalement instable dans le sens de la Fig. 1.6, i.e., seule une perturbation ayant un nombre d'onde $k \gtrsim k_c$ correspondant au nombre de Reynolds critique est excitée. Pour simplifier, imaginons encore une fois qu'il s'agit ici d'un écoulement plan cisailé verticalement $\mathbf{u}_0 = u_x(z)\hat{\mathbf{e}}_x$, avec le mode instable prenant une forme du genre $\exp(ikx - \omega t)$. Dénotons cette composante fluctuante de l'écoulement par \mathbf{u}' . Dans l'espace de Fourier, on observe donc un pic de puissance au nombre d'onde k , associé à cette perturbation harmonique. Revenons maintenant à nos équations de Navier-Stokes, et plus particulièrement au fameux terme en $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$; sa composante- x inclura un terme de la forme

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad (1.114)$$

sous substitution d'une dépendance spatiale du genre $u_x \propto \exp(ikx)$, on aura de toute évidence

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \propto \exp(2ikx). \quad (1.115)$$

Ceci est crucial: le terme nonlinéaire $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$, opérant sur une fluctuation harmonique de nombre d'onde k , produira une contribution \mathbf{u}'' à l'écoulement, ayant un nombre d'onde $2k$; cependant,

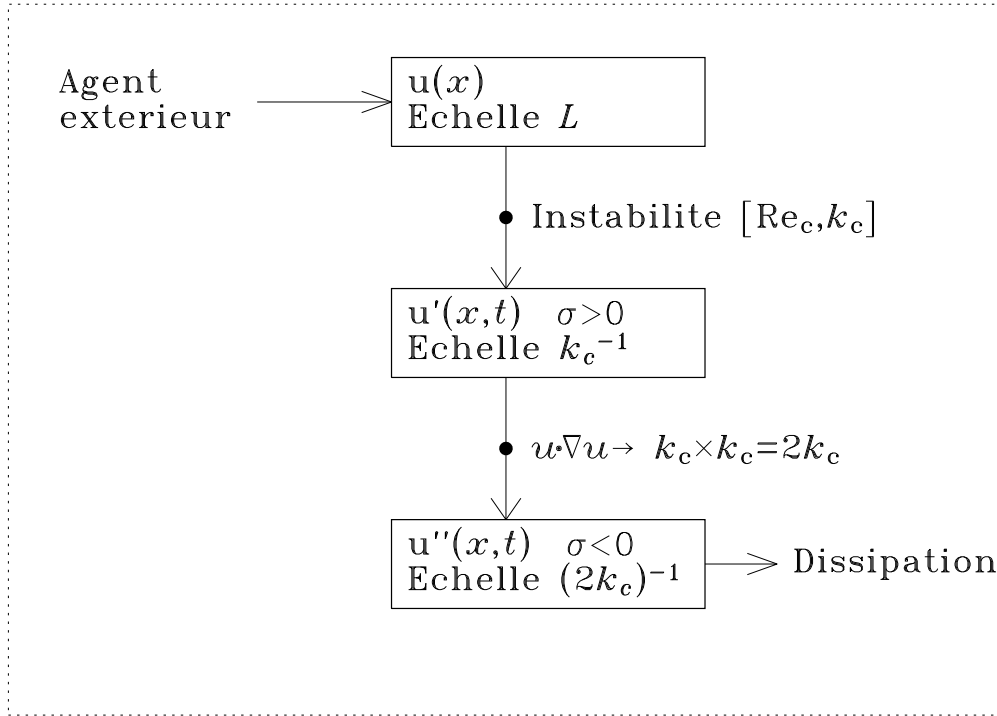


Figure 1.7: Transfert de l'énergie dans un système marginalement instable pour un mode de nombre d'onde k , qui dissipe son énergie via la production d'un mode amorti de nombre d'onde $2k$, par interaction nonlinéaire. La flèche pointant de la boîte centrale vers la boîte du bas est, conceptuellement, la même que la flèche verticale sur la Figure 1.6.

pour un système qui n'est que marginalement instable, seul le mode k a un taux de croissance $\sigma > 0$; le mode $2k$ est caractérisé par une échelle spatiale deux fois plus petite, donc sera plus sensible à la dissipation visqueuse, et se retrouvera amorti, i.e., $\sigma < 0$. C'est ce qu'illustrent les deux points noirs sur la Figure 1.6: le mode instable ayant $k = k_c$ produit par interaction nonlinéaire un mode de k deux fois plus élevé, comme l'indique la flèche verticale, qui se retrouve à l'extérieur de la région d'instabilité dans le plan $[Re, k]$.

La Figure 1.7 illustre schématiquement l'énergétique de cette situation. En régime stationnaire, l'énergie est injectée dans le système par l'agent extérieur qui propulse l'écoulement à grande échelle (\mathbf{u}_0, L). L'instabilité transfère cette énergie à la partie \mathbf{u}' de l'écoulement. Cette énergie est retransférée à un écoulement \mathbf{u}'' par l'interaction nonlinéaire de \mathbf{u}' avec soi-même, via le terme $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$. Puisque \mathbf{u}'' n'est pas instable (taux de croissance $\sigma < 0$), ceci implique un travail contre une force de rappel, ou un mécanisme dissipatif comme la viscosité. D'une façon ou d'une autre, l'énergie sort du système à l'échelle $2k$.

Que se passera-t-il maintenant si l'écoulement n'est pas marginalement instable (dans le sens $Re \gtrsim Re_c$), mais plutôt fortement instable ($Re \gg Re_c$)? Dans une telle situation, il est tout à fait possible que le mode $2k$ produit par l'auto-interaction du mode k le plus instable soit lui-même instable ($\sigma > 0$). Ce mode pourra alors non-seulement croître, mais interagir nonlinéairement avec lui-même ainsi qu'avec le mode original k ; dans l'espace spectral, on produira donc deux nouveaux modes, soit:

$$2k \otimes k \rightarrow 3k, \quad 2k \otimes 2k \rightarrow 4k, \quad (1.116)$$

où le symbole " \otimes " est utilisé ici et dans ce qui suit pour dénoter l'action dans l'espace de Fourier

du terme d'interaction nonlinéaire $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$. Si ces modes sont eux-même instables, l'interaction nonlinéaire produira maintenant les nouveaux modes suivants:

$$3k \otimes 2k \rightarrow 5k, \quad 3k \otimes 3k \rightarrow 6k, \quad 3k \otimes 4k \rightarrow 7k, \quad 4k \otimes 4k \rightarrow 8k, \quad (1.117)$$

et ainsi de suite, conduisant à une croissance géométrique du nombre de modes présents dans le système. Ce processus de cascade dans l'espace de Fourier se poursuivra jusqu'aux nombres d'onde où la perturbation correspondante est stable, habituellement du aux effets de la viscosité. Énergétiquement, le transfert d'énergie se fait d'une manière semblable à celle illustrée sur la Figure 1.7, sauf que l'énergie doit traverser une grande "distance" en nombre d'onde dans le spectre de Fourier avant d'être dissipée.

Si les écoulements turbulents sont si complexes spatiotemporellement, c'est que dans bien des situations il existe une énorme disparité entre l'échelle globale L à laquelle est injectée l'énergie, et l'échelle η (disons) où la viscosité peut dissiper l'énergie au même taux que celui de l'injection, "forçant" ainsi la formation d'un spectre d'échelles spatiales intermédiaires servant à transporter l'énergie des échelles L jusqu'aux échelles où l'énergie peut être dissipée à un taux suffisamment rapide.

Cette vision de l'énergétique de la cascade turbulente atteint sa maturité avec la théorie de Kolmogorov. Son hypothèse fondamentale est que les tourbillons à une certaine échelle ($\ell \equiv k^{-1}$ disons) ne reçoivent de l'énergie que de l'échelle spatiale supérieure (2ℓ), et ne la transmettent qu'à l'échelle inférieure ($\ell/2$). On décrirait donc schématiquement une cascade d'énergie à la Kolmogorov comme:

$$\text{Injection} \rightarrow k \rightarrow 2k \rightarrow 4k \rightarrow 8k \rightarrow 16k \rightarrow \dots \rightarrow \text{Dissipation} \quad (1.118)$$

Le fait qu'un nombre d'onde quelconque (k^*) n'interagisse qu'avec ses "voisins logarithmiques" à $k^*/2$ et $2k^*$ revient à une hypothèse de **similarité** dans la dynamique de l'interaction entre les différentes tailles de tourbillons. Dénnotant par ε l'énergie par unité de masse introduite par unité de temps par l'écoulement moyen à une échelle L , les hypothèses de similarité et stationarité impliquent qu'à toute échelle $\ell < L$, on doit avoir

$$\varepsilon \sim \frac{u_\ell^3}{\ell}. \quad (1.119)$$

Cette expression est obtenue en supposant que les tourbillons dissipent leur énergie cinétique ($\propto u_\ell^2$) en un temps caractéristique correspondant à leur temps de retournement ℓ/u_ℓ . Dans un état stationnaire, le taux de transfert d'énergie d'une échelle à l'autre doit être le même à toutes les échelles, et égal au taux d'injection d'énergie par l'écoulement moyen dans les plus grands tourbillons. Cette contrainte sur l'éq. (1.119) impose une relation entre la vitesse caractéristique d'un tourbillon et son échelle spatiale:

$$u_\ell \propto \ell^{1/3}, \quad (1.120)$$

d'où

$$\frac{\partial u_\ell}{\partial \ell} \sim \ell^{-2/3}. \quad (1.121)$$

On voit déjà que les plus grands tourbillons ont les plus grandes vitesses, mais les plus petits sont caractérisés par les plus grands cisaillements locaux. À mesure que ℓ diminue, on ne peut qu'en arriver à une échelle spatiale (η) où la viscosité peut enfin agir sur ces forts cisaillements et dissiper l'énergie. À cette échelle on peut écrire

$$\varepsilon \sim \frac{\Phi_\nu}{\rho} \sim \nu \left(\frac{u_\eta}{\eta} \right)^2, \quad (1.122)$$

où la seconde égalité est obtenue par analyse dimensionnelle de la fonction de dissipation visqueuse (voir §1.2.6). Mais ceci doit également être égal au taux d'injection d'énergie depuis l'échelle spatiale précédente, i.e., $\varepsilon \sim u_\eta^3/\eta$; de concert avec l'éq. (1.122) ceci conduit à:

$$\eta = \nu^{3/4} \varepsilon^{-1/4}, \quad u_\eta = (\nu \varepsilon)^{1/4}. \quad (1.123)$$

Ceci est un résultat tout à fait remarquable. Connaissant la viscosité du fluide et le taux d'injection d'énergie aux grandes échelles, on peut prédire à quelle échelle spatiale sera dissipée l'énergie, et quelle sera la vitesse du fluide à cette échelle. Il est facile de vérifier qu'à l'échelle η , le nombre de Reynolds *local* est $\text{Re}_\eta = 1$, en accord avec l'idée que la viscosité joue un rôle prédominant dans la dynamique de l'écoulement à cette échelle dite dissipative.

La Théorie de Kolmogorov prédit que la densité spectrale d'énergie prend la forme d'une loi de puissance en fonction du nombre d'onde k ($\propto 1/\ell$), appelée *Loi de Kolmogorov*:

$$E(k) = K_0 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (1.124)$$

où K_0 est la **constante de Kolmogorov**, dont la détermination expérimentale donne toujours $\simeq 1.45$, et ce indépendamment de la valeur de la viscosité du fluide. Il est tout à fait remarquable que la dépendance en $k^{-5/3}$ de la Loi de Kolmogorov ait été vérifiée expérimentalement et numériquement dans une vaste gamme de systèmes naturels où les taux d'injection d'énergie ε varient énormément. Malgré son statut phénoménologique, dans le sens qu'elle jamais été démontré rigoureusement à partir de principes premiers, la Loi de Kolmogorov est très littéralement une Loi Universelle de la turbulence hydrodynamique.

1.5.4 L'approche de Reynolds

Dans bien des situations, il n'est pas nécessairement utile de décrire un écoulement turbulent dans tous ses détails. Prenons par exemple le transport convectif de l'énergie dans une étoile; d'un côté, l'écoulement y est d'une indubitable complexité; par contre, il est tout aussi clair que globalement l'énergie thermique est transportée vers la surface. Si l'objectif est le calcul de la luminosité, une description détaillée de chaque tourbillon n'est pas nécessaire.

L'idée est donc d'obtenir des équations hydrodynamiques nous permettant de calculer le comportement moyen d'un écoulement turbulent $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Supposons que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ soit incompressible et puisse être décomposé en deux contributions, l'une correspondant à la partie "moyenne" de l'écoulement, et l'autre à la partie "turbulente", soit les fluctuations se produisant sur de petites échelles spatiales et temporelles, et qui *en moyenne* ne contribuent pas à \mathbf{u} :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)}_{\text{écoulement moyen}} + \underbrace{\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)}_{\text{fluctuations}}. \quad (1.125)$$

Attention, il ne s'agit pas ici d'une linéarisation: aucune hypothèse n'est introduite quant aux grandeurs relatives de \mathbf{U} et \mathbf{u}' . Par contre, nous allons supposer —et c'est ici l'hypothèse-clef— que la partie moyenne de l'écoulement, \mathbf{U} , ne varie que très lentement en fonction de la position, soit sur une échelle spatiale L très grande par rapport à l'échelle spatiale λ caractérisant la partie fluctuante de l'écoulement. Autrement dit, il existe une *séparation d'échelle* entre \mathbf{U} et \mathbf{u}' . Définissons maintenant une moyenne spatiale sur une échelle intermédiaire ℓ telle que $\lambda \ll \ell \ll L$, via la relation

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\ell^3} \int_x^{x+\ell} A \, d\mathbf{x}^*, \quad (1.126)$$

Puisque \mathbf{u}' présente une moyenne nulle lorsqu'intégré sur un intervalle $\ell \gg \lambda$, et \mathbf{U} ne varie que très peu sur un intervalle $\ell \ll L$, on aura:

$$\langle \mathbf{U} \rangle = \mathbf{U}, \quad \langle \mathbf{u}' \rangle = 0. \quad (1.127)$$

Considérons maintenant l'équation d'Euler en version incompressible, écrite en termes de l'écoulement "total" \mathbf{u} :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1.128)$$

où l'on se rappellera que la gravité, si présente, peut être absorbée dans la pression via le potentiel gravitationnel. Prenons maintenant la moyenne spatiale de ces équations. Dans la mesure où les dérivées spatiales présentes dans les équations ci-dessus réfèrent aux variations spatiales sur l'échelle L , ces dérivées commutent avec notre opérateur de moyenne $\langle \rangle$, ce dernier opérant à l'échelle intermédiaire ℓ . Écrites en notation indicielle et après substitution de l'éq. (1.125) et de son équivalent pour la pression, l'éq. (1.128) devient:

$$\frac{\partial(U_i + u'_i)}{\partial t} + \underbrace{(U_j + u'_j) \frac{\partial(U_i + u'_i)}{\partial x_j}}_{\equiv \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(P + p')}{\partial x_i}. \quad (1.129)$$

Considérons tout d'abord le comportement du terme $\propto \nabla p$ sous l'action de notre opérateur de moyenne spatiale; puisque cet opérateur est lui-même linéaire, on aura,

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \frac{\partial(P + p')}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\overbrace{\langle P \rangle}^{\equiv P} + \overbrace{\langle p' \rangle}^{=0})}{\partial x_i} \quad (1.130)$$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad (1.131)$$

d'où les fluctuations ainsi que l'opérateur de moyenne ont tous les deux disparu. Un résultat semblable est obtenu pour le terme impliquant la dérivée temporelle au membre de gauche de l'éq. (1.128), puisque cette dérivée commute avec l'opérateur de moyenne spatiale. Il ne nous reste plus à traiter que le terme nonlinéaire $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$; commençons par le développer algébriquement:

$$(U_j + u'_j) \frac{\partial(U_i + u'_i)}{\partial x_j} = U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + U_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}. \quad (1.132)$$

La moyenne spatiale de cette expression fait disparaître les second et troisième termes, mais en général pas le dernier; l'équation de Navier–Stokes pour l'écoulement moyen prend donc la forme:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i u'_j \rangle. \quad (1.133)$$

où on a utilisé le fait que:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i u'_j \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_j) \right\rangle = \left\langle u'_i \underbrace{\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}}_{\equiv \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle. \quad (1.134)$$

L'équation (1.133) est identique aux équations de Navier–Stokes pour l'écoulement complet (éq. (1.128)), sauf pour l'apparition du dernier terme à son membre de droite. Celui-ci a la forme d'une divergence d'un tenseur d'ordre deux. Ce tenseur, appelé *stress de Reynolds*, “contient” toute l'influence de la partie fluctuante \mathbf{u}' de l'écoulement sur sa partie moyenne \mathbf{U} . Il s'agit ici clairement d'un tenseur symétrique, contenant donc un maximum de six composantes indépendantes. Notons que sa moyenne spatiale peut, en principe, produire des termes positifs, négatifs, ou nuls, dépendant de la présence ou l'absence de corrélations entre les fluctuations de vitesse. Conséquemment, *sa divergence n'est pas nécessairement nulle*. Le terme $\partial \langle u'_i u'_j \rangle / \partial x_j$ au membre de droite de l'éq. (1.133) peut donc, en principe, agir comme une force par unité de masse qui *produit* un écoulement moyen \mathbf{U} ; c'est la **cascade inverse**, puisque dans un tel cas l'énergie passe des petites aux grandes échelles, soit dans la direction opposée (dans l'espace de Fourier) de celle considérée à la section précédente. On en examine un exemple spécifique à la section qui suit.

1.5.5 Convection et cascade inverse

Dans les systèmes en rotation, la force de Coriolis agissant sur l'écoulement aux petites échelles peut introduire une corrélation entre les composantes turbulentes. Le stress de Reynolds y étant associé, plus spécifiquement ses composantes $\langle u'_r u'_\phi \rangle$ et $\langle u'_\theta u'_\phi \rangle$, est le principal moteur direct de la *rotation différentielle* dans les étoiles qui, comme le soleil, ont une zone convective de profondeur substantielle sous leur photosphère.

Le paramètre-cléf s'avère être le nombre de Rossby défini précédemment à la §1.4; dans un système convectif on définit ce dernier en terme de la vorticité moyenne associée à la composante turbulente de l'écoulement:

$$\text{Ro}_c = \frac{\langle |\nabla \times \mathbf{u}'| \rangle}{\Omega} \quad (1.135)$$

Notons que l'utilisation de la vorticité moyenne sert ici d'estimé pour le rapport U/L dans notre définition originale du nombre de Rossby (voir l'éq. (1.104)).

La Figure 1.8A—C montre des exemples de la rotation différentielle produite dans trois simulations hydrodynamiques globales (i.e., 3D sur la sphère) de la convection dans une étoile de type solaire. Le première (à gauche) est caractérisée par un nombre de Rossby convectif $\text{Ro}_c \simeq 0.3$, la seconde (au centre) par $\text{Ro}_c \simeq 1.1$, et la troisième est calculée sans rotation ($\text{Ro}_c \rightarrow \infty$). Dans les trois cas il s'agit d'instantanés extraits des simulations à un pas de temps spécifique. La base de la zone convective est indiquée par l'arc de cercle en tirets, et l'échelle de couleur code la fréquence de rotation $\omega(r, \theta)/2\pi$. Dans les simulations en (A) et (B), une *rotation différentielle* substantielle est présente dans toute la zone convective, mais disparaît rapidement dès qu'on pénètre dans le coeur radiatif. À bas Nombre de Rossby (haute influence rotationnelle, en A) la rotation différentielle est caractérisée par une rotation rapide des régions équatoriales, tandis qu'à haut Nombre de Rossby (forte influence rotationnelle, en B) la rotation y est minimale. Le soleil opère dans le premier de ces régimes; du point de vue de l'influence rotationnelle sur la convection, le soleil est un rotateur rapide! On remarque aussi, dans les deux cas, la tendance marquée qu'ont les isocontours de fréquence de rotation à s'aligner verticalement, particulièrement aux basses latitudes; c'est ici une conséquence directe du théorème de Taylor-Proudman (voir §1.4.2).

Dans la limite $\text{Ro}_c \rightarrow \infty$, la rotation différentielle disparaît; le signal de faible amplitude visible sur la Fig. 1.8C est une forme de fluctuation turbulente qui disparaît complètement si l'on effectue une moyenne temporelle sur quelques temps de retournement convectifs. Ce n'est pas le cas des profils en A et B, qui sont stationnaires ($\partial/\partial t = 0$) en première approximation.

Dans de telles simulations, travaillant en coordonnées sphériques polaires (r, θ, ϕ) , il est naturel de définir l'opérateur de moyenne en terme d'une moyenne zonale, i.e.:

$$\langle \mathbf{u} \rangle \equiv \mathbf{U}(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{u}(r, \theta, \phi, t) d\phi, \quad (1.136)$$

où \mathbf{u} est le champ de vitesse total produit par la simulation. Les instantanés de la rotation différentielles portés en graphique sur la Fig. 1.8 correspondent ainsi à $\omega(r, \theta, t^*) = \mathbf{U}(r, \theta, t^*)/(r \sin \theta)$. Une fois la partie moyenne de l'écoulement calculée via l'éq. (1.136), la composante aux petites échelles est simplement définie selon:

$$\mathbf{u}'(r, \theta, \phi, t) = \mathbf{u}(r, \theta, \phi, t) - \mathbf{U}(r, \theta, t). \quad (1.137)$$

Négligeant les termes dissipatifs (visqueux), la composante- ϕ de l'équation du mouvement (1.133) peut s'exprimer en forme conservative selon:

$$\varrho r \sin \theta \frac{\partial U_\phi}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\underbrace{\varrho r \sin \theta \left((U_\phi + \Omega r \sin \theta) \mathbf{U} \right)}_{\text{CM}} + \underbrace{\langle u'_\phi \mathbf{u}' \rangle}_{\text{SR}} \right] = 0. \quad (1.138)$$

On note deux contributions au membre de droite: le flux de moment cinétique transporté par l'écoulement moyen dans les plans méridiens ("CM"), et la partie zonale des stress de

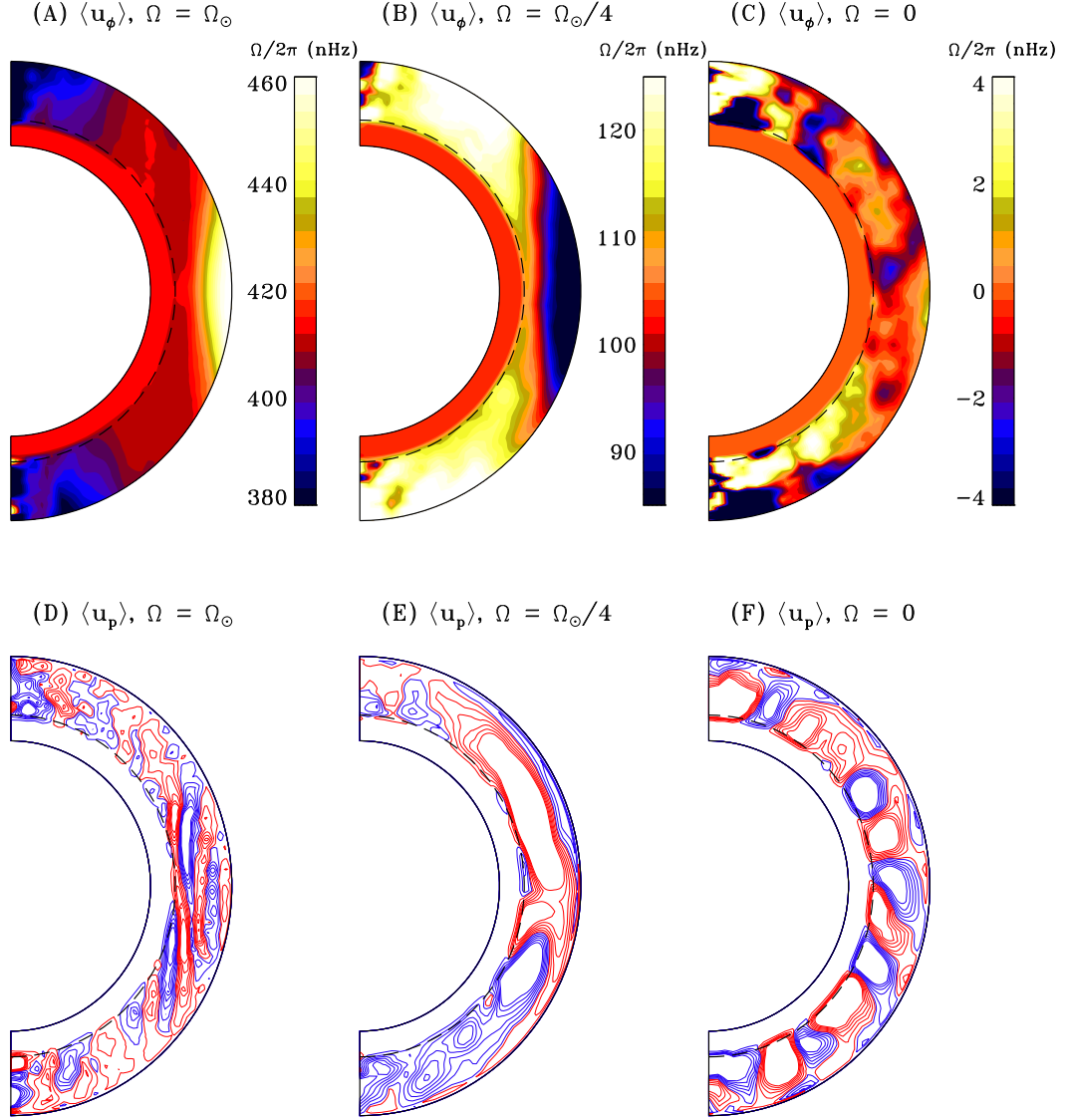


Figure 1.8: Rangée du haut: instantanés de la fréquence de rotation ($\equiv \omega/2\pi$) moyennée longitudinalement dans trois simulations hydrodynamiques de la convection stellaire. Le diagramme est tracé dans le plan $[r, \theta]$, avec l'axe de rotation/symétrie orienté verticalement et coïncidant avec la gauche du diagramme. La fréquence de rotation est mesurée en nanoHertz, tel que codée via l'échelle de couleur à droite. Les tirets à $r/R = 0.7$ délimitent la zone radiative, hydrodynamiquement stable, de la zone convective ($r/R > 0.7$), où les stress de Reynolds propulsent une rotation différentielle et un écoulement global dans les plans méridiens. Noter les étendues très différentes des échelles de couleur. Rangée du bas: lignes d'écoulement pour la circulation méridienne, orientées dans le sens horaire (antihoraire) pour les traits rouges (bleus). Simulations EULAG et graphisme par Patrice Beaudoin.

Reynolds (“SR”). Dans une configuration stationnaire ($\partial/\partial t \equiv 0$), ces deux contributions doivent s’équilibrer. L’écoulement méridien joue donc un rôle important dans la dynamique zonale. Les trois diagrammes au bas de la Fig. 1.8 montrent les lignes d’écoulement pour cette circulation méridienne, dans nos trois mêmes simulations. La transition d’un écoulement méridien de type quadrupolaire, à bas Ro , vers un écoulement multicellulaire en latitude et rayon, à Ro plus élevé, se produit au même Ro que la transition déjà mentionnée dans la rotation différentielle équatoriale. Ces deux transitions reflètent un changement profond dans la dynamique rotationnelle de ces trois simulations, que vous aurez l’occasion d’examiner plus en détail dans le cadre d’un des exercices. Encore une fois, l’écoulement méridien en apparence très multicellulaire en (F) pour la simulation sans rotation est de très faible amplitude et disparaît si l’on moyenne sur un temps plus grand que celui du retournement convectif, contrairement à ceux en (D) et (E).

1.5.6 Les diffusivités turbulentes

Dans le cas d’une simulation, comme sur la Figure 1.8, on peut calculer explicitement les composantes du tenseur de Reynolds —tant que la turbulence montre une bonne séparation d’échelle. Cependant, toute l’idée de la formulation statistique de la turbulence est d’éviter d’avoir à considérer explicitement les petites échelles de l’écoulement, i.e., on veut simplement solutionner l’équation (1.133); il faudra donc, minimalement, trouver une manière d’exprimer le tenseur $\langle u'_i u'_j \rangle$ en fonction de l’écoulement moyen \mathbf{U} . Ceci peut paraître suspect comme procédure, néanmoins c’est souvent une instabilité de l’écoulement aux grandes échelles qui produit les fluctuations aux petites échelles, donc un lien physique doit exister.

Imaginons un écoulement turbulent comme étant composé d’une superposition de petits tourbillons de taille typique s , de vitesse typique v , et ayant un temps de vie de l’ordre du temps de retournement s/v . Ces tourbillons se forment et se dissipent, et entre les deux se déplacent de manière effectivement aléatoire. La Figure 1.9 illustre schématiquement une situation où un cisaillement $\partial U_y/\partial x$ est présent dans l’écoulement aux grandes échelles. Si une bonne séparation d’échelle existe entre \mathbf{U} et la composante turbulente de l’écoulement, alors on peut se définir deux éléments de volume contigus de dimension linéaire beaucoup plus grandes que la taille des tourbillons, mais pour lesquels la vitesse U_y ne varie que très peu. Un tourbillon “A” traversant de l’élément de gauche vers celui de droite s’y dissipera, et ce faisant y déposera son excès de quantité de mouvement verticale, tandis qu’un élément “B” traversant dans le sens opposé déposera dans l’élément de gauche un déficit de quantité de mouvement par rapport aux autres tourbillons dans l’élément de droite. L’effet net est donc de freiner le mouvement vertical de l’élément de gauche, et accélérer celui de l’élément de droite. C’est tout comme si une force de “friction” agissait à la surface de contact des deux éléments de fluide.

Remplaçons les tourbillons sur la Figure 1.9 par les constituants microscopiques du fluide, et on se retrouve avec l’origine microscopique de la force visqueuse. On a vu précédemment qu’à l’échelle macroscopique cette force pouvait être supposée proportionnelle au tenseur des déformation. Appliquons la même logique ici et écrivons:

$$-\langle u'_i u'_j \rangle = \nu_T \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.139)$$

où ν_T est une constante de proportionnalité dont le sens sera clarifié sous peu. Supposons de plus que la turbulence est isotrope; on s’attend alors à ce qu’il n’existe pas de corrélation entre les composante de \mathbf{u}' , impliquant que le tenseur des stress est diagonal; Pour un écoulement incompressible, l’expression ci-dessus n’a que trois composantes non-nulles, soit $2\nu_T D_{ii}$, $2\nu_T D_{jj}$, et $2\nu_T D_{kk}$ (viz. les éqs. (1.32)), d’où

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu_T \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (1.140)$$

Modulo la notation indicielle, cette dernière expression est identique au terme visqueux dans la forme incompressible de l’équation de Navier–Stokes (cf. éq. (1.36)). Le facteur de propor-

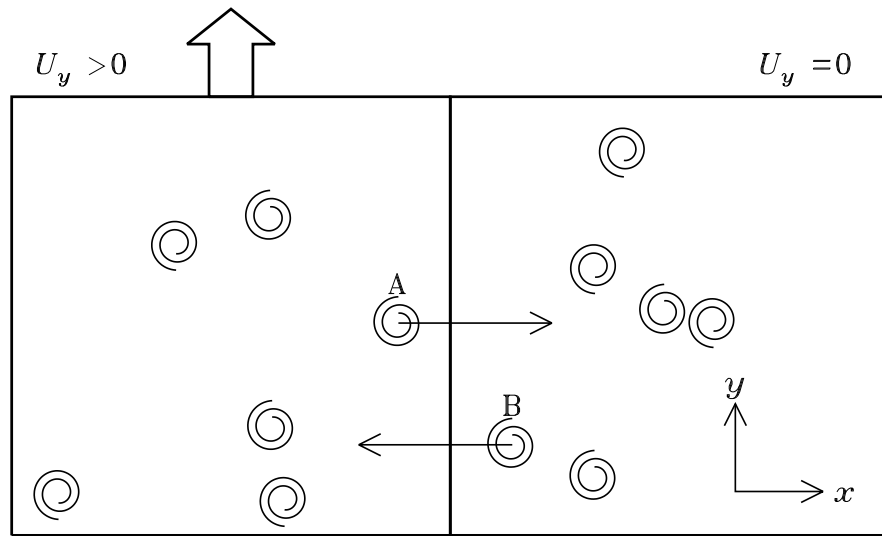


Figure 1.9: Redistribution de la quantité de mouvement en y entre deux éléments contigus de fluide turbulent sujet à un cisaillement aux grandes échelles. Le tourbillon “A” traversant dans l’élément de droite y déposera, au moment de sa dissolution, son excès de quantité de mouvement en y , mais pas le tourbillon “B” traversant de droite vers la gauche, puisque l’élément de fluide à droite est au repos à l’échelle de l’écoulement moyen. L’effet net est de ralentir le mouvement vertical de l’élément de fluide de gauche, et d’accélérer vers le haut l’élément de droite (voir texte).

tionalité ν_T peut donc être interprété physiquement comme une *viscosité turbulente* (unités $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$). Ici cette viscosité turbulente ne peut que freiner l’écoulement aux grandes échelles, une conséquence de la forme diagonale adoptée pour le tenseur des stress de Reynolds. Ceci dit, en général, pour un écoulement turbulent bien développé, on aura

$$\nu_T \gg \nu. \quad (1.141)$$

Nous avons donc réduit (drastiquement) le problème à la spécification d’un seul coefficient numérique, soit le coefficient de diffusion turbulente. La clef est maintenant d’en calculer et/ou spécifier la valeur numérique.

On se rappellera du modèle de Kolmogorov que les plus grands tourbillons contribuent le plus au transport; on choisit donc les valeurs des vitesse (u_l) et échelle spatiale (l) associées à ces plus grands tourbillons pour construire une quantité ayant les unités requises ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$) via la combinaison

$$\nu_T \sim u_l l. \quad (1.142)$$

Évidemment, il est difficile de prédire, *a priori*, quelles seront les valeurs de ces quantités dans tel ou tel écoulement. Cependant, dans les écoulements naturels on peut parfois *mesurer* directement u_l et l , et “calculer” une valeur de ν_T qui puisse être utilisée pour caractériser la dynamique de l’écoulement aux grandes échelles. Cet écoulement simulé est ensuite comparé aux mesures observationnelles de l’écoulement aux grandes échelles afin de valider *post facto* la procédure de calcul de ν_T .

Considérons un exemple astrophysique, soit la photosphère solaire. La convection y montre une échelle spatiale caractéristique bien définie, appelée *granulation*, avec $l \sim 1000 \text{ km}$, et une vitesse typique $u_l \sim 1 \text{ km s}^{-1}$ (voir Fig. 1.10). On trouve ainsi $\nu_T \simeq 10^9 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, ce qui est astronomiquement plus grand que la viscosité microscopique, $\nu \simeq 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Cette

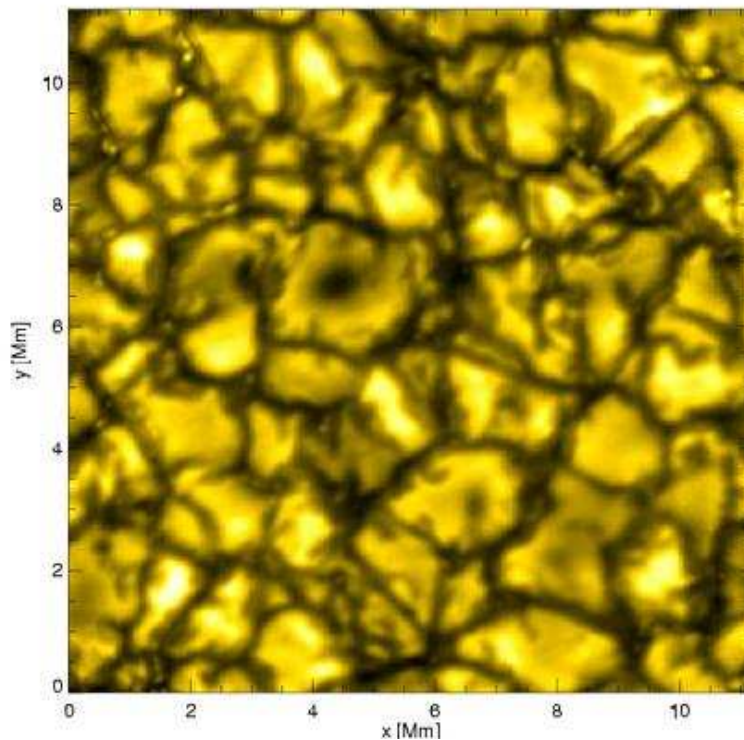


Figure 1.10: La granulation solaire, manifestation photosphérique des écoulements convectifs présents dans le 30% extérieur de cette étoile. Cette image en intensité montre clairement le patron de cellules de fluide chaud ascendant (jaune clair) délimité par un réseau d’allées de fluide froid (jaune foncé) descendant. L’image couvre une surface de 11×11 Mm ($1\text{Mm} = 10^3$ km), soit un minuscule 0.12% de la surface du soleil. Image prise par le Swedish Vacuum Telescope sur La Palma. [Animation disponible sur la page Web du cours]

situation est typique des écoulements turbulents non seulement en astrophysique, mais aussi en océanographie et sciences atmosphériques.

Cette approche est couramment utilisée dans des situations où, la vérification expérimentale *post facto*, est impossible, ou possible seulement de manière très indirecte via des mesures de quelque chose qui est affecté par la turbulence. L’astrophysique regorge de tels “calculs” de viscosité et diffusivité turbulente, utilisant par exemple les abondances chimiques mesurées dans les atmosphères des étoiles comme contraintes sur l’efficacité de la diffusion turbulente. Les résultats qui en découlent sont loin d’être sans intérêt, mais doivent toujours être pris avec un solide grain de sel.

Bibliographie:

Bien que j’y aie fait plusieurs ajouts substantiels, ce chapitre a été écrit en bonne partie à partir d’extraits remaniés des notes du cours PHY-3140 *Hydrodynamique*, dont bibi est l’auteur. Une version pdf de ces notes est disponible sur

www.astro.umontreal.ca/~paulchar/phy3140/phy3140.html

Ces notes peuvent certainement servir de référence additionnelle pour la partie hydrodynamique de ce cours; je recommanderais également le bouquin suivant:

Choudhuri, A.R., *The Physics of Fluids and Plasma*, Cambridge University Press, 1998.

qui, malgré son titre sonnant assez général, est fortement orienté vers l'astrophysique. Au niveau de l'hydrodynamique classique, les trois ouvrages suivants sont mes préférés:

Tritton, D.J., *Physical Fluid Dynamics*, 2nd ed., Oxford University Press (1988),
Acheson, D.J., *Elementary Fluid Dynamics*, Clarendon Press (1990)
Landau, L., et Lifschitz, E., *Fluid Mechanics*, Oxford: Pergamon Press (1959).

Ceux/celles voulant *vraiment* approfondir les notions couvertes dans ce chapitre peuvent consulter les ouvrages suivants. Pour les ondes dans les fluides:

Lighthill, J. *Waves in fluids*, Cambridge University Press (1978),

pour les fluide en rotation:

Greenspan, H.P., *Theory of Rotating Fluids*, Cambridge University Press (1968),
Tassoul, J.-L., *Theory of Rotating Stars*, Princeton University Press (1978),

et pour la turbulence:

McComb, W.D., *The Physics of Fluid Turbulence*, Oxford University Press (1990),
Frisch, U., *Turbulence*, Cambridge University Press (1995).
Davidson, P.A., *Turbulence*, Cambridge University Press (2004)

Sur la dynamique de la rotation différentielle dans les étoiles de type solaire, voir

Miesch, M.S., & Toomre, J., *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **41**, 317-45 (2009).

Chapitre 2

La Magnétohydrodynamique

Pour tout résumer en une seule phrase, la *magnétohydrodynamique* (ci-après MHD) est la branche de l'hydrodynamique qui s'intéresse au comportement des fluides (1) électriquement conducteurs mais globalement neutres, (2) s'écoulant de manière non-relativiste, (3) tout en demeurant assujettis à la Loi d'Ohm. Il est en fait remarquable que la majorité des écoulements astrophysiques satisfassent à ces trois conditions à prime abord plutôt contraignantes. Les exceptions les plus notables sont évidemment les écoulements très relativistes associés aux objets compacts comme les étoiles à neutrons et les trous noirs.

Notre tâche est maintenant de généraliser les équations de l'hydrodynamique de manière à y incorporer les effets des champs électrique et magnétique, et d'obtenir des équations gouvernant l'évolution de ces champs. Il ne faut pas perdre de vue que la neutralité électrique de la quasi-totalité des fluides astrophysiques n'exige pas que les constituants microscopiques desdits fluides soient eux-même électriquement neutres, mais plutôt que les densités de charges positive et négative soient identiques (ou vraiment pas loin). C'est là l'une des conditions définissant l'approximation dite magnétohydrodynamique (ci-après MHD).

2.1 L'équation d'induction magnétohydrodynamique

Notre point de départ sera, vous l'avez pressenti j'espère, les très justement fameuses équations de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \quad [\text{Loi de Gauss}] , \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad [\text{Loi Anonyme}] , \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad [\text{Loi de Faraday}] , \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad [\text{Loi d'Ampère/Maxwell}] , \quad (2.4)$$

où, dans le Système International d'unités, le champ électrique est mesuré en N C^{-1} ($\equiv \text{V m}^{-1}$), et le champ magnétique¹ \mathbf{B} en tesla (T). La quantité ρ_e est la densité de charge électrique (C m^{-3}), et \mathbf{J} est la densité de courant électrique (A m^{-2}). La permittivité ε_0 ($= 8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}$ dans le vide) et la perméabilité magnétique μ_0 ($= 4\pi \times 10^{-7} \text{N A}^{-2}$ dans le vide) peuvent être considérées constantes dans tout ce qui suit, les fluides électriquement polarisables ou ferromagnétiques étant plutôt rares dans les contextes qui nous occuperons dans les chapitres à venir.

¹A strictement parler, \mathbf{B} devrait être appelé densité de flux magnétique ou quelque chose du genre, mais j'ai choisi de nous en tenir ici à la terminologie communément utilisée en astrophysique.

Notre première étape sera, avec tout le respect qu'on doit au bonhomme, de faire sauter le courant de déplacement de Maxwell dans l'éq. (2.4). Ceci est justifiable si l'écoulement est non-relativiste et aucune batterie n'est branchée ou débranchée dans les environs; deux énoncés à prime abord aussi gratuits qu'étranges, mais qui se verront justifiés un peu plus loin (§2.3). Nous retombons donc à la forme originale de l'équation d'Ampère:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} . \quad (2.5)$$

L'interprétation physique de la Loi d'Ampère est sans équivoque: les courants électriques sont la seule source des champs magnétiques.

De manière générale, l'imposition d'un champ électrique \mathbf{E} à travers un milieu électriquement conducteur produira une densité de courant électrique \mathbf{J} . La Loi d'Ohm postule que la relation entre \mathbf{J} et \mathbf{E} est linéaire:

$$\mathbf{J}' = \sigma \mathbf{E}' , \quad (2.6)$$

où σ est la conductivité électrique (unités: $\text{C}^2 \text{s}^{-1} \text{m}^{-3} \text{kg}^{-1} \equiv \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$, $\Omega \equiv \text{Ohm}$). Dans un plasma, la Loi d'Ohm ne tient la route que si le plasma est *collisionnel*, dans le sens que la fréquence de collision entre les constituants microscopiques du plasma est beaucoup plus élevée que toutes les fréquences plasma caractérisant le milieu. Les primes (" $'$ ") dans l'éq. (2.6) sont ajoutés pour rendre explicite le fait que la Loi d'Ohm ne s'applique qu'à une substance conductrice *au repos*. Dans le cas d'un fluide s'écoulant à une vitesse \mathbf{u} (relativiste ou non), l'éq. (2.6) ne s'applique qu'à un référentiel se déplaçant avec le fluide. Nous devons donc effectuer une transformation de Lorentz vers le référentiel inertiel du "laboratoire". Dans la limite non-relativiste ($u/c \ll 1$, donc $\gamma \rightarrow 1$), la transformation habituelle pour la densité de courant se réduit à $\mathbf{J}' = \mathbf{J}$, et celle pour le champ électrique devient $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$. Ceci conduit à la version dite généralisée de la Loi d'Ohm:

$$\boxed{\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})} , \quad (2.7)$$

ou encore, en utilisant la Loi d'Ampère et quelques manipulations algébriques:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} (\nabla \times \mathbf{B}) . \quad (2.8)$$

Il s'agit maintenant d'introduire cette expression pour le champ électrique dans la Loi de Faraday (2.3), ce qui conduit directement à la très célèbre *équation d'induction magnétohydrodynamique*:

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B})} , \quad (2.9)$$

où

$$\eta = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \quad [\text{m}^2 \text{s}^{-1}] \quad (2.10)$$

est la *diffusivité magnétique*. Le premier terme au membre de droite de l'éq. (2.9) représente l'action inductive d'un fluide s'écoulant dans un champ magnétique, tandis que le second terme capture la dissipation des courants électriques supportant ce même champ magnétique.

Il ne faut pas perdre de vue que toute solution de l'éq. (2.9) doit aussi satisfaire l'éq. (2.2) en tout temps. Il est en fait facile de démontrer (faites le!) que si $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ à $t = 0$, alors la forme même de l'éq. (2.9) assure que la divergence de \mathbf{B} demeurera nulle à tout temps subséquent².

2.2 Analyse dimensionnelle

L'évolution d'un champ magnétique sous l'action d'un écoulement \mathbf{u} dépendra beaucoup de l'importance relative du terme d'induction au membre de droite de l'éq. (2.9) par rapport

²Cette conclusion ne tient que sous une arithmétique exacte; si l'éq. (2.9) est solutionnée numériquement, on doit souvent prendre des mesures supplémentaires pour assurer $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ durant toute l'évolution temporelle.

au terme dissipatif. Sous quelles conditions le premier dominera-t-il le second ? C'est là une question fort complexe, mais une première réponse peut s'obtenir par analyse dimensionnelle de l'éq. (2.9); il s'agit de remplacer la dérivée temporelle par $1/\tau$ et les dérivées spatiales par $1/\ell$, où τ et ℓ sont des échelles temporelle et spatiale qui caractérisent adéquatement les variations de \mathbf{u} et de \mathbf{B} :

$$\frac{B}{\tau} = \frac{u_0 B}{\ell} + \frac{\eta B}{\ell^2}, \quad (2.11)$$

où u_0 et B représentent des valeurs "typiques" de la vitesse de l'écoulement et du champ magnétique dans le domaine d'intérêt. Le rapport du premier terme au membre de droite de l'éq. (2.11) sur le second est une quantité adimensionnelle appelée *Nombre de Reynolds magnétique*³:

$$\boxed{R_m = \frac{u_0 \ell}{\eta}}, \quad (2.12)$$

Ceci mesure l'importance relative de l'induction par rapport à la dissipation *sur des échelles spatiales de l'ordre de ℓ* . Notez bien que R_m ne dépend pas de l'intensité du champ magnétique, une conséquence directe de la linéarité (en \mathbf{B}) de l'équation d'induction MHD. Notre analyse dimensionnelle indique simplement que dans la limite $R_m \gg 1$, l'induction par l'écoulement \mathbf{u} domine l'évolution de \mathbf{B} , tandis que dans la limite opposée $R_m \ll 1$, l'induction ne contribue que de manière négligeable et \mathbf{B} se dissipe tout simplement sous l'effet de la résistance Ohmique.

Travailler dans l'une ou l'autre de ces limites devrait nous simplifier grandement la vie. Si $R_m \ll 1$, alors on peut ne conserver que le second terme au membre de droite de l'éq. (2.11), dans lequel cas on a

$$\boxed{\tau = \frac{\ell^2}{\eta}}. \quad (2.13)$$

C'est le *temps de diffusion magnétique*. Il mesure le temps requis par un champ magnétique contenu dans un volume de dimensions linéaires de l'ordre de ℓ pour se dissiper. Il s'avère que pour la plupart des objets astrophysiques, ce temps caractéristique est immensément long, (voir Tableau 2.1), et même souvent plus grand que l'âge de l'Univers. Ce n'est pas que les plasmas astrophysiques soient de si bons conducteurs électriques —le cuivre à la température de la pièce conduit déjà beaucoup mieux,— mais plutôt que la taille des objets astrophysiques est vraiment... astronomique! L'omniprésence des champs magnétiques en astrophysique n'est donc pas surprenante; par exemple, tout champ magnétique à grande échelle présent à l'intérieur d'une étoile à son arrivée sur la ZAMS y serait encore aujourd'hui avec pratiquement la même intensité. Dans le cas des étoiles, le défi est souvent de reproduire leurs variations temporelles, et en particulier les cycles magnétiques se développant sur des échelles beaucoup, beaucoup plus courtes que le temps de diffusion.

La limite opposée, $R_m \gg 1$ est la limite dite de la *MHD idéale*. C'est maintenant le premier terme au membre de droite de l'éq. (2.11), qui demeure, ce qui conduit à:

$$\tau = \frac{\ell}{u_0}, \quad (2.14)$$

C'est le *temps de retournement* associé à l'écoulement \mathbf{u} . On peut déjà remarquer qu'en régime MHD idéal, la seule solution non-triviale (i.e., $\mathbf{u} \neq 0$ et $\mathbf{B} \neq 0$) qui soit stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) et pour laquelle \mathbf{B} chute à zéro à l'infini est une solution où l'écoulement est aligné avec le champ magnétique.

Le tableau 2.1 liste une série d'estimés du nombre de Reynolds magnétique (et quantités associées) pour les mêmes systèmes astrophysiques déjà considérés au tableau 1.1⁴ Le nombre

³Noter la similarité structurelle avec le nombre de Reynolds visqueux défini précédemment à la §1.2.3, la diffusivité magnétique η remplaçant la viscosité cinématique ν au dénominateur.

⁴Choix d'échelles de longueur ℓ ($\equiv L$) comme au Tableau 1.1. Vitesses caractéristiques correspondant aux cellules convectives profondes (intérieur solaire), granulation (photosphère), vent solaire (couronne et vent solaire), et turbulence (nuages moléculaires et milieu interstellaire). Tous ces chiffres, et en particulier les vitesses

Table 2.1: Propriétés de quelques systèmes et écoulements astrophysiques, bis

Système	L [km]	σ [$\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$]	η [m^2s^{-1}]	τ [yr]	u [km/s]	R_m
Intérieur stellaire	10^6	10^4	100	10^9	0.1	10^9
Atmosphère solaire	10^3	10^3	1000	10^2	1	10^6
Couronne solaire	10^5	10^6	1	10^8	10	10^{12}
Vent solaire (1 AU)	10^5	10^4	100	10^8	300	10^{11}
Nuage moléculaire	10^{14}	10^2	10^4	10^{17}	100	10^{18}
Milieu interstellaire	10^{16}	10^3	1000	10^{22}	100	10^{21}
Sphère de cuivre	10^{-3}	10^8	10^{-1}	10^{-7}	—	—

de Reynolds magnétique est gigantesque dans tous les cas, ce qui suggérerait que la limite de la MHD idéale est la seule qui soit d'intérêt. Mais ce n'est pas du tout si simple. D'un point de vue purement mathématique, la limite $R_m \rightarrow \infty$ de l'équation d'induction est *singulière* car l'ordre de la plus haute dérivée chute de un. C'est en fait une situation semblable à celle caractérisant l'équation de Navier–Stokes dans la limite inviscide $\nu \rightarrow 0$: dans la limite $\eta \rightarrow 0$, en général les solutions de l'éq. (2.9) ne tendent *pas* vers les solutions obtenues en posant *a priori* $\eta = 0$. De plus, il ne faut pas perdre de vue que la distinction entre les deux régimes physiques $R_m \ll 1$ et $R_m \gg 1$ n'est bien définie que si une valeur de R_m peut être définie de manière non-ambigue pour l'écoulement dans son ensemble, ce qui requiert qu'on puisse estimer a priori une échelle spatiale ℓ qui caractérise adéquatement les variations spatiales de l'écoulement ainsi que du champ magnétique, en tous points du domaine de solution et en tout temps. Au fil des chapitres à venir, il deviendra clair que ceci n'est pas toujours simple, ou même possible. Finalement, une analyse dimensionnelle du genre de celle effectuée ici perd tous les aspects géométriques du problème, e.g. en substituant $u_0 B$ pour $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$; on peut facilement imaginer des situations, par exemple un écoulement aligné au champ magnétique, où même un \mathbf{u} gigantesque n'a absolument aucun effet inductif sur \mathbf{B} .

Une autre quantité adimensionnelle qui s'avèrera importante plus loin est le *nombre de Prandtl magnétique*, défini comme le rapport des nombres de Reynolds magnétique sur visqueux, ou, de manière équivalente, de la viscosité cinématique sur la diffusivité magnétique:

$$P_m = \frac{\nu}{\eta} . \quad (2.15)$$

Pour bien des systèmes astrophysiques, cette quantité se retrouve nettement sous la valeur unitaire, typiquement 0.01–0.1, si les valeurs microscopiques de ces coefficients de transport sont utilisés; par contre, dans un système fortement turbulent, on s'attendrait plutôt à ce que $P_m \sim 1$.

En magnétohydrodynamique, le champ magnétique est ultimement produit par une densité de courant électrique, tel que stipulé par la Loi d'Ampère (éq. 2.5). Puisqu'on a supposé que le fluide/plasma est électriquement neutre aux échelles macroscopiques, cette densité de courant ne peut provenir que d'une vitesse de dérive \mathbf{v} entre les constituants microscopiques portant des charge électriques opposées. La densité de courant associée à une telle dérive est donnée par:

$$\mathbf{J} = n q \mathbf{v} , \quad (2.16)$$

où n et q sont les densités numériques et charges des particules en dérive. Une analyse dimensionnelle de la Loi d'Ampère permet d'obtenir l'estimé suivant pour la densité de courant associée à un champ magnétique de grandeur B variant sur une échelle spatiale d'ordre L : $|\mathbf{J}| \sim B/\mu_0 L \simeq 10^{-5} \text{ A m}^{-2}$, pour un champ magnétique de 10^{-3} T dans une sphère de rayon

turbulentes, sont des estimés grossiers arrondis au facteur 10 le plus près. Les estimés de la diffusivité magnétique pour les nuages moléculaires et le milieu interstellaire dépendent de manière sensible du taux d'ionisation, et s'en retrouvent d'autant plus approximatifs.

7×10^8 m, ces valeurs étant inspirées du soleil. Substituant cette valeur dans l'éq. (2.16) et en supposant un plasma proton+électron de densité moyenne 10^2 kg m^{-3} (encore le soleil... à la base de sa zone convective, à $r/R \simeq 0.7$), la vitesse de dérive s'en retrouve absolument minuscule, soit $|\mathbf{v}| \sim 10^{-15} \text{ m s}^{-1}$. Ceci est une conséquence directe du nombre tout à fait astronomique (aha) de porteurs de charges disponibles pour soutenir ce courant de dérive, i.e., $n \sim 10^{29} \text{ m}^{-3}$ (toujours à une profondeur $r/R \simeq 0.7$ dans l'intérieur solaire). C'est également pourquoi l'approximation MHD est tout à fait valide dans un tel contexte. L'induction, telle que décrite par le terme $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ au membre de droite de l'équation d'induction (2.9), résulte d'une variation de cette vitesse de dérive causée par l'action de la force de Lorentz sur les constituants microscopiques électriquement chargés, et forcés mécaniquement à traverser le champ magnétique pré-existant.

2.3 La force de Lorentz

La dérivation de l'éq. (2.9) a été rondement menée, en partie parce que nous avons fait disparaître le courant de Maxwell, et ce de manière plutôt cavalière. De plus, nous n'avons réglé que la première partie du programme, et en fait la partie facile. Nous devons maintenant quantifier l'action de la force magnétique sur l'écoulement \mathbf{u} ; et ceci s'avère être la partie la plus subtile de l'approximation magnétohydrodynamique.

Vous vous rappelez j'espère que la *force de Lorentz* ressentie par une particule portant une charge électrique q et se promenant à vitesse \mathbf{u} dans une région de l'espace traversée par des champs électrique et magnétique s'exprime comme:

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad [\text{N}]. \quad (2.17)$$

Considérons maintenant un élément de volume ΔV contenant un très grand nombre de particules portant cette même charge. Dans la limite du continu et pour un plasma collisionnel, la force totale par unité de volume (\mathbf{F}) agissant sur le volume sera la somme des forces agissant sur chacun de ses constituants microscopiques, divisé par le volume de l'élément en question:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{1}{\Delta V} \sum_k \mathbf{f}_k = \frac{1}{\Delta V} \sum_k q_k (\mathbf{E} + \mathbf{u}_k \times \mathbf{B}) \\ &= \left(\frac{1}{\Delta V} \sum_k q_k \right) \mathbf{E} + \left(\frac{1}{\Delta V} \sum_k q_k \mathbf{u}_k \right) \times \mathbf{B} \\ &= \varrho_e \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad [\text{N m}^{-3}], \end{aligned} \quad (2.18)$$

où la dernière égalité provient de la définition conventionnelle de la densité de charge et de la densité de courant. À ce stade, il est très tentant de simplement éliminer le terme proportionnel à \mathbf{E} , puisqu'en MHD on traite de plasmas qui globalement sont électriquement neutres, ce qui implique $\varrho_e = 0$ et donc $\varrho_e \mathbf{E} \equiv 0$ et voilà c'est terminé. Non seulement ce serait trop facile, mais de surcroît cela ferait violence à la relativité restreinte; voyons en quoi.

Commençons par prendre la divergence des deux cotés de la forme généralisée de la Loi d'Ohm (eq. 2.7). On utilise ensuite la Loi de Gauss (eq. 2.1) pour se débarrasser du terme en $\nabla \cdot \mathbf{E}$, et de la Loi de conservation de la charge électrique

$$\frac{\partial \varrho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.19)$$

pour se débarrasser du terme en $\nabla \cdot \mathbf{J}$. Le résultat final de toute cette jonglerie physico-algébrique est l'expression suivante:

$$\frac{\partial \varrho_e}{\partial t} + \frac{\varrho_e}{(\varepsilon_0/\sigma)} + \sigma \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = 0. \quad (2.20)$$

La combinaison ε_0/σ a une unité de temps, et est nommé *temps de relaxation électrostatique*, ci-après dénoté τ_e . C'est le même temps caractéristique associé à la séparation des charges

électriques dans un conducteur soudainement exposé à un champ électrique. Dans la grande majorité des conducteurs, ce temps est excessivement petit, soit de l'ordre de 10^{-18} s !! Ceci s'explique par le fait que le champ électrique s'ajuste au déplacement des charges à la vitesse de la lumière (dans le milieu en question, ce qui est plus lentement que dans le vide mais tout de même très rapidement en termes absolus). Dans un milieu conducteur au repos ($\mathbf{u} = 0$), l'expression ci-dessus s'intègre facilement pour donner:

$$\varrho_e(t) = \varrho_e(0) \exp(-t/\tau_e), \quad (2.21)$$

d'où le nom "temps de relaxation" attribué à τ_e .

Supposons maintenant que le fluide se déplace lentement, dans le sens que son temps de retournement est beaucoup plus long que τ_e ; ceci implique que le champ électrique induit évoluera sur un temps caractéristique semblable à \mathbf{u} (au mieux), et donc que la dérivée temporelle de ϱ_e peut être négligée par rapport au terme ϱ_e/τ_e dans l'éq. (2.20). On en déduit alors que

$$\varrho_e = \varepsilon_0 \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (2.22)$$

Ceci indique qu'une densité de charge électrique nette peut être maintenue dans un fluide conducteur *en mouvement*. La force électrostatique par unité de volume y étant associée, $\varrho_e \mathbf{E}$, est clairement non-nulle; cependant elle se retrouve beaucoup plus petite que la force magnétique. Ceci se vérifie facilement par analyse dimensionnelle de l'éq. (2.18), en utilisant l'éq. (2.22) pour estimer ϱ_e :

$$\varrho_e \mathbf{E} \sim \left(\frac{\varepsilon_0 u B}{\ell} \right) \left(\frac{J}{\sigma} \right) \sim \left(\frac{u \tau_e}{\ell} \right) JB, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} \sim JB, \quad (2.24)$$

où encore une fois la Loi d'Ohm a été utilisée pour exprimer \mathbf{E} en terme de \mathbf{J} , et ℓ est une échelle spatiale caractérisant les variations de l'écoulement ainsi que du champ magnétique. On en conclut que le rapport des forces électrostatique sur magnétique est de l'ordre de $u \tau_e / \ell$. Mais, on a déjà que $\tau_e \ll 1$, et de surcroît pour un écoulement non-relativiste on peut légitimement s'attendre à ce que le temps de retournement de l'écoulement, ℓ/u_0 , soit beaucoup plus grand que le temps de transit d'une perturbation électromagnétique, $\sim \ell/c \sim \tau_e$; ces deux effets se combinent pour rendre la force électrostatique absolument minuscule en comparaison à la force magnétique. Sous ces conditions, l'éq. (2.18) devient:

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad [\text{approximation MHD}]}. \quad (2.25)$$

Il ne reste qu'à introduire cette expression au membre de droite de l'équation de Navier–Stokes (1.23)... avec un préfacteur $1/\rho$ de manière à se retrouver avec une force par unité de masse plutôt que volume.

Il sera parfois utile d'exprimer différemment cette force de Lorentz. Utilisant les éqs. (2.2) et (2.5), ainsi que quelques identités du calcul vectoriel, on peut montrer que l'éq. (2.25) peut s'écrire alternativement comme

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\mu_0} \left[(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{B}^2) \right], \quad (2.26)$$

où $\mathbf{B}^2 \equiv \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$. Le premier terme au membre de droite représente une *tension magnétique*, tandis que le second prend la forme du gradient d'une *pression magnétique*.

Il ne nous reste plus qu'à régler cette fameuse question relative à la légitimité d'avoir fait sauter le courant de déplacement de la forme Maxwellienne de la Loi d'Ampère (eq. 2.4); ceci peut maintenant se justifier en notant, comme on l'a vu, que la dérivée temporelle de la densité de charge peut être négligée en régime non-relativiste. L'équation de conservation de la charge électrique (2.19) se réduit alors à

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0; \quad (2.27)$$

prenant la divergence des deux cotés de l'éq. (2.4) conduit alors à

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\varepsilon_0 \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{\partial \rho_e}{\partial t} . \quad (2.28)$$

Ceci démontre que négliger la dérivée temporelle de la densité de charge est équivalent à omettre le courant de déplacement de Maxwell dans l'éq. (2.4).

En résumé, tant que des événements électromagnétiques rapides comme la connexion ou déconnexion d'une batterie ne se produisent pas, ou n'importe quel autre phénomène transitoire produisant un fort $\partial \rho_e / \partial t$, sous l'approximation magnétohydrodynamique les énoncés suivants sont tous équivalents:

- Les écoulements sont non-relativistes;
- La force électrostatique est négligeable en comparaison à la force magnétique;
- Le courant de déplacement de Maxwell peut être omis.

Tout ceci, évidemment, résultant de l'utilisation de la Loi d'Ohm, et ne s'appliquant donc qu'à des plasma collisionnels.

Dans bien des systèmes astrophysiques, le champ magnétique domine la dynamique et l'énergétique; en l'absence de forçage externe, un tel système devrait donc évoluer vers un état d'équilibre caractérisé par une force de Lorentz nulle:

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0 . \quad (2.29)$$

De manière générale, cette contrainte peut être satisfaite de deux manières physiquement distinctes (et excluant évidemment la solution triviale $\mathbf{B} = 0$): La première est d'avoir $\mathbf{J} = 0$ dans tout le système; la Loi d'Ampère devient alors $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, ce qui implique que \mathbf{B} peut être exprimé comme le gradient d'un potentiel. Un tel champ magnétique est par conséquent appelé *champ potentiel*. La contrainte solénoïdale $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ conduit alors à une équation de Laplace:

$$\mathbf{B} = \nabla \varphi , \quad \nabla^2 \varphi = 0 \quad [\text{Champ potentiel}] . \quad (2.30)$$

La seconde possibilité permet la présence de courants électriques, mais tant que ceux-ci sont dirigés parallèlement au champ magnétique:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B} , \quad (2.31)$$

où le facteur numérique α peut varier d'une ligne de champ à l'autre, avec la position, ou même en fonction de la valeur locale de \mathbf{B} .

Imaginons maintenant une situation, par exemple le volume défini par l'extérieur d'une étoile magnétisée, à la surface de laquelle \mathbf{B} est donné, et où la tâche consiste à construire un champ magnétique à force-nulle. Supposer que ce champ est potentiel conduit à des reconstructions qui sont très différentes de champs construits en adoptant plutôt l'Ansatz correspondant à l'éq. (2.31). On notera en particulier (sans le démontrer car les maths requises sont ardues) que pour une condition frontière donnée, le champ potentiel est unique et représente l'état d'énergie magnétique minimal compatible avec la condition limite, par rapport aux multiples solutions possibles sous (2.31), et ce même sans contraintes sur la spécification de $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{B})$ dans le domaine. Ceci représente une contrainte importante à la quantité d'énergie qui peut être extraite d'un champ magnétique par n'importe quel processus magnétohydrodynamique.

2.4 Exemple: cisaillement d'un champ poloidal

Des dynamos stellaires aux disques d'accrétion, une situation de grand intérêt en astrophysique est l'induction d'un champ magnétique longitudinal via le cisaillement d'un champ magnétique

poloidal traversant une sphère ou un disque de fluide électriquement conducteur en état de rotation différentielle. Nous considérerons ici la première de ces géométries. Travaillant conséquemment en coordonnées sphériques polaires (r, θ, ϕ) et supposant axisymétrie ($\partial/\partial\phi \equiv 0$) pour le champ magnétique et la rotation différentielle, on peut exprimer l'écoulement comme:

$$\mathbf{u}(r, \theta) = r \sin \theta \Omega(r, \theta) \hat{\mathbf{e}}_\phi , \quad (2.32)$$

où la vitesse angulaire de rotation est supposé indépendante du temps ($\partial/\partial t = 0$); dans ce régime dit *cinématique*, seule l'équation d'induction est solutionnée, avec \mathbf{u} donné, sans se préoccuper de la dynamique de l'écoulement. Dans une telle situation on aura:

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} , \quad (2.33)$$

puisque $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ en vertu de l'éq. (2.32). Pour un champ magnétique axisymétrique, et avec \mathbf{u} orienté dans la direction longitudinale, seule les composantes r et θ de cette expression sont identiquement nulles. Il peut paraître surprenant qu'un terme comme $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ ait une composante ϕ non-nulle si \mathbf{u} n'a qu'une composante ϕ qui ne dépend pas de ϕ ; il faut se rappeler ici que $\mathbf{B} \cdot \nabla$ est un *opérateur différentiel* agissant sur une quantité vectorielle (voir l'Annexe A pour la forme explicite de cet opérateur en coordonnées sphériques).

Si on suppose maintenant que l'on travaille dans le régime de la MHD idéale ($\eta = 0$ dans l'éq. (2.9), alors celle-ci se réduit à:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = 0 , \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial t} = 0 , \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial t} = r \sin \theta [B_r \hat{\mathbf{e}}_r + B_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta] \cdot \nabla \Omega . \quad (2.36)$$

Les éqs. (2.34)—(2.35) indiquent que le champ poloidal demeure constant, ce qui implique que le membre de droite de l'éq. (2.36) est également constant et s'intègre donc directement:

$$B_\phi(r, \theta, t) = B_\phi(r, \theta, 0) + \left(r \sin \theta [B_r \hat{\mathbf{e}}_r + B_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta] \cdot \nabla \Omega \right) t . \quad (2.37)$$

La composante toroidale du champ magnétique croit donc linéairement en fonction du temps, à un taux qui dépend du gradient rotationnel local et de l'intensité de la composante poloidale. La composante toroidale est donc induite par le cisaillement de la composante poloidale, cette dernière conservant son intensité initiale malgré ce cisaillement, comme l'expriment les éqs. (2.34)—(2.35).

On notera que dans une telle configuration axisymétrique, les seules solutions stationnaires ($\partial/\partial t = 0$) possibles sont celles où

$$[B_r \hat{\mathbf{e}}_r + B_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta] \cdot \nabla \Omega = 0 , \quad (2.38)$$

i.e., la vitesse angulaire doit avoir une valeur constante sur chaque surface de révolution tracée par une ligne de champ poloidale. C'est le *théorème de Ferraro*.

Un ingrédient essentiel au calcul de l'évolution de B_ϕ via l'éq. (2.37) est le profil de rotation $\Omega(r, \theta)$. La Figure 2.1A montre sur le diagramme de gauche une paramétrisation du profil de rotation interne du soleil, calibré via inversion héliosismique. Cette paramétrisation capture les principaux aspects des profils réels détaillés, soit (1) Une enveloppe convective ($r/R > 0.7$) où le cisaillement est principalement latitudinal, (2) un coeur radiatif tournant comme un corps solide, et (3) une transition continue entre ces deux régions via une mince couche de cisaillement centrée sur l'interface coeur-enveloppe (trait en tirets), et appelée *tachocline*. Un tel profil de rotation différentielle est plutôt complexe, dans le sens qu'il est caractérisé par trois régions de cisaillements se recoupant partiellement: un fort cisaillement radial positif (i.e., $\partial\Omega/\partial r > 0$) dans la partie équatoriale de la tachocline, un cisaillement radial négatif ($\partial\Omega/\partial r <$

0) encore plus intense dans la tachocline à hautes latitudes, et un cisaillement latitudinal positif ($\partial\Omega/\partial\theta > 0$) significatif dans toute la zone convective, chutant à zéro dans la tachocline. À mi-latitudes, ce cisaillement latitudinal est comparable en magnitude au cisaillement radial à l'équateur, dans le cas d'une tachocline d'épaisseur $w/R = 0.05$, soit la limite supérieure établie par l'héliosismologie.

La Figure 2.1A montre également une série de lignes de champ magnétique pour un champ poloidal axisymétrique de type dipolaire, du genre de ce à quoi on pourrait s'attendre dans un intérieur stellaire, et cohérent avec celui observé à la surface du soleil. La Figure 2.1B montre le champ toroidal produit par le cisaillement de ce champ poloidal, supposé d'amplitude 10^{-4} T, par la rotation différentielle pendant une durée de 10 ans, tel que produit par l'éq. (2.37) à partir d'un champ purement poloidal ($B_\theta = 0$). Le champ toroidal se retrouve concentré dans les régions où le cisaillement est le plus intense, mais la géométrie du champ poloidal joue évidemment aussi. On remarquera que le cisaillement d'un champ dipolaire, donc antisymétrique par rapport au plan équatorial, par une rotation différentielle symétrique par rapport à ce même plan, produit un champ toroidal lui aussi antisymétrique par rapport à l'équateur, en accord avec les observations de polarités magnétique des taches solaires. L'intensité du champ toroidal atteint ici ± 0.2 T, également en accord avec les mesures de champ magnétique dans les taches solaires. On reviendra sur le lien physique entre les taches solaires et le champ toroidal interne dans un chapitre ultérieur.

Bien que notre solution ait été obtenue dans le régime cinématique, connaissant la forme de la composante toroidale induite, il est possible de calculer la force de Lorentz associée au champ complet. Dans le cas d'un champ magnétique axisymétrique, la composante- ϕ de la force de Lorentz est également axisymétrique et se réduit à:

$$[\mathbf{F}]_\phi = \frac{1}{\mu_0 r \sin\theta} [B_r \hat{\mathbf{e}}_r + B_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta] \cdot \nabla (r \sin\theta B_\phi). \quad (2.39)$$

La distribution spatiale de cette quantité est illustrée à la Figure 2.1C. Comparant ceci à la rotation différentielle en A, on remarquera que la force de Lorentz tend à s'opposer au cisaillement: dans la tachocline polaire, le bas de la zone convective est accéléré ($[\mathbf{F}]_\phi > 0$), tandis que le haut de la zone stable est déccéléré ($[\mathbf{F}]_\phi < 0$). C'est là une propriété générale des interactions entre fluides et champ magnétiques dans le régime MHD: la force de Lorentz tend à s'opposer aux écoulements inductifs. Pour comprendre pourquoi, on doit considérer l'énergétique de ces interactions.

2.5 L'énergie magnétique

Dans le cas du cisaillement d'un champ poloidal que nous venons d'examiner, l'énergie magnétique augmente quadratiquement dans le temps, car B_ϕ croît (selon l'éq. (2.36), tandis que la composante poloidal demeure constante (éqs. (2.34)–(2.36)). D'où vient cette énergie ? La seule source énergétique ici est l'énergie cinétique de la rotation, donc il y doit y avoir transfert énergétique de l'écoulement vers le champ magnétique. Il existe d'autres situations astrophysiques où le processus inverse a lieu, i.e., le champ magnétique peut agir comme un réservoir d'énergie dans lequel peuvent puiser les écoulements. Plusieurs des phénomènes les plus énergétiques observés en astronomie sont associés à un tel transfert énergétique entre un champ magnétique et le plasma environnant. Voyons comment quantifier ce processus.

On considère un volume V contenant un plasma magnétisé, comme par exemple à la section précédente: une sphère de fluide magnétisée flottant dans le vide. Commençons par prendre le produit scalaire du champ magnétique \mathbf{B} avec les membres de gauche et droite de l'équation d'induction (2.9); on intègre ensuite sur V , et après un peu de jonglerie avec les identités du calcul vectoriel et une utilisation judicieuse du théorème de la divergence on arrive éventuellement à

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} dV = - \oint_S (\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS - \int_V (\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}) dV - \int_V \sigma^{-1} \mathbf{J}^2 dV, \quad (2.40)$$

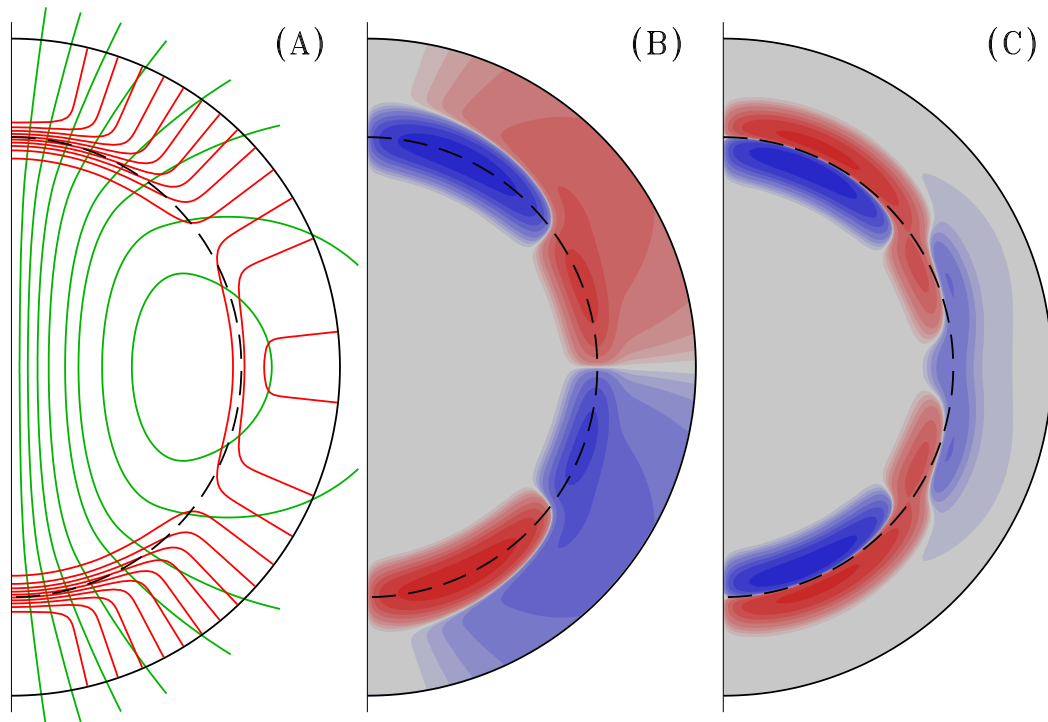


Figure 2.1: Induction d'un champ magnétique toroidal via le cisaillement d'un champ poloidal dipolaire par une rotation différentielle de type solaire. La partie A montre des isocontours de la fréquence de rotation $\Omega(r, \theta)/2\pi$ (contours rouges, avec espacement de 10 nHz; en surface l'équateur tourne ici à 460.7 nHz, et les pôles à 329.2 nHz). Les lignes de champ magnétique d'un champ poloidal dipolaire sont tracés en vert, et l'arc de cercle en tirets indique l'interface coeur-enveloppe. La partie B montre les isocontours du champ toroidal B_ϕ , avec la graduation de bleu/rouge indiquant les valeurs négatives/positives respectivement, tel que calculé via l'éq. (2.37) pour $t = 10$ yr. Ce champ toroidal atteint ± 0.2 T ici, et l'espacement des contours est de 0.02 T. La partie C montre des isocontours de la composante- ϕ de la force de Lorentz associée au champ magnétique total, poloidal+toroidal.

où $\hat{\mathbf{n}}$ est un vecteur unitaire pointant extérieurement à la surface S délimitant le volume V , et \mathbf{S} est le *flux de Poynting*:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (2.41)$$

Examinons un à un les différents termes apparaissant dans cette expression. Le terme au membre de gauche n'est que le taux de variation de l'énergie magnétique dans sa définition habituelle:

$$\mathcal{E}_B = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathbf{B}^2 dV. \quad (2.42)$$

la quantité $\mathbf{B}^2/2\mu_0$ décrivant la densité d'énergie magnétique. Au membre de droite maintenant; le premier terme est le flux de Poynting intégré sur les frontières du domaine, et décrit donc la quantité nette d'énergie électromagnétique entrant (intégrant < 0) ou sortant (intégrant > 0) du volume V . Ce terme sera évidemment nul en l'absence de champs électrique ou magnétique aux frontières. De même, et en l'absence de *sources* électromagnétiques à l'infini, si on laisse le volume d'intégration tendre vers l'infini, ce terme surfacique tombera toujours à zéro: dS croît en r^2 , mais \mathbf{E} décroît en r^{-2} au mieux (si le système porte une charge électrique nette), et \mathbf{B} décroît en r^{-3} au mieux (pour un dipole magnétique), et donc $\mathbf{S} \propto r^{-5}$ au mieux; conséquemment, l'intégrand dans l'intégrale surfacique chute au moins en r^{-3} , et très probablement plus rapidement, dans la limite $r \rightarrow \infty$.

Le second terme au membre de droite de l'éq. (2.40) représente le travail exercé par la force de Lorentz sur l'écoulement dans l'ensemble du volume. Ce terme peut être soit négatif, soit positif. Dans le contexte de l'accélération ou du confinement magnétique des vents stellaires ou galactiques, on aura $\mathbf{u} \cdot \mathbf{F} > 0$, tandis que dans le cadre des processus dynamos on sera plutôt dans une situation où $\mathbf{u} \cdot \mathbf{F} < 0$. Dans l'exemple considéré à la section précédente, c'est donc le travail effectué par l'écoulement zonal (éq. (2.32)) contre la composante zonale de la force de Lorentz (éq. (2.39)), plus spécifiquement sa composante en tension, qui permet (énergétiquement parlant) l'amplification de la composante magnétique toroidale. Ceci représente un processus d'amplification potentiellement très intéressant, car que ce soit dans le cas d'une étoile, d'un disque d'accrétion, ou d'une galaxie, l'énergie cinétique associée à la rotation est absolument gigantesque.

Le troisième terme au membre de droite de l'éq. (2.40) est toujours négatif; il décrit la destruction du champ magnétique sous l'influence de la dissipation Ohmique de la densité de courant agissant comme la seule source du champ en MHD. Ceci nous mène naturellement à...

2.6 Le chauffage de Joule

En présence d'une conductivité électrique finie, le chauffage volumique associé à la dissipation de la densité de courant électrique doit être inclus au membre de droite de l'équation de conservation de l'énergie, au même titre que le chauffage volumique dû à la dissipation visqueuse. La *fonction de chauffage de Joule* est la quantité requise:

$$\phi_B = \frac{\eta}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B})^2 \quad [\text{J m}^{-3} \text{s}^{-1}]. \quad (2.43)$$

Notons que, comme avec la dissipation visqueuse, dans la grande majorité des situations d'intérêt en astrophysique, le chauffage de Joule ne contribue pas de manière significative au bilan énergétique. La dissipation de l'énergie magnétique aux échelles globales, quand elle se produit, est souvent causée par des effets dynamiques qui sont beaucoup plus efficaces, comme la reconnexion magnétique, et ce sont les temps caractéristiques associés à ces processus dynamiques qui contrôlent le taux de dissipation de l'énergie. Il n'en demeure pas moins qu'aux échelles dissipatives du système, ultimement ce sont bel et bien la viscosité et la résistivité qui font le travail.

2.7 Le théorème d'Alfvén

Revenons à la forme différentielle de la Loi de Faraday:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.44)$$

Considérons une surface S fixe dans l'espace et délimitée par un contour γ . On projette l'expression ci-dessus sur un vecteur unitaire normal à S , et on applique le théorème de Stokes au membre de gauche de l'expression en résultant:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \oint_\gamma \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS. \quad (2.45)$$

La surface S est tout à fait arbitraire à ce stade; si elle est fixe dans l'espace, alors \int_S et $\partial/\partial t$ commutent et on retombe sur la forme intégrale familière de la Loi de Faraday:

$$\oint_\gamma \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS, \quad (2.46)$$

avec le membre de gauche correspondant à la force électromotrice, et le membre de droite au taux de variation du flux magnétique (Φ_B) à travers S :

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS. \quad (2.47)$$

Supposons maintenant que S est une surface matérielle se déplaçant avec le fluide. Le résultat ci-dessus tient toujours, si (1) la dérivée partielle $\partial/\partial t$ est remplacée par la dérivée Lagrangienne au membre de droite de l'éq. (2.46); et (2) on utilise la Loi d'Ohm pour remplacer \mathbf{E} par \mathbf{J}/σ , ce qui est légal puisque chaque point du contour matériel γ se déplace à la même vitesse que le fluide, par définition. Donc,

$$\frac{1}{\sigma} \oint_\gamma \mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{D}{Dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS. \quad (2.48)$$

De toute évidence, dans la limite MHD idéale d'un conducteur parfait ($\sigma \rightarrow \infty$), on aura

$$\frac{D}{Dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0. \quad (2.49)$$

Ce résultat indique que dans le régime de la MHD idéale ($\sigma \rightarrow \infty$, ou encore $R_m \rightarrow \infty$), le flux magnétique traversant une surface quelconque est une quantité conservée durant le transport (et/ou déformation) de cette surface par l'écoulement. C'est le *théorème d'Alfvén*. Ce théorème peut être exprimé sous une forme physiquement équivalente via le théorème de Stokes, en terme de la circulation Γ du potentiel vecteur associé au champ magnétique:

$$\frac{D}{Dt} \oint_\gamma \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0. \quad (2.50)$$

On notera en particulier que dans la limite d'une surface infinitésimale percée par une seule ligne de champ magnétique, une conséquence incontournable du théorème d'Alfvén est que la ligne de champ magnétique doit se déplacer avec le fluide. L'idée est illustrée schématiquement à la Figure 2.2. Ce résultat tient pour toute ligne de champ magnétique encerclée par un contour matériel. On dit que le champ magnétique est "gelé" dans le fluide. Les lignes de vorticité se comportent de la même façon dans la limite inviscide $\nu \rightarrow 0$.

Le théorème d'Alfvén s'applique au champ magnétique, qui est un champ vectoriel sol noidal, dans le sens que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$; on peut en fait montrer, purement mathématiquement, que tout

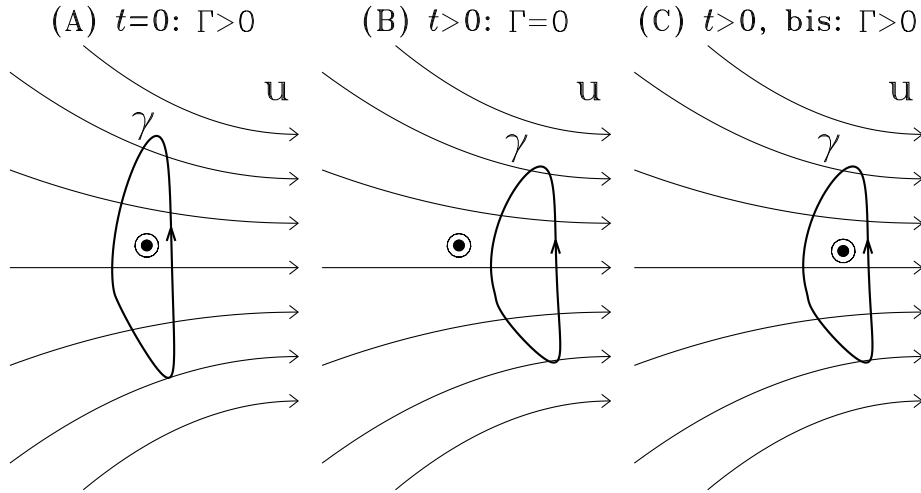


Figure 2.2: En (A) Un contour matériel γ délimite une surface matérielle percée par une seule ligne de champ magnétique sortant de la page (indiquée ici par un “ \odot ”). La circulation Γ du champ — et donc le flux magnétique via le théorème de Stokes — est ici > 0 . En (B) le contour s’est déplacé vers la droite, de manière telle que la ligne de champ magnétique ne le traverse plus, donc la circulation et le flux magnétique sont maintenant tous les deux nuls. Ceci est exclu par l’éq. (2.50); on doit en conclure que la ligne de champ magnétique a dû se déplacer avec le fluide, comme illustré en (C).

champ solénoïdal transporté par un écoulement \mathbf{u} est sujet au soi-disant théorème cinématique, stipulant que:

$$\frac{D}{Dt} \int_{S_m} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_m} \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (2.51)$$

La quantité entre parenthèses carrées au membre de droite sera nulle en vertu de notre équation d’induction magnétique en régime idéal (i.e., avec $\eta = 0$); et le membre de gauche est la dérivée Lagrangienne du flux magnétique. Et c’est tout.

Pensant plus physiquement que mathématiquement, on peut aussi comprendre le théorème d’Alfvén en se rappelant de ce qui est vraiment transporté par l’écoulement \mathbf{u} : c’est la densité de courant \mathbf{J} étant la source du champ magnétique tel que dicté par l’éq. (2.5). Cette densité de courant, on l’a vu, est causée par un très faible courant de dérive entre les constituants microscopiques de charge électrique opposée. En l’absence de résistance Ohmique, ces courants se déplacent avec le plasma sans atténuation, et donc le champ magnétique devra en faire de même. Et voilà, CQFD, comme le disait ce bon vieux Jules.

Comme les écoulements astrophysiques ont typiquement $R_m \gg 1$ (viz. le Tableau 2), on peut s’attendre à ce que le théorème d’Alfvén soit d’une applicabilité très générale. C’est le cas, et on peut déjà en apprendre beaucoup sur les champs magnétiques stellaires via une simple application de ce théorème.

Considérons une étoile contenant un champ magnétique dipolaire aux grandes échelles spatiales. C’est le cas du soleil, dont le dipole magnétique est de l’ordre de 10^{-3} T, et des étoiles dites Ap et Bp, où les champs magnétiques peuvent approcher la dizaine de Tesla. La Figure 2.3 illustre schématiquement ce qui se passe lorsque qu’une étoile comme le soleil finit par se contracter pour devenir une naine blanche, une fois son carburant nucléaire épuisé. En supposant que le champ magnétique soit gelé dans le fluide, dans le sens du théorème d’Alfvén, la conservation du flux magnétique traversant le plan équatorial de l’étoile implique que

$$B_{\odot} \pi R_{\odot}^2 = B_{\text{NB}} \pi R_{\text{NB}}^2 \quad \rightarrow \quad \frac{B_{\text{NB}}}{B_{\odot}} = \left(\frac{R_{\odot}}{R_{\text{NB}}} \right)^2. \quad (2.52)$$

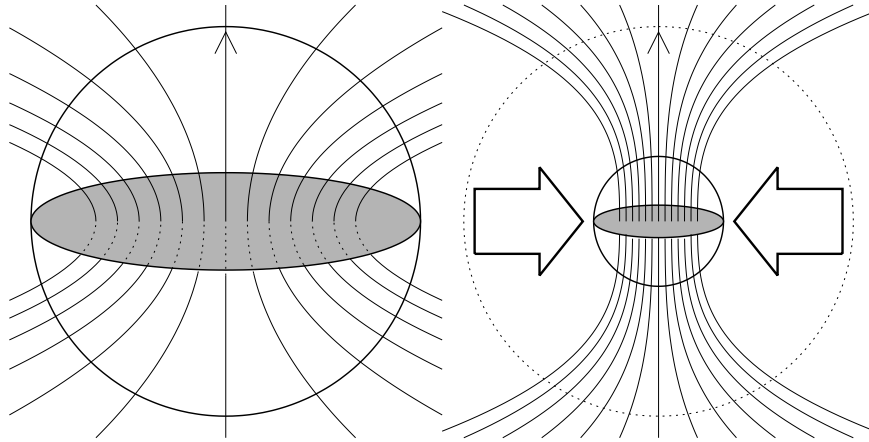


Figure 2.3: Amplification du champ magnétique via conservation du flux, lors de l'effondrement d'une étoile de type solaire vers le stade de naine blanche. On suppose un champ initial de géométrie dipolaire, conduisant à un flux net à travers le plan équatorial de l'étoile (en gris). Les deux diagrammes ne sont pas à la même échelle: en réalité une naine blanche a un rayon ~ 100 fois plus petit que le soleil.

Pour le soleil on a $R_{\odot} = 7 \times 10^8$ m et $B_{\odot} \sim 0.001$ T, et pour une naine blanche typique $R_{\text{NB}} \simeq 0.01 R_{\odot}$, ce qui conduit à $B_{\text{NB}} \sim 10$ T. Cette valeur, en apparence gigantesque, tombe confortablement dans la fourchette des champs magnétiques détectés dans les naines blanches, soit 1–100 T. Notons cependant qu'une faible fraction ($\lesssim 10\%$) de naines blanches présentent des champs magnétiques pouvant aller jusqu'à 100 kT; ces naines blanches magnétiquement extrêmes pourraient fort bien être les descendantes des étoiles Ap et Bp.

L'énergétique de ce processus d'amplification du champ magnétique mérite qu'on s'y attarde un peu. Comme $V \propto R^3$, alors $V_{\text{NB}}/V_{\odot} = (R_{\text{NB}}/R_{\odot})^3$; Pour simplifier le calcul on considère que le champ magnétique est constant dans le volume de l'étoile; en vertu des eqs. (2.42) et (2.52) on trouve $E_{\text{NB}}/E_{\odot} = R_{\odot}/R_{\text{NB}} \simeq 100 \gg 1$; d'où vient toute cette énergie ? Ultimement du potentiel gravitationnel, évidemment, mais la manière dont ce transfert opère passe par l'écoulement radial associé à l'effondrement. Cet écoulement devra effectuer un travail contre la force de Lorentz, cette fois principalement sa composante de pression magnétique.

Ce phénomène d'amplification magnétique se produit également lors de la formation des étoiles, les nuages protostellaires étant toujours magnétisés à un certain degré. Dans ce genre de situation, où la gravité est beaucoup plus faible que dans le cas de l'effondrement d'une étoile en fin de vie, on peut calculer que la pression magnétique atteint un point tel qu'elle peut stopper le processus d'effondrement du nuage; comment se débarrasser du champ magnétique demeure un problème majeur dans la théorie de la formation des étoiles.

2.8 Ondes magnétohydrodynamiques

La présence d'une force de Lorentz dans un fluide magnétisé a également de profondes conséquences au niveau des types d'ondes qui peuvent se propager —et propager de "l'information"— dans le fluide. Dans un fluide astrophysique non-magnétisé (si un tel fluide pouvait exister), on devrait considérer (1) les ondes sonores, où la pression agit comme force de rappel (voir §1.3); (2) les ondes de gravité, où la gravité agit comme force de rappel (un peu comme les vagues à la surface de l'eau); et (3) les ondes de Rossby, où la force de Coriolis agit comme force de rappel (voir §1.4). Il s'avère que la force de Lorentz introduit effectivement non pas une, mais deux forces de rappel. De plus, ces forces modifient, et parfois de manière complexe, le comportement des autres

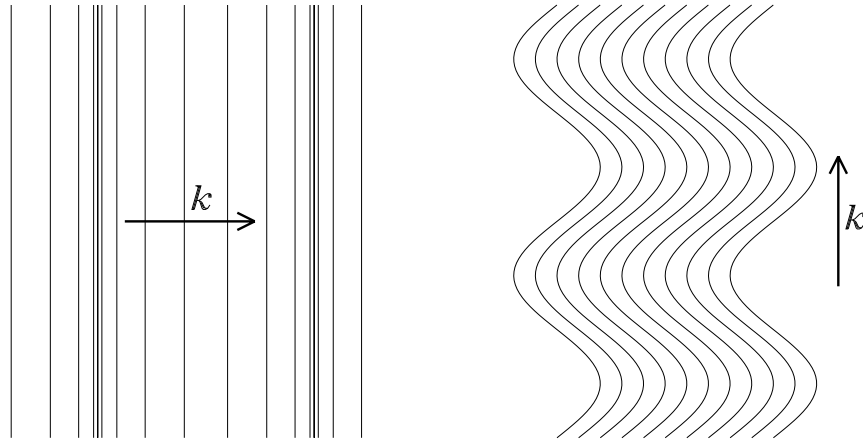


Figure 2.4: Les modes fondamentaux de propagation ondulatoire dans un fluide compressible magnétisé, illustrés ici dans le cas d’un champ magnétique uniforme. En (A), une onde magnétosonique, et en (B) une onde d’Alfvén. L’orientation du vecteur d’onde \mathbf{k} indique que le mode magnétosonique est une onde longitudinale, tandis que le mode d’Alfvén est une onde transversale. En présence d’un plasma “chaud”, i.e. où la densité d’énergie interne du plasma est comparable à sa densité d’énergie magnétique, le mode magnétosonique se développe en deux modes dits “rapide” et “lent”, selon la phase relative des perturbations en pression gazeuse et magnétique (voir texte).

types d’ondes susmentionnées, conséquence incontournable de la nonlinéarité des équations de la magnétohydrodynamique.

Une perturbation de la pression magnétique peut se propager sous la forme d’une onde longitudinale, un peu comme une onde sonore. La Figure 2.4A illustre schématiquement ce type d’*onde magnétosonique*. Ces ondes se séparent en deux sous-classes, en fonction de la phase relative existant entre les perturbations en pression gazeuse et magnétique; si ces deux perturbations sont en phase, alors la force de rappel est maximale, produisant le mode magnétosonique dit *rapide*, tandis que si ces deux perturbations sont complètement déphasées on parle du mode magnétosonique *lent*. De plus, la tension magnétique introduit une force de rappel qui permet la propagation d’une perturbation transverse, un peu comme sur une corde de guitare, tel qu’illustré sur la Fig. 2.4B. Ces ondes sont appelées *ondes d’Alfvén*.

Il s’agit maintenant de quantifier un peu tout ça. L’idée sera de linéariser les équations MHD, comme nous l’avons fait à la section §1.3.1, mais en conservant cette fois la tridimensionalité des quantités perturbées. L’état de référence sera de nouveau un fluide au repos ($\mathbf{u}_0 = 0$) à pression p_0 et densité ϱ_0 toutes deux constantes, et traversé par un champ magnétique uniforme \mathbf{B}_0 . Travaillant en régime MHD idéal et inviscide ($\eta = 0$ et $\nu = 0$), les équations à l’ordre 1 prennent alors la forme:

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial t} = -\varrho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1, \quad (2.53)$$

$$\varrho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -c_s^2 \nabla \varrho_1 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0, \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0). \quad (2.55)$$

On a de plus supposé ici que la perturbation est adiabatique, ce qui a déjà permis d’éliminer p_1 via la relation $p_1 = c_s^2 \varrho_1$, avec $c_s^2 = \gamma p_0 / \varrho_0$ (voir §1.3.1 au besoin...). La forme relativement simple de ces équations linéarisées tient du fait qu’ici l’état de référence est supposé statique

($\mathbf{u}_0 = 0$) et uniforme en \mathbf{B}_0 ; sinon les membres de droite des expressions ci-dessus seraient passablement plus riches en termes supplémentaires. Il est encore possible de combiner tout ça en une équation d'onde, mais l'algèbre (vectorielle) est un peu fastidieuse. Le prélude consiste à définir la *vitesse d'Alfvén*:

$$\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{\mu_0 \varrho_0}} . \quad (2.56)$$

Je vous laisse vérifier que le membre de droite a vraiment les dimensions d'une vitesse. Il s'agit ensuite de prendre la dérivée temporelle de (2.54); ceci fera apparaître des dérivées temporelles de \mathbf{B}_1 et ϱ_1 au membre de droite; ces dérivées peuvent être remplacées par les membres de droite des éqs. (2.53) et (2.54). On en arrive ainsi à une forme d'équation d'onde pour \mathbf{u}_1 , équivalent MHD de l'éq. (1.77) et s'y réduisant dans la limite $\mathbf{B}_0 \equiv \mathbf{u}_A \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_1) + [\nabla \times (\nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_A))] \times \mathbf{u}_A . \quad (2.57)$$

L'état de référence étant uniforme, on peut rechercher des solutions ayant la forme d'ondes planes, i.e.,

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_1 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] . \quad (2.58)$$

où \mathbf{U}_1 est l'amplitude (vectorielle et complexe) de la perturbation en vitesse. Substituant cette expression dans l'éq. (2.57), on trouve:

$$\omega^2 \mathbf{U}_1 = c_s^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1) \mathbf{k} - \mathbf{u}_A \times \{ \mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times (\mathbf{U}_1 \times \mathbf{u}_A)] \} . \quad (2.59)$$

On utilise maintenant l'identité vectorielle $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ pour développer le second terme au membre de droite de (2.59), on en arrive (éventuellement..) à la relation de dispersion suivante:

$$\omega^2 \mathbf{U}_1 = (c_s^2 + u_A^2) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1) \mathbf{k} + \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{k} [(\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{k}) \mathbf{U}_1 - (\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{U}_1) \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1) \mathbf{u}_A] . \quad (2.60)$$

où $u_A^2 \equiv \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{u}_A$. L'idée générale à ce stade serait de solutionner cette relation de dispersion dans l'hyperplan $[\omega, \mathbf{k}]$ pour un c_s et \mathbf{u}_A considérés connus. C'est possible mais c'est du sport! Le résultat dépend évidemment de manière assez complexe des angles entre le vecteur de propagation \mathbf{k} , l'orientation du champ magnétique dans l'état de référence \mathbf{B}_0 , et l'orientation de la perturbation \mathbf{U}_1 . Il sera instructif de considérer en premier lieu quelques cas limites qui sont plus faciles à traiter et interpréter.

2.8.1 Cas 1: $\mathbf{U}_1 \parallel \mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$

On voit déjà qu'il s'agira ici d'une onde longitudinale, puisque $\mathbf{U}_1 \parallel \mathbf{k}$. Sous ces conditions on a $\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{k} = u_A k$, $\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{U}_1 = u_A U_1$, et $\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1 = U_1 k$. L'équation (2.60) se réduit alors à:

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 , \quad (2.61)$$

soit la relation de dispersion pour une onde acoustique pure. Une telle onde peut donc se propager le long d'une ligne de champ magnétique sans ressentir la présence de ce dernier. On obtient d'ailleurs le même résultat en posant directement $u_A = 0$ dans l'éq. (2.60).

2.8.2 Cas 2: $\mathbf{U}_1 \parallel \mathbf{k}$, $\mathbf{U}_1 \perp \mathbf{B}_0$

Il s'agit ici d'une situation correspondant à la Figure 2.4B, où cette fois l'onde est longitudinale et se propage dans une direction perpendiculaire au champ magnétique de l'état de référence. On a alors $\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{k} = 0$, $\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{U}_1 = 0$, et $\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1 = U_1 k$; Ce n'est que le premier terme au membre de droite de l'éq. (2.60) qui se retrouve non-nul, et on a alors:

$$\omega^2 = (c_s^2 + u_A^2) k^2 . \quad (2.62)$$

La vitesse de phase de cette onde est $\sqrt{c_s^2 + u_A^2} > u_A$; c'est le mode magnéto-sonique rapide, dont la vitesse de phase est clairement plus grande que la vitesse d'Alfvén, d'où son qualificatif "rapide".

2.8.3 Cas 3: $\mathbf{U}_1 \perp \mathbf{k}$, $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$

On se tourne maintenant vers la situation illustrée à la Figure 2.4A, soit une onde transverse se propageant dans la direction du champ magnétique de l'état de référence. On a donc $\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{k} = u_A k$, $\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{U}_1 = 0$, et $\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1 = 0$; seul le second terme au membre de droite de l'éq. (2.60) demeure non-nul, ce qui conduit à:

$$\omega^2 = u_A^2 k^2 . \quad (2.63)$$

Cette onde transverse se déplace à une vitesse de phase égale à la vitesse d'Alfvén; sa vitesse de propagation est donc directement déterminée par l'amplitude du champ magnétique et la densité du fluide.

2.8.4 Cas 4: orientations arbitraires

Examinons maintenant un cas plus général. On supposera le champ magnétique \mathbf{B}_0 de l'état de référence aligné à l'axe- z ; le vecteur de propagation \mathbf{k} à un angle θ de \mathbf{B}_0 ; et une perturbation \mathbf{U}_1 orientée arbitrairement par rapport à ces deux vecteurs. Spécifiquement:

$$\mathbf{u}_A = u_A \hat{\mathbf{e}}_z , \quad (2.64)$$

$$\mathbf{k} = k(\sin \theta \hat{\mathbf{e}}_x + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_z) , \quad (2.65)$$

$$\mathbf{U}_1 = U_{1x} \hat{\mathbf{e}}_x + U_{1y} \hat{\mathbf{e}}_y + U_{1z} \hat{\mathbf{e}}_z . \quad (2.66)$$

Contrairement aux trois cas traités précédemment, l'équation de dispersion a maintenant trois composantes non-triviales:

$$U_{1x}(-\omega^2 + k^2 u_A^2 + k^2 c_s^2 \sin^2 \theta) + U_{1z}(k^2 c_s^2 \sin \theta \cos \theta) = 0 , \quad (2.67)$$

$$U_{1y}(-\omega^2 + k^2 u_A^2 \cos^2 \theta) = 0 , \quad (2.68)$$

$$U_{1x}(k^2 c_s^2 \sin \theta \cos \theta) + U_{1z}(-\omega^2 + k^2 c_s^2 \cos^2 \theta) = 0 . \quad (2.69)$$

L'équation (2.68) donne immédiatement:

$$\frac{\omega}{k} = u_A \cos \theta , \quad (2.70)$$

ce qui retombe bien à l'éq. (2.63) pour $\theta = 0$, comme il se doit. Il s'agit donc ici d'une onde de type Alfvénique.

Les deux autres équation de dispersion sont couplées; on les réécrit sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + k^2 u_A^2 + k^2 c_s^2 \sin^2 \theta & k^2 c_s^2 \sin \theta \cos \theta \\ k^2 c_s^2 \sin \theta \cos \theta & -\omega^2 + k^2 c_s^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1x} \\ U_{1z} \end{pmatrix} = 0 . \quad (2.71)$$

Pour garantir l'existence d'une solution, on doit poser le déterminant de cette matrice égal à zéro, ce qui conduit à la relation de dispersion:

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}(c_s^2 + u_A^2) \pm \frac{1}{2}[(c_s^2 + u_A^2)^2 - 4c_s^2 u_A^2 \cos^2 \theta]^{1/2} . \quad (2.72)$$

Poser $\theta = \pi/2$ nous ramène bien à l'éq. (2.62) si on conserve la racine positive, indiquant qu'on a affaire ici à une onde magnétosonique rapide. L'onde magnétosonique lente émerge finalement de l'analyse: elle correspond à la racine négative, et ne peut se propager que si θ diffère d'un multiple de $\pi/2$. OUUUF !!

Les trois modes ondulatoires MHD —magnétosonique lent, magnétosonique rapide, et Alfvén— forment une base orthogonale, qui peut être utilisée pour représenter toute perturbation temporelle d'un fluide magnétisé. Notons finalement que contrairement aux ondes magnétosoniques rapide et lente, l'onde d'Alfvén peut se propager dans un fluide incompressible. C'est donc souvent ce type d'onde MHD qui dominera dans des situations où le nombre de Mach $\ll 1$.

2.9 Le potentiel vecteur et l'hélicité magnétique

Il sera souvent pratique d'exprimer l'équation d'induction magnétique en termes d'un *potentiel vecteur* \mathbf{A} (unités T m), tel que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. L'équation (2.9) devient alors:

$$\nabla \times \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \eta \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] = 0. \quad (2.73)$$

On peut intégrer cette expression pour arriver à la forme:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \eta \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = C \nabla \varphi. \quad (2.74)$$

où C est une constante arbitraire, et la fonction scalaire résultant de la "dérotationnelisation" de l'équation d'induction n'a aucun impact sur \mathbf{B} puisque $\nabla \times \nabla \varphi \equiv 0$ identiquement. Cependant, φ peut contribuer au champ électrique, et agit donc comme un potentiel électrostatique. L'utilisation des identités du calcul vectoriel (voir Annexe A au besoin) permet de développer le troisième terme au membre de droite sous la forme:

$$\eta \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\eta \nabla^2 \mathbf{A} + \eta \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (2.75)$$

Comme la constante C et le potentiel électrostatique φ n'ont aucun impact sur \mathbf{B} , autant les choisir de manière à nous simplifier la vie. On posera donc $C = \eta$, et on adopte la jauge de Coulomb $\varphi = \nabla \cdot \mathbf{A}$; ceci réduit le terme de dissipation Ohmique à $\eta \nabla^2 \mathbf{A}$, et l'équation d'induction pour le potentiel vecteur devient alors:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \eta \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (2.76)$$

Notons encore une fois qu'ici le Laplacien agit sur une quantité vectorielle, ce qui diffère de l'action du Laplacien sur les composantes scalaires par des termes métriques, sauf en coordonnées Cartésiennes (voir Annexe B).

Le potentiel vecteur permet une représentation élégante des champs axisymétriques ($\partial/\partial\phi \equiv 0$) en terme de deux fonctions scalaires, soit les composantes- ϕ du potentiel vecteur et du champ magnétique même. En coordonnées sphériques polaires:

$$\mathbf{B}(r, \theta, t) = \nabla \times [A(r, \theta, t) \hat{\mathbf{e}}_\phi] + B(r, \theta, t) \hat{\mathbf{e}}_\phi. \quad (2.77)$$

Il est facile de vérifier qu'une telle expression satisfait identiquement la contrainte $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. La fonction scalaire A définit ici la composante poloidale du champ magnétique.

L'*hélicité magnétique* est définie comme

$$h_B = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \quad (2.78)$$

et mesure la connectivité topologique du champ magnétique. Considérons la variation de l'hélicité totale ($\mathcal{H}_B \equiv \int_V h_B$) d'un élément de fluide de volume V lors de son déplacement dans un écoulement (représentation Lagrangienne). L'utilisation des eqs. (2.9), (2.74), et (2.5), suivi d'une bonne dose d'algèbre vectorielle, produit l'expression suivante:

$$\frac{D}{Dt} \underbrace{\int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV}_{\mathcal{H}_B} = -2\mu_0 \eta \underbrace{\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} dV}_{\mathcal{H}_J}, \quad (2.79)$$

où l'intégrale au membre de droite définit l'*hélicité totale de courant* \mathcal{H}_J , qui mesure la connectivité topologique du champ \mathbf{B} avec la densité de courant le supportant.

L'Équation (2.79) indique qu'en MHD idéale ($\eta = 0$), l'hélicité magnétique est une quantité conservée. Ceci s'avèrera une contrainte de taille pour l'amplification des champs magnétiques par effet dynamo; on y reviendra vers la fin de ce cours.

2.10 L'origine des champs magnétiques astrophysiques

Ce chapitre pourrait avoir donné l'impression d'une fixation obsessionnelle sur le champ magnétique \mathbf{B} . Qu'est-ce qui est arrivé au champ électrique \mathbf{E} ? Le fait demeure que partout dans l'univers, on observe des champs magnétiques de toute forme et intensité. Les champs électriques, par contre, n'y sont que rarement présents. Ceci est à prime abord étrange, considérant que \mathbf{E} et \mathbf{B} apparaissent à pied d'égalité dans les équations de Maxwell (2.1)–(2.4). De surcroît, un simple changement de référentiel peut transformer un \mathbf{B} en un \mathbf{E} . Où sont donc les champs électriques astrophysiques ?

La question du référentiel se règle via les observations; dans n'importe quel référentiel inertiel raisonnable (i.e., la Terre au repos; le système solaire au repos; la Voie Lactée au repos; le groupe local au repos, etc., ad infinitum), il y a du \mathbf{B} partout, et excessivement peu de \mathbf{E} . Cette asymétrie n'est pas une question de référentiel, mais plutôt de sources. Aussi vide soit-il, l'Univers contient une quantité astronomique de charges libres: électrons libres, molécules ou atomes ionisés, grains chargés photoélectriquement, etc. Si un champ électrique apparaît soudainement quelquepart, les charges dans le milieu ambiant se sépareront sur une échelle de temps correspondant au temps de relaxation électrostatique introduit précédemment (éq. (2.21)), jusqu'à ce que le champ électrique secondaire ainsi produit annule le champ appliqué, principe de superposition oblige. Les faibles densités de la plupart des plasmas astrophysiques impliquent aussi un grand libre parcours moyen pour leurs constituants microscopiques, ce qui conduit typiquement à des conductivités électriques raisonnables et des temps de relaxation électrostatique très courts, même quand le degré d'ionisation est très bas, comme dans les nuages moléculaires par exemple. Conséquemment, les champs électriques astrophysiques tendent à se court-circuiter très rapidement une fois créés.

Ce n'est pas le cas avec les champs magnétiques, car en autant qu'on puisse en juger en ce moment, il n'y a vraiment pas beaucoup de monopoles magnétiques dans l'Univers, donc court-circuiter les champs magnétiques par séparation de monopoles de charges (magnétiques) opposées n'est pas une option. Un champ magnétique ne peut que se dissiper, via l'action de la résistance Ohmique sur les courants électriques le supportant (viz. la Loi d'Ampère). On sait déjà que ce temps de dissipation (donné par l'éq. (2.13)) est immensément long (viz. le Tableau 2.1). Une fois créés, de quelque manière que ce soit, les champs magnétiques astrophysiques sont là pour rester, à moins qu'un processus dynamique (i.e. une instabilité) n'accélère leur dissipation.

Ce qui nous emmène à un problème crucial. La linéarité en \mathbf{B} de l'équation d'induction MHD (2.9) implique que si $\mathbf{B} = 0$ à un temps quelconque t_0 , alors $\mathbf{B} = 0$ à tous les temps subséquents $t > t_0$, une situation qui persiste même si t_0 est repoussé jusqu'au Big Bang. D'où originent alors les champs magnétiques observés aujourd'hui? On a déjà considéré (à la §2.4) une situation où un écoulement peut amplifier un champ magnétique, et on en verra bon nombre d'autres dans la suite de ce cours. Il serait donc suffisant d'identifier un mécanisme convaincant qui puisse produire un champ magnétique de très faible amplitude, et l'induction MHD peut en principe prendre le relais.

Une option est de supposer que le Big Bang "contenait" déjà un champ magnétique primordial; c'est possible, mais ce genre d'explication cosmologico-religieuse ne tombe pas dans la catégorie des mécanismes convaincants, à mon humble avis du moins. L'option des monopoles magnétiques, elle, peut au moins se quantifier à un certain niveau. La mécanique quantique permet l'existence de tels monopoles, tant que la charge magnétique est un multiple entier de $g \equiv hc/(4\pi e) \approx 69e$, où h est la constante de Planck et e la charge électrique fondamentale. Comme nous n'avons vraiment besoin que d'un seul de ces monopoles, l'option est attrayante. Certaines théories de grande unification, en vogue à diverses périodes, allaient même jusqu'à "prédire" que tôt après le Big Bang, une telle quantité de monopoles de masse $m_g \approx 10^{16}$ GeV/ c^2 devraient être produits qu'une cosmologie inflationniste devient essentielle pour s'assurer qu'un seul monopole se retrouve dans chaque sous-domaine inflationnaire.

Ceci dit, comme personne n'a jamais encore détecté ou vu passer un monopole magnétique, il serait plus rassurant de se trouver un mécanisme qui fonctionne sur la base de théories

physiques bien validées dans notre coin du cosmos. Il s'avère que ce n'est pas si compliqué que ça; après tout, la dérivation de l'équation MHD (voir §2.1) repose sur un certain nombre d'approximations, qui peuvent être relaxées. Conserver le courant de déplacement de Maxwell ne nous apporte pas grand chose. C'est au niveau de la Loi d'Ohm que se trouve notre meilleure candidat⁵.

Ramenons nous en physique des plasmas et écrivons l'équation du mouvement d'un fluide d'électrons (densité électronique n_e , en m^{-3}) dans un plasma d'Hydrogène complètement ionié:

$$m_e n_e \frac{D\mathbf{u}_e}{Dt} = -\nabla p_e - n_e e (\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) - \nu m_e n_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_p), \quad (2.80)$$

où $\nu = n_e e^2 / m_e \sigma$ mesure le taux de collisions, et donc de transfert de quantité de mouvement, entre les électrons et les protons, que l'on suppose ici proportionnel à la vitesse de dérive entre ces deux composantes du fluide. Si on élimine le membre de gauche au vu de la très faible masse de l'électron, ainsi que le gradient de pression électronique, on retrouve bien l'éq. (2.7), puisque $n_e e (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_e) \equiv \mathbf{J}$. Si on conserve le gradient de pression électronique, on trouve au lieu de l'éq. (2.8) l'expression suivante:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{\nabla p_e}{n_e e}, \quad (2.81)$$

et l'éq. (2.9) devient ainsi:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\nabla p_e}{n_e e}); \quad (2.82)$$

ou encore, sous utilisation judicieuse de quelques identités vectorielles classiques:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B}) - \frac{\nabla n_e \times \nabla p_e}{n_e^2 e}. \quad (2.83)$$

Le dernier terme au membre de gauche est appelé *batterie de Biermann*, et, fondamentalement, capture la possibilité de produire une séparation de charges autrement que par l'application d'un champ électrique \mathbf{E} ; en fait, toute force électromotrice d'origine mécanique (ou chimique, d'où le qualificatif original de "batterie") peut faire l'affaire. Ce terme batterie n'est pas proportionnel à \mathbf{B} , et donc agit comme un véritable terme source dans l'équation d'induction MHD: il est maintenant possible de produire un champ magnétique même si $\mathbf{B} = 0$ à $t = 0$!

Dans un contexte astrophysique, la clef est de produire une configuration plasma où les gradients de densité et pression électroniques ne sont pas parallèles. Pas évident, mais possible dans quelques situations astrophysiques crédibles, toutes impliquant, à un niveau ou l'autre, la rotation. Considérons en brièvement quelques unes, en remontant de la période actuelle... presque jusqu'au Big Bang !

2.10.1 Batteries stellaires

On a vu à la §1.5.5 que dans une zone convective de type stellaire, la rotation, via la force de Coriolis, brise l'isotropie de la turbulence et conduit à des contributions non-diffusives (hors-diagonales) dans le tenseur des stress de Reynolds, qui propulsent une rotation différentielle et une circulation dans les plans méridiens. Écrivons l'équation d'Euler en régime stationnaire ($\partial/\partial t \equiv 0$) et intégrons le long d'une ligne d'écoulement (fermée) de cette circulation méridienne:

$$\oint \left(-\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}' \right) \cdot d\mathbf{l} = \oint (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.84)$$

⁵Le reste de cette section est basé en majeure partie sur le travail de session de Simon Blouin à l'automne 2015.

où $\mathbf{g}' \equiv \mathbf{g} + \omega^2 r \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_s$, $\omega(r, \theta)$ étant la fréquence angulaire de rotation à la position (r, θ) dans l'étoile et $\hat{\mathbf{e}}_s$ un vecteur unitaire pointant perpendiculairement à l'axe de rotation. Cette ajout à la gravité correspond évidemment à la force centrifuge. Le membre de droite de cette expression est nul, puisque $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla(u^2/2) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$, et l'intégrale sur le parcours fermé d'un gradient l'est identiquement, tandis que $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \perp d\ell$, car on a (judicieusement!) choisi un parcours d'intégration coïncidant avec une ligne d'écoulement. Appliquant maintenant le théorème de Stokes au membre de gauche de (2.84):

$$\int_S \left[\nabla \times \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) \right] \cdot dS = \int_S (\nabla \times \mathbf{g}') \cdot dS ; \quad (2.85)$$

mais

$$\nabla \times \mathbf{g}' = \underbrace{\nabla \times \mathbf{g}}_{\equiv 0} + \underbrace{\nabla \times (\omega^2 r \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_s)}_{\neq 0} . \quad (2.86)$$

On a donc

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) \equiv - \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} \neq 0 ; \quad (2.87)$$

Comme la densité $\rho \equiv n_e m_e + n_p m_p$ pour un fluide d'Hydrogène ionisé, on voit que ce terme a la forme du terme de batterie de Biermann dans l'éq. (2.83). Une étoile en rotation *différentielle*⁶ produira donc un effet batterie propulsant une densité de courant dans la direction azimutale, avec laquelle sera associé un champ magnétique poloidal, selon la Loi d'Ampère (2.5). Voilà !

2.10.2 Batteries galactiques

Dans les phases finales de la formation d'une galaxie imbuée d'un moment cinétique significatif (comme dans les galaxies spirales), un effet batterie peut se développer via l'interaction avec le rayonnement micro-onde primordial. Après le découplage photon-matière, considérons une proto-galaxie dont les régions externes tournent à vitesse $U = R\Omega$ par rapport à un référentiel où le rayonnement primordial micro-onde est isotrope. Le scattering de Thompson des photons micro-ondes sur les électrons conduit à l'effet de *drag de Compton*, qui induit une dérive relative des électrons dans une direction contraire à la rotation des ions. Ceci est équivalent à une densité de courant orientée azimutalement dans le plan galactique, à laquelle est associée un champ magnétique dipolaire, cette fois à l'échelle de la galaxie. Un effet analogue peut se développer dans une galaxie en formation, durant son effondrement gravitationnel. On estime que ces processus peuvent produire un champ magnétique d'une intensité de l'ordre de 10^{-20} aux échelles galactiques, et jusqu'à 10^{-18} G aux plus petites échelles. Ce n'est pas beaucoup de champ magnétique, mais il ne faut pas oublier que tout ce dont on a besoin c'est de se sortir de $\mathbf{B} = 0$.

2.10.3 Batteries cosmologiques

Si on remonte encore plus près du Big Bang, d'autres possibilités font leur apparition. Le processus dit de Harrison se base sur l'hypothèse d'un moment cinétique (ou vorticité) primordial originant du Big Bang. Dans la phase de l'expansion précédant le découplage radiation-matière, en raison de leur plus faible masse les électrons se retrouveront plus fortement couplés à la radiation que les protons. Dans cette phase cosmologique dominée par la radiation et où le couplage électron-proton est négligeable, le moment cinétique du "fluide" d'électrons évoluera différemment du "fluide" protonique, et donc développera une dérive par rapport à ce dernier en raison de l'expansion de l'univers. Ceci correspond à une densité de courant dans un plan

⁶Si la rotation est solide, i.e., $\omega(r, \theta) = \text{constante}$, alors la force centrifuge peut s'exprimer comme le gradient d'un potentiel et le second terme au membre de droite de (2.86) sera donc aussi aussi identiquement nul.

perpendiculaire à l'orientation du vecteur-vorticité primordial, à laquelle est associée un champ magnétique "dipolaire" à l'échelle de l'univers (en expansion). On estime que ce processus pourrait produire un champ magnétique d'une intensité de l'ordre de 10^{-19} aux échelles proto-galactiques; cependant, il dépend de manière critique de l'existence d'une vorticité "primordiale" au moment du Big Bang. Même si la vorticité primordiale requise s'avère être de faible amplitude, l'hypothèse demeure *ad hoc*, et l'efficacité de ce mécanisme demeure contestée.

Le mécanisme de Harrison sent un peu le mysticisme cosmologique; mais le message de cette section demeure: pas vraiment besoin de tomber dans les monopoles ou dans les cordes pour expliquer l'origine ultime des champs magnétiques !

Bibliographie:

Sauf pour quelques ajouts substantiels, en particulier au niveau des ondes MHD (§2.8), ce chapitre a été assemblé (et traduit) à partir de Notes de cours que j'ai écrites il y a quelques années pour la trente-neuvième mouture de l'École Avancée de Saas Fee de la Société Suisse d'Astronomie. Ces notes sont maintenant publiées:

Charbonneau, P., *Solar and Stellar Dynamos*, éd. O. Steiner, Springer, 2013.

Si vous avez besoin de vous rafraîchir la mémoire sur l'électromagnétisme, je vous recommande:

Griffith, D.J., *Introduction to Electrodynamics*, 3rd ed., Prentice Hall (1999).

En terme d'introduction à la magnétohydrodynamique, mon ouvrage préféré demeure:

Davidson, P.A., *An Introduction to Magnetohydrodynamics*, Cambridge University Press (2001).

Les sections 2.3 et 2.7 de ce chapitre sont d'ailleurs fortement inspirées de cet ouvrage, qui présente également une démonstration particulièrement claire du théorème cinématique (soit l'éq. (2.51)). Au niveau des ondes magnétohydrodynamiques, une présentation rigoureuse et complète se retrouve dans l'ouvrage suivant:

Goedbloed, H., & Poedts, S., *Principles of Magnetohydrodynamics*, Cambridge University Press (2004).

À ne pas rater, le petit vidéo suivant sur youtube; hilarant stylistiquement, mais physiquement parfait et vraiment très bien expliqué:

<http://www.youtube.com/watch?vQArcTy1NooQ>

Ceux et celles désirant approfondir les nombreuses subtilités de l'intersection entre la magnétohydrodynamique et la physique des plasmas trouveront se quoi se tenir occupé(e)s dans l'ouvrage suivant:

Kulsrud, R.M., *Plasma Physics for Astrophysics*, Princeton University Press (2005).

dont le chapitre 13 traite en détail des effets de batterie et des divers mécanismes pouvant conduire à la production de champs magnétiques primaires. Un scénario "complet" de l'inexorable croissance du champ magnétique dans l'Univers est présenté dans

Kulsrud, R.M., & Zweibel, E.G, *Rep. Prog. Phys.*, **7**, 046901 (2008).

Appendice A

Identités et théorèmes du calcul vectoriel

A.1 Identités vectorielles

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

$$\nabla \times \nabla f = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{A} + f(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \times \mathbf{A} + f(\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A}\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

A.2 Le théorème du gradient

Pour toute paire de points \mathbf{a} , \mathbf{b} dans un espace où est défini une fonction scalaire f dont les dérivées spatiales sont continues au moins jusqu'au premier degré,

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla f) \cdot d\boldsymbol{\ell} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}),$$

indépendamment du chemin d'intégration choisi entre \mathbf{a} et \mathbf{b} .

A.3 Le théorème de la divergence

Pour tout champ vectoriel \mathbf{A} dont les dérivées spatiales des composantes scalaires sont continues au moins jusqu'au premier degré,

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS ,$$

où la surface S englobe le volume.

A.4 Le théorème de Stokes

Pour tout champ vectoriel \mathbf{A} dont les dérivées spatiales des composantes scalaires sont continues au moins jusqu'au premier degré,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_\gamma \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} ,$$

où le contour γ délimite le bord de la surface S , et l'orientation de la normale $\hat{\mathbf{n}}$ est définie par le sens de l'intégrale de ligne sur γ via la règle de la main droite.

A.5 Les identités de Green

Pour toute paire de fonctions ϕ et ψ définies dans un volume V englobé par une surface S et dont les dérivées sont continues au moins jusqu'au second degré,

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dV = \oint_S \phi (\nabla \psi) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS ,$$

et

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \oint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS .$$

Ces expressions sont appelées respectivement première et seconde identités de Green, la seconde étant souvent rebaptisée théorème de Green.

Appendice B

Systèmes de coordonnées et équations fluides

Cet Annexe est adapté en partie de l'Annexe B de l'ouvrage de Jean-Louis Tassoul intitulé *Theory of Rotating Stars* (Princeton University Press, 1978), avec bon nombre d'additions, incluant l'équation d'induction magnétohydrodynamique, les expressions pour les opérateurs $\mathbf{u} \cdot \nabla$ et ∇^2 agissant sur un champ vectoriel, et la forme développée de la divergence d'un tenseur de rang deux. On notera également, aux sections B.1.4 et B.2.4, que les quantités entre parenthèses carrées correspondent aux composantes du tenseur des déformation $D_{jk} = (1/2)(\partial_j u_k + \partial_k u_j)$.

B.1 Coordonnées cylindriques (s, ϕ, z)

B.1.1 Conversion aux coordonnées Cartésiennes

$$x = s \cos \phi, \quad y = s \sin \phi, \quad s = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \text{atan}(y/x), \quad z = z.$$

$$\hat{\mathbf{e}}_x = \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_s - \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad \hat{\mathbf{e}}_y = \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_s + \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_\phi,$$

$$\hat{\mathbf{e}}_s = \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_x + \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_y, \quad \hat{\mathbf{e}}_\phi = -\sin \phi \hat{\mathbf{e}}_x + \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_y, \quad \hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{e}}_z.$$

B.1.2 Éléments infinitésimaux

$$d\mathbf{l} = ds \hat{\mathbf{e}}_s + s d\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi + dz \hat{\mathbf{e}}_z$$

$$dV = s ds d\phi dz$$

B.1.3 Opérateurs

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{u_\phi}{s} \frac{\partial}{\partial \phi} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial s} \hat{\mathbf{e}}_s + \frac{1}{s} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \left(\mathbf{u} \cdot \nabla A_s - \frac{u_\phi A_\phi}{s} \right) \hat{\mathbf{e}}_s + \left(\mathbf{u} \cdot \nabla A_\phi + \frac{u_\phi A_s}{s} \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi + (\mathbf{u} \cdot \nabla A_z) \hat{\mathbf{e}}_z$$

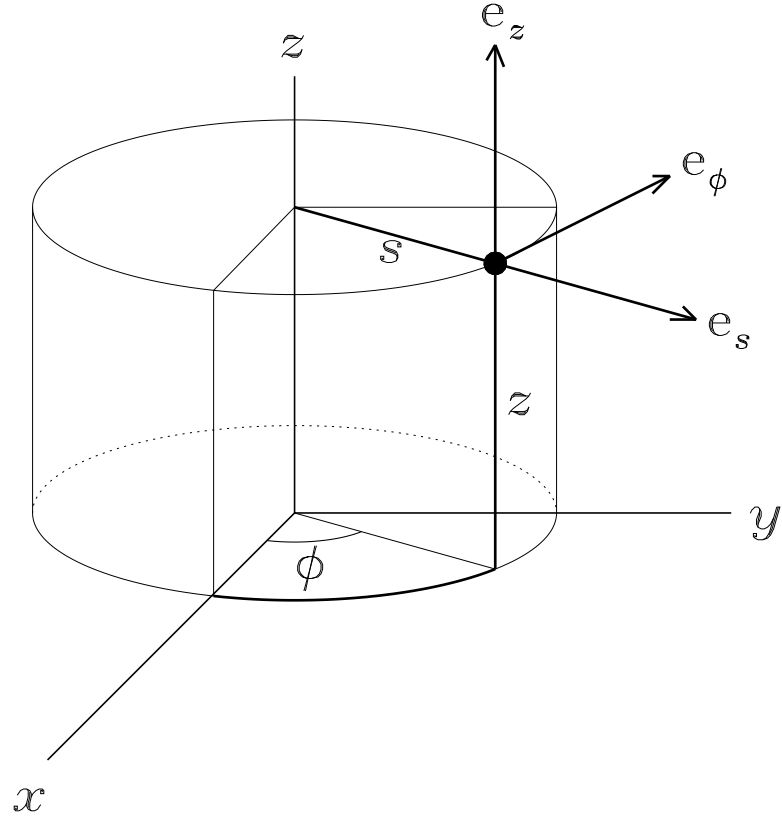


Figure B.1: Définition géométrique du système de coordonnées cylindriques. L'étendue des coordonnées est $s \in [0, \infty]$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $z \in [-\infty, \infty]$. Le rayon cylindrique s est mesurée perpendiculairement à l'axe- x Cartésien. Le point zéro de l'angle azimutal ϕ est sur l'axe- x Cartésien. L'axe- z est identique à celui du système Cartésien. La triade unitaire est orientée de manière telle que $\hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{e}}_s \times \hat{\mathbf{e}}_\phi$.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s A_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{1}{s} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{e}}_s \\ &+ \left(\frac{\partial A_s}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial s} \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{1}{s} \left(\frac{\partial (s A_\phi)}{\partial s} - \frac{\partial A_s}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{e}}_z \end{aligned}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} &= \left(\nabla^2 A_s - \frac{A_s}{s^2} - \frac{2}{s^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{e}}_s \\ &+ \left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{s^2} + \frac{2}{s^2} \frac{\partial A_s}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi + (\nabla^2 A_z) \hat{\mathbf{e}}_z \end{aligned}$$

B.1.4 La divergence d'un tenseur symétrique d'ordre deux

$$\begin{aligned} [\nabla \cdot \mathbf{T}]_s &= \frac{1}{s} \frac{\partial(sT_{ss})}{\partial s} + \frac{1}{s} \frac{\partial T_{\phi s}}{\partial \phi} + \frac{\partial T_{zs}}{\partial z} - \frac{T_{\phi\phi}}{s} \\ [\nabla \cdot \mathbf{T}]_\phi &= \frac{1}{s} \frac{\partial(sT_{s\phi})}{\partial s} + \frac{1}{s} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial T_{z\phi}}{\partial z} + \frac{T_{\phi s}}{s} \\ [\nabla \cdot \mathbf{T}]_z &= \frac{1}{s} \frac{\partial(sT_{sz})}{\partial s} + \frac{1}{s} \frac{\partial T_{\phi z}}{\partial \phi} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{aligned}$$

B.1.5 Composantes du tenseur des stress visqueux

$$\begin{aligned} \tau_{ss} &= 2\mu \left[\frac{\partial u_s}{\partial s} \right] + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \tau_{\phi\phi} &= 2\mu \left[\frac{1}{s} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_s}{s} \right] + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \tau_{zz} &= 2\mu \left[\frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \tau_{s\phi} = \tau_{\phi s} &= 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial u_s}{\partial \phi} + s \frac{\partial}{\partial s} \frac{u_\phi}{s} \right) \right] \\ \tau_{\phi z} = \tau_{z\phi} &= 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial z} + \frac{1}{s} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} \right) \right] \\ \tau_{zs} = \tau_{sz} &= 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial z} \right) \right] \end{aligned}$$

B.1.6 Équations du mouvement

$$\begin{aligned} \varrho \left(\frac{Du_s}{Dt} - \frac{u_\phi^2}{s} \right) &= -\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{B_z}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_s}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial s} \right) \\ &\quad - \frac{B_\phi}{\mu_0 s} \left(\frac{\partial(sB_\phi)}{\partial s} - \frac{\partial B_s}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s\tau_{ss}) + \frac{1}{s} \frac{\partial \tau_{s\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \tau_{sz}}{\partial z} - \frac{\tau_{\phi\phi}}{s} \\ \varrho \left(\frac{Du_\phi}{Dt} + \frac{u_\phi u_s}{s} \right) &= -\frac{\varrho}{s} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} - \frac{1}{s} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{B_s}{\mu_0 s} \left(\frac{\partial(sB_\phi)}{\partial s} - \frac{\partial B_s}{\partial \phi} \right) \\ &\quad - \frac{B_z}{\mu_0} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right) + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s\tau_{\phi s}) + \frac{1}{s} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \tau_{\phi z}}{\partial z} + \frac{\tau_{s\phi}}{s} \\ \varrho \frac{Du_z}{Dt} &= -\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{B_\phi}{\mu_0} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right) \\ &\quad - \frac{B_s}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_s}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial s} \right) + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s\tau_{zs}) + \frac{1}{s} \frac{\partial \tau_{z\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{aligned}$$

B.1.7 Conservation de l'énergie

$$\varrho T \frac{Ds}{Dt} = \Phi_\nu + \Phi_\eta + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left[\chi^s \frac{\partial T}{\partial s} \right] + \frac{1}{s^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\chi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\chi \frac{\partial T}{\partial z} \right]$$

$$\Phi_\nu = 2\mu(D_{ss}^2 + D_{\phi\phi}^2 + D_{zz}^2 + 2D_{s\phi}^2 + 2D_{\phi z}^2 + 2D_{zs}^2) + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu\right)(\nabla \cdot \mathbf{u})^2$$

$$\Phi_\eta = \frac{\eta}{\mu_0} \left[\left(\frac{1}{s} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial B_s}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{s^2} \left(\frac{\partial(sB_\phi)}{\partial s} - \frac{\partial B_s}{\partial \phi} \right)^2 \right]$$

B.1.8 L'équation d'induction MHD

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_s}{\partial t} &= \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \phi} (u_s B_\phi - u_\phi B_s) - \frac{\partial}{\partial z} (u_z B_s - u_s B_z) \\ &\quad - \frac{1}{s^2} \frac{\partial \eta}{\partial \phi} \left(\frac{\partial(sB_\phi)}{\partial s} - \frac{\partial B_s}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial z} \left(\frac{\partial B_s}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial s} \right) \\ &\quad + \eta \left(\nabla^2 B_s - \frac{B_s}{s^2} - \frac{2}{s^2} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} \right) \\ \frac{\partial B_\phi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} (u_\phi B_z - u_z B_\phi) - \frac{\partial}{\partial s} (u_s B_\phi - u_\phi B_s) \\ &\quad - \frac{\partial \eta}{\partial z} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right) + \frac{1}{s} \frac{\partial \eta}{\partial s} \left(\frac{\partial(sB_\phi)}{\partial s} - \frac{\partial B_s}{\partial \phi} \right) \\ &\quad + \eta \left(\nabla^2 B_\phi - \frac{B_\phi}{s^2} + \frac{2}{s^2} \frac{\partial B_s}{\partial \phi} \right) \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} &= \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s u_z B_s - s u_s B_z) - \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \phi} (u_\phi B_z - u_z B_\phi) \\ &\quad - \frac{\partial \eta}{\partial s} \left(\frac{\partial B_s}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial s} \right) + \frac{1}{s} \frac{\partial \eta}{\partial \phi} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right) + \eta (\nabla^2 B_z) \end{aligned}$$

B.2 Coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

B.2.1 Conversion aux coordonnées Cartésiennes

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta.$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \text{atan}(\sqrt{x^2 + y^2}/z), \quad \phi = \text{atan}(y/x).$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_x &= \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_r + \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_\phi, \\ \hat{\mathbf{e}}_y &= \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_r + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_\theta + \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_\phi, \\ \hat{\mathbf{e}}_z &= \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r - \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta, \\ \hat{\mathbf{e}}_r &= \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_x + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_y + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_z, \\ \hat{\mathbf{e}}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_x + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_y - \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_z, \\ \hat{\mathbf{e}}_\phi &= -\sin \phi \hat{\mathbf{e}}_x + \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_y. \end{aligned}$$

B.2.2 Éléments infinitésimaux

$$d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{e}}_r + r d\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + r \sin \theta d\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

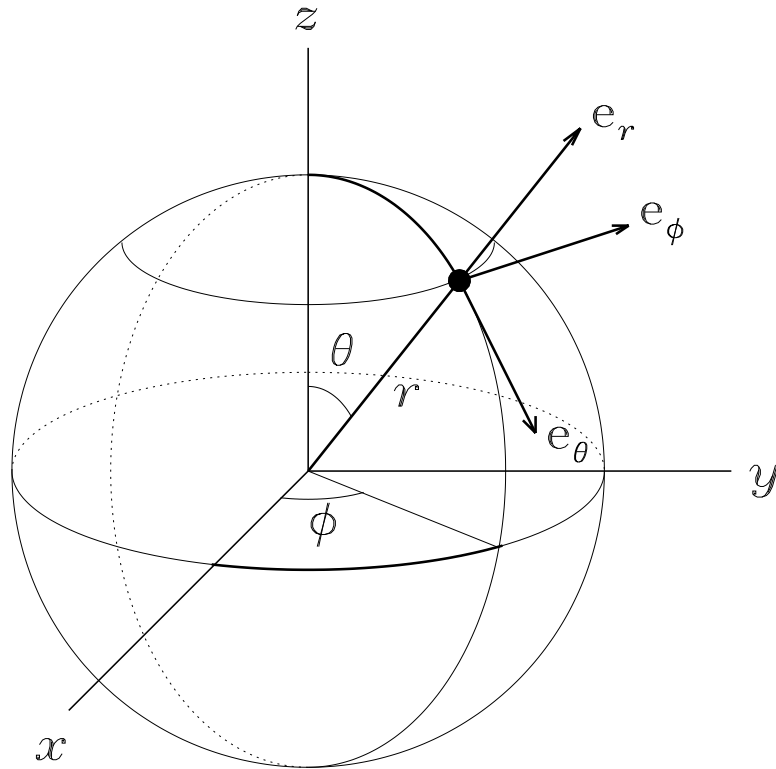


Figure B.2: Définition géométrique du système de coordonnées sphériques polaires. L'étendue des coordonnées est $r \in [0, \infty]$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$. Le point zéro de l'angle azimutal ϕ est sur l'axe- x Cartésien, et le point zéro de l'angle polaire θ (parfois appelé colatitude) est sur l'axe- z . La triade unitaire est orientée de manière telle que $\hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_\theta \times \hat{\mathbf{e}}_\phi$. Notons que dans le système de coordonnées géographiques, *longitude* $\equiv \phi$, mais *latitude* $\equiv \pi/2 - \theta$.

B.2.3 Opérateurs

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \\
 \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi \\
 (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A} &= \left(\mathbf{u} \cdot \nabla A_r - \frac{u_\theta A_\theta}{r} - \frac{u_\phi A_\phi}{r} \right) \hat{\mathbf{e}}_r \\
 &+ \left(\mathbf{u} \cdot \nabla A_\theta - \frac{u_\phi A_\phi}{r} \cot \theta + \frac{u_\theta A_r}{r} \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta \\
 &+ \left(\mathbf{u} \cdot \nabla A_\phi + \frac{u_\phi A_r}{r} + \frac{u_\theta A_\theta}{r} \cot \theta \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi \\
 \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\
 \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (A_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{e}}_r \\
 &+ \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (A_\phi r \sin \theta)}{\partial r} \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \\
\nabla^2 \mathbf{A} &= \left(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\theta \sin \theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{e}}_r \\
&+ \left(\nabla^2 A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta \\
&+ \left(\nabla^2 A_\phi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi
\end{aligned}$$

B.2.4 La divergence d'un tenseur symétrique d'ordre deux

$$\begin{aligned}
[\nabla \cdot \mathbf{T}]_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 T_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(T_{\theta r} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\phi r}}{\partial \phi} - \frac{T_{\theta\theta} + T_{\phi\phi}}{r} \\
[\nabla \cdot \mathbf{T}]_\theta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 T_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(T_{\theta\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\phi\theta}}{\partial \phi} + \frac{T_{\theta r}}{r} - \frac{T_{\phi\phi} \cot \theta}{r} \\
[\nabla \cdot \mathbf{T}]_\phi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 T_{r\phi})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(T_{\theta\phi} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{\phi r}}{r} + \frac{T_{\phi\theta} \cot \theta}{r}
\end{aligned}$$

B.2.5 Composantes du tenseur des stress visqueux

$$\begin{aligned}
\tau_{rr} &= 2\mu \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} \right] + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \\
\tau_{\theta\theta} &= 2\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right] + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \\
\tau_{\phi\phi} &= 2\mu \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} \right] + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \\
\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} &= 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \frac{u_\theta}{r} \right) \right] \\
\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} &= 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{u_\phi}{\sin \theta} \right) \right] \\
\tau_{\phi r} = \tau_{r\phi} &= 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \frac{u_\phi}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \right) \right]
\end{aligned}$$

B.2.6 Équations du mouvement

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{Du_r}{Dt} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r} \right) &= -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r} \\
&+ \frac{B_\phi}{\mu_0 r \sin \theta} \left(\frac{\partial B_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (B_\phi r \sin \theta) \right) - \frac{B_\theta}{\mu_0 r} \left(\frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) \\
&+ \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta} \sin \theta) + \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} \right] - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varrho \left(\frac{Du_\theta}{Dt} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) &= -\frac{\varrho}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\
&+ \frac{B_r}{\mu_0 r} \left(\frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) - \frac{B_\phi}{\mu_0 r \sin \theta} \left(\frac{\partial(B_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial \phi} \right) \\
&+ \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{\theta r}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta \theta} \sin \theta) + \frac{\partial \tau_{\theta \phi}}{\partial \phi} \right] + \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\tau_{\phi\phi} \cot \theta}{r} \\
\varrho \left(\frac{Du_\phi}{Dt} + \frac{u_r u_\phi}{r} + \frac{u_\theta u_\phi \cot \theta}{r} \right) &= -\frac{\varrho}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} \\
&+ \frac{B_\theta}{\mu_0 r \sin \theta} \left(\frac{\partial(B_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial \phi} \right) - \frac{B_r}{\mu_0 r \sin \theta} \left(\frac{\partial B_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(B_\phi r \sin \theta)}{\partial r} \right) \\
&+ \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{\phi r}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\phi \theta} \sin \theta) + \frac{\partial \tau_{\phi \phi}}{\partial \phi} \right] + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + \frac{\tau_{\theta\phi} \cot \theta}{r}
\end{aligned}$$

B.2.7 Conservation de l'énergie

$$\begin{aligned}
\varrho T \frac{Ds}{Dt} &= \Phi_\nu + \Phi_\eta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\chi r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right] \\
&+ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\chi \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\chi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right] \\
\Phi_\nu &= 2\mu (D_{rr}^2 + D_{\theta\theta}^2 + D_{\phi\phi}^2 + 2D_{r\theta}^2 + 2D_{\theta\phi}^2 + 2D_{\phi r}^2) + (\zeta - \frac{2}{3}\mu) (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \\
\Phi_\eta &= \frac{\eta}{\mu_0 r^2 \sin^2 \theta} \left[\left(\frac{\partial(B_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial \phi} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial B_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(B_\phi r \sin \theta)}{\partial r} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

B.2.8 L'équation d'induction MHD

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_r}{\partial t} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta (u_r B_\theta - u_\theta B_r)) - \frac{\partial}{\partial \phi} (u_\phi B_r - u_r B_\phi) \right] \\
&- \frac{1}{r^2} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \left(\frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \eta}{\partial \phi} \left(\frac{\partial B_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(B_\phi r \sin \theta)}{\partial r} \right) \\
&+ \eta \left(\nabla^2 B_r - \frac{2B_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(B_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} \right) \\
\frac{\partial B_\theta}{\partial t} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (u_\theta B_\phi - u_\phi B_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r B_\theta - r u_\theta B_r) \\
&- \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \eta}{\partial \phi} \left(\frac{\partial(B_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} \left(\frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) \\
&+ \eta \left(\nabla^2 B_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} - \frac{B_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_\phi}{\partial t} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (ru_\phi B_r - ru_r B_\phi) - \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta B_\phi - u_\phi B_\theta) \right] \\
&- \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \eta}{\partial r} \left(\frac{\partial B_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (B_\phi r \sin \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \left(\frac{\partial (B_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial \phi} \right) \\
&+ \eta \left(\nabla^2 B_\phi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial B_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial B_\theta}{\partial \phi} - \frac{B_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right)
\end{aligned}$$

Bibliographie:

Si vous voulez vraiment en savoir plus sur tout ça, voir:

P.M. Morse et H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill (1953): Chap. 1

G.K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press (1967):
Appendix 2

Arfken, G., *Mathematical Methods for Physicists*, 2nd ed., Academic Press (1970): chap. 2.

ou, en version plus concise, l'Annexe A.2 de l'ouvrage de Goedbloed & Poedts cité en bibliographie au chapitre 2.