**PHY 6756**
**FLUIDES ASTROPHYSIQUES**
**EXAMEN MAISON**

**Professeur:** Paul Charbonneau
**Date de l'examen:** 3 au 5 décembre 2018
**Durée de l'examen:** 48 heures

Examen à livre ouvert, toutes ressources permises, sauf ressources humaines autres que votre propre personne personnelle (et méfiez-vous toujours de ce que vous trouvez sur l'internet!).

L'examen doit m'être remis le mercredi 5 décembre avant le début du cours. Il peut également être glissé sous ma porte plus tôt si vous le préférez. Bonne Chance! (...même si ce n'est pas vraiment une question de chance...)

---

**Question 1** [Problème 8, texto]

Il s'agit ici de vous faire compléter quelques étapes mathématiques incomplètes dans la §2.8;

(a) Obtenez les éqs. (2.53)–(2.55) par linéarisation des équations MHD sous la configuration géométrique et pour l'état de référence décrit dans le paragraphe les précédant;
(b) Vérifiez que la substitution de (2.58) dans (2.57) conduit bien à (2.59) et (2.60).
(c) Vérifiez que la substitution des éqs. (2.64)–(2.66) dans la relation de dispersion (2.60) conduit bien à (2.67)–(2.69).

---

**Question 2** [Problème 10, un avec petit ajout (g)]

Travaillant en coordonnées cartésiennes, on considère l'action de l'écoulement incompressible suivant:

$$u_x(x) = v_0 x \ , \qquad u_y(y) = -v_0 y$$

sur un champ magnétique purement horizontal, i.e.,

$$\mathbf{B} = B_x(x, y)\hat{\mathbf{e}}_x \ .$$

Attention, ici la constante $v_0$ mesurant l'amplitude de l'écoulement a des dimensions de $s^{-1}$ ! On suppose qu'à une distance $y = \pm L$, ce champ magnétique est fixé aux valeurs

$$B_x(x, -L) = -B_0 \ , \qquad B_x(x, L) = B_0 \ .$$

On considère que cet écoulement est fixé, et on s'intéresse à son effet sur le champ magnétique, tel que décrit par l'équation d'induction magnétohydrodynamique (2.9).

(a) Effectuez une séparation des variables, et démontrez que le problème est invariant en $x$ et accepte donc des solutions de la forme $B_x(y, t)$.

(b) En adimensionnalisant les longueurs par $L$ et les temps par $1/v_0$, montrez que la composante $y$ de l'équation d'induction se réduit à:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = B_x + y\frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{\eta}{v_0 L^2}\frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2}$$

(c) Obtenez (analytiquement ou numériquement) des solutions à la forme stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) de cette équation, pour des valeurs du paramètre adimensionnel $\alpha \equiv \eta/(v_0 L^2) = 10^{-2}$, $10^{-1}$, et 1. Portez en graphique vos solutions, i.e., $B_x(y)$ en fonction de $y$.

(d) Calculez (analytiquement ou numériquement) la densité de courant électrique $\mathbf{J}$ associée à ces solutions. Dans quelle direction est orientée cette densité de courant ?

(e) Calculez maintenant (analytiquement ou numériquement) la force de Lorentz; dans quelle direction est-elle orientée ?

(f) Calculez (analytiquement ou numériquement) le taux de dissipation Ohmique de ces courants (par unité de longueur en $x$) en fonction de $\alpha$. Considérant que $\alpha$ peut être interprété comme une mesure de la diffusivité magnétique $\eta$ (pour un $v_0$ fixe), comment expliquez-vous votre résultat ?

(g) Reprenez le problème, mais cette fois avec comme condition limite $B_x(x, \pm L) = B_0$ (pas de changement de signe de $B_x$ à $y = 0$); Comment se compare le taux de dissipation Ohmique du courant avec le premier cas ? Comment expliquer vous ce résultat ?

---

**Question 3** [Problème 13, texto]

Codez la procédure de solution décrite à la section 3.3.3, et calculez une solution polytropique complète. Validez votre code en comparant à la solution portée en graphique à la Figure 3.6 des notes de cours. Ensuite, fixant l'indice polytropique à $\alpha = 1.1$, examinez comment varient avec la température basale $T_0$ les quantités suivantes: (1) la vitesse du vent à la base de l'écoulement, (2) la vitesse et densité du vent à 1 UA, (3) la position du point sonique. Explorez l'intervalle de température basale $10^6 \leq T_0 \leq 3 \times 10^6$ K. Langage de programmation au choix, mais incluez un listing de votre code.

---

**Question 4** [Problème 18, texto]

Suivant la procédure décrite à la section 4.3.4, calculez le spectre d'émission d'un disque d'accrétion autour d'une étoile à neutron "typique". Je vous laisse le soin de trouver les valeurs de paramètres les plus appropriées à cette situation astrophysique. Ensuite,

(a) Dans quel domaine de longueur d'onde l'émission radiative est elle maximale ?

(b) Quelle est la valeur de viscosité (turbulente) requise pour conduite à un taux d'accrétion raisonnable pour une étoile à neutron ?

(c) L'instabilité de Balbus-Hawley peut-elle opérer ici ?

---

**Question 5** [Problème 19, texto]

Appliquez la procédure de séparation d'échelles introduite à la section 1.5.4 à l'équation de Navier-Stokes incluant la force de Lorentz, et démontrez que le tenseur des stress associé aux petites échelles de l'écoulement est bien donné par l'éq. (4.64).