

# Chapitre 5

## Dynamos astrophysiques

Une dynamo est un système effectuant la conversion de l'énergie mécanique en énergie électromagnétique, sous la forme de courants électriques dans le contexte qui nous occupera ici. En régime magnétohydrodynamique, c'est le terme en  $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$  dans l'équation d'induction (2.9) qui fait le travail, car c'est lui qui conduit au terme en  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}$  dans notre équation de l'énergie magnétique (2.40).

Nous avons déjà invoqué la présence de champ magnétiques pour nous tirer de pétrins divers dans notre étude des vents et des disques d'accrétion. Quel est l'origine de ces champs? Il s'avère qu'une grande partie, sinon la totalité des 23 ordres de grandeurs séparant le champ magnétique  $\sim 10^{-12}$  T du milieu intergalactique du  $\sim 10^{11}$  T des pulsars peut s'expliquer par simple conservation du flux magnétique lors du processus de contraction/effondrement gravitationnel, comme on l'a vu brièvement à la §2.7. Ce qui ne peut pas du tout être expliqué de cette façon, cependant, est la structure à grande échelle des champs magnétiques galactiques, et les variations cycliques des champs magnétiques stellaires, ces derniers se développant sur des temps caractéristiques beaucoup, beaucoup plus courts que le temps de diffusion (2.13), et donc le cycle solaire demeure l'exemple le mieux documenté. Par conséquent, commençons par un petit survol de ces "anomalies".

### 5.1 L'aspect observationnel

#### 5.1.1 Le cycle des taches solaires

Suite à l'invention du télescope au début du dix-septième siècle, les premiers astronomes ayant observé systématiquement les taches solaires notèrent que ces dernières n'apparaissent que très rarement à l'extérieur d'une bande latitudinale large d'environ  $\pm 40^\circ$  centrée sur l'équateur solaire. Ils ne purent cependant discerner de régularité dans l'apparition ou la disparition des taches, que Galilée finit par déclarer être des formes nuageuses dans l'atmosphère du soleil. Il fallu attendre la patience de l'astronome amateur Samuel Heinrich Schwabe (1789–1875), qui en 1843, après 17 ans d'observations assidues des taches, annonça l'existence d'une périodicité de 10 ans dans le nombre moyen de taches visibles à la surface du soleil. Grandement impressionné par la découverte de Schwabe, Rudolf Wolf (1816–1893) se lança alors dans un programme d'observations et de recherches historiques visant à compiler toutes les observations disponibles afin de retracer le cycle de Schwabe jusqu'au début de l'ère télescopique. Face à la tâche complexe consistant à étalonner les observations d'un grand nombre d'astronomes, brouillons à des degrés divers et utilisant une grande variété d'instruments et de techniques d'observation, Wolf choisit de se définir un *nombre relatif* ( $r$ ) calculé à partir du décompte du nombre  $g$  de groupes de taches et du nombre total  $f$  de taches individuelles, incluant celles faisant partie des groupes:

$$r = k(f + 10g) , \tag{5.1}$$

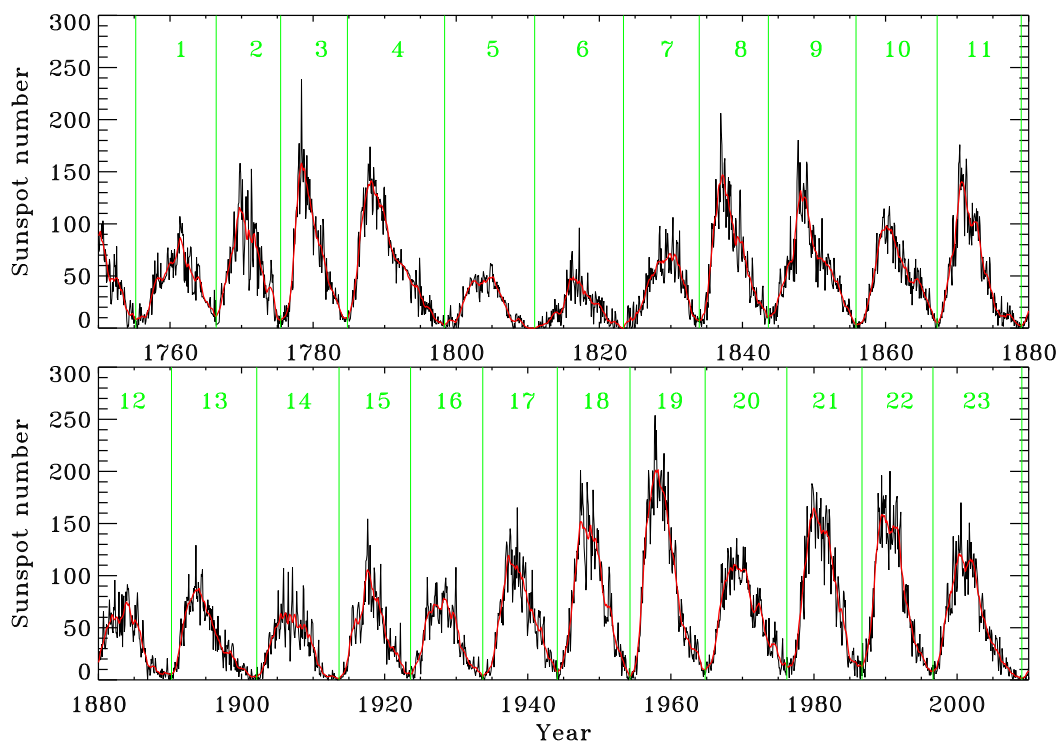


Figure 5.1: Deux séquences temporelles du nombre de Wolf, mesurant le nombre de taches visibles sur le soleil. Le trait noir est la moyenne mensuelle, et le trait rouge une moyenne courante sur 13 mois. À partir de cette dernière séquence, on peut calculer une amplitude moyenne  $SSN=115$  avec déviation standard  $\pm 40$ , et une période moyenne de  $10.9$  yr avec déviation standard  $\pm 1.7$  yr. Suivant la convention introduite par Wolf, les cycles vont d’un minimum en  $SSN$  au suivant. Ces données sont en domaine public et distribuées par le Solar Influences Data Analysis Center à Bruxelles, Belgique (<http://sidc.oma.be>).

où  $k$  est un facteur de correction variant d’un observateur à l’autre (avec  $k = 1$  pour Wolf lui-même!). Cette définition est toujours d’usage aujourd’hui, mais  $r$  est habituellement appelé *nombre de Wolf*, quoique son nom officiel soit maintenant devenu “international sunspot number”. Wolf put ainsi reconstruire le cycle des taches jusqu’au cycle 1755–1766, numéroté “1” depuis, par convention. En octobre 2015 nous sommes présentement dans la phase descendante du cycle 24.

La Figure 5.1 présente deux séquences temporelles du nombre de Wolf. La première (en noir) est la moyenne mensuelle de  $r$ , et le trait rouge plus épais est une moyenne courante sur treize mois. On constate que l’on n’est pas en présence ici d’une simple forme sinusoidale, et que les amplitudes et durées peuvent varier substantiellement d’un cycle à l’autre. La période va d’un peu moins de 9 ans (cycle 2) jusqu’à près de 14 ans (cycles 4 et 24).

La nature physique des taches solaires a fait l’objet de nombreuses spéculations déjà à l’époque de Galilée, mais ce n’est que depuis un siècle qu’elle fut finalement établie sur des bases solides par G.E. Hale et ses collaborateurs qui, en 1907–1908 réussirent à mesurer la séparation Zeeman de certaines raies spectrales et la polarisation des composantes séparées. C’était une démonstration sans équivoque de la nature magnétique des taches solaires. Non seulement s’agissait-il de la première détection d’un champ magnétique extraterrestre (dans le sens littéral du terme), mais les champs mesurés s’avéraient très substantiels, soit de l’ordre de 0.3 Tesla, quelques milliers de fois plus intense que le champ magnétique terrestre. Il a

été compris depuis que ce fort champ magnétique freine le transport convectif de l'énergie, conduisant ainsi aux températures plus basses observées dans les taches, en comparaison à la photosphère environnante.

### 5.1.2 Le cycle magnétique

Hale et ses collaborateurs ne se sont pas arrêtés à la simple détection du champ magnétique des taches solaires. Durant près de deux décennies d'observations et d'analyses, ils ont su exposer plusieurs régularités importantes relatives au champ magnétique des taches, maintenant collectivement connues comme les *Lois de polarité de Hale*. Ayant noté assez tôt que les plus grandes taches tendent à apparaître en paires ayant des polarités magnétiques opposées, ils ont pu démontrer que:

1. En tout temps, la polarité de la tache avant (par rapport à la direction de rotation de la photosphère) est la même dans le même hémisphère solaire.
2. En tout temps, la polarité de la tache avant est inversée entre les hémisphères N et S.
3. Ces patrons de polarité magnétique s'inversent d'un cycle des taches au suivant.

L'interprétation la moins tarabiscotée de ces observations est que ces paires bipolaires de taches solaires sont une manifestation photosphérique d'un champ toroidal interne, ayant émergé sous la forme d'une soi-disant "boucle- $\Omega$ ", l'intersection avec la photosphère produisant ainsi une paire de taches de polarités opposées. Si c'est bien ce qui se passe, et si le champ n'a pas été trop déformé durant son ascension vers la surface, alors le signe de la composante arrière (par rapport à la direction de rotation) donne le signe de la composante magnétique toroidale sous-jacente. Cette interprétation, dans le contexte des Lois de polarité de Hale, mène alors à la conclusion que le champ magnétique interne du soleil est antisymétrique par rapport à son plan équatorial et inverse sa polarité d'un cycle des taches à l'autre; autrement dit, le cycle des taches et sa période de  $\simeq 11$  ans est la manifestation d'un cycle magnétique global ayant une période de  $\simeq 22$  ans.

Une telle (anti)symétrie hémisphérique du champ toroidal interne est exactement ce à quoi on s'attend du cisaillement d'un champ poloidal de type dipolaire et aligné avec l'axe de rotation, par une rotation différentielle étant symétrique par rapport au plan équatorial; précisément comme nous l'avons déjà modélisé à la §2.4. Ce dipôle magnétique est bel et bien présent, mais s'avère d'une intensité trop faible pour avoir été détectable à l'époque de Hale; mais il l'est maintenant.

La Figure 5.2 (en haut) est un magnétogramme, soit une carte magnétique du soleil où chaque pixel encode l'intensité de la composante du champ dans la ligne de visée (gris,  $|\mathbf{B}| \lesssim 1$  mT; allant vers le blanc pour la polarité positive, en noir pour négative, saturée à 0.4T dans les deux cas). Comparant ceci à une image dans le continu (en bas) révèle que les champs les plus intenses coïncident avec les taches solaires, et les deux premières Lois de Hale ressortent clairement du magnétogramme de la Fig. 5.2. On notera aussi que des champs substantiels, de quelques  $10^{-2}$  T, sont également observés en périphérie des groupes de taches. À l'extérieur de ces "régions actives", le champ est plus faible, se retrouvant concentré dans des agrégats qui définissent un *réseau magnétique* spatialement disjoint, distribué plus ou moins uniformément sur la photosphère. Les taches et régions actives, elles, sont rarement observées à l'extérieur d'une bande latitudinale couvrant  $\lesssim 40^\circ$  centré sur l'équateur.

La Figure 5.3 est un *magnétogramme synoptique*, soit un diagramme temps-latitude de la composante radiale du champ photosphérique, moyennée en longitude et couvrant près de quatre cycles de taches, soit deux cycles magnétiques complets. Ce diagramme est construit à partir de magnétogrammes, comme celui de la Fig. 5.2, en calculant la moyenne latitudinale sur une séquence couvrant une rotation solaire. On concatène ensuite temporellement la séquence de profils latitudinaux résultant de cette moyenne en  $\phi$ , pour construire un diagramme latitude-temps. Le pattern global le plus frappant sur la Figure 5.3 est certainement la variation cyclique

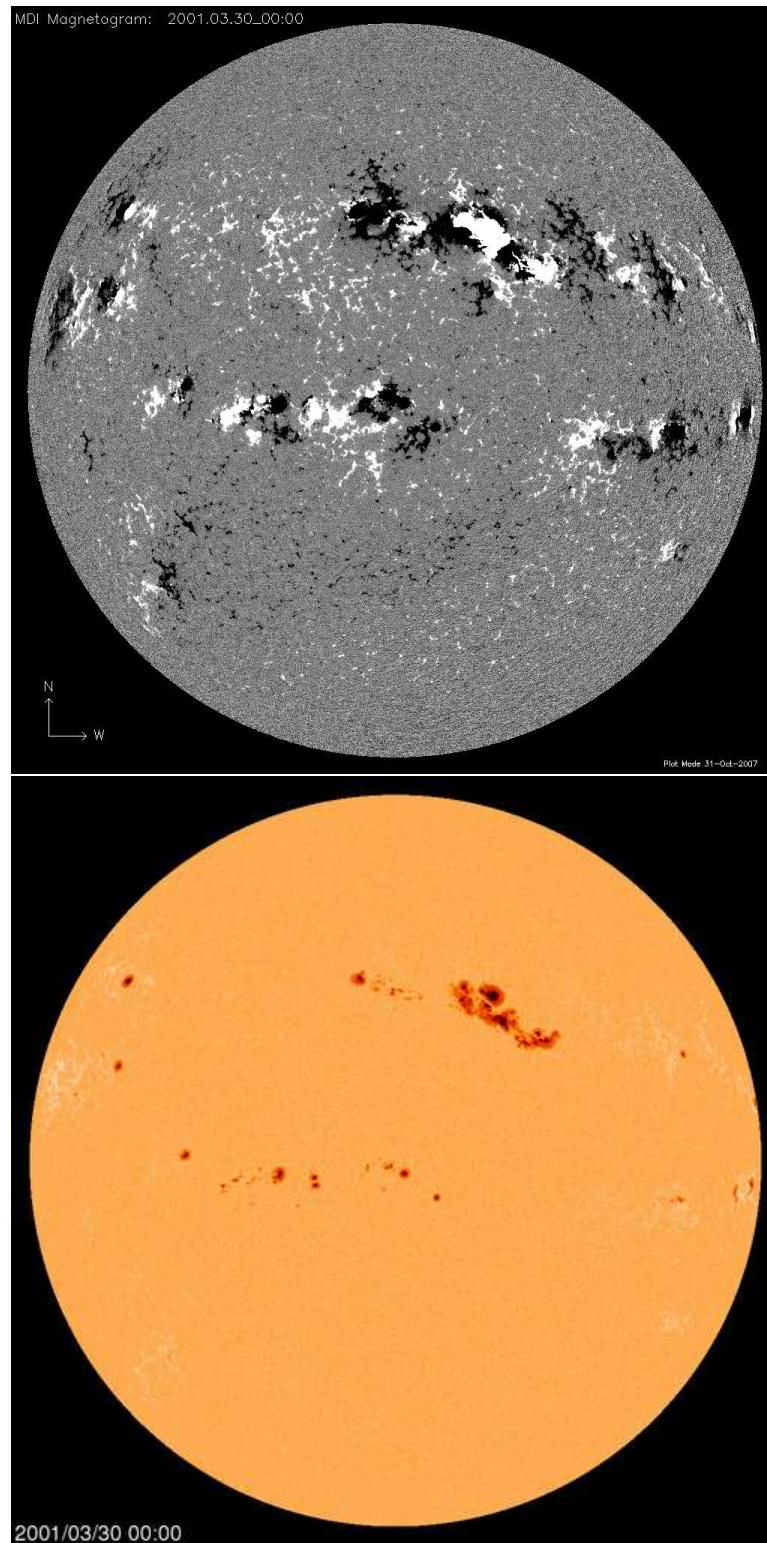


Figure 5.2: Magnétogramme (en haut) et image dans le continu (en bas) du soleil le 30 mars 2001, observé par l'instrument MDI à bord de la mission SoHO. L'axe de rotation est vertical sur les deux images. Images dans le domaine public, téléchargées du site Web de la mission SoHO: <http://sohowww.nascom.nasa.gov>

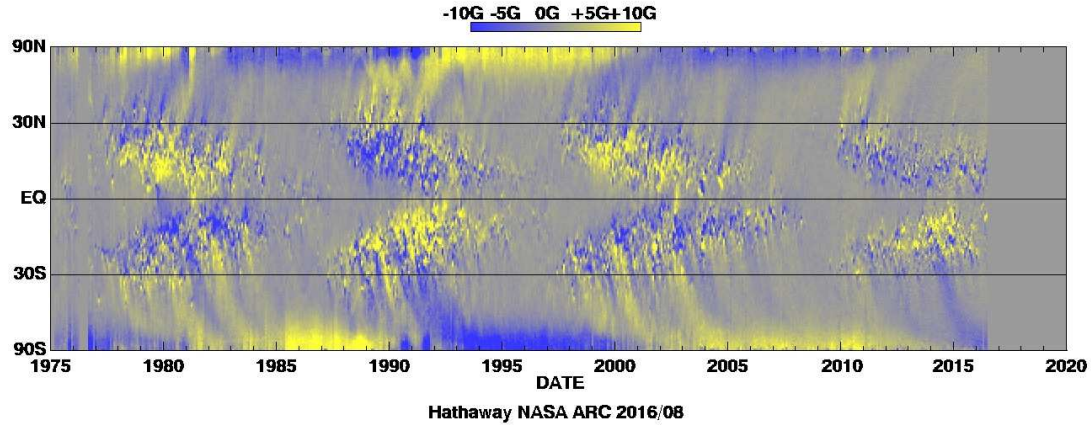


Figure 5.3: Un magnétogramme synoptique couvrant les quatre derniers cycles des taches, incluant le cycle 24 toujours en cours. La composante radiale du champ magnétique photosphérique est moyennée sur une rotation solaire, et les profils latitudinaux en résultant sont concaténés pour former ce diagramme latitude-temps. Rappel:  $1\text{T} \equiv 10^4 \text{ Gauss}$ . Donnée et graphisme par David Hathaway, NASA/Ames, en domaine public: [<http://solarscience.msfc.nasa.gov/images/magbfly.jpg>]

sur une période de  $\sim 22$  yr ans, les inversions de polarités magnétique les accompagnants, et l'antisymétrie du champ par rapport au plan équatorial. La composante dipolaire du champ magnétique solaire est également clairement visible, et très fortement concentrée dans les régions polaires.

Le signal magnétique présent aux basses latitudes de chaque coté de l'équateur est l'empreinte magnétographique des taches solaires. Bien que leurs champs soient très intenses ( $\sim 0.1 \text{ T}$ ), leur tendance à apparaître en paires de polarités magnétiques opposées, approximativement alignées à la direction Est-Ouest, a pour conséquence qu'une moyenne zonale annule (presque) leur contribution. En début de cycle (e.g., 1976, 1986, 1997, 2010 sur la Fig. 5.3), les taches sont observées à relativement hautes latitudes héliocentriques ( $\sim 40^\circ$ ) mais émergent à des latitudes de plus en plus basses à mesure que le cycle avance, jusqu'à ce qu'en fin de cycle on les observe très près de l'équateur, tandis que les taches du prochain cycle commencent déjà à apparaître aux latitudes avoisinant  $\sim 40^\circ$ . Ceci résulte en un pattern spatiotemporel appelé *diagramme papillon*, qu'on croit refléter une migration vers l'équateur des systèmes de flux magnétique toroidal hémisphériques à l'intérieur du soleil, d'où originent ultimement les taches. Le maximum du cycle, tel que mesuré par le nombre de Wolf, se produit à mi-chemin de chaque papillon, lorsque la couverture surfacique des taches est maximale aux alentours de  $\pm 15$  degrés en latitude, soit ici en 1980, 1991, 2002 et début 2015.

Aux hautes latitudes héliocentriques ( $\gtrsim 50^\circ$ ), le magnétogramme synoptique est dominé par une composante dipolaire bien définie, le champ magnétique y atteignant une intensité  $\sim 10^{-3} \text{ T}$ , en inversant sa polarité environ au maximum du cycle des taches. Par exemple, durant le cycle 1976–1986 le champ toroidal était négatif dans l'hémisphère Nord, et le champ radial de la calotte polaire est passé d'une polarité magnétique positive à négative; ceci suggère que le dipôle de surface retarde sur le champ toroidal interne par un intervalle de phase  $\Delta\varphi \simeq \pi/2$ .

Aux mi-latitudes, on observe principalement une dérive vers les pôles de champs magnétiques originant des basses latitudes suite à la désaggrégation des taches et régions actives. Ce transport et cette accumulation aux pôles du flux magnétique provenant des régions actives pourraient fort bien contribuer à l'inversion de polarité du dipôle solaire, et il existe des modèles du

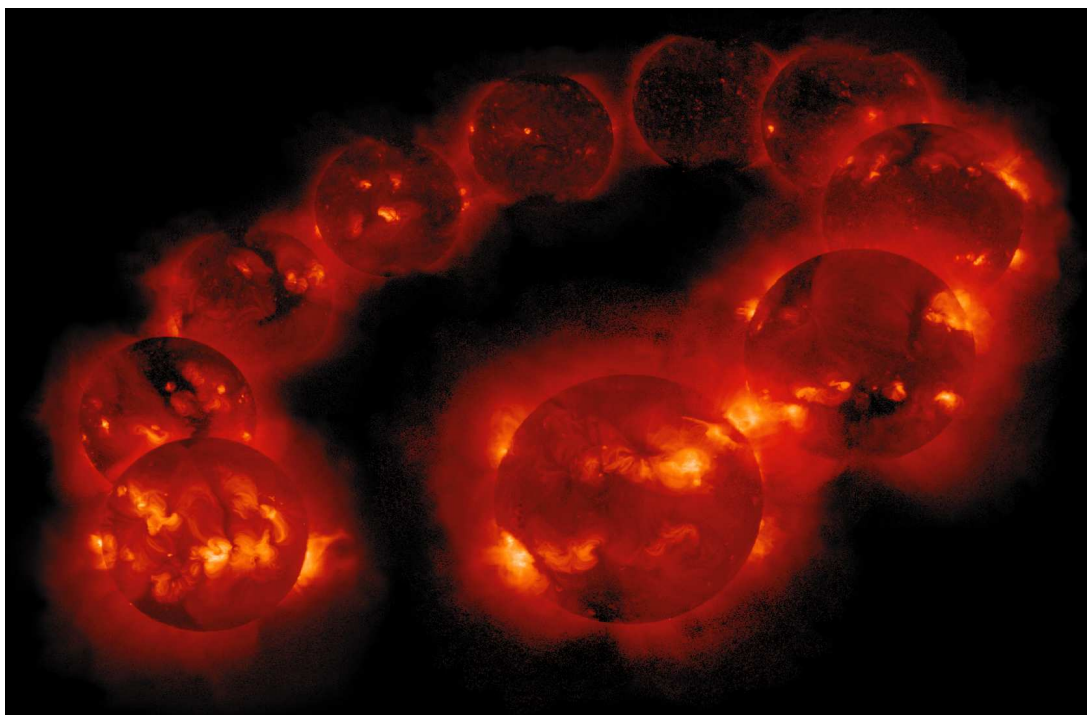


Figure 5.4: Émission en rayons-X par la couronne solaire, d’une maximum du cycle des taches au suivant. Les images sont séparées d’un an, allant de 1991 à gauche à 2000 à droite. Le minimum d’activité (entre le cycle numéro 22 et le 23) est en 1996, correspondant à l’image la plus “éloignée”. Image téléchargée de la Yohkoh Legacy Archive à la Montana State University: <http://solar.physics.montana.edu/ylegacy>

cycle solaire basés sur ce mécanisme; on y reviendra brièvement plus loin.

Un champ magnétique dipolaire de  $\sim 10^{-3}$  T concentré dans une calotte de largeur angulaire  $\sim 30^\circ$ , comme on le déduirait de la Fig. 5.3, correspond à un flux radial de  $\sim 10^{14}$  Wb. Le flux combiné de toutes les polarités arrières des groupes de taches émergeant durant un demi-cycle magnétique monte à quelques  $10^{17}$  Wb pour un cycle typique. Si ce flux est considéré un bon indicateur de l’intensité de la composante magnétique toroidale interne, alors on en concluerait que cette dernière domine le champ interne total.

Le champ magnétique du soleil structure son atmosphère jusque dans la couronne, et représente la source d’énergie et le moteur dynamique de tous les phénomènes définissant l’activité solaire. Ceci inclut, entre autre, l’émission radiative aux courtes longueurs d’onde (voir Fig. 3.2). La Figure 5.4 montre une séquence d’images en rayons-X “mous” ( $\lambda \sim 10 \text{ \AA}$ ) prises par le satellite Yohkoh, chacune séparée de la suivante par un an, débutant en 1991 en bas à gauche. La séquence débute au maximum du cycle 22, et se termine au maximum du cycle 23. L’émission X est dominée par le champ magnétique des régions actives, et donc montre une forte variation avec la phase du cycle. Cependant même au minimum d’activité une émission diffuse est présente, conséquence du magnétisme aux petites échelles spatiales, qui est présent en tout temps.

### 5.1.3 Cycles magnétique stellaires

Contrairement au cas très particulier du soleil (en raison de sa proximité aux standards astronomiques), la photosphère des autres étoiles ne peut pas être résolue spatialement et donc il n’est pas possible en général d’y distinguer directement des taches ou autres structures

magnétiques. La spectropolarimétrie ne produit des résultats probant que si l'étoile possède un champ magnétique de forte intensité aux grandes échelles spatiales; en effet, le signal en polarisation d'une paire de taches de polarités opposées produit une annulation mutuelle lorsqu'intégré sur la face visible de l'étoile. On peut cependant déduire la présence de champ magnétiques indirectement, via bon nombre d'observations incluant: (1) la modulation rotationnelle que les taches produisent dans les mesures photométriques; (2) des signaux de types éruptifs aux courtes longueurs d'ondes, ainsi que dans le domaine radio; (3) la variabilité dans des raies spectrales sensibles à la présence de champ magnétique. À date, de telles indications suggérant la présence de magnétisme ont été détectées dans *toutes* les étoiles de type solaire ayant été observées avec des instruments suffisamment sensibles. Le soleil est vraiment typique d'une étoile de type solaire!

Un type d'observation stellaire particulièrement intéressant à ce niveau est l'émission dans le coeur des raies spectrales H et K du CaII (396.8nm et 393.4nm, respectivement). Dans la photosphère solaire, cette émission est associée au chauffage non-radiatif de la haute atmosphère, et montre une très bonne corrélation avec le flux magnétique photosphérique local. En 1968 à l'Observatoire du Mt Wilson, Olin C. Wilson (1909–94) commença à mesurer le flux des raies CaII H+K dans un échantillon d'étoiles de type solaire, un travail de moine qu'a perpétué un brave groupe de collaborateurs infatigables pendant trois décennies. Le résultat de ce labeur collectif est une archive de séquences temporelles d'émission en CaII H+K pour 111 étoiles de types spectraux allant de F2 à M2, certaines observées pendant plus de 40 ans. Un second programme semblable basé à l'Observatoire de Lowell continue ces observations depuis l'arrêt du programme Mt-Wilson, ce qui fait que pour certaines étoiles les séquences temporelles d'émission en Ca H+K couvrent plus de 50 ans!

La Figure 5.5 montre un échantillon représentatif de séquences temporelles de l'indice du Calcium  $S$ , mesurant le rapport de l'émission dans le coeur des raies sur celle du continu avoisinant. Certaines montrent des cycles réguliers de type solaire (environ 60% de l'échantillon), d'autres des variations plus irrégulières (25%) parfois accompagnées de dérives à long terme, tandis que quelques unes (15%) ont hérité du titre de "flatliners". Même chez ces dernières, il ne faut pas perdre de vue que la simple présence d'une émission détectable en Ca H+K est un signe d'activité magnétique; la constance de l'émission indique simplement que le champ magnétique de ces étoiles n'est pas sujet à des variations cycliques.

Dans les étoiles montrant une variation cyclique nette, il devient alors possible d'examiner la variation de la période du cycle magnétique en fonction du taux de rotation. La Figure 5.6 illustre l'interprétation classique de ces observations, soit que les étoiles se séparent en deux branches, chacune montrant une augmentation claire de la période du cycle avec la période de rotation. La branche dite "active" regroupe surtout des étoiles jeunes en rotation rapide, tandis que la branche dite "inactive" hérite des étoiles plus vieilles et des cycles secondaires observés dans certaines étoiles dont le cycle principal se trouve sur la branche active. Cette interprétation laisse cependant le soleil dans un "no man's land" entre les deux branches, forçant l'hypothèse que le soleil représente un cas particulier d'une étoile en train de transiter entre les deux branches; une situation préoccupante. Des réanalyses observationnelles très récentes (voir bibliographie) ont cependant commencé à peupler l'espace entre les branches A et I, et des simulations MHD suggèrent qu'une fois la dépendance de la période du cycle sur la luminosité prise en considération, la période des cycles pourrait fort bien décroître quand la période de rotation augmente. Cependant, le niveau d'activité magnétique même, tel que mesurée par l'émission en Ca H+K, augmente quand la période de rotation  $P_{\text{rot}}$  décroît.

Jusqu'à preuve du contraire, on peut supposer que les cycles magnétiques observés dans les étoiles de type solaire sont dus au même processus dynamo opérant dans le soleil. On verra sous peu que l'action dynamo dépend ultimement de l'action de la force de Coriolis sur les écoulements turbulents dans la zone convective du soleil. Cette influence, rappelez-vous, est mesurée par le Nombre de Rossby (voir §1.4). Cette idée est appuyée par les observations de l'émission en rayons-X des étoiles montrant des signes d'activité magnétique. Les observations solaires nous indiquent que cette émission est dominés par les régions actives, et représentent donc un bon indicateur de l'activité magnétique en général (voir Fig. 5.4). La Figure 5.7

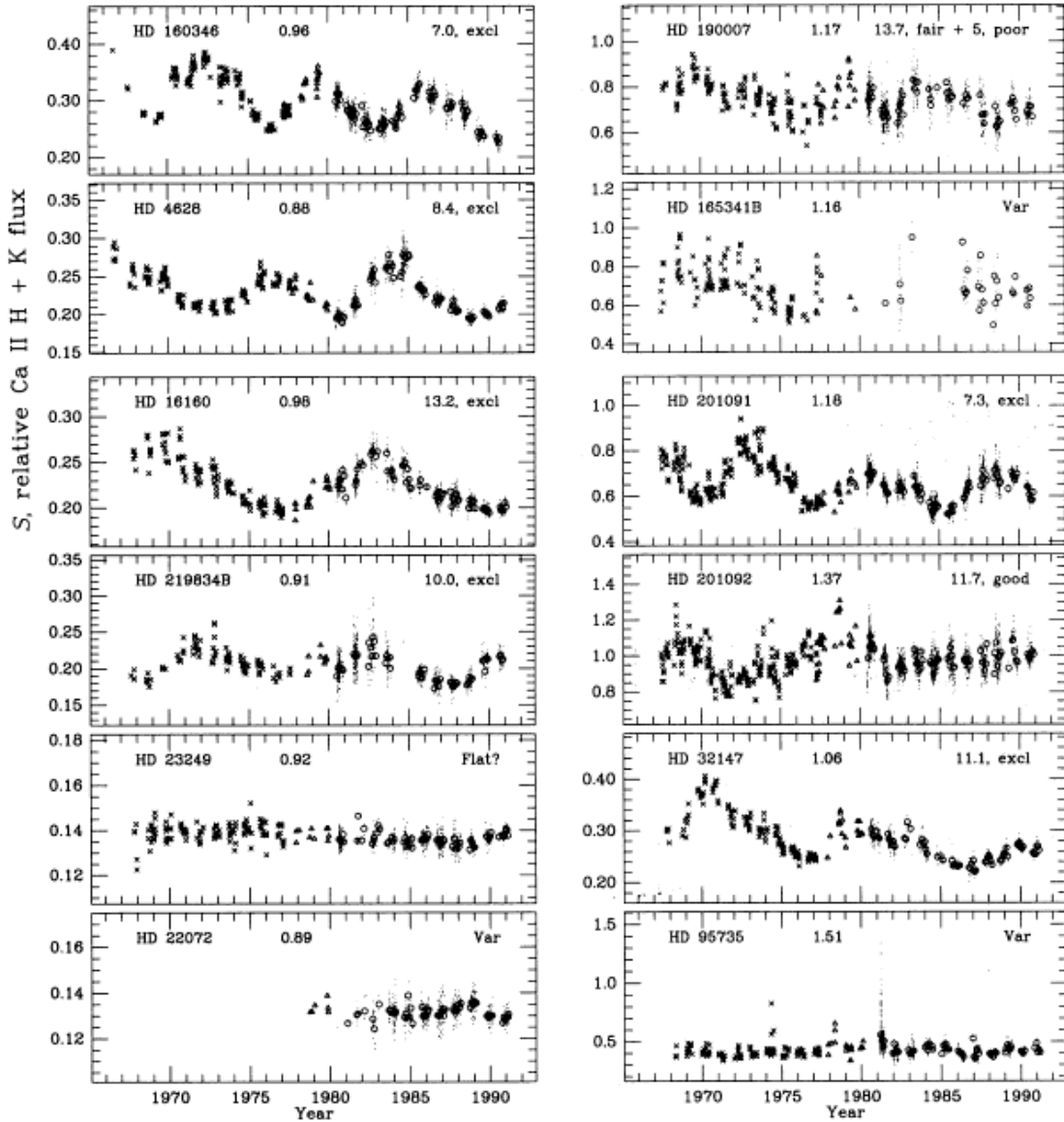


Figure 5.5: Séquences temporelles de l'indice d'émission du Calcium, dans un petit sous-ensemble des étoiles de la base de données du Mt Wilson, mais illustrant néanmoins la variété des variations observées: cycles réguliers ou irréguliers, dérives à long terme, et émission constante. Le soleil, observé comme une étoile, aurait un niveau moyen d'émission  $\langle S_{\odot} \rangle = 0.179$ , et une variation cyclique d'amplitude  $\simeq 0.04$ . Graphique découpés d'une Figure beaucoup plus grande tirée de Baliunas *et al.* 1995, ApJ, **438**, 269 [Figure 1g].



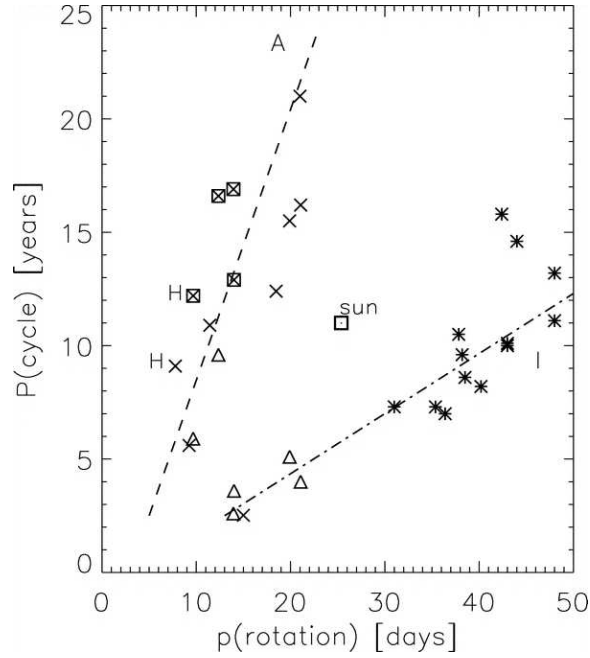


Figure 5.6: Variation de la période des cycles magnétiques stellaires en fonction de la période de rotation. Les  $\times$  correspondent à des étoiles jeunes (celle appartenant aux Hyades indiquées par un “H”), les  $*$  des étoiles du champ, typiquement plus vieilles, et celles de type spectral plus chaud que G2 sont indiquées par un carré. Les  $\Delta$  indiquent des périodes secondaires dans 5 étoiles montrant des cycles magnétiques multipériodiques. Les deux droites indiquent les deux branches “active” (A) et “inactive” (I) d’activité magnétique traditionnellement définies dans ce genre de diagramme (voir texte). Tiré de Böhm-Vitense, ApJ **657**, 486–493 (2007).

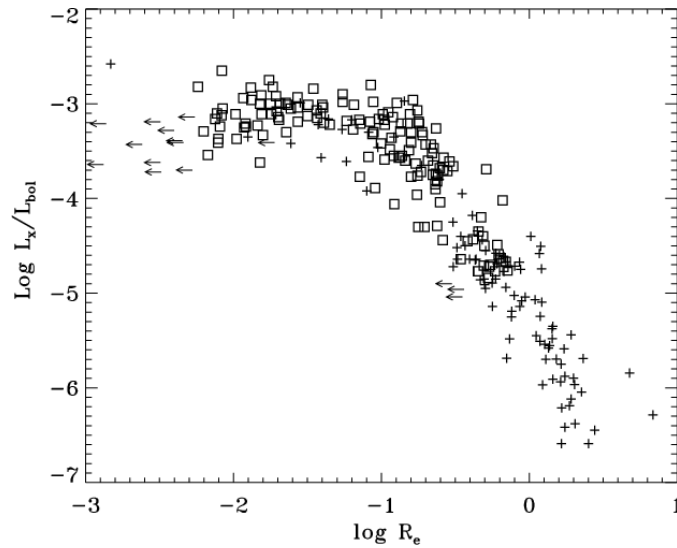


Figure 5.7: Émission en rayons-X dans un échantillon d’étoiles de type solaire. La luminosité en X est ici normalisée par la luminosité bolométrique, c.-à-d. intégrée sur le spectre entier. Les carrés correspondent à des étoiles dans des amas jeunes, tandis que les  $+$  indiquent des étoiles du champ, la plupart plus vieilles. La luminosité en X est approximativement inversement proportionnelle au Nombre de Rossby jusqu’à  $R_o \sim 0.1$ , et sature à des valeurs plus basses de  $R_o$  (voir texte). Tiré de Pizzolato et al., A&A **397**, 147–157 (2003).

montre la variation de l'émission en X, divisée par la luminosité bolométrique de l'étoile, versus le nombre de Rossby estimé via la théorie de la longueur de mélange et des observations de la rotation. Elle regroupe des observations couvrant une vaste gamme de type spectraux, allant de F5 au types K tardifs. Néanmoins, la relation est très bien définie, avec une augmentation du flux X à mesure que  $Ro$  diminue, suivi d'une "saturation" débutant à  $Ro \simeq 0.1$ . Des observations plus récentes montrent que même les étoiles complètement convectives, de type spectraux encore plus tardifs, tombent parfaitement sur cette séquence. Le soleil moyen (i.e., moyenné sur un cycle d'activité) se retrouverait ici en plein centre de la branche ascendante. Il n'est pas clair si la saturation observée pour  $Ro \lesssim 0.1$  reflète une saturation de l'intensité du mécanisme d'émission, de la couverture surfacique des structures émettrices, ou du champ magnétique global produit par la dynamo (ou une combinaison de ces effets).

#### 5.1.4 Magnétisme galactique et au-delà

Les champs magnétiques dans le milieu interstellaire sont détectés via l'émission synchrotron des particules chargées relativistes capturées sur des trajectoires spiralant le long des lignes de champ. De telles mesures sont possibles dans la Voie Lactée, mais aussi dans d'autres galaxies. D'autres techniques, limitées à l'heure actuelle à notre galaxie, incluent la mesure de la polarisation de l'émission stellaire induite par des grains de poussière non-sphériques alignés perpendiculairement au champ magnétique galactique. Sous certaines conditions ces grains sont également détectables directement via la polarisation de leur émission infrarouge. Finalement, la séparation Zeeman de raies spectrales dans le domaine radio a également été mesurée dans des régions du disque galactique plus fortement magnétisées. Dans la mesure où on peut en juger, et tout comme dans les étoiles, la présence de champ magnétique aux échelles galactiques semble être la règle plutôt que l'exception.

Dans les environs galactiques du système solaire, le champ magnétique interstellaire atteint une intensité d'environ  $0.6\text{nT}$ , montant à quelques nT près du centre galactique. Ces valeurs semblent typiques des galaxies spirales, dont les champs se distribuent dans l'intervalle  $0.5\text{--}1.5\text{nT}$ , et atteignant localement  $3\text{nT}$  dans les régions de plus hautes densités dans les bras spiraux. Les champs magnétique galactiques globaux les plus intenses atteignent quelques nT dans les galaxies de type "starburst". Ces valeurs peuvent sembler très faibles, mais elles influent fortement sur la formation des étoiles, sur la distribution et le spectre des rayons cosmiques, et comme agent pouvant équilibrer la gravité dans le milieu interstellaire.

Considérant que toutes les étoiles semblent magnétisées à un degré plus ou moins élevé, et que beaucoup d'étoiles perdent de la masse via des vents —ou en explosant,— il n'est peut-être pas surprenant de mesurer du champ magnétique dans le milieu interstellaire. La Figure 5.8 montre un tracé de l'orientation du champ magnétique de notre galaxie, tel que reconstruit à partir de mesures de la polarisation du rayonnement micro-onde par la poussière du milieu interstellaire. La structure du champ galactique est très complexe et s'étend loin hors du plan du disque, sous la forme de "bulles" et de grands "arcs". On remarque cependant, dans le plan galactique même (forte émission, en orange-rouge), une forte tendance du champ à être contenu dans ce plan. Ce genre d'organisation spatiale bien définie aux échelles galactiques n'est pas limité à la Voie Lactée, mais se retrouve dans la plupart des galaxies spirales. La Figure 5.9 en montre un exemple, sous la forme d'isocontours d'émission radio et de vecteurs indiquant la direction de polarisation, superposés à une image optique de la galaxie spirale M51.

De tels champs, organisés de manière cohérente aux échelles galactiques, sont fort probablement produits par un mécanisme dynamo n'étant fondamentalement pas si différent de celui produisant les champs magnétiques dans les étoiles de type solaire. Aux mesures directes doivent s'ajouter des indications indirectes, comme la collimation des jets galactiques, et certains phénomènes hautement énergétiques observés dans les quasars et les coeurs de galaxies actives. À l'heure actuelle, les modèles physiques les plus crédibles pour expliquer ces phénomènes impliquent tous des champs magnétiques.

Au niveau du milieu intergalactique, les indications de la présence de champs magnétiques sont indirectes, et suggèrent une limite supérieure de  $\sim 10^{-3}\text{nT}$  sur des échelles de l'ordre

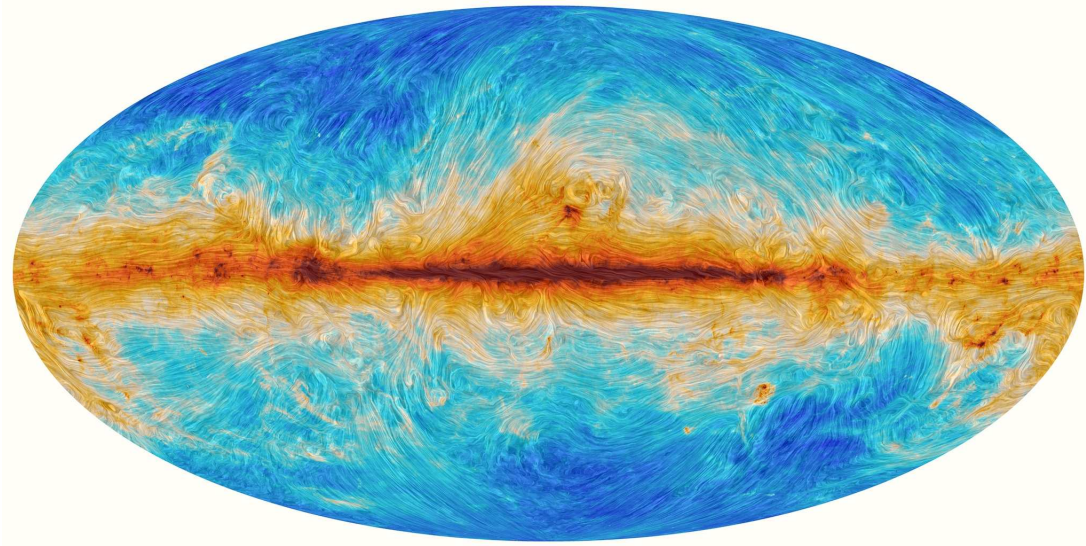


Figure 5.8: Non, ce n'est pas une oeuvre de van Gogh; mais plutôt une image de l'émission micro-onde (combinaison d'observations à 353, 545 et 857 GHz) par la poussière de la Voie Lactée, par le télescope spatial Planck (ESA). La texture van Gogh-ienne superposée à l'échelle de couleur trace l'orientation du plan de polarisation de l'émission micro-onde, due à un alignement des grains (non-sphériques) par le champ magnétique galactique. Image disponible en haute résolution sur le site Web du cours, et téléchargée du site Web de l'ESA: [www.esa.int/spaceinimages/Images/2015/02/Polarised\\_emission\\_from\\_Milky\\_Way\\_dust](http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2015/02/Polarised_emission_from_Milky_Way_dust)

de 100Mpc ou plus. De tels champs magnétiques pourraient être primordiaux ou avoir été entraînés dans l'environnement intergalactique par des vents émanant des galaxies mêmes.

## 5.2 Une dynamo mécanique simple

La conversion inductive d'énergie mécanique en énergie électromagnétique n'a vraiment rien de très exotique; elle est effectuée sans problème chaque jour dans tous les coins de la planète, plus spécifiquement dans chaque centrale hydroélectrique, nucléaire, ou éolienne, produisant ainsi l'électricité que nous consommons si avidement. Le simple exemple considéré ici illustre très bien le fondement électromagnétique de la chose, et s'avère de plus à présenter plusieurs caractéristiques qui referont surface dans les dynamos astrophysiques considérées plus loin.

Parmi les innombrables inventions pratiques de Michael Faraday (1791–1867), on compte un générateur électrique DC basé sur la rotation d'un disque métallique conducteur traversé par un champ magnétique. La Figure 5.10(A) en illustre schématiquement le design: un disque circulaire de rayon  $a$  monté sur un essieu tourne à vitesse angulaire  $\omega$  via un forçage mécanique externe, e.g., Faraday qui tourne une manivelle. Un champ magnétique vertical est appliqué perpendiculairement au disque. Les porteurs de charges électriques libres dans le disque ressentiront conséquemment une force de Lorentz  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  où, initialement du moins,  $\mathbf{v}$  est entièrement dû à la rotation du disque. Travaillant en coordonnées cylindriques  $(s, \phi, z)$  on peut donc écrire:

$$\mathbf{v} = (\omega s)\hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad \mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{e}}_z, \quad (5.2)$$

d'où

$$\mathbf{F} = (q\omega s B_0)\hat{\mathbf{e}}_s. \quad (5.3)$$

Considérons maintenant le circuit électrique formé en connectant le bord du disque à l'essieu, à l'aide de contacts sans friction, afin de ne pas freiner la rotation. Si le contact sur l'essieu

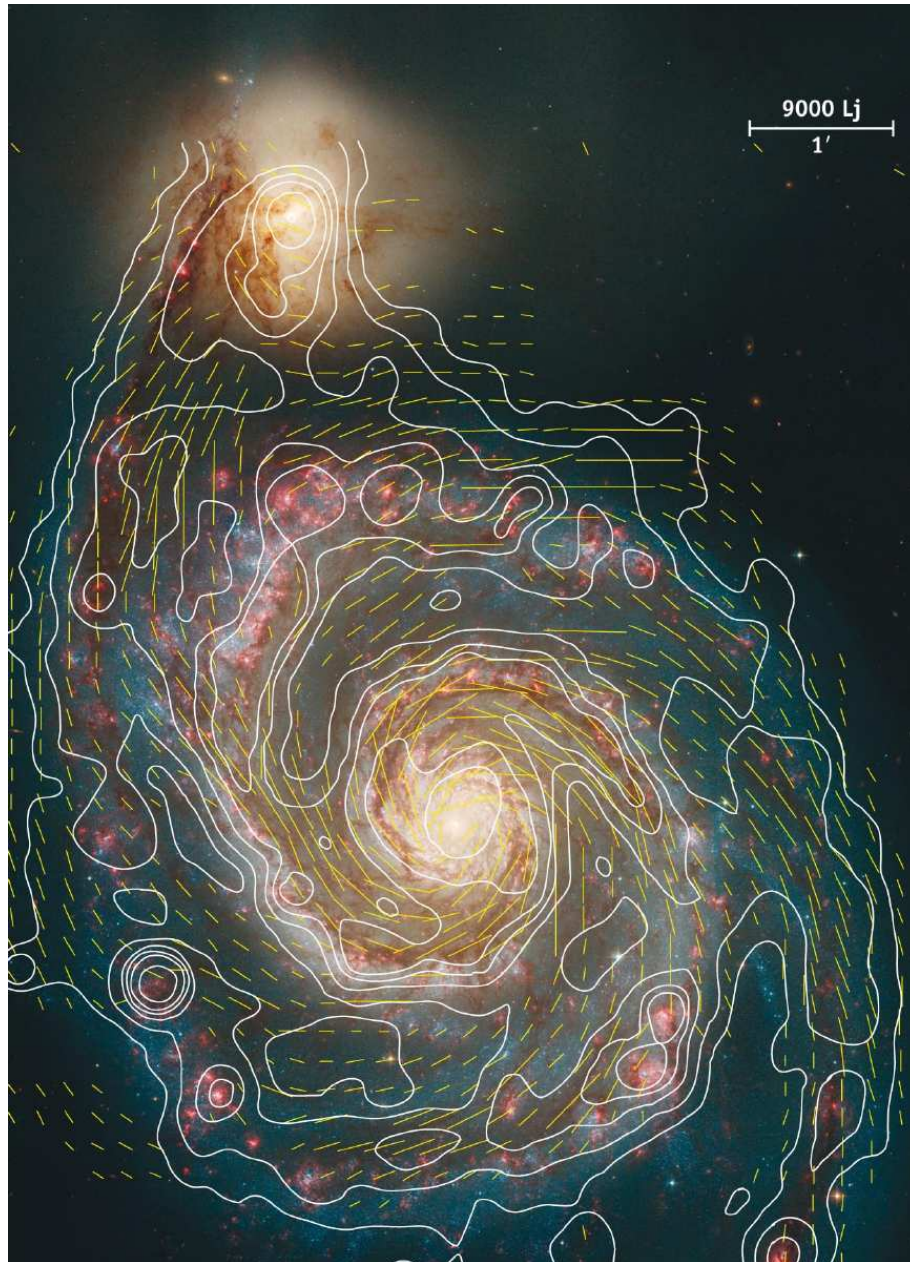


Figure 5.9: Image optique (Hubble) avec contours d'émission radio à  $\lambda = 6$  cm (en blanc) et orientation de la polarisation (segments oranges, dans les deux cas provenant d'observations au VLA). On notera l'organisation aux grandes échelles suivant la structure des bras en spirale. Image tirée de l'article de revue de Rainer Beck sur *Scholarpedia*, cité en bibliographie en fin de chapitre.

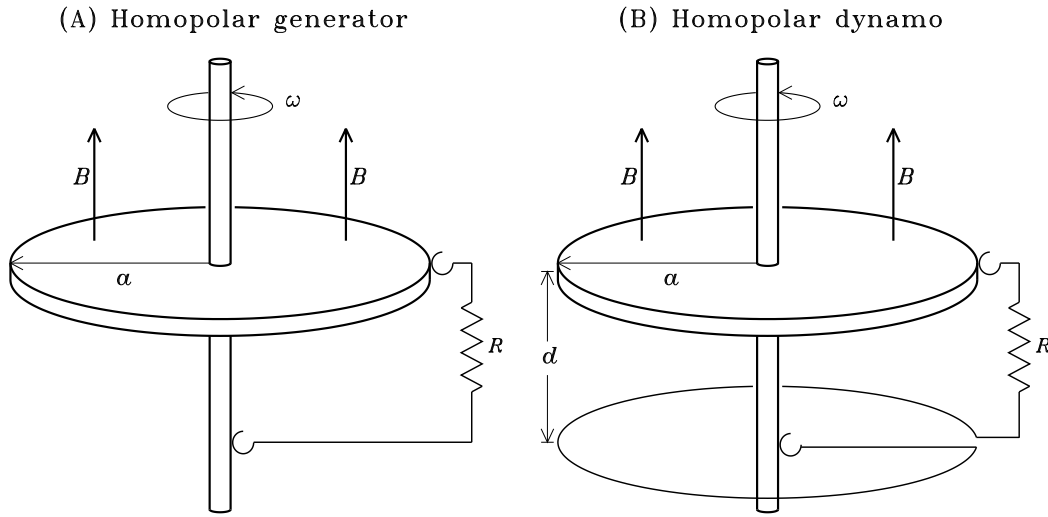


Figure 5.10: Un générateur homopolaire (en A) et une dynamo homopolaire (en B). Un champ magnétique externe  $B$  traverse un disque conducteur en rotation, produisant ainsi une force électromotrice qui propulse un courant électrique radial dans le plan du disque si le bord de ce dernier est connecté à son axe à l'aide d'un fil et de contacts lubrifiés, formant ainsi un circuit fermé de résistance  $R$ . La seule différence entre ces deux dispositifs est que dans le cas de la dynamo, le fil connectant le bord du disque à son axe est enroulé de manière à former une boucle dans un plan parallèle au disque, produisant ainsi un champ magnétique secondaire traversant également ce dernier (voir texte).

est à l'extérieur de la région sous influence du champ magnétique, dans tout le circuit la force magnétique ne joue que dans le disque, où on produit donc une force électromotrice:

$$\mathcal{E} = \oint_{\text{circuit}} \left( \frac{\mathbf{F}}{q} \right) \cdot d\mathbf{l} = \int_0^a \omega B_0 s \, ds = \frac{\omega B_0 a^2}{2}. \quad (5.4)$$

Négligeant pour le moment l'autoinductance du circuit, le courant s'y écoulant est simplement donné par  $I = \mathcal{E}/R$ . Ce dispositif est appelé *générateur homopolaire*. Une modification en apparence mineure peut transformer ce générateur en une *dynamo homopolaire*, soit un dispositif permettant l'amplification d'un champ magnétique et des courants électriques lui étant associés, via la Loi d'Ampère. Plutôt que de connecter le circuit directement au bas de l'essieu, comme sur la 5.10(A), on forme avec le fil une boucle perpendiculaire à l'essieu avant d'établir le contact électrique, comme l'illustre la Figure 5.10(B).

Sortez la main droite de votre poche (ou de votre nez) et vérifiez que le courant électrique circulant dans cette boucle produira un champ magnétique secondaire  $B_*$  orienté dans la même direction que le champ magnétique appliqué extérieurement, et se superposant donc à ce dernier. Indépendamment du détail de la géométrie du système, le flux magnétique à travers le disque associé à ce champ secondaire sera linéairement proportionnel au courant circulant dans la boucle:

$$MI = \Phi = \pi a^2 B_*, \quad (5.5)$$

où la constante de proportionnalité  $M$  est l'inductance, et la seconde égalité résulte d'avoir supposé le champ secondaire constant en intensité et partout perpendiculaire au disque. C'est une approximation, mais ce qui est vraiment important pour tout ce qui suit c'est que  $B_* \propto I$ .

Établissons maintenant une équation différentielle décrivant l'évolution temporelle du courant  $I$ , prenant en considération cette fois la force contre-électromotrice associée à la self-inductance

du circuit; ceci est nécessaire puisque  $\mathbf{B}$ , et donc aussi le courant  $I$ , ne sont plus stationnaires:

$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = RI, \quad (5.6)$$

où  $L$  est le coefficient de self-inductance. Substituant les éqs. (5.4) et (5.5) dans l'expression ci-dessus conduit à:

$$L \frac{dI}{dt} = \frac{\omega a^2}{2} \left( B_0 + \frac{MI}{\pi a^2} \right) - RI, \quad (5.7)$$

indiquant que le courant —et donc le champ magnétique— pourra croître dans le temps en autant qu'initialement,

$$\frac{\omega a^2 B_0}{2} > RI, \quad (5.8)$$

ce qui sera certainement le cas puisque  $I = 0$  à  $t = 0$ . On peut imaginer en arriver à un point où le champ secondaire dépasse en intensité le champ appliqué  $B_0$ , dans lequel cas on peut alors “déconnecter”  $B_0$ ; l'éq. (5.7) se réduit alors à:

$$L \frac{dI}{dt} = \left( \frac{\omega M}{2\pi} - R \right) I, \quad (5.9)$$

qui s'intègre facilement:

$$I(t) = I(t_*) \exp \left[ \frac{1}{L} \left( \frac{\omega M}{2\pi} - R \right) t \right]. \quad (5.10)$$

Ce résultat nous indique que le courant —et donc le champ magnétique— ne pourra croître que si la vitesse angulaire de rotation du disque dépasse une valeur critique donnée par:

$$\omega > \omega_c = \frac{2\pi R}{M}. \quad (5.11)$$

Nous ne venons pas ici d'inventer une variante sur le thème du mouvement perpétuel. L'énergie magnétique associé au champ magnétique amplifié provient des biceps du pauvre étudiant gradué engagé pour tourner la manivelle et garder  $\omega$  à une valeur constante, Faraday étant décédé depuis déjà un bon bout de temps. Je vous laisse vérifier qu'une fois que les charges commencent à se déplacer dans le disque, la force de Lorentz développe une composante dans la direction  $-\phi$  à laquelle est associé un couple de torsion tendant donc à ralentir la rotation; c'est essentiel, puisque c'est le terme en  $-\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}$  dans l'éq. (2.40) qui est responsable du transfert d'énergie vers  $\mathbf{B}$ .

Faraday ne s'en serait probablement jamais douté, mais nous retrouverons plusieurs caractéristiques de cette dynamo homopolaire dans les dynamos astrophysiques étudiées dans ce qui suit, notamment:

1. Il existe une vitesse angulaire critique qui doit être dépassée pour que l'induction surpasse la dissipation Ohmique du circuit, permettant alors la croissance exponentielle du champ magnétique une fois que  $B_0$  est déconnecté.
2. Ce ne sont pas tous les circuits connectant le bord du disque à l'essieu qui produiront cet effet d'amplification; si, par exemple, la boucle avait été enroulée dans le sens contraire autour de l'essieu, le champ induit se serait opposé au champ appliqué;
3. Le champ appliqué  $B_0$  n'est requis que pour enclencher le processus d'amplification.
4. En bout de ligne, la dynamo homopolaire n'est qu'un dispositif permettant de convertir l'énergie mécanique en énergie (électro)magnétique.

Notre défi est donc de produire le même effet d'amplification dans un fluide magnétisé. Dans le régime MHD tout se joue dans le terme d'induction  $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$  au membre de droite de l'équation d'induction (2.9). Sous sa forme la plus simple, le *problème dynamo* consiste donc

à trouver un écoulement  $\mathbf{u}$  qui puisse amplifier, ou du moins soutenir, un champ magnétique contre la dissipation Ohmique —le second terme au membre de droite de l'équation d'induction. Bon nombre d'écoulements sont en mesure d'amplifier un champ magnétique durant une courte période de temps, au bout de laquelle la dissipation ohmique l'emporte et  $\mathbf{B}$  disparaît. Il faudra donc formuler une définition plus contraignante: un écoulement sera considéré une dynamo si  $\mathcal{E}_B > 0$  sur des temps au moins aussi long que le temps caractéristique diffusif du problème, et ce sans apport externe d'énergie magnétique via les frontières du domaine —le fameux terme surfacique  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = 0$  au membre de droite de l'éq. (2.40).

Il convient également de distinguer la version *cinématique* du problème dynamo, dans le cadre de laquelle on recherche simplement un écoulement  $\mathbf{u}$  ayant les caractéristiques requises pour conduire à une amplification du champ magnétique, sans s'inquiéter de son support dynamique ou de la rétroaction du champ magnétique via la force de Lorentz. Nous nous limiterons effectivement à ce régime dans presque tout le présent chapitre.

### 5.3 Le théorème de Cowling

Même en régime cinématique, tester une à une toutes les configurations imaginables d'écoulements astrophysiques dans le but d'en vérifier les propriétés dynamos n'est évidemment pas jouable, d'autant plus que la majorité des systèmes astrophysiques d'intérêt sont caractérisés par des nombres de Reynolds magnétique très élevés, ainsi que des temps de dissipation Ohmique très longs (voir Tableau 2.1). Il est cependant possible de disqualifier *a priori* de vastes classes d'écoulements caractérisées par certaines symétries. Ces démonstrations sont appelées *théorèmes anti-dynamos*, et nous en considérons ici un des plus pertinents au contexte astrophysique.

Le théorème anti-dynamo dit de Cowling (T.G. Cowling, 1906–90) revêt une importance historique particulière, puisque qu'il disqualifie les écoulements 3D axisymétriques, qui sont précisément le genre d'écoulements observés aux plus grandes échelles spatiales dans les étoiles, disques d'accrétion et disques galactiques. Il existe au moins trois preuves mathématiques formelles distinctes du théorème de Cowling, mais on peut en fait y arriver de manière intuitivement satisfaisante<sup>1</sup>.

On suppose d'entrée de jeu qu'il n'existe aucune source de champ magnétique extérieures au domaine spatial considéré. On considère l'action inductive d'un écoulement 3D stationnaire mais axisymétrique sur un champ magnétique également 3D et axisymétrique. Travaillant en coordonnées sphériques polaires, on a donc:

$$\mathbf{u}(r, \theta) = \underbrace{\frac{1}{\rho} \nabla \times (\Psi(r, \theta) \hat{\mathbf{e}}_\phi)}_{\equiv \mathbf{u}_p} + \varpi \Omega(r, \theta) \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (5.12)$$

$$\mathbf{B}(r, \theta, t) = \underbrace{\nabla \times (A(r, \theta, t) \hat{\mathbf{e}}_\phi)}_{\equiv \mathbf{B}_p} + B(r, \theta, t) \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (5.13)$$

où  $\varpi = r \sin \theta$ . Ici le potentiel vecteur  $A$  n'a qu'une composante toroidale décrivant la composante magnétique poloidale, la fonction d'écoulement  $\Psi$  définit l'écoulement dans les plans méridiens  $[r, \theta]$ , et  $\Omega$  est la vitesse angulaire (en  $\text{rad s}^{-1}$ ). Notez que la forme de l'éq. (5.12) assure que  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$ , satisfaisant ainsi la conservation de la masse dans un écoulement compressible stationnaire.

Il s'agit maintenant de séparer l'équation d'induction en deux équations, décrivant l'évolution temporelle des composantes scalaires 2D  $A$  et  $B$ . L'idée est de substituer les éqs. (5.12)–(5.13) dans l'équation d'induction, et de regrouper en une équation tous les termes orientés dans la direction  $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ , et dans une autre les termes orientés perpendiculairement à cette direction. Puisque

<sup>1</sup>Voir l'Annexe C pour une démonstration formelle d'un second théorème anti-dynamo, dit de Zeldovich; la logique physique de sa démonstration est très semblable à une des preuves formelles du théorème de Cowling.

ces deux groupes de termes sont orthogonaux, ils doivent s'annuler séparément, ce qui conduit aux deux équations suivantes:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_p \cdot \nabla\right) (\varpi A) = \varpi \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2}\right) A, \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_p \cdot \nabla\right) \left(\frac{B}{\varpi}\right) &= \frac{\eta}{\varpi} \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2}\right) B \\ &\quad - \left(\frac{B}{\varpi}\right) \nabla \cdot \mathbf{u}_p + \mathbf{B}_p \cdot \nabla \Omega, \end{aligned} \quad (5.15)$$

où on a supposé une diffusivité magnétique  $\eta$  constante, et  $\mathbf{B}_p$  et  $\mathbf{u}_p$  sont des raccourcis notationnels pour le champ magnétique poloidal et l'écoulement méridien. On remarque que le potentiel vecteur  $A$  évolue d'une manière complètement découplée de la composante magnétique toroidale  $B$ , cette dernière étant absente du membre de droite de l'éq. (5.14). Ce n'est pas le cas avec l'évolution de la composante toroidale, qui réagit à la présence du champ poloidal via le terme de cisaillement  $\propto \nabla \Omega$ .

Les membres de gauche des deux expressions ci-dessus sont des dérivées Lagrangienne, mesurant les variations de  $A$  et  $B$  dans un élément de fluide se déplaçant avec l'écoulement. Le premier terme au membre de droite de chacune est l'ennemi, soit la dissipation Ohmique. Le terme suivant au membre de droite de l'éq. (5.15) disparaît pour un écoulement incompressible, et demeure négligeable pour un écoulement subsonique. Le dernier terme, enfin, est un terme source, dans le sens qu'il peut conduire à une croissance de  $B$ , *tant que A est présent*. C'est là exactement la situation du cisaillement d'un champ poloidal par la rotation différentielle, que nous avons considérée à la §2.4, avec une importante exception: ici la dissipation est incluse, et donc le champ poloidal ne sera plus constant (cf. les eqs. (2.34)—(2.35)). Or, il n'y a aucun terme source inductivement équivalent à ce terme de cisaillement au membre de droite de l'éq. (5.14), qui gouverne l'évolution de  $A$ . Ceci implique donc que  $A$  —et donc la composante poloidale du champ magnétique— devra inexorablement se dissiper, après quoi  $B$  devra en faire de même puisqu'il n'y aura alors plus de terme source au membre de droite de l'éq. (5.15).

On en conclut qu'un écoulement axisymétrique ne peut soutenir un champ magnétique axisymétrique face à la dissipation Ohmique, et donc ne peut agir comme une dynamo pour un tel champ magnétique. Le théorème de Cowling n'est pas spécifique à la géométrie sphérique, mais s'applique à tout système écoulement+champ magnétique où  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{B}$  sont invariants sous translation le long du même axe de coordonnées.

Il s'agit donc clairement d'introduire une composante non-axisymétrique à l'écoulement  $\mathbf{u}$ . Que ce soit dans le cas d'une étoile, d'un disque d'accrétion ou même d'une galaxie, au niveau des plus grandes échelles spatiales, c'est difficile à justifier; mais aux petites échelles spatiales c'est plus prometteur, les meilleurs candidats étant:

1. dans les étoiles: la turbulence associée à la convection thermique
2. dans les disques d'accrétion: la turbulence associée au développement nonlinéaire de l'instabilité magnétorotationnelle de Balbus-Hawley (§4.5.1).
3. dans les disques galactique: la turbulence produite par les explosions supernovas.

La turbulence, c'est déjà compliqué en mode purement hydrodynamique, alors imaginez en magnétohydrodynamique, dans un environnement stratifié par la gravité et en rotation... Cependant, ce qui nous sauve ici c'est la très grande disparité d'échelles entre le champ magnétique aux échelles du système, que nous cherchons à modéliser, et cette composante turbulente de l'écoulement dont l'effet inductif s'avère essentiel pour contourner le théorème de Cowling.



## 5.4 Dynamos en champs moyens

La forme même de l'équation d'induction magnétohydrodynamique suggère qu'en présence d'un écoulement vigoureusement turbulent aux petites échelles spatiales, le terme inductif  $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$  devrait naturellement conduire à la production d'une composante magnétique aux échelles spatiales caractérisant l'écoulement  $\mathbf{u}$ . Cependant, sous certaines conditions, la turbulence aux petites échelles spatiales peut également conduire à la production de champ magnétique structuré aux grandes échelles spatiales. C'est en fait l'équivalent de la cascade inverse propulsant les écoulements aux grandes échelles dans un fluide en rotation, comme l'a vu à la §1.5.5. Pour comprendre comment tout cela fonctionne en MHD, il nous faudra donc appliquer à l'équation d'induction la procédure de Reynolds introduite à la §1.5.4 dans un contexte purement hydrodynamique.

### 5.4.1 L'électrodynamique en champs moyens

L'idée fondamentale ici est de décomposer les variables du problème en une partie moyenne, qui varie sur une échelle caractéristique  $L$  comparable à la taille du système physique considéré, et une partie fluctuante à une échelle spatiale  $\lambda \ll L$ :

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}' , \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{b}' . \quad (5.16)$$

L'opérateur de moyenne peut être défini en terme d'une moyenne spatiale, temporelle, ou même d'une moyenne d'ensemble. Aux fins de ce qui suit il est plus naturel de considérer une moyenne spatiale sur une échelle intermédiaire  $\ell$ :

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\ell^3} \int_V A \, d\mathbf{x} . \quad (5.17)$$

qui éventuellement deviendra une moyenne zonale, mais n'anticipons pas à outrance... En présence d'une bonne séparation d'échelles, dans le sens que

$$\lambda \ll \ell \ll L , \quad (5.18)$$

cette décomposition implique que  $\langle \mathbf{u}' \rangle = \langle \mathbf{b}' \rangle = 0$ . Rappelons-nous qu'il ne s'agit pas ici d'une linéarisation, dans le sens qu'aucune contrainte n'est introduite sur les grandeurs relatives des composantes moyennes et fluctuantes.

On substitue maintenant l'éq. (5.16) dans l'équation d'induction (2.9) et on applique l'opérateur de moyenne, ce qui conduit à une équation d'évolution pour la composante moyenne du champ magnétique:

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \mathcal{E} - \eta \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) . \quad (5.19)$$

Si maintenant on soustrait cette expression de l'équation d'induction résultant de la substitution de (5.16) dans (2.9) *sans* en voir pris la moyenne, on obtient une équation d'évolution pour la composante fluctuante du champ magnétique:

$$\frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{u} \rangle \times \mathbf{b}' + \mathbf{u}' \times \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{G} - \eta \nabla \times \mathbf{b}') , \quad (5.20)$$

où on a défini

$$\mathcal{E} = \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle , \quad \text{et} \quad \mathbf{G} = \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' - \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle . \quad (5.21)$$

Le résultat crucial ici est que l'éq. (5.19) contient maintenant un terme source,  $\mathcal{E}$ , déterminé par la moyenne des corrélations croisées entre les fluctuations de vitesse et de champ magnétique (un peu comme dans le cas du tenseur des stress de Reynolds,  $\langle u'_i u'_j \rangle$ ). Il est important de comprendre que ce terme ne sera pas nécessairement nul même si les moyennes individuelles de  $\mathbf{u}'$  et  $\mathbf{b}'$  le sont. Le terme  $\mathcal{E}$  est appelé *force électromotrice moyenne*, et jouera un rôle central dans tout ce qui suit.

Bon, toute l'idée de l'approche statistique à la turbulence est d'éviter d'avoir à composer explicitement avec les petites échelles. Donc pas question d'essayer de solutionner explicitement les éqs. (5.19) et (5.20) comme un système couplé. Nous faisons cependant alors face à un problème familier: l'éq. (5.19) est en soi un système de trois équations différentielles, une par composante de  $\langle \mathbf{B} \rangle$ , mais qui implique six inconnues, soit les trois composantes de  $\langle \mathbf{B} \rangle$  et les trois de  $\mathbf{b}'$  (laissant  $\mathbf{u}'$  hors du portrait pour le moment). Trois équations, six inconnues; il faudra donc, pour solutionner l'éq. (5.19), trouver une manière d'exprimer  $\mathcal{E}$  en terme de  $\langle \mathbf{u} \rangle$  et  $\langle \mathbf{B} \rangle$ . C'est essentiellement l'approche que nous avons suivie à la §1.5.4 en exprimant le tenseur des stress de Reynolds comme une fonction de l'écoulement moyen.

Il faut d'abord noter que l'éq. (5.20) est *linéaire* en  $\mathbf{b}'$ , avec le terme  $\nabla \times (\mathbf{u}' \times \langle \mathbf{B} \rangle)$  agissant comme terme source. Par conséquent il doit exister une relation linéaire entre  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{b}'$ , et donc également entre  $\mathbf{B}$  et  $\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle$ . Cette dernière relation peut s'exprimer sous la forme du développement en série suivant:

$$\mathcal{E}_i = a_{ij} \langle B \rangle_j + b_{ijk} \frac{\partial \langle B \rangle_j}{\partial x_k} + c_{ijkl} \frac{\partial^2 \langle B \rangle_j}{\partial x_j \partial x_k} + \dots, \quad (5.22)$$

où la convention de sommation sur les indices répétés est en vigueur. Les tenseurs  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , etc, sont des tenseurs qui peuvent dépendre de  $\langle \mathbf{u} \rangle$ , de la statistique de l'écoulement aux petites échelles  $\mathbf{u}'$ , et possiblement de la diffusivité  $\eta$ —mais *pas* de  $\langle \mathbf{B} \rangle$ . C'est dans ce sens qu'on peut dire que les éqs. (5.19) et (5.22) forment maintenant un ensemble complet et fermé d'équations d'évolution pour  $\langle \mathbf{B} \rangle$ .

La convergence du développement en série ci-dessus sera assurée dans les situations où une bonne séparation d'échelles caractérise le système. Dans de tels cas on peut légitimement s'attendre à ce que chacune des dérivées d'ordre successivement plus élevé dans l'éq. (5.22) est plus petite que la précédente par un facteur de l'ordre de  $\lambda/L \ll 1$ . Avec un peu de chance, on pourrait espérer que le membre de droite de l'éq. (5.22) soit dominé par les quelques premiers termes.

Conservons les deux premiers termes du développement tensoriel (5.22) et séparons les tenseurs en leurs parties symétriques et antisymétriques (un peu comme on l'avait fait dans le cas du cisaillement plan introduit à la §1.2.3):

$$\xi = \underbrace{\alpha \cdot \langle \mathbf{B} \rangle}_{\text{Effet } \alpha} + \underbrace{\gamma \times \langle \mathbf{B} \rangle}_{\text{Pompage turbulent}} - \underbrace{\beta \cdot (\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle)}_{\text{Diffusivité turbulente}} - \delta \times (\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) - \kappa \cdot (\nabla \langle \mathbf{B} \rangle) \quad (5.23)$$

Ici le tenseur  $\alpha$  correspond à la partie symétrique du tenseur  $\mathbf{a}$ , le vecteur  $\gamma$  regroupe ses trois composante antisymétriques indépendantes, et le tenseur  $\beta$  est la partie symétrique du tenseur  $\mathbf{b}$ :

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}), \quad (5.24)$$

$$\gamma_k = -\frac{1}{2}\epsilon_{kij}a_{ij}, \quad (5.25)$$

$$\beta_{ij} = \frac{1}{4}(\epsilon_{ikl}b_{jkl} + \epsilon_{jkl}b_{ikl}), \quad (5.26)$$

où  $\epsilon_{ijk}$  est le tenseur de Levi-Civita<sup>2</sup>. Les deux derniers termes au membre de droite de (5.23) héritent des parties antisymétriques du tenseur  $\mathbf{b}$ , et ne seront plus considérées dans ce qui

<sup>2</sup>Ce tenseur est défini de la manière suivante:  $\epsilon_{ijk} = 0$  si  $i, j, k$  ne sont pas tous distincts, et  $\epsilon_{ijk} = +1$  or  $-1$  si  $i, j, k$  sont tous distincts et ordonnés de manière cyclique ou acyclique respectivement (i.e. nombre pair ou impair de permutations de deux indices, à partir de  $ijk = 123$ ). Une identité tensorielle particulièrement utile ici est:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl},$$

avec comme toujours sommation implicite sur les indices répétés, et  $\delta_{ij}$  est le delta de Kronecker habituel, i.e.,  $\delta_{ij} = 0$  sauf si  $i = j$ , dans lequel cas  $\delta_{ij} = 1$ . Rappelons également qu'en notation indicelle,

$$\epsilon_{ijk}A_jB_k \equiv \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad \text{et} \quad \epsilon_{ijk}\partial_jB_k \equiv \nabla \times \mathbf{B}.$$

suit, la quasi-totalité des modèles dynamo en champ moyen sur le marché se limitant aux trois premiers termes au membre de droite de l'éq. (5.23).

### 5.4.2 Parenthèse terminologique sur la statistique de la turbulence

Avant d'aller plus loin un petit rappel terminologique est requis concernant certaines propriétés statistiques d'un écoulement turbulent. La statistique d'un champ de vitesse turbulent peut se quantifier en termes de la fonction de *densité de probabilité* (ci-après FDP) de ses composantes et/ou des corrélations entre ses composantes (e.g.,  $u'_x u'_y$ ). Considérons par exemple la composante en  $x$  de  $\mathbf{u}'$ ; la FDP  $f(u'_x)du'_x$  mesure la probabilité de mesurer, dans un échantillonnage de  $u'_x$ , une valeur dans l'intervalle  $[u'_x, u'_x + du'_x]$ . Il est important de réaliser qu'une telle PDF existe et peut couvrir une grande plage en  $u'_x$ , même si  $\langle u'_x \rangle = 0$ . Introduisons maintenant les définitions suivantes: Un champ vectoriel (turbulent) est dit:

1. **stationnaire**, si les FDPs de ses composantes sont indépendantes du temps;
2. **homogène**, si les FDPs de ses composantes sont indépendantes de la position (i.e., invariants sous translation);
3. **isotropes**, si les FDPs de ses composantes sont indépendantes de l'orientation du système de coordonnées (i.e., invariants sous rotation);
4. **symétriques sous réflexion**, si les FDPs de ses composantes sont invariantes sous changement de parité, i.e., sous passage d'un système de coordonnées "main droite", à "main gauche" (e.g.,  $x \rightarrow -x$ ).

### 5.4.3 L'effet- $\alpha$

Commençons par examiner de plus près la contribution ( $\mathcal{E}^{(1)}$ ) à la force électromotrice turbulente totale  $\mathcal{E}$  provenant du premier terme au membre de droite de l'éq. (??), impliquant le tenseur d'ordre deux  $\alpha$ :

$$\mathcal{E}^{(1)} = \alpha \cdot \langle \mathbf{B} \rangle . \quad (5.27)$$

La nature du tenseur  $\alpha$  se perçoit le plus facilement dans une situation où l'écoulement aux petites échelles,  $\mathbf{u}'$  est isotropique. Le tenseur  $\alpha$  ne peut alors qu'être isotropique lui aussi, i.e.,  $\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}$ , ce qui réduit l'éq. (5.27) à

$$\mathcal{E}^{(1)} = \alpha \langle \mathbf{B} \rangle . \quad (5.28)$$

Cette force électromotrice produira une densité de courant moyenne donnée par la Loi d'Ohm:

$$\mathbf{j}^{(1)} = \alpha \sigma_e \langle \mathbf{B} \rangle , \quad (5.29)$$

où  $\sigma_e$  est la conductivité électrique. Un  $\alpha$  non-nul implique donc la présence d'un courant électrique moyen *parallèle* au champ magnétique moyen; c'est le très fameux *effet- $\alpha$* . On est ici en présence d'une situation très différente de celle décrite par le terme  $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$  dans l'équation d'induction, pour lequel le courant induit (total)  $\sigma_e (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$  est *perpendiculaire* au champ magnétique (total).

Pausons pour examiner l'image physique de ce processus inductif telle qu'initialement proposée en 1955 par E.N. Parker —oui, le même Parker qui a pondé la solution de vent solaire transsonique du chapitre 3. On considère une bulle convective ascendante imbuée d'un mouvement cyclonique de rotation par rapport à son axe d'ascension, disons antihoraire vu du dessous. Dans la limite où le champ magnétique est gelé dans le fluide, cette bulle ascendante entraînera vers le haut toute ligne de champ la traversant horizontalement, tout en lui imposant une déformation hors du plan défini par la ligne de champ et la direction d'ascension; la Figure 5.11 illustre schématiquement cette double déformation. Supposons maintenant que la boucle, comme sur la Fig. 5.11, a été pivotée d'un quart de tour suite à cette déformation. Un courant

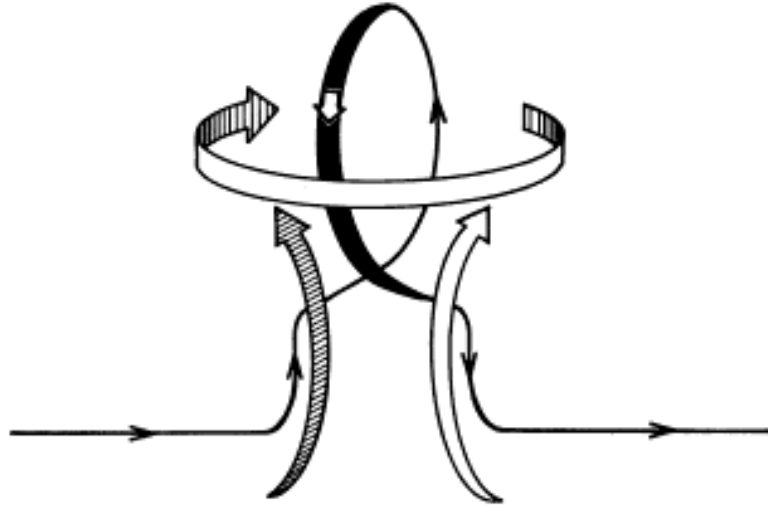


Figure 5.11: Représentation schématique d'une ligne de champ magnétique entraînée par un courant ascendant cyclonique. La boucle ayant pivoté ici de 90 degrés par rapport au plan de la page, la règle de la main droite implique que la composante de courant électrique y étant associée pointe ici de la gauche vers la droite dans le plan de la page, soit dans la direction du champ magnétique uniforme initial. [tiré de: Parker 1970, *The Astrophysical Journal*, vol. **162**, Figure 1].

électrique  $\propto \nabla \times \mathbf{B}$  est associé à cette boucle, et pointe ici dans la même direction que le champ magnétique initialement horizontal. Ceci demeurera le cas tant que la rotation cyclonique de la boucle demeure inférieure à  $\pi$ , mais la composante zonale de ce courant pointerait en direction opposée si la rotation dépasse  $\pi$ . Cette dernière situation ne se produira pas si la déformation du champ toroidal demeure de relativement faible amplitude.

Imaginons maintenant, en géométrie sphérique, l'action d'un grand nombre de ces bulles convectives cycloniques apparaissant à des longitudes et temps aléatoires, en présence d'un champ magnétique purement toroidal, comme l'illustre la Fig. 5.12. Chacune de ces bulles produira une boucle ayant une projection non-nulle dans les plans méridiens  $[r, \theta]$ . Ici le champ toroidal et la cyclonicité changent tous les deux de signe d'un hémisphère à l'autre, donc dans les deux hémisphères la densité de courant ainsi produite pointerait dans la même direction zonale, ici celle du champ toroidal dans l'hémisphère Sud. Dans une telle situation, l'effet collectif de toutes les bulles cycloniques est donc de produire, via la Loi d'Ampère, une composante magnétique poloidale d'intensité proportionnelle à celle de la composante toroidale sous-jacente.

De toute évidence, pour que ce processus fonctionne, il est essentiel d'avoir une cohérence hémisphérique dans la direction de la torsion du champ magnétique toroidal. La cyclonicité imposée par la force de Coriolis est clairement un agent prometteur à cette fin. De manière plus mathématique, toute turbulence pour laquelle le tenseur  $\alpha$  n'est pas invariant sous réflexion peut faire l'affaire. C'est le cas sur la Fig. 5.11, où il existe une forte corrélation entre le mouvement vertical divergeant et la rotation dans le plan horizontal, imposée par la force de Coriolis dans le régime  $Ro \ll 1$ . L'importance dynamique d'une telle corrélation est quantifiée par l'hélicité moyenne de l'écoulement turbulent,  $\langle \mathbf{u}' \cdot (\nabla \times \mathbf{u}') \rangle$ . On verra sous peu qu'il existe une relation directe entre l'hélicité et l'effet- $\alpha$ .

Une corrélation hémisphérique de type cyclonique est donc essentielle, mais n'est pas suffisante en soi; la déformation de lignes de champ par les bulles cycloniques doit demeurer relativement faible, sinon les courants induits se retrouveront à pointer dans toutes les directions, sans produire de densité de courant nette aux grandes échelles spatiales, comme ils le font sur la Fig. 5.12. Trois situations physiques distinctes peuvent satisfaire cette contrainte:

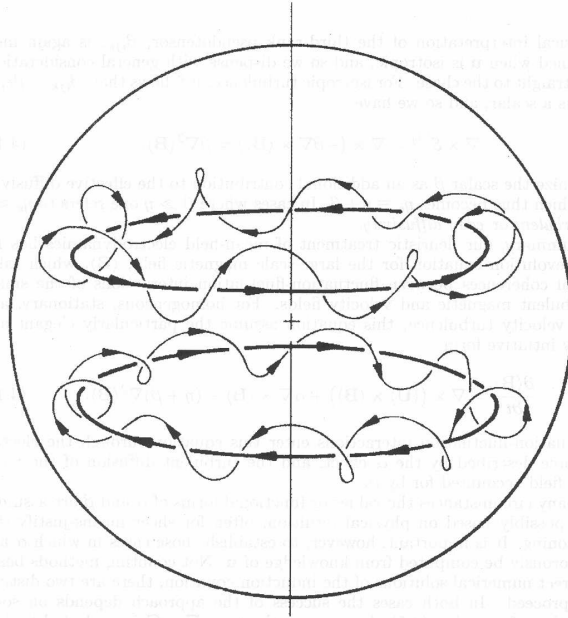


Figure 5.12: Représentation schématique d'un champ toroidal (traits épais) déformé par des bulles cycloniques, chacune déformant le champ toroidal en boucles dans les plans méridiens (traits minces). L'effet collectif de ces déformations est la production d'un champ torsadé auquel est associé une densité de courant ayant une composante pointant dans la direction du champ toroidal, indépendamment du signe de ce dernier. Une telle densité de courant produira une composante magnétique poloidale aux grandes échelles spatiales, en vertu de la Loi d'Ampère. [tiré de: Parker 1979, *Cosmical Magnetic Fields*, Oxford: Clarendon Press, p. 548].

1. Une turbulence dont le temps de corrélation est significativement plus petit que son temps de retournement; la bulle cyclonique se dissipe alors sans avoir eu le temps de déformer excessivement le champ magnétique.
2. Un nombre de Reynolds magnétique  $\ll 1$ , impliquant que la ligne de champ n'est que faiblement gelée dans le plasma et donc ne se déforme que très peu sous l'action de l'écoulement;
3. Un champ magnétique suffisamment intense pour que la tension magnétique freine rapidement la déformation des lignes de champ.

Il existe quelques situations dans le cadre desquelles on peut calculer formellement la forme des fonctions scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  si les propriétés statistiques de  $\mathbf{u}'$  sont connues. En bref, ces approches se basent sur un traitement de l'éq. (5.20) dans des situations où soit le terme  $\mathbf{G}$ , soit le terme  $\propto \nabla \times \mathbf{b}'$ , peut être omis au membre de droite. La bibliographie en fin de chapitre donne quelques bons points d'entrée dans cette littérature très technique. Malheureusement, les formes de la turbulence auxquelles correspondent ces régimes mathématiques ne correspondent pas vraiment à celles attendues dans les zones convectives solaire et stellaires. L'approche probablement la plus crédible est connue sous le nom de "Second-Order Correlation Approximation" (SOCA), applicable à la turbulence faiblement inhomogène et quasi-isotropique, et où en première approximation on simplifie les corrélations croisées entre les composantes turbulentes de l'écoulement en supposant:

$$\langle u'_j u'_k \rangle = \frac{1}{3} \langle (\mathbf{u}')^2 \rangle \delta_{jk} . \quad (5.30)$$

Ceci conduit à une forme diagonale simple pour le tenseur- $\alpha$ :  $\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij}$ , et on peut montrer (c'est du costaud) que

$$\boxed{\alpha = -\frac{1}{3} \tau_c \langle \mathbf{u}' \cdot (\nabla \times \mathbf{u}') \rangle \quad [\text{m s}^{-1}]}, \quad (5.31)$$

où  $\tau_c$  est le temps de corrélation de l'écoulement turbulent. L'éq. (5.31) indique que l'effet- $\alpha$  est proportionnel à l'hélicité cinétique de la partie turbulente de l'écoulement. Retournez à la Fig. 5.11 pour vous convaincre que c'est exactement ce qui est requis pour que le processus opère tel que nous l'avions décrit.

Si on suppose maintenant que la faible inhomogénéité est due à la stratification, que le bris (léger) de la symétrie sous réflexion est dû à la force de Coriolis, et que le temps de vie des tourbillons turbulents est de l'ordre de leur temps de retournement, on peut montrer (encore du costaud!) que l'éq. (5.31) devient:

$$\alpha = -\frac{16}{15} \tau_c^2 (u')^2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \ln(\varrho u'), \quad (5.32)$$

où  $u' = \sqrt{\langle \mathbf{u}'^2 \rangle}$  est la moyenne rms de la vitesse turbulente, et  $\boldsymbol{\Omega}$  la rotation angulaire du système. Dans une zone convective stratifiée de type solaire/stellaire, les vitesses turbulentes sont en bonne première approximation indépendantes de la latitude et augmentent avec le rayon plus lentement que ne décroît la densité, ce qui implique  $\nabla \ln(\varrho u') < 0$ . L'équation (5.32) "prédit" donc un effet- $\alpha$  variant en  $\cos \theta$ , positif (négatif) dans l'hémisphère solaire Nord (Sud), et d'intensité proportionnelle à la rotation de l'étoile. Cette dernière dépendance sur  $\Omega$  est qualitativement cohérente avec l'augmentation observée de l'émission en Ca H+K avec le taux de rotation des étoiles de type solaire (viz. §5.1.3).

#### 5.4.4 Le pompage turbulent

Examinons maintenant la contribution à la force électromotrice turbulente associée à la partie antisymétrique du tenseur  $\boldsymbol{\alpha}$ , dont les trois composantes indépendantes se retrouvent incorporées dans le vecteur  $\boldsymbol{\gamma}$ :

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(2)} = \boldsymbol{\gamma} \times \langle \mathbf{B} \rangle. \quad (5.33)$$

Ici le vecteur  $\boldsymbol{\gamma}$  agit au membre de droite de l'équation d'induction pour le champ moyen (5.19) comme le ferait un écoulement s'ajoutant vectoriellement à l'écoulement moyen:  $\langle \mathbf{u} \rangle + \boldsymbol{\gamma}$ ; c'est le *pompage turbulent*. Mais il ne s'agit pas ici d'un écoulement physique, dans le sens qu'il n'agit que sur le champ magnétique aux grandes échelles, étant une reformulation mathématique d'une partie de la force électromotrice turbulente.

Sous l'approximation SOCA, la vitesse de pompage turbulent est donnée par:

$$\boxed{\boldsymbol{\gamma} = -\frac{\tau_c}{6} \nabla \langle (\mathbf{u}')^2 \rangle \quad [\text{m s}^{-1}]}, \quad (5.34)$$

Ce n'est que relativement récemment que le pompage turbulent commence à être inclus dans les modèles de dynamo en champs moyens du genre qui est discuté dans ce qui suit. Son rôle pourrait cependant être important, en particulier parce sa composante radiale, typiquement dirigée vers le bas dans le gros de la zone convective en raison de la stratification, s'oppose à la flottaison magnétique et favorise ainsi l'accumulation des champs magnétiques aux grandes échelles à la base de la zone convective d'où originent les taches solaires. Une composante latitudinale au pompage peut également se matérialiser en présence de rotation, et atteindre des (pseudo-)vitesses de quelques mètres par seconde, et donc contribuer de manière significative à la migration équatoriale du champ magnétique toroidal, offrant donc une alternative aux ondes dynamos dans l'explication du diagramme papillon de l'émergence des taches.

### 5.4.5 La diffusivité turbulente

Passons maintenant au troisième terme au membre de droite de (5.23, soit tensoriel (5.22), soit

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(3)} = \boldsymbol{\beta} \cdot (\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) . \quad (5.35)$$

Comme dans le cas du tenseur  $\alpha$ , une interprétation physique simple du tenseur  $\boldsymbol{\beta}$  peut être encore une fois obtenue dans une situation où  $\mathbf{u}'$  est isotrope, dans lequel cas on aura  $\beta_{jk} = \beta \delta_{jk}$  (ou encore, si on travaille directement avec l'éq. (5.22),  $b_{ijk} = \beta \varepsilon_{ijk}$ ), où  $\beta$  est une fonction scalaire. On obtient alors

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_i^{(3)} = -\beta (\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle)_i . \quad (5.36)$$

Revenant à l'équation d'induction en champs moyens (5.19), on constate que  $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(3)}$  ajoute une contribution au terme de dissipation Ohmique de  $\langle \mathbf{B} \rangle$ , la diffusivité nette devenant  $\eta + \beta$ , avec  $\beta$  la *diffusivité turbulente*. Pour une turbulence homogène et isotrope, on a :

$$\beta = \frac{1}{3} \tau_c \langle (\mathbf{u}')^2 \rangle \quad [\text{m}^2 \text{s}^{-1}] , \quad (5.37)$$

où  $\tau_c$  est encore une fois le temps de corrélation de la turbulence. Cette expression demeure valide sous SOCA,  $\beta$  devenant une fonction de la position dans l'écoulement via la variation spatiale de  $\mathbf{u}'$ . L'équation (5.37) indique que la diffusivité turbulente est plus efficace quand la turbulence est plus vigoureuse (énergétiquement parlant), ce qui est intuitivement satisfaisant.

Un estimé basé sur la théorie de la longueur de mélange appliquée à la convection solaire suggère  $u' \sim 10 \text{ m s}^{-1}$  et  $\tau_c \sim 1$  mois au bas de la zone convective ( $r/R \sim 0.7$ ), ce qui conduit à  $\beta \sim 10^8 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Cette valeur est immensément plus grande que la diffusivité microscopique  $\eta_c \sim 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , et donc on a  $\beta \gg \eta$ . De plus, le temps de diffusion magnétique (2.13) résultant de l'utilisation de  $\beta$  plutôt que  $\eta$  au dénominateur conduit maintenant à  $\sim 10 \text{ yr}$  pour  $\ell \sim 0.3R$ , correspondant à l'épaisseur de la zone convective solaire. Ceci est maintenant du même ordre que la période du cycle magnétique, et suggère donc que la dissipation (turbulente) joue bel et bien un rôle important dans la MHD du cycle solaire.

## 5.5 Les équations dynamos en champ moyen

Récapitulons où nous en sommes: l'approche basée sur l'électrodynamique en champ moyen produit une équation d'évolution pour le champ moyen  $\langle \mathbf{B} \rangle$  qui incorpore l'effet inductif des fluctuations aux petites échelles spatiales (turbulentes), en terme des corrélations pouvant exister entre les composantes magnétiques et l'écoulement à ces petites échelles. Pour une turbulence stationnaire, homogène et isotrope, cette équation prend une forme particulièrement simple, soit:

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \alpha \langle \mathbf{B} \rangle - (\eta + \beta) \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) , \quad (5.38)$$

qui, sous l'approximation SOCA, demeure valide pour une turbulence faiblement inhomogène et/ou faiblement anisotrope; les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  s'expriment en fonction de la statistique de l'écoulement aux petites échelles selon les éqs. (5.31) et (5.37). Ceci peut conduire à une force électromotrice alignée au champ magnétique moyen, l'effet- $\alpha$ ; ainsi qu'à une dissipation (turbulente) accélérée de ce même champ moyen. Impossible d'invoquer la première sans hériter de la seconde ("no free lunch", comme disent nos voisins du Sud).

Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont en principe calculables dans certains régimes statistico-physiques spécifiques, mais qui (malheureusement) ne semblent guère applicables aux propriétés de la turbulence convective dans les étoiles. En pratique, la forme de ces coefficients est donc posée *a priori*, mais d'une manière qui incorpore certaines contraintes fondamentales pertinentes au contexte solaire/stellaire. Les modèles dynamos résultants de ces choix ne sont donc pas bâtis à partir de principes premiers, mais conservent une valeur descriptive indéniable. Comme les différents modèles développés plus bas le démontreront, il y a beaucoup à apprendre de ces dynamos en champs moyens.

### 5.5.1 Le nombre dynamo critique

Commençons par considérer une situation très simple où seule la turbulence contribue à l'induction, i.e., il n'y a pas d'écoulement aux grandes échelles ( $\mathbf{u} = 0$ ). Supposons de plus que le champ magnétique aux grandes échelles est à force nulle<sup>3</sup>, autrement dit on peut écrire  $\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle = K \langle \mathbf{B} \rangle$  (viz. l'éq. (2.31)). Si de plus on a  $\beta \gg \eta$ , alors il est facile de vérifier que l'éq. (5.38) se réduit alors à:

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = K(\alpha - K\beta) \langle \mathbf{B} \rangle . \quad (5.39)$$

Ceci accepte des solutions de la forme générale:

$$\langle \mathbf{B} \rangle(\mathbf{x}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \exp(K(\alpha - K\beta)t) . \quad (5.40)$$

Une amplification (exponentielle) du champ magnétique aux grandes échelles n'est ici clairement possible que si

$$\frac{\alpha}{K\beta} > 1 . \quad (5.41)$$

La combinaison adimensionnelle de constantes au membre de gauche définit le *nombre dynamo* ( $D$ ), et le *nombre dynamo critique* ( $D_{\text{crit}}$ ) est obtenu en remplaçant l'inégalité ci-dessus par un "=". Se rappelant que que  $K$  à des unités de 1/longueur, on en conclut que les échelles spatiales les plus grandes qui peuvent être casées dans le système sont celles qui caractériseront le champ magnétique moyen; ce qui est tout à fait normal, puisque les plus grandes échelles sont les moins affectées par la dissipation Ohmique.

Revenant à notre dynamo homopolaire de la §5.2, et plus spécifiquement à l'éq. (5.9), on constate que  $\alpha$  joue ici le rôle de la vitesse de rotation du disque, tandis que  $\beta$  joue celui de la résistance du circuit; et comme dans le cas de la dynamo homopolaire, l'induction turbulente (l'effet- $\alpha$ ) doit dépasser un seuil critique pour vaincre la diffusivité turbulente (le  $\beta$ ). Belle analogie!

### 5.5.2 Les ondes dynamos

Comme on l'a déjà discuté à la §5.1, la forme du diagramme papillon des taches solaires suggère que le système de flux toroidal dans l'intérieur solaire responsable de leur formation migre vers l'équateur à mesure que le cycle magnétique avance. Cette remarquable propriété peut être reproduite de manière naturelle dans le contexte de modèles de dynamos turbulentes simples, basés sur l'effet- $\alpha$ .

Considérons un système de coordonnées cartésiennes locales orientées de manière telle que le système est invariant en  $y$  ( $\partial/\partial y = 0$ ), que l'on associera donc à la direction zonale dans un système sphérique, et avec  $x$  et  $y$  orientés dans les directions latitudinales et radiales, respectivement. Il s'agit d'examiner, dans ce système, l'induction par un effet- $\alpha$  constant agissant conjointement avec un cisaillement vertical:

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \Omega z \hat{\mathbf{e}}_y , \quad (5.42)$$

où  $\Omega$  est constant [unités:  $s^{-1}$ ]. On supposera de plus que les coefficients turbulents  $\alpha$  [unités:  $m s^{-1}$ ] et  $\beta$  ( $\gg \eta$ ) [unités:  $m^2 s^{-1}$ ] sont également constants, et  $\gamma = 0$ . L'équivalent cartésien de l'éq. (5.13) prend alors la forme:

$$\langle \mathbf{B} \rangle(x, z, t) = \nabla \times (A(x, z, t) \hat{\mathbf{e}}_y) + B(x, z, t) \hat{\mathbf{e}}_y . \quad (5.43)$$

<sup>3</sup>Le champ aux petites échelles, lui, n'est certainement pas à force nulle, sinon aucun transfert d'énergie de l'écoulement turbulent au champ magnétique n'est possible, en vertu de l'éq. (2.40).



La substitution des éqs. (5.42) et (5.43) dans notre équation d'induction en champs moyens (5.38) conduit à:

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \beta \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right) = \alpha B, \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} - \beta \left( \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} \right) = \Omega \frac{\partial A}{\partial x} - \alpha \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right). \quad (5.45)$$

Les termes aux membres de droite de ces deux équations sont les termes sources, deux associés à l'effet- $\alpha$  agissant à la fois sur le champ "toroidal" ( $B$  dans l'éq. (5.44)), ainsi que sur le champ "poloidal" (dérivées de  $A$  dans l'éq. (5.45)), et le troisième au cisaillement agissant sur le champ "poloidal" (comme à la §2.4). Ces termes sources peuvent, en principe, surpasser la dissipation Ohmique aux membres de gauche, et permettre l'amplification du champ magnétique.

Les équations (5.44)–(5.45) forment un système d'équations différentielles couplées à coefficients constants. Il est donc permis de rechercher des solutions prenant la forme d'ondes planes du genre:

$$\begin{bmatrix} A(x, z, t) \\ B(x, z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \exp[\lambda t + ik(z \cos \vartheta + x \sin \vartheta)]. \quad (5.46)$$

Nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $k \geq 0$  et  $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$  sont des quantités données, la première correspondant au nombre d'onde de la perturbation harmonique, et la seconde à l'orientation du vecteur de propagation de l'onde dans le plan  $[x, z]$ . Substituant cette expression dans les éqs. (5.44)–(5.45) résulte en un système de deux équations algébriques couplées. Une solution de ce système (exprimé sous forme matricielle) exige que son déterminant soit nul, ce qui conduit à la relation de dispersion:

$$(\lambda + \beta k^2)^2 = \alpha k(\alpha k + i \Omega \sin \vartheta). \quad (5.47)$$

Il s'agit ici d'un polynôme quadratique (complexe) en  $\lambda$ , qui compte donc deux solutions:

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm} = & -\beta k^2 \pm \sqrt{\frac{|\alpha|k}{2}} \left\{ \left( \sqrt{\Omega^2 \sin^2 \vartheta + \alpha^2 k^2} + |\alpha|k \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. + i \operatorname{sign}(\Omega \alpha \sin \vartheta) \left( \sqrt{\Omega^2 \sin^2 \vartheta + \alpha^2 k^2} - |\alpha|k \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, \end{aligned} \quad (5.48)$$

obtenues en faisant bien attention à la manière appropriée de prendre la racine carrée d'une quantité complexe! Il est clair ici que la racine  $\lambda_-$  ne peut que produire une solution qui s'atténue avec le temps, donc nous ne pouvons compter que sur la racine  $\lambda_+$ , qui conduira à des solutions sujettes à amplification si  $\operatorname{Re}(\lambda_+) > 0$ . Un examen attentif de l'éq. (5.48) conduit à la conclusion qu'une *onde dynamo* d'amplitude croissant exponentiellement peut exister dans un intervalle  $0 < k < k_*$ , où le nombre d'onde critique  $k_*$  est une des (six!) racines de l'équation

$$k_*^6 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} k_*^4 - \frac{\alpha^2 \Omega^2}{4\beta^4} \sin^2 \vartheta = 0. \quad (5.49)$$

Si  $k_* \rightarrow 0$ , la fenêtre dynamo disparaît, ce qui se produira quand  $\alpha \rightarrow 0$ , en accord avec le théorème de Cowling. Physiquement, c'est un résultat intuitivement satisfaisant, car on s'attend à ce que les perturbations de très courtes longueurs d'onde soit fortement amorties par la dissipation (termes proportionnels à  $\beta$ ). Par contre, si  $k$  est trop petit, alors l'échelle caractéristique de  $\langle \mathbf{A} \rangle$  devient très grande, et donc l'effet- $\alpha$  n'a pas un fort  $\langle \mathbf{B} \rangle$  à se mettre sous la dent, ce qui freine l'effet dynamo quand  $k \rightarrow 0$ .

L'équation (5.49) peut être solutionnée de manière exacte comme un polynôme cubique en  $\zeta \equiv k_*^2$ . Cependant il nous suffira ici d'estimer  $k_*$  directement à partir de l'éq. (5.48) dans le cas où le terme de cisaillement domine au membre de droite de l'éq. (5.45), situation

habituellement considérée la plus pertinente dans le cas du soleil et des étoiles. Ceci implique que  $\Omega^2 \sin^2 \vartheta \gg \alpha^2 k^2$  dans l'éq. (5.48), et on a alors

$$\operatorname{Re}(\lambda_+) \simeq -\beta k_*^2 + \sqrt{\frac{|\alpha| k_*}{2}} \left( \sqrt{\Omega^2 \sin^2 \vartheta} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.50)$$

ce qui, pour un mode critique ( $\operatorname{Re}(\lambda_+) = 0$ ) mène à

$$k_* \approx \left[ \frac{|\alpha \Omega \sin \vartheta|}{2\beta^2} \right]^{1/3}. \quad (5.51)$$

On parle ici d'une "onde dynamo" car il est clair, selon l'éq. (5.48), qu'on aura ici  $\operatorname{Im}(\lambda_+) \neq 0$ . Il faut également noter que la direction de propagation de ces ondes dépend du signe du produit  $\alpha \times \Omega$ , et que le taux de croissance maximal résultera pour  $\vartheta = \pi/2$ , soit une onde dynamo se propageant dans la direction "latitudinale"  $x$ . Tout ça est en parfait accord avec la propagation de l'émergence des taches et régions actives observée dans le magnétogramme synoptique de la Fig. 5.3!

## 5.6 Les dynamos en champs moyens axisymétriques

On passe maintenant à une géométrie ressemblant plus à une étoile. Travaillant en coordonnées sphériques polaires  $(r, \theta, \phi)$ , notre domaine de solution est maintenant une sphère de rayon  $R$  que l'on supposera convective dans  $r_c \leq r \leq R$  et sans turbulence sous un rayon  $r_c$  correspondant donc à l'interface entre un coeur radiatif et une enveloppe convective. Dans le soleil, les inversions héliosismiques indiquent que  $r_c/R \simeq 0.7$ .

Il s'agit maintenant de reformuler l'équation d'induction en champs moyens (5.38) sous une forme appropriée aux champs magnétiques axisymétriques aux grandes échelles spatiales ( $\partial(\mathbf{B})/\partial\phi = 0$ ). Nous avons déjà fait une bonne partie du travail à la §5.3, en exprimant le champ poloidal comme le rotationnel d'un potentiel vecteur toroidal (cf. éq. (5.12)), avec l'écoulement moyen, stationnaire et axisymétrique, donné par l'éq. (5.13). On considérera cette fois fois que la diffusivité magnétique nette (turbulente) peut dépendre que du rayon  $r$ . La nouveauté est évidemment la présence des termes associés à la force électromotrice turbulente, en particulier l'effet- $\alpha$ .

Il sera utile d'exprimer les équations dynamos sous forme adimensionnelle. À cette fin toute les longueurs sont exprimées en unités du rayon  $R$  de la sphère/étoile, et le temps en unités du temps de diffusion magnétique,  $\tau = R^2/\eta_e$  basé sur la diffusivité nette (que l'on supposera dominée par sa contribution turbulente  $\beta$ ) dans l'enveloppe convective, associée à la forme isotropique du tenseur  $\beta$  introduit précédemment. Larguant les " $\langle \rangle$ " pour alléger la notation, la procédure de séparation poloidal/toroidal ayant conduit aux éqs. (5.14)–(5.15) appliquée cette fois à l'équation d'induction en champs moyen mène maintenant à:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \eta \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) A - \frac{R_m}{\varpi} \mathbf{u}_p \cdot \nabla(\varpi A) + C_\alpha \alpha B, \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} = & \eta \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) B + \frac{1}{\varpi} \left( \frac{d\eta}{dr} \right) \frac{\partial(\varpi B)}{\partial r} - R_m \varpi \nabla \cdot \left( \frac{B}{\varpi} \mathbf{u}_p \right) \\ & + C_\Omega \varpi (\nabla \times A \hat{\mathbf{e}}_\phi) \cdot (\nabla \Omega) + C_\alpha \hat{\mathbf{e}}_\phi \cdot \nabla \times [\alpha \nabla \times (A \hat{\mathbf{e}}_\phi)], \end{aligned} \quad (5.53)$$

où les trois nombres adimensionnels suivants ont fait leur apparition:

$$C_\alpha = \frac{\alpha_e R}{\eta_e}, \quad (5.54)$$

$$C_\Omega = \frac{\Omega_e R^2}{\eta_e}, \quad (5.55)$$

$$R_m = \frac{u_e R}{\eta_e}, \quad (5.56)$$

avec  $\alpha_e$  (unités  $\text{m s}^{-1}$ ),  $u_e$  (dimension  $\text{m s}^{-1}$ ) et  $\Omega_e$  (dimension  $\text{s}^{-1}$ ) des valeurs typiques pour les magnitudes de l'effet  $\alpha$ , de l'écoulement méridien, et de la rotation différentielle, respectivement. Les quantités  $\alpha$ ,  $\eta$ ,  $\mathbf{u}_p$  et  $\Omega$  apparaissant dans les éqs. (5.52)–(5.53) sont donc maintenant des fonctions adimensionnelles.

Les coefficients numériques  $C_\alpha$  et  $C_\Omega$  sont des *nombre dynamo*, mesurant l'importance relative de l'induction (numérateurs) versus la dissipation (dénominateurs) aux membres de droite des éqs. (5.52)–(5.53). Le troisième coefficient numérique adimensionnel,  $R_m$ , est un nombre de Reynolds magnétique mesurant l'importance relative de l'advection par l'écoulement méridien par rapport au transport diffusif de  $A$  et  $B$  dans les plans méridiens. Par convention, on continue d'utiliser le symbole  $\eta$  pour la diffusivité magnétique nette, avec une dépendance possible sur le rayon  $r$ , même si on s'attend à ce que dans les zones convectives la contribution turbulente soit dominante.

Dans ce qui suit on fera référence aux équations (5.52)–(5.53) comme étant les “équations dynamos”, plutôt que “équations dynamos en champs moyen axisymétriques”, techniquement préférable mais un peu lourd à la longue. Structurellement, elles ne diffèrent des éqs. (5.14)–(5.15) que par la présence de deux nouveaux termes sources aux membres de droite, tous deux associés à l'effet- $\alpha$ . La présence d'un tel terme au membre de droite de l'éq. (5.52) est crucial, puisque c'est lui qui permet de déjouer le théorème de Cowling.

Puisqu'il agit comme terme source apparaissant aux membres de droite des équations pour  $A$  (poloidal) et  $B$  (toroidal), l'effet- $\alpha$  rend possible l'opération d'une dynamo même en l'absence de cisaillement rotationnel dans l'écoulement moyen, i.e., avec  $\nabla\Omega = 0$  dans l'éq. (5.53). De tels dynamos sont appelés “dynamos  $\alpha^2$ ”, en raison du fait que les deux composantes magnétiques aux grandes échelles sont toutes deux produites par la force électromotrice turbulente, telle que capturée par l'effet- $\alpha$ . Les dynamos agissant dans les coeurs métalliques de plusieurs planètes du système solaire, y compris la Terre, sont traditionnellement considérées appartenir à cette famille, du moins du point de vue des dynamos en champs moyens. À l'autre extrême des possibilités, le terme de cisaillement rotationnel peut complètement dominer l'effet- $\alpha$  au membre de droite de l'éq. (5.53), dans lequel cas on laisse carrément tomber ce dernier. Ceci correspond au modèle dynamo dit “ $\alpha\Omega$ ”, généralement considéré comme la formulation la plus pertinente pour les étoiles de type solaire. Si tous les termes sources sont conservés au membre de droite de l'éq. (5.53), on parle alors d'une dynamo de type “ $\alpha^2\Omega$ ”. Dans le contexte solaire/stellaire, cette classe de dynamos a été moins étudiée que la version  $\alpha\Omega$ , sur la base d'estimés (simples tirant sur simplistes) des nombres dynamos  $C_\alpha$  et  $C_\Omega$  indiquant que  $C_\alpha/C_\Omega \ll 1$ ; cet estimé peut cependant se retrouver sérieusement dans le champ si l'action dynamo est limité à une coquille sphérique mince, dans lequel cas l'effet- $\alpha$  peut contribuer significativement, voire dominer, via le terme en  $\partial A/\partial r$ .

En géométrie sphérique, les solutions des équations dynamos sont obtenues numériquement dans un plan méridien  $[r, \theta]$  d'une sphère de rayon  $R$ . La régularité des solutions sur l'axe de symétrie ( $\theta = 0$ ) exige qu'on y pose  $A(r, 0, t) = A(r, \pi, t) = 0$  et  $B(r, 0, t) = B(r, \pi, t) = 0$ . La condition limite en surface la plus couramment utilisée est celle d'un champ extérieur  $r/R > 1$  potentiel.

En pratique il est souvent utile d'imposer une symétrie équatoriale aux solutions. Ceci peut se faire en solutionnant seulement dans un quadrant méridien ( $0 \leq \theta < \pi/2$ ), et en imposant des conditions limites appropriées dans le plan équatorial. Pour un champ antisymétrique par rapport à l'équateur, soit de type dipolaire,

$$\frac{\partial A(r, \pi/2)}{\partial \theta} = 0, \quad B(r, \pi/2) = 0, \quad [\text{Antisymétrique}], \quad (5.57)$$

tandis que pour un champ équatoriellement symétrique (de type quadrupolaire) on poserait plutôt:

$$A(r, \pi/2) = 0, \quad \frac{\partial B(r, \pi/2)}{\partial \theta} = 0, \quad [\text{Symétrique}]. \quad (5.58)$$

### 5.6.1 Solutions dynamo $\alpha\Omega$ linéaires

Commençons par mettre au point un modèle minimal de dynamo applicable au cas du soleil. Dans le cadre d'un tel modèle minimal on peut négliger l'écoulement méridien aux grandes échelles ( $\mathbf{u}_p$  dans les éqs. (5.52)–(5.53)), et adopter la forme  $\alpha\Omega$  des équations dynamos, basé sur le fait qu'avec  $R \simeq 7 \times 10^8$  m,  $\Omega_e \sim 10^{-6}$  rad s $^{-1}$ , et  $\alpha_e \sim 1$  m s $^{-1}$ , on trouve  $C_\alpha/C_\Omega \sim 10^{-3}$ , et ce indépendamment de la valeur (très mal contrainte) supposée pour la diffusivité turbulente. On s'en tient également à une formulation cinématique du problème, i.e, tous les écoulements sont supposés stationnaires ( $\partial/\partial t \equiv 0$ ) et donnés *a priori*. Les équations (5.52)–(5.53) se réduisent alors aux “équation dynamos  $\alpha\Omega$ ”:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \eta \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) A + C_\alpha \alpha B, \quad (5.59)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \eta \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) B + C_\Omega \varpi (\nabla \times A \hat{e}_\phi) \cdot (\nabla \Omega) + \frac{1}{\varpi} \frac{d\eta}{dr} \frac{\partial(\varpi B)}{\partial r}. \quad (5.60)$$

Dans l'optique d'un modèle solaire, on fixe la valeur du nombre dynamo  $C_\Omega$  à  $2.5 \times 10^4$ , résultant de  $\Omega_e \equiv \Omega_{Eq} \sim 10^{-6}$  rad s $^{-1}$ ,  $\eta_e = 5 \times 10^7$  m $^2$ s $^{-1}$ , cette dernière valeur conduisant à un temps de diffusion  $\tau = R^2/\beta \simeq 300$  yr.

Pour le profil de rotation différentielle  $\Omega(r, \theta)$  on utilise une paramétrisation des inversions héliosismiques décrite par

$$\Omega(r, \theta) = \Omega_C + \frac{\Omega_S(\theta) - \Omega_C}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{r - r_C}{w} \right) \right], \quad (5.61)$$

où

$$\Omega_S(\theta) = (1 - a_2 \cos^2 \theta - a_4 \cos^4 \theta) \quad (5.62)$$

avec les valeurs de paramètres  $\Omega_C = 0.939$ ,  $a_2 = 0.1264$ ,  $a_4 = 0.1591$ ,  $r_c/R = 0.7$ , et  $w/R = 0.05$ . La Figure 5.13 illustre les isocontours de vitesse angulaire en résultant, ainsi que quelques coupes radiales extraites au pôle, à mi-latitudes ainsi qu'à l'équateur. Il s'agit en fait du même profil utilisé dans notre calcul du cisaillement d'un champ poloidal présenté à la §2.4. Ce profil paramétrique capture adéquatement plusieurs caractéristiques importantes de la rotation différentielle interne du soleil, notamment: (1) un cisaillement principalement latitudinal dans la zone convective, les pôles tournant  $\simeq 29\%$  plus lentement que l'équateur, et (2) une mince couche de cisaillement radial appelée *tachocline*, coïncidant approximativement avec la base de la zone convective, et assurant une transition continue entre la rotation différentielle de la zone convective et la rotation solide du coeur radiatif.

Un tel profil est en fait passablement complexe du point de vue de la dynamo, étant caractérisé par trois régions de cisaillement se recoupant partiellement: un cisaillement radial positif ( $\partial\Omega/\partial r > 0$ ) à basses latitudes dans la tachocline, un cisaillement radial encore plus intense mais négatif aux hautes latitudes de la tachocline, et un cisaillement latitudinal substantiel à travers toute la zone convective et s'étendant dans la tachocline. Comme on peut le constater sur la Fig. 5.13B, pour une tachocline de demie-largeur  $w/R_\odot = 0.05$ , le cisaillement latitudinal aux mi-latitudes à  $r/R_\odot = 0.7$  se compare en grandeur au cisaillement radial équatorial; son effet inductif est donc potentiellement important.

Pour le profil de diffusivité magnétique nette (somme des contributions microscopique et turbulente), on utilise le profil normalisé suivant, où la valeur unitaire correspond à la diffusivité turbulente dans la zone convective:

$$\frac{\eta(r)}{\eta_e} = \Delta\eta + \frac{1 - \Delta\eta}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{r - r_c}{w} \right) \right]. \quad (5.63)$$

Le trait en tirets-points sur la Fig. 5.13 illustre ce profil, pour un rapport des diffusivité  $\Delta\eta \equiv \eta_c/\eta_e = 0.1$ . Ce rapport est traité ici comme un paramètre libre du modèle, sujet à la contrainte

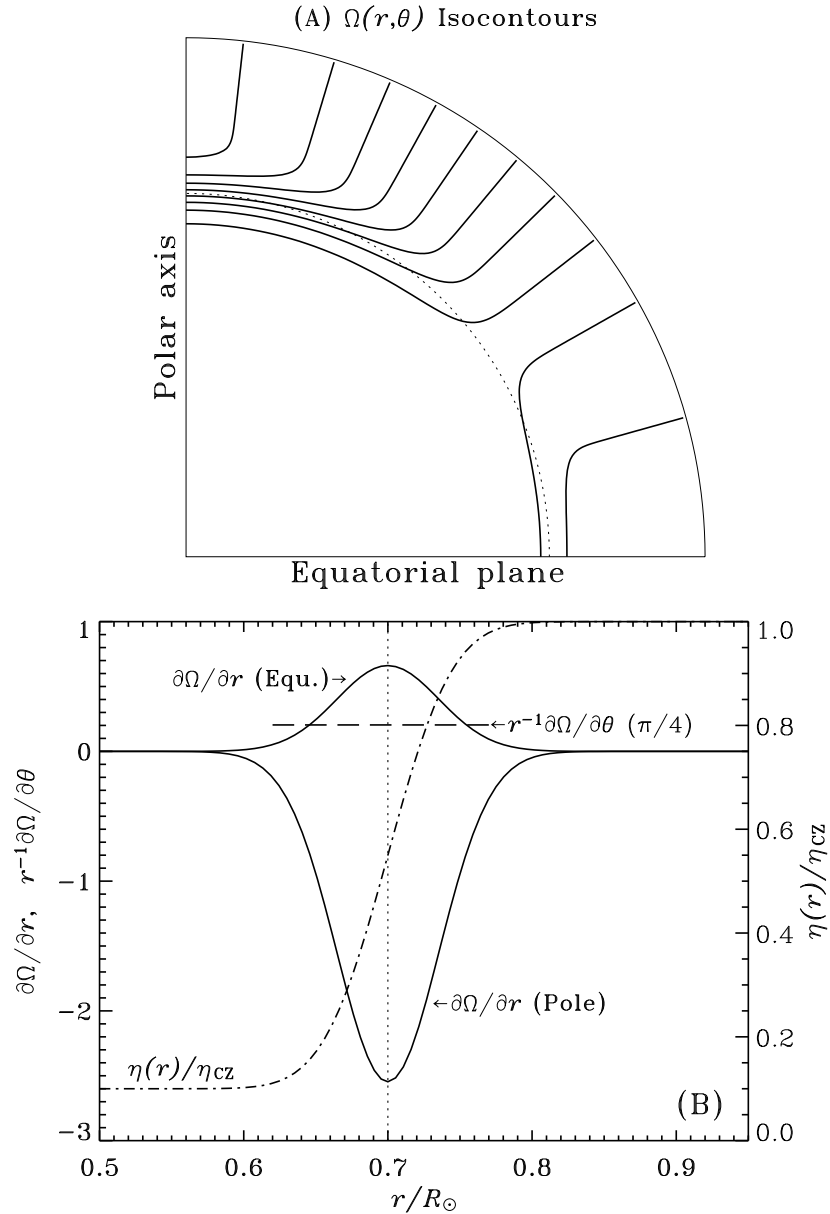


Figure 5.13: Isocontours du profil de vitesse angulaire normalisé généré par les éqs. (5.61)—(5.62), avec valeurs de paramètres  $w/R = 0.05$ ,  $\Omega_C = 0.8752$ ,  $a_2 = 0.1264$ ,  $a_4 = 0.1591$  (partie A). Ici  $\Omega = 1$  à l'équateur ( $\theta = \pi/2$ ) en surface, et chute à 0.715 au pôle ( $\theta = 0$ ). Le cisaillement radial change de signe à  $\theta = 55^\circ$ , et le profil est symétrique par rapport au plan équatorial. La partie B porte en graphique le cisaillement radial en fonction du rayon au pôle et à l'équateur, ainsi que le profil radial de la diffusivité magnétique totale (trait en tirets-points), telle que produite par l'éq. (5.63) avec  $\Delta\eta = 0.1$ . L'interface coeur-enveloppe est située ici à  $r/R = 0.7$  (trait pointillé).

$\Delta\eta \ll 1$ , puisqu'on associe ici  $\eta_c$  à la diffusivité microscopique, et  $\eta_e$  à la diffusivité turbulente  $\beta$ . Pour une diffusivité microscopique  $\eta_c \sim 1 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  sous la zone convective, et sous utilisation des estimés SOCA (spécifiquement, l'éq. (5.37)), on aurait en fait  $\Delta\eta \sim 10^{-9}$ — $10^{-6}$ ; les solutions dynamos discutées dans ce qui suit utilisent des rapports beaucoup plus modestes,  $\Delta\eta = 10^{-3}$ — $10^{-1}$ , pour des raisons essentiellement numériques.

La variation spatiale de  $\alpha$  est très difficile à calculer de manière fiable à partir de principes premiers. L'idée est donc d'introduire une paramétrisation *ad hoc*, mais tout de même inspirée de ce que nous avons appris sur l'effet- $\alpha$  dans le cadre de notre discussion de l'électrodynamique en champs moyens (§5.4). On écrira donc:

$$\alpha(r, \theta) = f(r)g(\theta) , \quad (5.64)$$

où

$$f(r) = \frac{1}{4} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{r - r_c}{w} \right) \right] \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{r - 0.8}{w} \right) \right] , \quad (5.65)$$

avec  $r_c/R = 0.7$  et  $w/R = 0.05$ . Cette combinaison de fonctions d'erreur concentre l'effet- $\alpha$  dans la moitié inférieure de la zone convective, le laissant chuter à zéro lorsqu'on entre dans le coeur radiatif, où la turbulence convective disparaît, tout comme nous l'avons fait pour la diffusivité turbulente (cf. éq. (5.63)). L'idée de concentrer l'effet- $\alpha$  en profondeur vient du fait que si l'on en croit la théorie de la longueur de mélange, c'est à ces profondeurs que le temps de retournement convectif devient du même ordre que la période de rotation, ce qui est requis pour pouvoir produire des bulles cycloniques. De plus, la dépendance hémisphérique de la force de Coriolis suggère que l'effet- $\alpha$  devrait changer de signe à l'équateur ( $\theta = \pi/2$ ) et atteindre son amplitude maximale aux pôles (voir aussi l'éq. (5.32)). On choisit donc la dépendance latitudinale suivante:

$$g(\theta) = \cos \theta . \quad (5.66)$$

Le nombre dynamo  $C_\alpha$ , quant à lui, est traité comme un paramètre libre du modèle, sujet cependant à la contrainte  $|C_\alpha| \ll C_\Omega$  puisque nous travaillons avec la forme  $\alpha\Omega$  des équations dynamos axisymétriques.

Avec  $\alpha(r, \theta)$ ,  $\eta(r)$  et  $\Omega(r, \theta)$  tous spécifiés a priori, les équations dynamos  $\alpha\Omega$  (5.59)–(5.60) deviennent linéaires en  $\mathbf{B}$ . Comme aucun de leurs coefficients ne dépend explicitement du temps, on peut rechercher des solutions en terme de modes propres ayant une structure mathématique du genre:

$$\begin{bmatrix} A(r, \theta, t) \\ B(r, \theta, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(r, \theta) \\ b(r, \theta) \end{bmatrix} e^{\lambda t} , \quad (5.67)$$

où  $\lambda$  ainsi que les amplitudes  $a$  et  $b$  sont en général des quantités complexes. Sous substitution de ces expressions dans les équations dynamos, on se retrouve avec un problème aux valeurs propres classique. Il sera utile d'exprimer la valeur propre même sous la forme:

$$\lambda = \sigma + i\omega , \quad (5.68)$$

de manière telle que  $\sigma$  corresponde au taux de croissance, et  $\omega$  à la fréquence angulaire du mode propre défini par le couple  $[a, b]$ . En vertu de notre adimensionalisation des équations,  $\sigma$  et  $\omega$  sont tous les deux exprimés en temps de diffusion inverse,  $\tau^{-1} = \beta/R^2$ . Dans le contexte d'une dynamo de type solaire, on recherche évidemment une solution oscillatoire ( $\omega \neq 0$ ) ayant  $\sigma \geq 0$ .

Assez tourné autour du pot, allons-y avec une solution numérique des équations dynamos  $\alpha\Omega$  comme un problème aux valeurs propre en 2D. Débutons par une séquence de solutions dynamos pour des valeurs croissantes de  $|C_\alpha|$ , avec  $C_\Omega$  fixe à sa valeur "solaire" de  $2.5 \times 10^4$ . La méthode numérique appelée *itération inverse* fonctionne bien ici. La Figure 5.14 montre la variation du taux de croissance  $\sigma$  et de la fréquence  $\omega$  en fonction de  $C_\alpha$ . Quatre séquences distinctes sont portées en graphique, pour des modes qui sont antisymétriques ou symétriques par rapport au plan équatorial (étiquetés "A" et "S" respectivement), calculés pour des nombres dynamos  $C_\alpha$  positifs ou négatifs. Pour des valeurs de  $|C_\alpha|$  sous un certain seuil, l'induction ne parvient pas

à surpasser la dissipation Ohmique, conduisant à des solutions évanescentes ( $\sigma < 0$ ). C'est tout comme la dynamo mécanique de la §5.2 quand l'éq. (5.11) n'est pas satisfaite. Mais à mesure que  $|C_\alpha|$  augmente, on atteint éventuellement un point où  $\sigma = 0$ . Cette solution, caractérisée par une fréquence  $\omega$  non-nulle, inverse sa polarité de façon cyclique tout en conservant une amplitude constante. Si on augmente encore plus  $|C_\alpha|$ , alors  $\sigma > 0$  et nous sommes finalement dans le régime dynamo, où un faible champ initial est amplifié exponentiellement dans le temps.

Si on recalcule des séquences semblables pour des valeurs différentes de  $C_\Omega$ , on réalise que l'entrée dans le régime dynamo ( $\sigma > 0$ ) est déterminée par la grandeur du produit des deux nombres dynamo  $C_\alpha$  et  $C_\Omega$ :

$$D \equiv C_\alpha \times C_\Omega = \frac{\alpha_e \Omega_e R^3}{\eta_e^2} . \quad (5.69)$$

La valeur de  $D$  à laquelle  $\sigma = 0$  correspond au *nombre dynamo critique*, qu'on dénotera  $D_{\text{crit}}$ . On donc retrouve ici un comportement semblable à celui caractérisant les ondes dynamos en géométrie cartésienne étudiées à la §5.5.2. Les modes ayant  $\sigma < 0$  sont dits *sous-critiques*, et ceux ayant  $\sigma > 0$  *supercritiques*.

Pour ce modèle minimal avec  $\alpha \propto \cos \theta$ , les taux de croissance dépendent peu de la symétrie équatoriale. Le premier mode à atteindre la criticalité est celui ayant un  $C_\alpha$  négatif, pour  $D_{\text{crit}} = -0.9 \times 10^5$ , suivi de près ( $D_{\text{crit}} = 1.1 \times 10^5$ ) par la séquence aux  $C_\alpha$  positifs. La fréquence d'oscillation de ces modes critiques est  $\omega \simeq 300$ , correspondant à une période de  $\sim 6$  yr, soit moins d'un facteur quatre de la période du cycle magnétique solaire; pas mal pour un premier essai! Il faut cependant garder en tête qu'on a une bonne marge de manoeuvre dans la spécification de  $\eta_e$  et  $C_\alpha$ , et en plus il n'y a aucune raison particulière pour laquelle la dynamo solaire devrait opérer exactement au niveau critique.

La Figure 5.15 montre un demi-cycle d'une solution représentative de la séquence  $C_\alpha > 0$ , sous la forme de quatre instantanés du champ toroidal (dégradé de couleurs) et poloidal (lignes) dans un quadrant méridien, l'axe de rotation étant orienté verticalement ici<sup>4</sup>. Chaque image est séparée de la suivante par un intervalle de phase  $\varphi = \pi/3$ , donc la (D) est morphologiquement identique à la (A) sauf pour l'inversion des polarités magnétiques des composantes toroidale et poloidale. Dans de telles solutions linéaires, l'amplitude absolue du champ magnétique n'est pas contrainte, mais le rapport des amplitudes poloidale/toroidale l'est, et varie  $\propto |C_\alpha/C_\Omega|$  pour les modes n'étant pas trop supercritiques.

La composante magnétique toroidale atteint son amplitude maximale à la base de la zone convective, ce qui n'est guère surprenant considérant que le cisaillement radial y est maximal (voir les eqs. (5.61)–(5.62) et la Fig. 5.13). Sa disparition rapide —ainsi que celle de la composante poloidale— en descendant sous la zone convective est un effet de profondeur de peau. De manière générale, un champ magnétique inversant sa polarité à une fréquence  $\omega$  ne peut pénétrer un conducteur que sur une profondeur  $\ell = \sqrt{2\eta_c/\omega}$ , avec  $\eta_c$  correspondant ici à la diffusivité magnétique dans le coeur radiatif. Ayant supposé  $\eta_e = 5 \times 10^7 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ , on a donc ici  $\eta_c = \eta_e \Delta\eta = 5 \times 10^6 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ . Une fréquence adimensionnelle  $\omega \simeq 300$  correspond à  $3 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$ , ce qui conduit à  $\ell/R \simeq 0.026$ , ce qui est bel et bien cohérent avec ce qu'on observe dans les solutions de la Fig. 5.15.

Un examen attentif de la Figure 5.15A→D révèle également que les systèmes de flux magnétique poloidal et toroidal se développant à la base de la zone convective apparaissent aux hautes-latitudes, pour ensuite migrer dans la direction équatoriale tout en s'amplifiant, avant de disparaître aux mi-latitudes à la fin de chaque demi-cycle magnétique. Ocazou vous ne l'auriez pas déjà deviné, ce qu'on observe ici est l'équivalent en symétrie sphérique des ondes dynamos étudiés à la section §5.5.2 en géométrie cartésienne semi-infinie, avec un cisaillement et  $\alpha$  tous les deux constants. De manière générale, les ondes dynamos se propagent dans une direction  $\mathbf{s}$  donnée par

$$\mathbf{s} = \alpha \nabla \Omega \times \hat{\mathbf{e}}_\phi , \quad (5.70)$$

<sup>4</sup>Une animation de cette solution, et de sa cousine ayant  $C_\alpha = -5$ , sont disponibles sur la page web du cours.

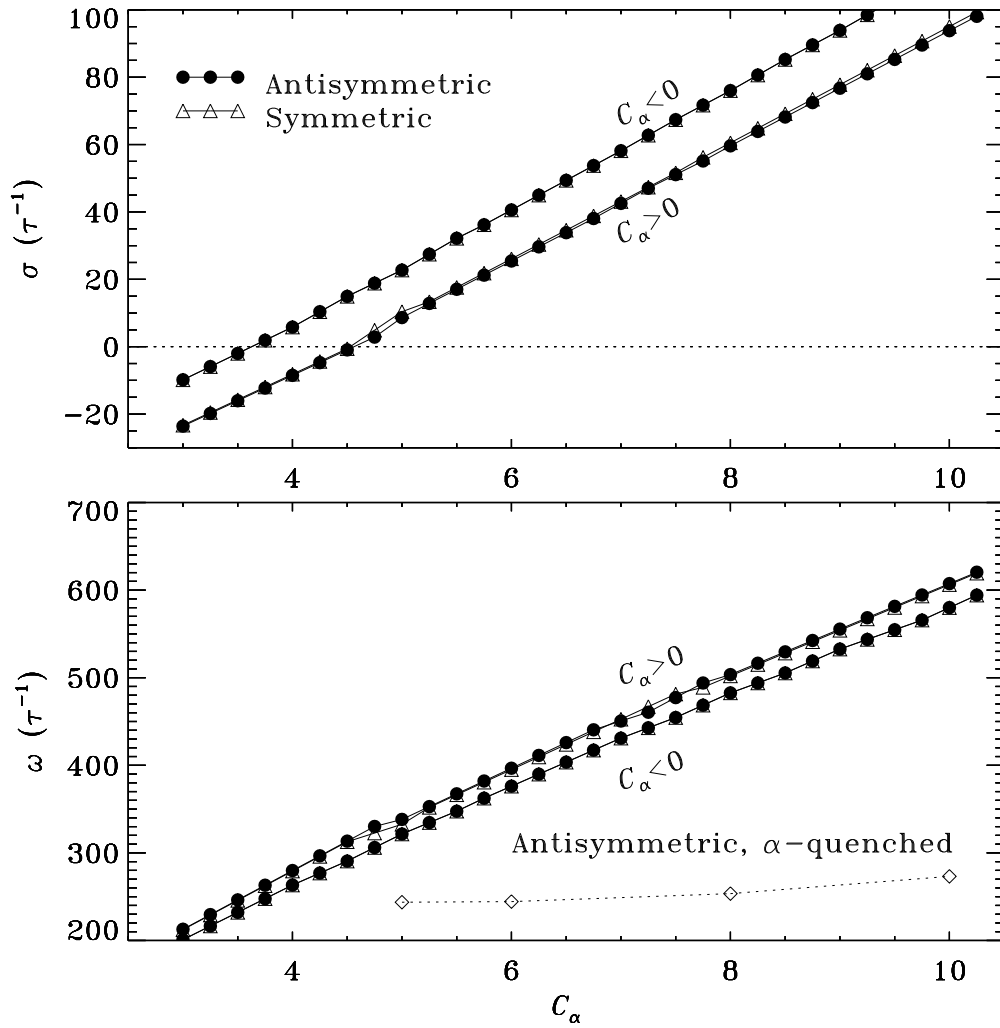


Figure 5.14: Variations du taux de croissance  $\sigma$  (en haut) et de la fréquence  $\omega$  (en bas) en fonction de  $|C_\alpha|$ , pour une séquence de solutions dynamo obtenues dans le cadre d'un modèle  $\alpha\Omega$  minimal utilisant une rotation différentielle de type solaire et un  $\alpha \propto \cos\theta$ . Les Figures présentent des résultats pour quatre séquences distinctes, définies pour des nombres dynamos  $C_\alpha$  soit positifs, soit négatifs, et avec parité équatoriale imposée soit antisymétrique (cercles), soit symétrique (triangles). Les modes ayant  $\sigma < 0$  sont évanescents, tandis que les modes ayant  $\sigma > 0$  ont une amplitude croissant exponentiellement dans le temps. Ici les nombres dynamos critiques sont  $D_{\text{crit}} = -0.9 \times 10^5$  et  $D_{\text{crit}} = 1.1 \times 10^5$ , et dépendent peu de la symétrie équatoriale. Les losanges sur la partie (B) indiquent la fréquence dynamo dans la version nonlinéaire de ce modèle  $\alpha\Omega$  minimal, introduite plus loin à la §5.6.3.



BaseCZ  $\alpha \sim \cos\theta$   $C_\alpha = +5$   $C_\Omega = 25000$   $Rm = 0$

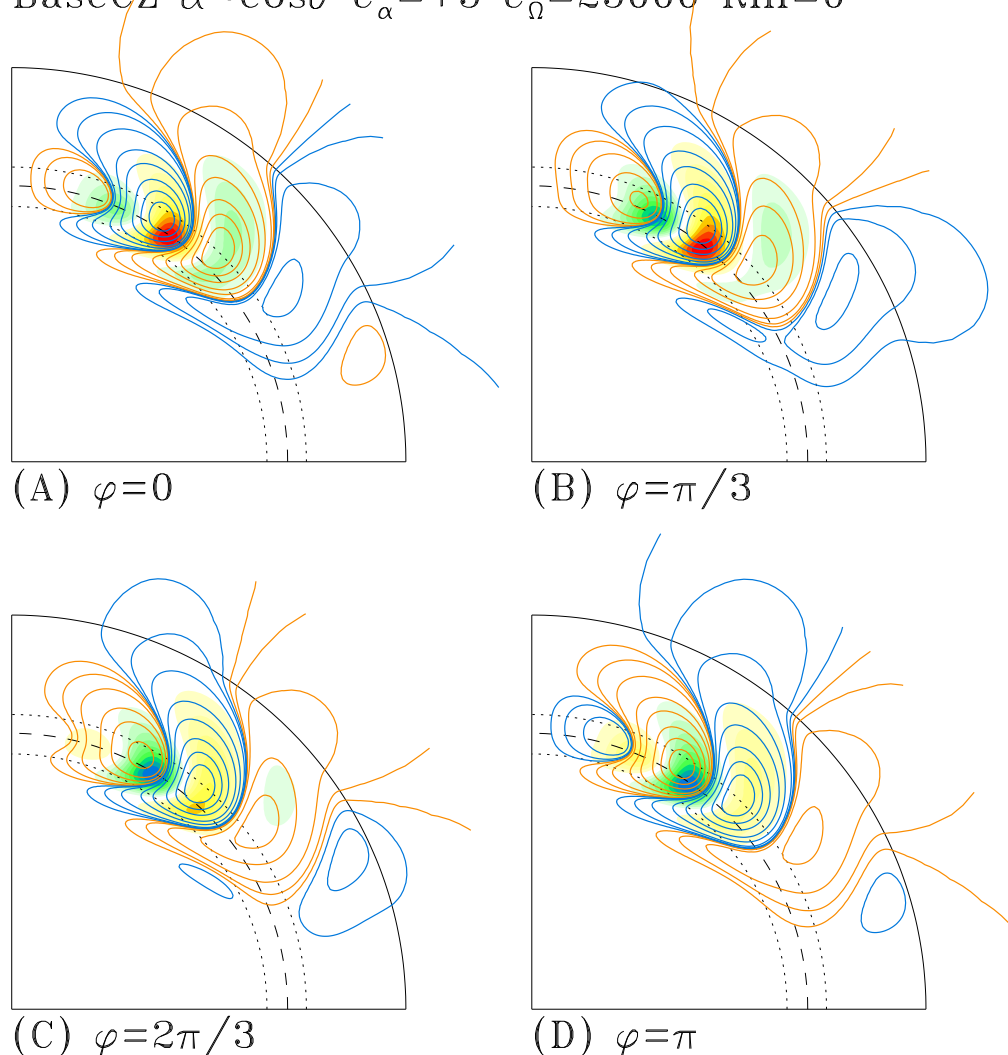


Figure 5.15: Quatre “instantanés” de notre solution  $\alpha\Omega$  linéaire minimale, avec les valeurs de paramètres  $C_\Omega = 25000$ ,  $\eta_e/\eta_c = 10$ ,  $\eta_e = 5 \times 10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , et  $C_\alpha = +5$ , cette dernière valeur correspondant à une solution légèrement supercritique (cf. Fig. 5.14). La composante toroidale est représentée par le dégradé de couleur, allant du vert au bleu pour  $B < 0$ , et du jaune au rouge pour  $B > 0$ , normalisé à l’amplitude maximale et intervalles  $\Delta B = 0.2$ . Les lignes de champs  $y$  sont superposées, colorées en bleu pour celles orientées dans le sens horaire, et orange pour antihoraire. L’arc de cercle en tirets indique la base de la zone convective à  $r_c/R = 0.7$ , et les pointillés l’étendue radiale de la tachocline. Ces quatre instantanés couvrent un demi-cycle magnétique, (D) se retrouvant donc identique à (A) mise à part l’inversion de la polarité magnétique.

i.e., le long des isocontours de vitesse angulaire, dans une direction contrôlée par le signe de l'effet  $\alpha$ . Ce résultat est connu sous le nom de *règle de Parker–Yoshimura*. Ici, avec  $\partial\Omega/\partial r$  négatif aux hautes latitudes dans la tachocline, un effet- $\alpha$  positif conduit bel et bien à une propagation vers l'équateur pour  $\alpha > 0$ .

### 5.6.2 Nonlinéarités et suppression de l'effet- $\alpha$

Autant dans notre traitement local des ondes dynamos à la §5.5.2 que de celui des modes globaux en symétrie sphérique ci-dessus, la dynamo se comporte comme une “instabilité” qui, lorsqu'elle est excitée ( $\sigma > 0$ ), conduit à une croissance exponentielle (cyclique) du champ magnétique.

De toute évidence, une telle croissance ne peut se poursuivre indéfiniment. La force de Lorentz croîtra également exponentiellement, en fait au double du taux de croissance du champ puisqu'elle est quadratique en  $\mathbf{B}$ . Cette force tendra à s'opposer aux écoulements inductifs, à toutes les échelles spatiales simplifiées. Dans le contexte des dynamos  $\alpha\Omega$  en champs moyens, on peut considérer deux classes de rétroaction magnétique:

1. Réduction de la rotation différentielle;
2. Modification des vitesses turbulentes, conduisant à une réduction de l'effet- $\alpha$  (et possiblement aussi de la diffusivité turbulente).

Observationnellement, la rotation différentielle solaire ne varie que très peu, soit 2–3%, entre les phases minimale et maximale du cycle magnétique. C'est pourquoi il est souvent supposé que la saturation de la dynamo passe par une réduction de l'effet- $\alpha$  par la force de Lorentz. Demeurant dans l'esprit de l'électrodynamique en champs moyens, il n'est pas question de solutionner formellement cette rétroaction magnétique sur les petites échelles. Il est plutôt d'usage d'introduire de manière *ad hoc* une dépendance directe de  $\alpha$  sur  $B$  qui “marche”, dans le sens que l'effet- $\alpha$  meurt une fois que le champ magnétique devient “suffisamment intense”. Ce dernier qualificatif est habituellement quantifié par le plasma- $\beta$  introduit à la §3.4, soit le rapport des densités d'énergie magnétique et cinétique dans l'écoulement. Le *champ d'équipartition* ( $B_{\text{eq}}$ ) est défini par l'égalité entre ces deux contributions énergétiques:

$$\frac{B_{\text{eq}}^2}{2\mu_0} = \frac{\rho u_t^2}{2} \rightarrow B_{\text{eq}} = u_t \sqrt{\mu_0 \rho}. \quad (5.71)$$

À la base de la zone convective solaire on a  $B_{\text{eq}} \sim 1$  T, chutant à  $\sim 0.1$  T sous la photosphère. Il est devenu d'usage d'incorporer cet effet sur la grandeur de  $\alpha$  (et parfois aussi  $\beta$ ) directement dans l'équation pour le champ toroidal moyen  $B$ , en écrivant:

$$\alpha \rightarrow \alpha(B) = \frac{\alpha_0}{1 + (B/B_{\text{eq}})^2}. \quad (5.72)$$

Ce genre de paramétrisation algébrique s'appelle le “quenching- $\alpha$ ”. Clairement, une telle expression forcera  $\alpha \rightarrow 0$  lorsque  $B \gg B_{\text{eq}}$ , et on s'attend donc à ce que le champ  $B$  croisse jusqu'à ce que le facteur  $1 + (B/B_{\text{eq}})^2$  réduise le nombre dynamo effectif à sa valeur critique du régime linéaire, ou pas loin.

Il va sans dire que tout ceci est une sursimplification extrême de la rétroaction du champ magnétique sur la turbulence convective en régime magnétohydrodynamique. Pour être très franc, c'est surtout son usage très répandu dans la modélisation des dynamos astrophysiques qui motive son choix aux fins pédagogiques de ce qui suit!

Des approches mieux motivées physiquement ont été proposées, basées notamment sur la conservation de l'hélicité magnétique (voir §2.9). Le champ aux grandes échelles étant hélical, son amplification n'est possible que si une hélicité de signe opposée est produite aux petites échelles spatiales. C'est le taux de dissipation de cette dernière qui se retrouve à réguler le taux d'amplification du champ aux grandes échelles. Ceci conduit à une équation d'évolution

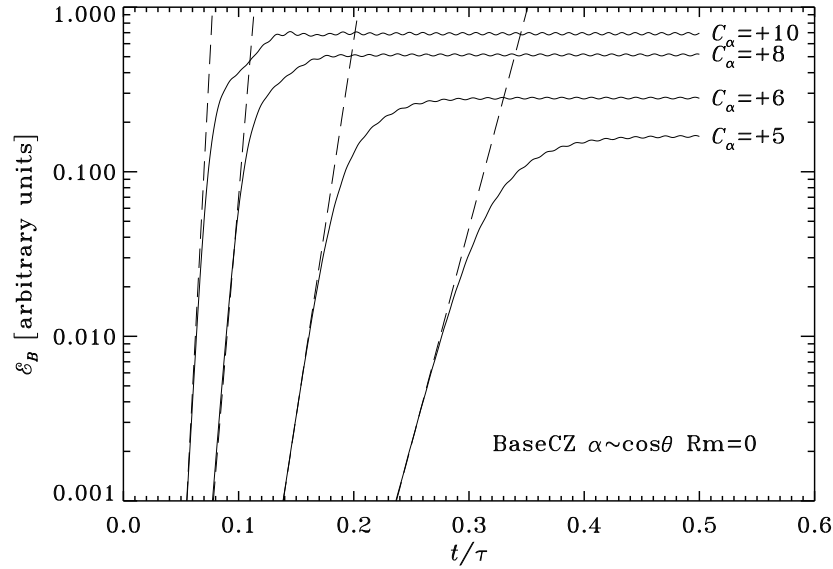


Figure 5.16: Séquences temporelles de l'énergie magnétique pour une série de solutions dynamo  $\alpha\Omega$  incluant le quenching- $\alpha$  tel que donné par l'éq. (5.72). Chaque courbe correspond à une valeur différente du nombre dynamo  $C_\alpha$ , tel qu'indiqué. Les droites en tirets marquent la phase de croissance exponentielle caractérisant le régime linéaire ( $B \ll B_{\text{eq}}$ ); on voit bien que le taux de croissance augmente quand  $C_\alpha$  augmente lui aussi (cf. Fig. 5.14).

pour  $\alpha$  (i.e.,  $\partial\alpha/\partial t = \dots$ ), qui doit alors être solutionnée conjointement aux équations dynamos en champs moyens. On parle alors de *quenching dynamique* de  $\alpha$ . La forme exacte que doit prendre le membre de droite de l'équation pour  $\alpha$  demeure cependant sujette à de vigoureux débats chez les spécialistes du sujet. Les intéressé(e)s trouveront quelques références dans la bibliographie en fin de chapitre.

### 5.6.3 Solutions dynamos $\alpha\Omega$ avec $\alpha$ -Quenching

Avec le quenching- $\alpha$  inclus dans le terme source poloidal, les équations dynamo  $\alpha\Omega$  deviennent nonlinéaires et il est alors préférable de les solutionner sous la forme d'un problème aux conditions initiales, où un faible champ magnétique (dans le sens  $B \ll B_{\text{eq}}$ ) et de forme arbitraire est utilisé pour l'initialisation. Tout le reste demeure identique aux solutions linéaires considérées précédemment: conditions limites, effet- $\alpha$  en  $\cos\theta$ ,  $C_\Omega = 2.5 \times 10^4$  et on choisit  $C_\alpha \geq 5$  afin de se retrouver dans la région supercritique du régime linéaire (voir la Figure 5.14). Comme initialement  $\mathbf{B}$  est de très faible amplitude, une croissance exponentielle caractérise les phases initiales de l'évolution. Ceci est illustré à la Fig. 5.16, montrant des séquences temporelles de l'énergie magnétique totale dans le domaine de simulation (voir l'éq. (2.40)), pour une série de simulations avec des valeurs croissantes de  $C_\alpha$ . Éventuellement,  $B$  approche  $B_{\text{eq}}$  dans les régions où opère l'effet- $\alpha$ , ce qui freine la croissance exponentielle et conduit finalement à une saturation du champ magnétique, et donc de l'énergie y étant associée. Le quenching- $\alpha$  a donc bel et bien l'effet anticipé. Il faut remarquer comment l'énergie magnétique en régime saturé augmente avec  $C_\alpha$ , ce qui est intuitivement satisfaisant puisque les solutions à plus grands  $C_\alpha$  sont caractérisées par des termes sources poloidaux plus puissants. Comme on s'attend à ce que  $\alpha$  augmente avec le taux de rotation (viz. 5.32), qualitativement parlant cette tendance est également en accord avec les observations stellaires brièvement résumées à la §5.1.3.

La variation de la fréquence d'oscillation de ces solutions en fonction du nombre dynamo  $C_\alpha$

est portée en graphique à la Fig. 5.14B (losanges). Contrairement aux solutions linéaires, ici la fréquence n’augmente que très faiblement quand  $C_\alpha$  augmente. Ces fréquences se retrouvent en fait légèrement inférieures (par  $\sim 10\text{--}15\%$ ) à la fréquence d’oscillation du mode critique du régime linéaire. Cependant, morphologiquement parlant ces solutions dynamos sont pratiquement indistinguables des modes linéaires, dont la Fig. 5.15 est prototypique. La période magnétique est ici  $P_{\text{cyc}}/\tau \simeq 0.027$ , soit 9 yr pour notre valeur de  $\eta_e = 5 \times 10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Nous sommes maintenant pas loin d’un facteur deux du cycle solaire observé, ce qui n’est pas mal du tout!

En terme d’analogues au cycle solaire, ces solutions dynamos souffrent de quelques problèmes, dont un particulièrement évident: les champs magnétiques internes sont concentrés à des latitudes beaucoup trop élevées (voir Fig. 5.15). C’est là une conséquence directe de la dépendance en  $\cos \theta$  de l’effet- $\alpha$ . Il est donc possible de régler notre problème en concentrant l’effet- $\alpha$  à plus basses latitudes. Cette stratégie n’est pas aussi ad hoc qu’elle pourrait sembler l’être; certaines simulations numériques MHD du genre de celles considérées plus loin (§5.7) indiquent en effet qu’en régime de rotation rapide (dans le sens  $\text{Ro} \lesssim 0.25$ ), la latitude où l’effet- $\alpha$  est maximal se déplace bel et bien vers les plus basses latitudes. Allons-y donc alors, pour voir, avec une dépendance latitudinale  $\propto \sin^2 \theta \cos \theta$  pour l’effet- $\alpha$ .

La Figure 5.17 montre trois solutions dynamos  $\alpha\Omega$  avec quenching- $\alpha$ , cette fois sous la forme de diagrammes latitude-temps du champ toroidal à l’interface coeur-enveloppe ( $r/R = 0.7$  ici). Si les tubes de flux magnétiques à l’origine des taches solaires se forment là où le champ est le plus intense, et si l’ascension de ces tubes à travers la zone convective se fait radialement, alors ces diagrammes sont les équivalents du diagramme papillon des taches. Sur de tels diagrammes, la propagation latitudinale des ondes dynamos se traduit par une inclinaison des isocontours de  $B$  par rapport à la verticale. Ces trois solutions ont toutes  $|C_\alpha| = 10$ ,  $\Delta\eta = 0.1$ , et  $\eta_e = 5 \times 10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , et l’antisymétrie équatoriale a été imposée via la condition limite.

La première solution, présentée à la Figure 5.17A, est encore une fois notre solution minimale de la Fig. 5.15, avec un effet- $\alpha$  variant en  $\cos \theta$ . Les deux autres utilisent un effet- $\alpha$  variant en  $\sin^2 \theta \cos \theta$ , et parviennent ainsi à produire deux branches dynamos, la première puisant comme auparavant dans le cisaillement radial négatif aux hautes latitudes de la tachocline, et la seconde dans le cisaillement radial positif présent dans la région équatoriale de la tachocline. Comme l’effet  $\alpha$  ne change pas de signe dans un hémisphère donné, ces deux branches migrent dans des directions latitudinales opposées, en accord avec la règle de propagation de Parker–Yoshimura. Les seconde et troisième solutions sur la Fig. 5.17 ne diffèrent que par le signe de  $C_\alpha$ , d’où les propagations en sens opposés.

La co-existence de deux branches dynamos ayant des fréquences d’oscillation distinctes en régime nonlinéaire est une caractéristique remarquable, et peut conduire à une modulation à long terme de l’amplitude de chaque mode, semblable à un battement, comme on l’observe sur la solution de la Fig. 5.17C. Ce genre de modulation n’est habituellement pas attendue dans des modèles où la seule nonlinéarité limitant l’amplitude du cycle est le quenching- $\alpha$  algébrique (l’éq. (5.72)). On remarquera que cette modulation est absente dans la solution à  $C_\alpha < 0$ , où les deux branches originent toutes les deux des mi-latitudes, et donc se resynchronisent au début de chaque demi-cycle magnétique (cf. Fig. 5.17B). Ceci est un exemple de deux modes dynamos interagissant l’un avec l’autre, conséquence du profil spatial plutôt complexe de la rotation différentielle solaire.

La solution de la Fig. 5.17B montre une belle branche équatoriale, associée à un cycle magnétique de période  $P_{\text{cyc}} \simeq 16 \text{ yr}$ , ce qui commence à s’approcher pas mal de notre “cible” de 22 ans. Cependant, il n’existe aucun équivalent dans le diagramme papillon à la forte branche se propageant vers le pôle qui caractérise également cette solution. On peut évidemment s’en débarrasser en forçant l’effet- $\alpha$  à zéro aux latitudes dépassant  $\sim 40^\circ$ , mais ce n’est pas très satisfaisant comme approche, même dans le cadre d’une modélisation impliquant autant de paramètres et prescriptions ad hoc. Il existe d’autres options.

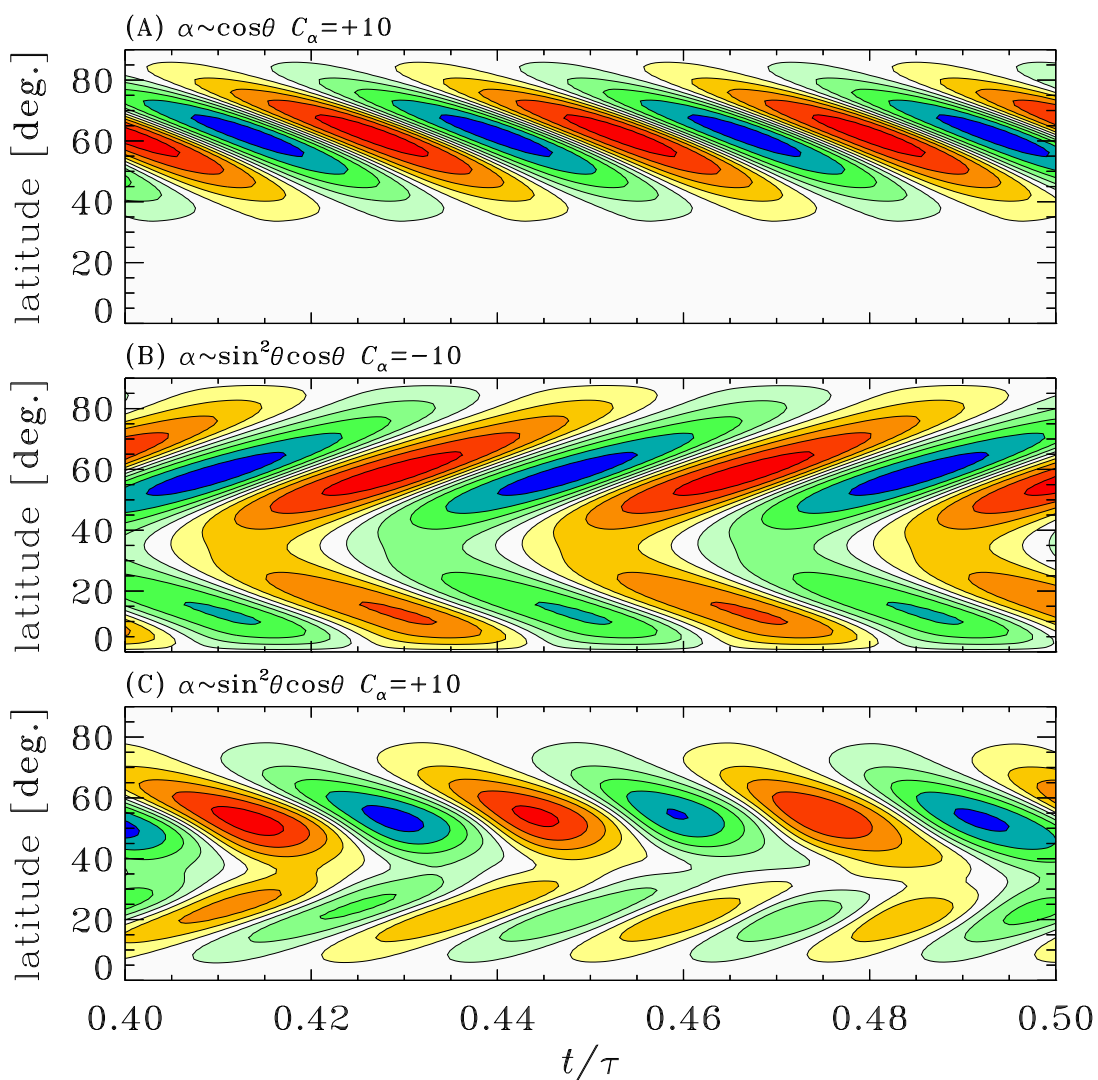


Figure 5.17: Diagrammes temps-latitude (“papillon”) de la composante magnétique toroidale pour une sélection de solutions  $\alpha\Omega$  incorporant le quenching- $\alpha$ . Les diagrammes sont construits à une profondeur  $r/R = 0.7$  correspondant à la base de l’enveloppe convective. Les isocontours sont normalisés à la valeur maximale, et tracés à intervalles de  $\Delta B/\max(B) = 0.2$ , le dégradé jaune—rouge (vert—bleu) correspondant aux valeurs  $B > 0$  ( $< 0$ ). L’effet- $\alpha$  a une dépendance latitudinale en  $\cos\theta$  pour la solution du haut, et  $\sin^2\theta \cos\theta$  pour les deux autres. Les autres composantes du modèle sont les mêmes que sur la Fig. 5.15. On notera la présence de deux cycles distincts dans la solution en C, leurs périodes différant par environ 25%.

### 5.6.4 Trois variations sur un thème

Comme on l’a vu brièvement à la §1.5 (Figure 1.8 et texte y référant), une circulation fluide dans le plan méridien est une composante dynamique incontournable d’une zone convective en rotation. L’écoulement vers les pôles à  $\sim 15 \text{ m s}^{-1}$  observé au niveau de la photosphère dans le soleil doit être couplé à un écoulement vers l’équateur plus profondément, afin d’assurer la conservation de la masse. Un tel écoulement peut transporter le champ magnétique produit par la dynamo —c’est l’effet des termes  $\propto \mathbf{u}_p \cdot \nabla$  dans les éqs. (5.52)–(5.53), et donc, pour un écoulement profond vers l’équateur suffisamment rapide, peut contrer la Loi de propagation de Parker–Yoshimura et produire une propagation équatoriale du champ profond quel que soit le signe de l’effet- $\alpha$ . À basses vitesses, l’effet de l’écoulement méridien est d’induire une forme de décalage Doppler dans la fréquence de l’onde dynamo; la transition à un régime purement advectif où l’écoulement latitudinal entraîne simplement le champ magnétique, se produit lorsque la vitesse de l’écoulement méridien devient comparable à la vitesse de phase de l’onde dynamo. Une fois ce régime atteint, la période du cycle magnétique devient contrôlée par le temps de retournement de l’écoulement méridien. Ce genre de dynamo a hérité de l’acronyme “FTD”, pour “flux transport dynamo”. La composante toroidale est toujours produite par cisaillement rotationnel de la composante poloidale, et cette dernière par l’effet- $\alpha$  agissant sur la composante toroidale; mais l’évolution spatiotemporelle du champ magnétique aux grandes échelles est dominée par l’écoulement méridien, donc le temps de retournement devient le principal facteur contrôlant la période du cycle magnétique

Les modèles dynamos du cycle solaire basés sur l’effet- $\alpha$  ne sont certainement pas les seuls “sur le marché”, ni même les premiers. On a déjà vu à la §5.1.2 que les paires bipolaires de taches tendent à émerger avec une inclinaison nette par rapport à la direction Est–Ouest. A cette inclinaison s’associe un moment dipolaire net qui, si on peut aller y puiser, peut contribuer au dipôle de surface. Ce mécanisme a été proposé il y a maintenant plus d’un demi-siècle par l’équipe papa+fiston de Harold et Horace Babcock, et représente un processus de conversion du champ toroidal (interne) en un moment dipolaire (photosphérique). Agissant en parallèle au cisaillement du dipôle par la rotation différentielle, on a là en principe les ingrédients requis pour produire une dynamo cyclique. Ces dynamos sont maintenant connues sous l’appellation “Babcock-Leighton”. En pratique, la quasi-totalité des modèles du cycle solaire basés sur le mécanisme de Babcock-Leighton solutionnent les équations dynamo  $\alpha\Omega$  incluant un écoulement méridien, en ajoutant au membre de droite de l’éq. (5.52) un terme pseudo-effet- $\alpha$ , concentré en surface plutôt que dans la zone convective. La propagation équatoriale du champ interne est assurée par l’écoulement méridien profond. À ce niveau général de complexité, ce type de modèle reproduit le mieux les caractéristiques observées du cycle solaire. De surcroît, le mécanisme de Babcock-Leighton est bel et bien observé à la surface du soleil, et donc beaucoup mieux contraint que l’effet- $\alpha$ . La bibliographie en fin de chapitre inclut quelques points d’entrée vers la très volumineuse littérature sur ce genre de modèle dynamo du cycle solaire.

Plusieurs instabilités hydro- ou magnétohydrodynamiques peuvent, sous l’influence de la force de Coriolis, développer des structures fluides hélicales qui peuvent agir qualitativement comme l’effet- $\alpha$  et produire une composante magnétique poloidale aux grandes échelles spatiales. Couplé au cisaillement par la rotation différentielle, on peut encore une fois construire des modèles dynamos applicables au soleil et étoiles de type solaire. Plusieurs modèles de ce genre ont été proposés au fil des années, et la bibliographie en fin de chapitre inclut quelques références représentatives. Comme dans le cas des dynamos de type Babcock-Leighton, dans la quasi-totalité des cas les calculs d’instabilités servent à guider la construction d’un terme source poloidal ayant la gueule générale d’un effet- $\alpha$ , et la forme  $\alpha\Omega$  des équations dynamos cinématiques et axisymétriques est solutionnée comme auparavant, et incluant toujours une contribution turbulente à la diffusivité nette, due à la convection.

## 5.7 Simulations magnétohydrodynamiques globales

Tous les modèles dynamos de type “champ moyen” décrits et discutés précédemment introduisent beaucoup de simplifications physiques et géométriques, et laissent beaucoup d’arbitraire dans la spécification de diverses quantités clef, comme l’effet- $\alpha$  et la diffusivité turbulente. Une autre option est de se retrousser les manches et solutionner le problème dans toute sa complexité physique; bref, effectuer une simulation numérique magnétohydrodynamique de la convection thermique d’un fluide électriquement conducteur dans une coquille de fluide stratifiée par la gravité et en rotation. Mathématiquement, le problème est décrit par le système d’équations aux dérivées partielles suivant:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) = 0, \quad (5.73)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\varrho} \nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \mathbf{g} + \frac{1}{\mu_0 \varrho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \frac{1}{\varrho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (5.74)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = (\gamma - 1)e \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\varrho} [\nabla \cdot ((\chi + \chi_r) \nabla T) + \phi_u + \phi_B], \quad (5.75)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B}). \quad (5.76)$$

Rappelons qu’ici  $\varrho$  est la densité du fluide,  $e$  son énergie interne,  $p$  la pression,  $\boldsymbol{\tau}$  le tenseur des stress visqueux,  $\chi$  and  $\chi_r$  sont les coefficients de conductivités thermique et radiative,  $\phi_u$  et  $\phi_B$  sont les fonctions de dissipation visqueuse et Ohmique, et tout le reste est comme d’habitude. Il s’agit ici de nos équations fluides habituelles, avec l’ajout de la force de Lorentz et de la dissipation Ohmique aux membres de droite (5.74) et (5.75), respectivement. Dans le contexte des simulations globales du soleil et des étoiles, il est d’usage de solutionner le problème dans un repère en rotation; la force centrifuge est absorbée dans le gradient de pression, ne laissant que la force de Coriolis comme terme supplémentaire au membre de droite de (5.74). On doit de plus introduire une équation d’état, habituellement celle d’un gaz parfait, et assurer de bien respecter la contrainte  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . La convection est forcée soit par un flux de chaleur imposé aux frontières, soit par un terme de forçage volumétrique correspondant à la divergence non-nulle du flux radiatif, la source d’énergie ultime de la convection dans ce contexte.

La plupart des simulations MHD globales publiées à date utilisent l’approximation dite *anélastique*, dans le cadre de laquelle toute les variations temporelles de la densité sont négligées, sauf pour celles provenant de la dilatation thermique; autrement dit, l’essentielle force de flottaison demeure active, mais les ondes sonores (et MHD lente et rapide) sont éliminées. Notons également que dans le cadre de cette approximation, l’éq. (5.73) est remplacée par  $\nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) = 0$ . Malgré ces approximations, le problème demeure très exigeant du point de vue numérique, principalement en raison du spectre extrêmement large d’échelles temporelles et spatiales s’y développant, conséquence du régime fortement turbulent de la convection solaire/stellaire, caractérisé par des nombres de Reynolds  $Re \simeq R_m \simeq 10^{8-10}$ .

Débutant il y a maintenant plus de 30 ans avec les premières simulations MHD effectués par Peter Gilman et Gary Glatzmaier, bon nombre de ces simulations ont été développées au fils des ans. La bibliographie en fin de chapitre en offre une sélection. Même cette (relativement) courte liste englobe des simulations basées sur une variété d’approches algorithmes, traitement des petites échelles, conditions limites, méthodes de forçage thermique, taux de rotation, etc. Bien que toutes, chacune à sa façon, opèrent dans le régime  $Ro < 1$  (dominance de la rotation), aucune n’approche du régime dissipatif attendu dans les intérieures stellaires: les simulations à plus hautes résolution spatiale atteignent quelques  $10^3$  au niveau des nombres de Reynolds visqueux et magnétique, encore 6 ordres de grandeurs sous les valeurs attendues. Néanmoins, ces simulations capturent d’une manière physiquement correcte les interactions fluide–champ magnétique à toutes les échelles spatiales et temporelles capturées par la discrétisation; ce que même les modèles en champ moyen les plus poussés ne font absolument pas.

Bien qu’il ne soit pas dans mes habitudes de me péter les bretelles, je me permet de le faire ici: c’est au département de physique de l’UdeM où ont été produites les premières simulations de ce genre parvenant à générer un champ magnétique aux grandes échelles inversant sa polarité selon un cycle régulier, d’une manière très similaire à bien des points de vues de ce qui est observé sur le soleil. Le reste de cette section décrit une de ces simulations, en guise d’exemple; plus spécifiquement, la simulation EULAG-MHD baptisée “millenium” (voir références dans la bibliographie en fin de chapitre).

### 5.7.1 Écoulements et champs magnétiques aux grandes échelles

Un grand nombre de simulations hydrodynamiques et magnétohydrodynamiques globales, semblables à EULAG-MHD/millenium, ont permis d’établir certaines tendances robustes par rapport aux écoulements (surtout) et champ magnétiques (à un degré moindre) se développant aux grandes échelles spatiales dans des configurations de type “soleil”. Un paramètre-clef s’avère être le nombre de Rossby  $Ro$  (voir §1.5.5). Quand ce dernier est sous  $Ro \simeq 0.5$ , la rotation est de type dit “solaire”, dans le sens que la vitesse angulaire décroît de l’équateur vers les pôles, comme sur la Fig. 1.8A; mais si  $Ro \gtrsim 1$ , on se retrouve avec un profil dit “anti-solaire”, avec l’équateur tournant plus lentement que les plus hautes latitudes, comme sur la la Fig. 1.8B. Avec Avec  $Ro \sim 0.1-0.3$  dans le gros de sa zone convective, le soleil se retrouve donc dans le régime de dominance rotationnelle (force de Coriolis plus importante que le terme inertiel dans l’équation du mouvement, viz. la §1.4)... mais à peine! La quasi-totalité de ces simulations produit des profils de rotation différentielle interne caractérisés par un très haut degré d’alignement des isocontours de vitesse angulaire avec l’axe de rotation, conséquence du théorème de Taylor-Proudman (voir éq. (1.106) et discussion s’y rattachant). Les champs magnétiques, même lorsque dominées par les petites échelles spatiales, contribuent de manière importante à la dynamique zonale, et près de  $Ro \sim 0.5$  peuvent faire basculer le profil de rotation différentielle d’anti-solaire à solaire.

Au niveau des champs magnétiques aux grandes échelles, et surtout de leur évolution temporelle, on observe cependant une plus grande diversité, avec très peu de simulations parvenant à générer des inversions de polarité régulières et bien synchronisées entre les hémisphères. Les simulations EULAG-MHD demeurent presque uniques à ce niveau.

### 5.7.2 Inversions cycliques de la polarité magnétique

La Figure 5.18 présente un aperçu de la structure et évolution du champ magnétique aux grandes échelles dans la simulation millenium. Le diagramme en (A) est une projection Mollweide de la composante toroidale du champ magnétique extraite à une profondeur  $r/R = 0.718$ , correspondant à l’interface entre la zone convective et le fluide convectivement stable sous-jacent. Le diagramme en (B) montre la moyenne zonale de cette même composante toroidale, cette fois dans un plan méridien. Ces deux diagrammes sont construits à partir d’un instantané (un pas de temps) de la simulation. En (C) et (D) cette même moyenne zonale du champ magnétique toroidal est présentée sous la forme de diagramme temps-latitude et temps-rayon, tous deux couvrant cette fois 300 années de simulation. Le diagramme temps-latitude en (C) est construit encore une fois à l’interface entre la zone convective et la couche de fluide stable, tandis que le diagramme temps-rayon est construit à mi-latitude, là où la composante toroidale atteint son amplitude maximale (voir le diagramme en B).

Les inversions de polarités du champ magnétique aux grandes échelles spatiales (ici axysymétriques) sont ici très régulières, bien synchronisées entre les hémisphères, et conservent une parité équatoriale antisymétrique, comme dans le cas du le soleil. Par contre la période de ce cycle ( $\simeq 80$ yr) est trop longue de près d’un facteur 4. Des simulations plus récentes effectuées avec EULAG-MHD (voir références en fin de chapitre) ont réussi à diminuer cette période à  $\simeq 25$ yr, ce qui est quasi-solaire... mais au prix d’une désynchronisation excessive des hémisphères; travail toujours en cours!

On voit bien sur la Fig. 5.18B and D que le champ magnétique aux grandes échelles



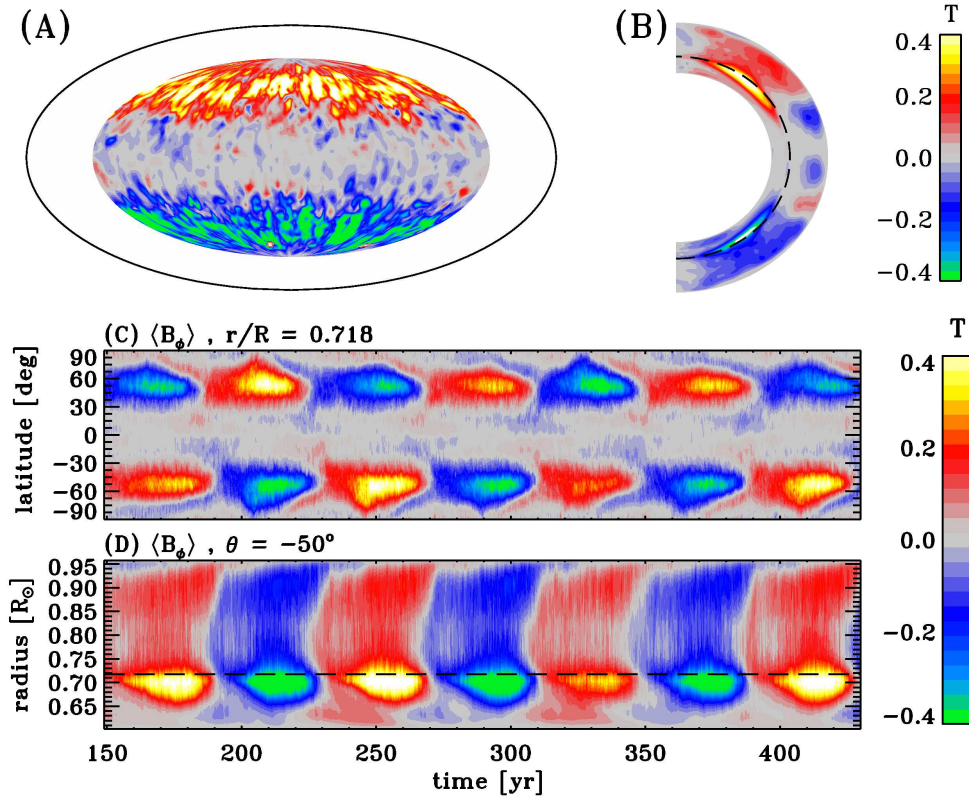


Figure 5.18: Cycles magnétiques dans la simulation MHD globale “millennium”, effectuée à l’aide du code EULAG-MHD. La partie (A) montre un instantané du champ toroidal à la profondeur  $r/R_{\odot} = 0.718$ , vu en projection Mollweide; la partie (B) montre un instantané de la moyenne zonale de la composante toroidale dans le plan méridien, au même pas de temps qu’en (A). (C) et (D) sont des diagrammes temps-latitude et temps-rayon de la moyenne zonale de la composante toroidale, à  $r/R = 0.718$  et latitude  $-50$  degrés, respectivement. Les lignes en tirets en (B) et (D) indiquent la position de la base de la zone convective. Cette simulation tourne au taux solaire, mais est sous-lumineuse en comparaison au soleil. Une version animée est disponible sur la page web du cours.

s’accumule aux mi-latitudes à la base de la zone convective, atteignant en fait son maximum dans le haut de la couche de fluide convectivement stable. Ceci est dû à la fois au pompage turbulent vers le bas dans la zone convective (on y reviendra sous peu), et aussi au fait que la turbulence dans la zone convective accélère la dissipation du champ magnétique aux grandes échelles. Le champ à la base de la zone convective atteint des valeurs substantielles de  $\sim 1$  T, une bonne fraction de l’équipartition (viz. eq. 5.71). On retrouve des champs d’intensité semblable, ou même encore plus grande, dans d’autres simulations MHD globales, certaines parvenant même à produire des structures commençant à ressembler à des tubes de flux magnétique, ultimement à l’origine des taches solaires<sup>5</sup>.

Si les tubes de flux produisant (éventuellement) des taches solaires, originent de la base de la zone convective, et si leur taux de formation est proportionnel à l’intensité du champ magnétique profond, et si les tubes de flux émergent radialement à travers la zone convective<sup>6</sup>, alors le diagramme temps-latitude de la Figure 5.18C devient l’équivalent, dans cette simulation,

<sup>5</sup>Voir l’article de Nelson et al. (2013) cité en bibliographie en fin de chapitre.

<sup>6</sup>Tous ces “si” peuvent paraître très arbitraires et contraignants, mais les simulations de la déstabilisation et ascension des tubes de flux magnétique confirment leur validité, en première approximation.

du diagramme papillon des taches solaires. Ici l'activité est concentrée à trop hautes latitudes, et ne montrent pas la propagation vers l'équateur au cours du cycle qui caractérise le diagramme papillon des taches (voir Figure 5.3).

La simulation millenium produit également une composante dipolaire très bien alignées à l'axe de rotation, inversant également sa polarité; cette inversion se fait cependant en phase avec la composante toroidale interne, tandis que les observations du soleil suggèrent une différence de phase de  $\pi/2$ .

### 5.7.3 Fluctuations du cycle magnétique

Il est très clair, sur examen de la Fig. 5.18C et D, que le cycle magnétique se développant dans cette simulation n'est pas strictement périodique, et montre des variations substantielles au niveau de l'amplitude du champ magnétique interne d'un demi-cycle au suivant. Le pont vers les observations des taches (viz. Fig. 5.1) peut se faire via la construction d'un "proxy", par intégration de la composante toroidale du champ magnétique dans une mince coquille chevauchant la base de la zone convective<sup>7</sup>; ce choix est dicté par le fait que c'est là où on s'attend à la formation des tubes de flux qui émergeront ultimement sous la forme de paires de taches solaires. Si formation des tubes est proportionnelle au flux magnétique local, alors la séquence temporelle de ce proxy devient l'équivalent de la séquence temporelle du nombre de taches solaires.

La Figure 5.19 montre les séquences temporelles de ce proxy, pour la simulation complète en (A) et divisé par hémisphère en (B). Les deux histogrammes en (C) et (D) montrent les distributions des amplitudes des cycles dans chaque hémisphère. L'étendue temporelle est ici de 1600 ans, couvrant 40 cycles, soit l'ensemble de la simulation "millenium". On constate une grande variabilité dans les amplitude des cycles successifs, qui n'est pas sans rappeler celle des cycles observés dans le nombre de taches solaires. Certains cycles montrent des asymétries hémisphériques substantielles, plus marquées que dans le cas du soleil. Les distribution des amplitudes des cycles montrent également une tendance à la bimodalité. Il n'en demeure pas moins que le cycle demeure très stable durant toute l'étendue de la simulation, avec une demie-période de  $40.5 \pm 1.5$  yr ici. De plus, les inversions de polarité demeurent bien synchronisées dans les deux hémisphères, même pour les cycles où une différence marquée est observée dans les amplitudes Nord et Sud. Ici le délai Nord-Sud ne dépasse pas 5 ans, soit à peine 12% de la (demie-)période du cycle. C'est là une synchronisation hémisphérique meilleure que celle observée pour le cycle solaire.

### 5.7.4 Rétroaction magnétique sur la rotation différentielle

Considérant que le champ magnétique atteint  $\sim 1$  T à la base de la zone convective au maxima du cycle dans la simulation millenium, on peut s'attendre à un impact de la force de Lorentz magnétique sur les écoulement inductifs, en particulier sur la rotation différentielle. L'emphase sur la rotation différentielle vient du fait qu'une variation cyclique est détectée par héliosimologie; son amplitude est plutôt faible, soit quelques % de la fréquence angulaire moyennée sur un cycle d'activité, mais sa période d'oscillation coïncide parfaitement avec celle du cycle magnétique, ne laissant aucun doute que ce dernier est son moteur.

Il s'avère que cette rétroaction magnétique n'est pas uniquement causée par la force de Lorentz associée à l'oscillation de la composante aux grandes échelles du champ magnétique. Ceci est illustré à la Figure 5.20, toujours pour la simulation millenium. L'idée est de reformuler la composante- $\phi$  de l'équation du mouvement sous forme conservative:

$$\varrho r \sin \theta \frac{\partial \langle u_\phi \rangle}{\partial t} = \nabla \cdot \left\{ r \sin \theta \left[ \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\langle B_\phi \rangle \langle \mathbf{B} \rangle}_{\text{MT}} + \underbrace{\langle b'_\phi \mathbf{b}' \rangle}_{\text{MS}} \right] \right\} \quad (5.77)$$

<sup>7</sup>Voir l'article Passos & Charbonneau (2014) cité en bibliographie pour plus de détails sur la définition et justification de ce proxy.

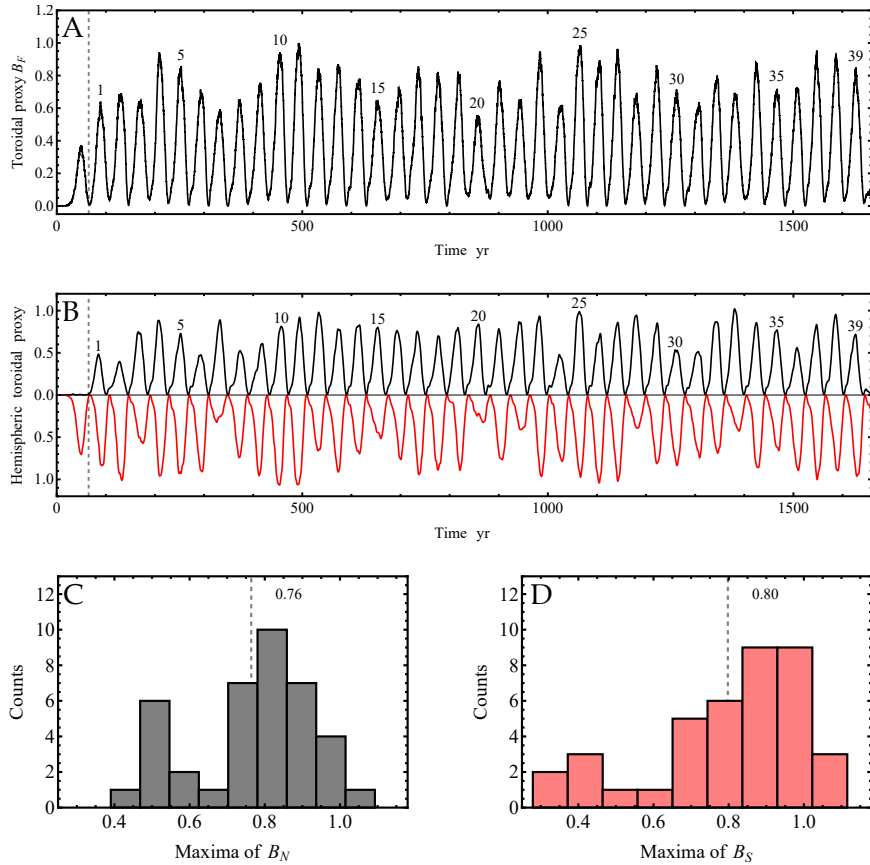


Figure 5.19: Cycles d’activité magnétique sur l’étendue complète de la simulation millénium de la Fig. 5.18. (A) Séquence temporelle normalisée d’un proxy équivalent au nombre de taches solaires; (B) Identique en (A) mais divisé selon les hémisphères, avec des valeurs négatives utilisées pour l’hémisphère sud (en rouge); (C) et (D) montrent les distributions des amplitudes des cycles mesurées dans chaque hémisphère. Adapté des Figures 3, 8 et 10 dans Passos & Charbonneau, *Astron. Ap.*, **568**, A113 (2014).

$$- \rho \left( \underbrace{\langle (U_\phi) + \Omega r \sin \theta \rangle}_{\text{MC}} \mathbf{u} + \underbrace{\langle u'_\phi \mathbf{u}' \rangle}_{\text{RS}} \right) \quad (5.78)$$

où l’écoulement total  $\mathbf{u}$  et le champ magnétique  $\mathbf{B}$  ont été séparés en leurs composantes axisymétriques (grandes échelles) et non-axisymétriques (petites échelles):  $\mathbf{U} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}'$ , and  $\mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{b}'$ , et les crochets “ $\langle \rangle$ ” indiquent une moyenne zonale. Le membre de droite est écrit sous la forme de la divergence d’un flux de moment cinétique, pour lequel on peut identifier quatre contributions: la force de Lorentz associée au champ aux grandes échelles (MT), la force magnétique associée au champ aux petites échelles (MS pour “stress de Maxwell”), le transport de moment cinétique par la circulation méridienne (MC), et les stress de Reynolds (RS).

La Figure 5.20 montre les flux radiaux globaux (et A et B) de moment cinétiques associés à chacune de ces contributions intégré sur des coquilles sphériques de rayon  $r$  croissant, ainsi que les flux latitudinaux globaux (en C et D) obtenus en intégrant les même quatre termes cette fois sur des surface coniques d’ouverture angulaire  $\theta$  dont l’axe coïncide avec l’axe de symétrie/rotation. La colonne de gauche correspond à des moyennes temporelles centrées sur un minimum du cycle magnétique, tandis qu’à droite les moyennes sont centrées sur un maximum.

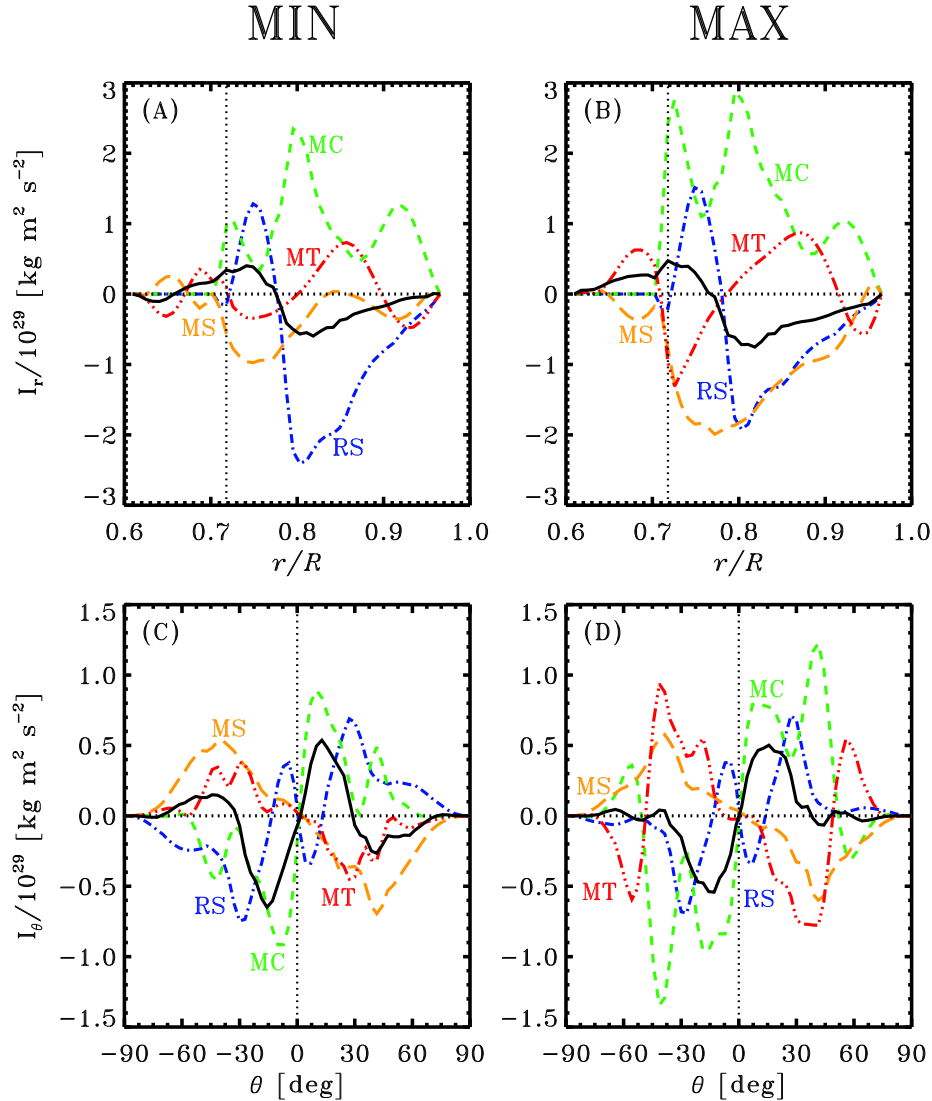


Figure 5.20: Variation des flux de moment cinétiques entre les phases minimale (à gauche) et maximale (à droite) du cycle magnétique dans la simulation EULAG-MHD/millennium de la Fig. 5.18. Les diverses courbes correspondent aux quatre contributions au flux de moment cinétique au membre de droite de l'éq. (5.77), soit: les stress de Reynolds (RS, en bleu), le transport par la circulation méridienne (MC, en vert), les stress de Maxwell (MS, en orange), et la force de Lorentz de la composante aux grandes échelles du champ magnétique (MT, en rouge). La rangée du haut montre les flux globaux radiaux (termes radiaux intégrés sur des coquilles sphériques), et la rangée du bas les flux globaux latitudinaux (intégrés sur des cônes). Les traits noirs montrent la somme des quatres contributions. Le trait pointillé vertical indique la base de la zone convective. Adapté de l'article par Beaudoin et al., *Solar Phys.*, **282**, 335–360 (2013).

La Figure 5.20 montre bien que les profils radiaux et latitudinaux des flux de moment cinétique sont plutôt complexes, mais livrent néanmoins un message des plus clairs: bien que le couple magnétique associé au champ magnétique aux grandes échelles (en rouge, et étiqueté MT) varie de manière importante entre les phases minimale et maximale du cycle magnétique, comme on s’y attendrait, les autres contributions varient tout autant, et à un niveau comparable de surcroît. Dans cette simulation, l’impact du magnétisme sur la dynamique zonale se fait sentir à tous les niveaux, incluant les contributions à prime abord purement hydrodynamiques, comme les stress de Reynolds (RS, en bleu) ou le transport par la circulation méridienne (MC, en vert). Il résulte de ces variations une *oscillation torsionnelle* du profil de rotation différentielle d’amplitude et phase semblable à celle détectée dans le soleil par héliosismologie<sup>8</sup>. On retrouve également une signature claire du cycle magnétique dans la luminosité flux convective, et cette variation se retrouve en phase avec le cycle magnétique, comme on l’observe sur le soleil<sup>9</sup>.

### 5.7.5 Analyse via l’électrodynamique des champs moyens

L’appareillage mathématique de l’électrodynamique des champs moyens, introduit précédemment à la §5.4.1, peut être utilisée pour *interpréter physiquement* les sorties des simulations numériques MHD, en particulier au niveau de l’identification des processus inductifs et de leurs importances relatives. Une approche particulièrement simple consiste à calculer d’abord, par moyenne zonale de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{B}$ , la partie “moyenne” des écoulements ( $\langle \mathbf{u} \rangle$ ) et du champ magnétique ( $\langle \mathbf{B} \rangle$ ), et ensuite définir les petites échelles selon

$$\mathbf{b}'(r, \theta, \phi, t) = \mathbf{B}(r, \theta, \phi, t) - \langle \mathbf{B} \rangle(r, \theta, t) , \quad \mathbf{u}'(r, \theta, \phi, t) = \mathbf{U}(r, \theta, \phi, t) - \langle \mathbf{u} \rangle(r, \theta, t) . \quad (5.79)$$

La force électromotrice turbulente  $\boldsymbol{\xi}$  peut alors être calculée explicitement via l’éq. (5.21). Connaissant maintenant  $\boldsymbol{\xi}(r, \theta, t)$  et  $\langle \mathbf{B} \rangle(r, \theta, t)$  (et ses dérivées spatiales), on peut alors effectuer en chaque point  $(r, \theta)$  du plan méridien une minimisation des moindres carrés entre la séquence temporelle de  $\boldsymbol{\xi}$  et celles de  $\langle \mathbf{B} \rangle$  et ses dérivées, pour en extraire les valeurs des composantes correspondantes des tenseurs  $\boldsymbol{\alpha}(r, \theta)$  et  $\boldsymbol{\beta}(r, \theta)$ .

Cette approche est celle retenue pour produire les résultats présentés sur la Figure 5.21. Les diagrammes A–C illustrent, dans le plan méridien, les éléments diagonaux du tenseur  $\boldsymbol{\alpha}$ ; E–F montrent les composantes  $r$  et  $\theta$  de la vitesse de pompage turbulent (associées à la partie antisymétrique du tenseur- $\boldsymbol{\alpha}$  via l’éq. (5.33), on s’en souvient n’est-ce pas...?), tandis que F présente la partie isotrope (diagonale moyenne) du tenseur  $\boldsymbol{\beta}$ . La simulation MHD utilisée est toujours “millennium”. D’autres méthodes existent pour estimer les composantes de ces tenseurs, et ont été appliquées à diverses simulations conceptuellement semblables à celle considérée ici. On note certaines divergences, mais aussi plusieurs similarités, entre les résultats de ces analyses. Parmi les similarités, notons les suivantes:

1. Le tenseur- $\boldsymbol{\alpha}$  est “plein”, dans le sens que ses composantes hors-diagonales sont du même ordre que ses composantes diagonales.
2. Les composantes souvent dominantes, atteignant quelques dizaines de mètres par seconde, sont en premier lieu  $\alpha_{rr}$ , avec  $\alpha_{\phi\phi}$  bon second.
3. Les composantes  $\alpha_{\phi\phi}$  et  $\alpha_{\theta\theta}$  sont positives (négatives) dans l’hémisphère Nord (Sud), sauf près de la base de la zone convective, où elles changent de signe.
4. La composante radiale du pompage turbulent est négative dans la zone convective, loin de ses frontières supérieures et inférieures.
5. La composante latitudinale du pompage turbulent est significative, atteignant quelques  $\text{m s}^{-1}$  aux latitudes basses et moyenne dans le gros de la zone convective.

<sup>8</sup>Voir l’article par Beaudoin et al. (2013) cité en bibliographie pour plus de détails sur ces oscillations torsionnelles.

<sup>9</sup>Voir les articles par Cossette et al. (2013) et (2018) cités en bibliographie pour plus de détails sur cette modulation cyclique du transport convectif de l’énergie.

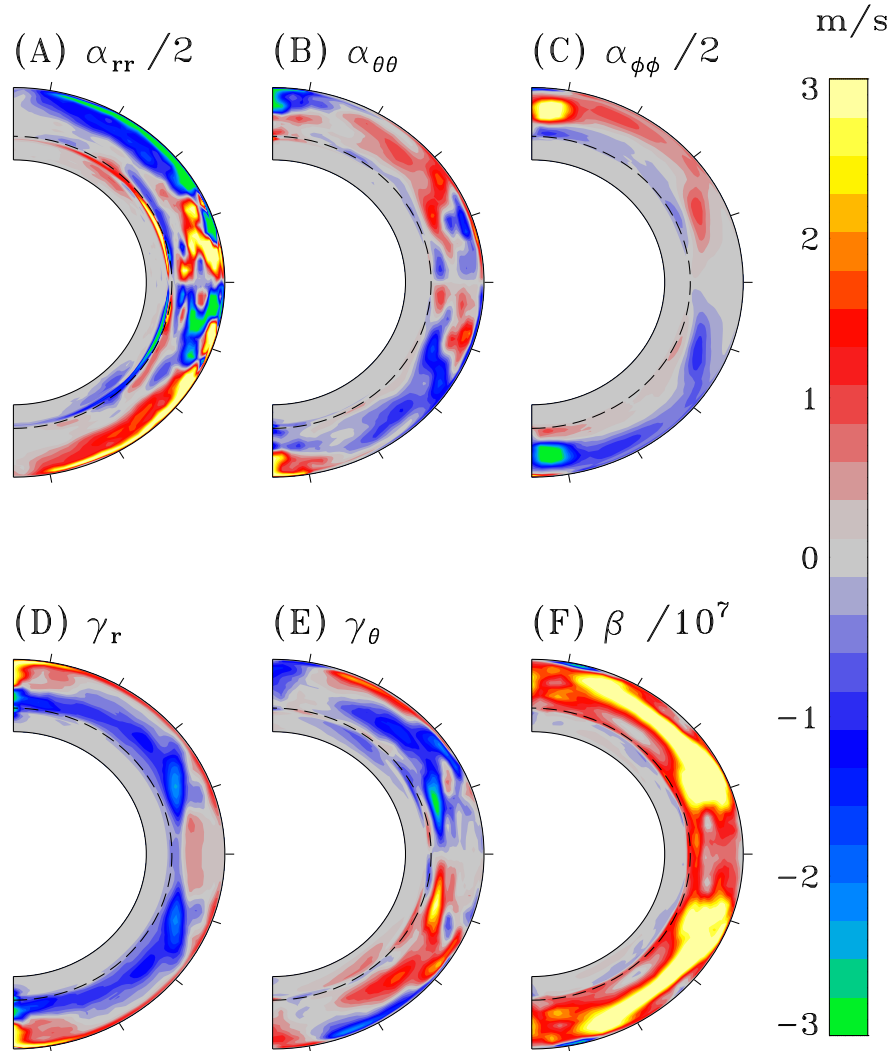


Figure 5.21: Une sélection de quelques composantes des tenseurs  $\alpha$  et  $\beta$ , extrait de la simulation EULAG-MHD “millenium”. (A)  $\alpha_{rr}$ ; (B)  $\alpha_{\theta\theta}$ ; (C)  $\alpha_{\phi\phi}$ ; (D) vitesse radiale du pompage turbulent  $\gamma_r$ ; (E) vitesse latitudinale du pompage turbulent  $\gamma_\theta$ ; (F) partie isotrope du tenseur  $\beta$ , en unités de  $10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Dans tous les cas l’extraction des composantes des tenseurs est effectuée indépendamment dans chaque hémisphère, le haut degré de symétrie équatoriale évident ici étant une caractéristique véritable de cette simulation. Adapté des Figures 2 et 4 de Simard et al., *Adv. Sp. Res.*, **58**, 1522–1537 (2016).

6. La partie isotropique de la diffusivité turbulente  $\beta$  est très élevée, allant de quelques  $10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  sur la Fig. 5.21F, jusqu'à 100 fois plus dans certaines simulation plus lumineuses.

Un des exercices de la troisième série vous fera comparer les prédictions de la théorie SOCA (voir §5.4) aux résultats de la Figure 5.21.

Il est également possible de tester l'idée du quenching de l'effet- $\alpha$  en subdivisant la simulation en blocs disjoints regroupant d'un côté les phases minimales du cycle magnétique, de l'autre les phases maximales, et en extraire séparément le tenseur  $\alpha$ . On mesure bien une réduction de l'effet- $\alpha$  quand le champ magnétique moyen est plus intense, mais cette réduction n'est pas particulièrement bien capturée par l'éq. (5.72) introduite de manière si *ad hoc* à la §5.6.2<sup>10</sup>.

### 5.7.6 Du soleil aux étoiles

Depuis maintenant quatre décennies, les observations de cycles stellaires brièvement discutées à la §5.1.3 ont été interprétées à toutes les sauces imaginables dans le contexte des modèles dynamos en champ moyen. Contrairement au cas solaire, ici on ne connaît pas la rotation différentielle interne ou la circulation méridienne, donc même en utilisant un modèle calibré sur le soleil comme point de départ on se retrouve forcé de spécifier, *a priori* comment varient ces écoulements (et l'effet- $\alpha$ , diffusivité turbulente, etc.) quand la rotation et la luminosité de l'étoile changent. Avec autant de liberté (en termes de fonctions et paramètres ajustables), on peut évidemment reproduire les observations, mais en bout de ligne on n'en apprend pas grand chose de physiquement solide.

Les simulations MHD du genre de celles décrites à la §5.7 ont l'immense avantage de produire à la fois les écoulements et les champs magnétiques de manière physiquement cohérente. Le défi est de parvenir à produire une séquence de simulations générant des cycles magnétiques réguliers sur une plage relativement large de vitesses de rotation et de luminosités. Encore une fois —s'excusez je repars sur le pétage de bretelles— c'est à l'UdeM que la première séquence de ce genre a été produite, et tout récemment en plus<sup>11</sup>.

La Figure 5.22 présente un récapitulatif synthétique de la dynamo aux grandes échelles dans simulations. On y porte en graphique le rapport entre l'énergie cinétique de la rotation différentielle versus l'énergie cinétique totale (typiquement dominée par la turbulente convective), en fonction du nombre de Rossby. Chaque point correspond à une simulation individuelle, et est coloré selon le type d'action dynamo aux grandes échelles s'y développant: en bleu, des cycles magnétiques de courte période (quelques années), produits dans la moitié supérieure de la zone convective; en rouge, des cycles de type "solaire", originant de la moitié inférieure de la zone convective; en noir, les simulations produisant des champs stationnaires aux grandes échelles, i.e., n'inversant pas leur polarité magnétique. Deux simulations à  $\text{Ro} \simeq 0.3$  montrent à la fois un cycle court et un cycle décadal de type solaire (le soleil aussi!).

Bien que des simulations —et analyses— supplémentaires soient requises pour mieux quantifier ce qui déclenche les transitions d'un type de dynamo à une autre, il est déjà clair d'après la Fig. 5.22 que la rotation différentielle y joue un rôle majeur.

Un aspect particulièrement intéressant des cycles de type solaire (en rouge sur la Fig. 5.22) est la manière dont la période de leur cycle ( $P_{\text{cyc}}$ ) varie en fonction de la période de rotation de la simulation ( $P_{\text{rot}}$ ) et du nombre de Rossby. La relation suivante offre un excellent fit pour ce sous-ensemble de simulations:

$$\frac{P_{\text{cyc}}}{P_{\text{rot}}} \propto \text{Ro}^{-1.6 \pm 0.14} . \quad (5.80)$$

C'est une tendance inverse à celle traditionnellement établie sur la base de modèles dynamos en champ moyen, où on s'attend à ce que ce rapport *augmente* avec le nombre de Rossby.

<sup>10</sup>Voir l'article par Simard et al. (2016) cité en bibliographie pour plus de détail sur cette analyse, et ses conclusions.

<sup>11</sup>Il s'agit principalement du fruit du dur labeur d'un ex-postdoc, Antoine Strugarek, et d'un ex-étudiant au doctorat, Patrice Beaudoin.

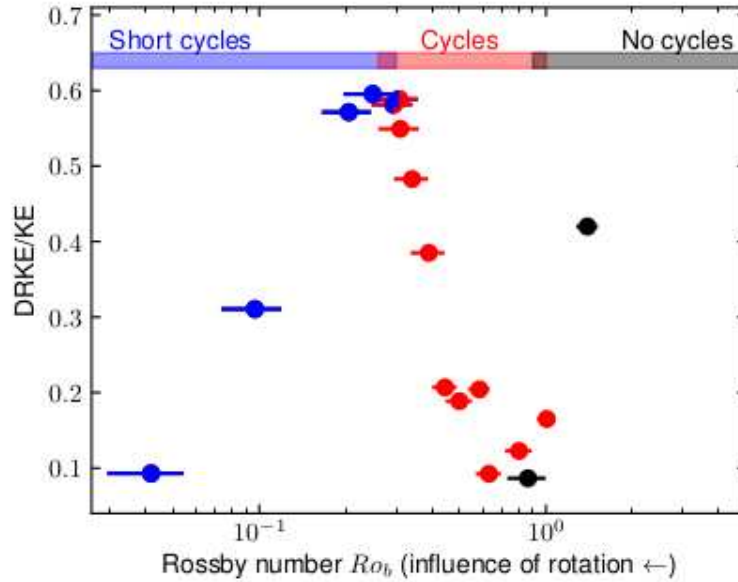


Figure 5.22: Diagramme récapitulatif montrant les variations de la dynamo aux grandes échelles dans une séquence de simulations EULAG-MHD couvrant une plage de valeurs de taux de rotation et luminosités. Les simulations produisant des cycles de type “solaire” (point rouges), caractérisées par des périodes d’ordre décadales, se limitent ici à un intervalle relativement restreint en nombres de Rossby (voir texte). Reproduction de la Figure 2 dans Strugarek et al., *Astrophys. J.*, **863**, id35 (2018).

La différence reflète le caractère fondamentalement nonlinéaire du mécanisme dynamo agissant dans ces simulations MHD. Il s’avère de surcroît que la relation ci-dessus, lorsqu’appliquée aux observations d’étoiles de type solaire (viz. la Fig. 5.6), ramène le soleil sur la même “branche” d’activité que les étoiles<sup>12</sup>.

## 5.8 Dynamos galactiques

Pour clore ce chapitre nous passons à la seconde classe d’objets astrophysiques où la présence d’un effet dynamo apparaît essentielle pour expliquer les champs magnétiques observés: les galaxies<sup>13</sup> (cf. Fig. 5.9).

### 5.8.1 Le disque galactique

En plus d’un changement de géométrie de la sphère à un disque (relativement) mince, le passage d’une dynamo stellaire à une dynamo agissant dans un disque galactique représente un changement d’échelle spatiale des plus substantiel: de  $\sim 10^9$  m pour un rayon stellaire à  $\sim 10$  kpc  $\simeq 3 \times 10^{20}$  m, soit 11 ordres de grandeurs. C’est en fait ce drastique changement d’échelle qui assure que même avec des densités particulières de  $\sim 10^3$  m $^{-3}$  dans l’environnement solaire de la Voie Lactée, l’approximation fluide magnétohydrodynamique tient toujours, même si le concept d’un plasma collisionnel peut paraître farfelu à prime abord.

<sup>12</sup>Pour plus de détails sur cette nouvelle interprétation des observations —anciennes et récentes— voir l’article par Strugarek et al. (2017) cité en bibliographie.

<sup>13</sup>Cette section est très fortement inspirée d’un article de revue d’Anvar Shukurov (U. Newcastle), grand expert parmi les experts de la modélisation dynamo des champs magnétiques galactiques; la référence complète est donnée dans la bibliographie en fin de chapitre.



Table 5.1: Propriétés physiques d'un disque galactique générique

| Quantité                  | Symbole/définition              | Valeur numérique [SI]                | Commentaire               |
|---------------------------|---------------------------------|--------------------------------------|---------------------------|
| Rayon du disque           | $R$                             | 10 kpc                               | galaxie spirale "typique" |
| Épaisseur du disque       | $h$                             | 0.4 kpc                              | galaxie spirale "typique" |
| Densité de particules     | $n$                             | $10^6 \text{ m}^{-3}$                | $10^3\text{--}10^9$       |
| Température               | $T$                             | $10^4 \text{ K}$                     | $10\text{--}10^6$         |
| Champ magnétique          | $B$                             | $3 \times 10^{-9} \text{ T}$         | bras spiraux              |
| Rotation à mi-rayon       | $u_\phi = s\Omega$              | $200 \text{ km s}^{-1}$              | galaxie spirale "typique" |
| Vitesse turbulente        | $u_T$                           | $10 \text{ km s}^{-1}$               | mesurée                   |
| Longueur turbulente       | $\lambda$                       | 0.1 kpc                              | bulle de supernovae       |
| temps de corrélation      | $\tau_c$                        | $10^6 \text{ yr}$                    | $\Delta t$ supernovae     |
| Diffusivité microscopique | $\eta$                          | $10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$    | pour $T = 10^4 \text{ K}$ |
| Diffusivité turbulente    | $\beta = u_T \lambda$           | $10^{22} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ | longueur de mélange       |
| Effet- $\alpha$           | $\alpha = \lambda^2 \Omega / h$ | $10^3 \text{ m s}^{-1}$              | bulle de supernovae       |
| Temps de dissipation      | $\tau = h^2 / \beta$            | $5 \times 10^8 \text{ yr}$           | $\sim 5\%$ age galactique |
| Nombre de Reynolds        | $R_m = u_T \ell / \beta$        | $10^3$                               | pour turbulence           |
| Nombre de Rossby          | $Ro = u_T / \ell \Omega$        | 4                                    | pour turbulence           |

La fraction d'ionisation dans le milieu interstellaire galactique varie entre 30% et 100%, conséquence de l'ionisation par la radiation provenant des étoiles massives et de l'impact des rayons cosmiques. Les mesures d'élargissement Doppler indiquent également que le disque galactique est dans un état turbulent, conséquence des explosions supernovae et des vents rapides produit par les étoiles massives. Les vitesses mesurées sont de quelques  $10 \text{ km s}^{-1}$  et demeurent cohérentes sur des échelles  $\sim 0.1 \text{ kpc}$ . On y mesure également un champ magnétique de quelques nanoTesla, soit en équipartition et au delà vis-à-vis la turbulence. Le Tableau 5.1 récapitule ces valeurs caractéristiques, ainsi que quelques nombres adimensionnels d'intérêt, pour le disque d'une galaxie spirale "typique". Il ne faut pas perdre de vue que ces valeurs peuvent varier facilement par quelques ordres de grandeur entre les bras spiraux et le milieu inter-bras du disque. La chose critique à noter dans ce Tableau est que le temps de dissipation Ohmique est passablement plus court que l'âge du disque galactique; la présence d'un effet dynamo est donc requise pour expliquer l'existence des champs magnétiques galactiques, même d'amplitudes dans le nanoTesla. Le nombre de Reynolds  $\sim 10^3$  nous porte à anticiper que l'induction par les écoulements peut opérer même en présence de la diffusion turbulente; et le nombre de Rossby  $\gtrsim 1$  estimé aux échelles turbulentes suggère que la turbulence se développera de manière cyclonique. On retrouve déjà ici les deux éléments-clés de nos dynamos solaires/stellaires; et le rapport  $\lambda/D \ll 1$  suggère une séparation d'échelles raisonnable entre les écoulements et champ magnétiques moyens d'une part, et la turbulence de l'autre; c'est un bon départ...

### 5.8.2 Modèles dynamos pour le disque galactique

Il s'agit maintenant de construire un modèle dynamo en champs moyens opérant dans un disque galactique. Comme dans le cas des dynamos solaire/stellaire, le cisaillement rotationnel est un ingrédient d'importance majeure. Heureusement, de bonnes mesures de la rotation existent pour un grand nombre de galaxies. Le *profil de Schmidt* décrit une courbe de rotation générique applicable aux galaxies spirales (non-barrées); travaillant en coordonnées cylindriques  $(s, \phi, z)$ :

$$s\Omega(s) = U_0 \left( \frac{s}{s_0} \right) \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left( \frac{s}{s_0} \right)^n \right]^{-3/2n}, \quad (5.81)$$

avec  $n = 0.7\text{--}1$ ,  $s_0 \sim 3\text{--}20 \text{ kpc}$ , et  $U_0 \sim 200 \text{ km s}^{-1}$ . La Figure 5.23 en montre un exemple spécifique pour  $n = 1$  et  $s_0 = 5 \text{ kpc}$ . Cette paramétrisation prédit une lente décroissance de la vitesse zonale pour  $s \gg s_0$ , contrairement aux observations radios qui indiquent que cette

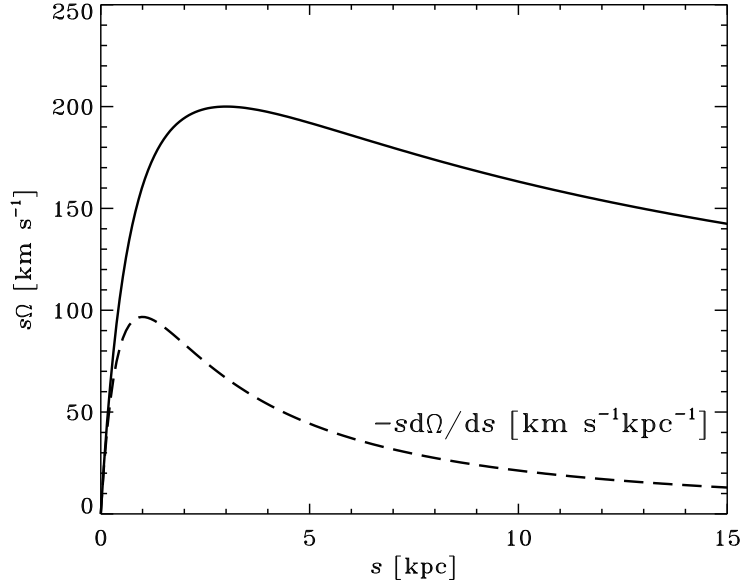


Figure 5.23: Profil de rotation galactique de Schmidt (éq. (5.81)), avec valeurs de paramètres  $U_0 = 200 \text{ km s}^{-1}$ ,  $n = 1$ , et  $s_0 = 5 \text{ kpc}$ . Le trait plein trace la variation radiale de la vitesse zonale  $u_\phi(s) = s\Omega(s)$  en fonction du rayon cylindrique  $s$  dans le plan du disque galactique, et le trait en tiret montre le taux de cisaillement rotationnel  $G = s\partial\Omega/\partial s$  correspondant. Entre 5 et 15 kpc, ce taux ne varie que très peu.

vitesse tend vers une constante dans la plupart des galaxies — indicateur de ce fameux problème de la “masse manquante”. Cependant, dans les régions du disque s’étendant à quelques  $s_0$ , là où on soupçonne que la dynamo opère, le profil de Schmidt offre une représentation très raisonnable des observations. Un cisaillement rotationnel substantiel est associé à ce profil, comme le montre le trait en tiret.

Dans un disque mince (épaisseur  $h$ ) en rotation à vitesse angulaire  $\Omega$  et où la turbulence est produite par des bulles en expansion, de rayon caractéristique  $\lambda$  et déformées par la force de Coriolis, une expression approximative et d’usage courant pour le coefficient  $\alpha$  est:

$$\alpha \sim \frac{\lambda^2 \Omega}{h} . \quad (5.82)$$

Pour le disque de la Voie Lactée à l’orbite du système solaire ( $s \simeq 8.5 \text{ kpc}$ ), ceci conduit à  $\alpha \sim 0.5 \text{ km s}^{-1}$ .

Il s’agit maintenant d’écrire les équations dynamos en champ moyens, exprimées sous leur forme  $\alpha\Omega$  en coordonnées cylindriques  $(s, \phi, z)$  pour un champ moyen axisymétrique ( $\partial/\partial\phi \equiv 0$ ). On écrit donc:

$$\mathbf{u}(s) = s\Omega(s)\hat{\mathbf{e}}_\phi , \quad (5.83)$$

$$\mathbf{B}(s, z, t) = B_s(s, z, t)\hat{\mathbf{e}}_s + B_\phi(s, z, t)\hat{\mathbf{e}}_\phi + B_z(s, z, t)\hat{\mathbf{e}}_z , \quad (5.84)$$

Il s’agit maintenant de substituer ces expressions dans notre équation dynamo en champs moyens (5.38) incorporant la forme diagonale pour les tenseurs  $\alpha$  et  $\beta$ . De plus, sous l’approximation du disque mince (épaisseur  $h$ ), on supposera que les gradients verticaux dominent les gradients horizontaux ( $\partial/\partial z \gg \partial/\partial s$ ) pour toutes les variables du problème. Sous ces conditions, et

omettant les “ $\langle \rangle$ ” pour alléger la notation, les composantes de l'éq. (5.38) se réduisent à:

$$\frac{\partial B_s}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}(\alpha B_\phi) + \beta \frac{\partial^2 B_s}{\partial z^2}, \quad (5.85)$$

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial t} = s \frac{\partial \Omega}{\partial s} B_s + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha B_s) + \beta \frac{\partial^2 B_\phi}{\partial z^2}, \quad (5.86)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2}, \quad (5.87)$$

où l'on a retenu que la contribution turbulente  $\beta$  à la diffusivité magnétique totale. On passe maintenant à la forme adimensionnelle en exprimant toutes les longueurs en terme de l'épaisseur  $h$  du disque, et le temps en unités du temps de diffusion  $h^2/\beta$ :

$$\frac{\partial B_s}{\partial t} = -C_\alpha \frac{\partial}{\partial z}(\alpha B_\phi) + \frac{\partial^2 B_s}{\partial z^2}, \quad (5.88)$$

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial t} = C_\Omega G(s) B_s + C_\alpha \frac{\partial}{\partial z}(\alpha B_s) + \frac{\partial^2 B_\phi}{\partial z^2}, \quad (5.89)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2}, \quad (5.90)$$

où deux nombres dynamos on fait leur apparition, équivalents directs des éqs. (5.54)—(5.55):

$$C_\alpha = \frac{\alpha_0 h}{\beta}, \quad C_\Omega = \frac{G_0 h^2}{\beta}, \quad (5.91)$$

avec  $G_0$  (unités:  $s^{-1}$ ) une mesure du taux de cisaillement, maintenant décrit par la fonction adimensionnelle:

$$G(s) = s \frac{\partial \Omega}{\partial s}. \quad (5.92)$$

Si on évalue maintenant les grandeurs de ces nombres dynamos à partir des quantités physiques listées au Tableau 5.1, on trouve  $C_\alpha \simeq 0.6$  et  $C_\Omega \simeq -15$ , ce qui justifie l'usage de l'approximation  $\alpha\Omega$ .

En ajoutant à tout ça des conditions limites appropriées, il est possible de solutionner numériquement les éqs. (5.88)—(5.90) dans un plan  $[s, z]$  d'un disque mince. La Figure 5.24 illustre schématiquement le genre de solutions que l'on peut obtenir sous l'hypothèse de (A) symétrie ou (B) antisymétrie par rapport au plan équatorial du disque. Dans un tel disque, la composante toroidale a deux extrema dans la direction verticale, ce qui tend à favoriser la dissipation par rapport à la composante quadrupolaire, ou un seul extremum en  $B_\phi$  est présent dans la verticale; ceci conduit (typiquement) à des taux de croissance (en régime linéaire) sensiblement plus élevés pour le mode quadrupolaire.

### 5.8.3 Analyse locale

On considérera ici une solution analytique locale obtenue dans le cadre de l'approximation dite “no- $z$ ”. On présuppose une configuration globale de type quadrupolaire comme sur la Fig. 5.24A, et on se limite au plan équatorial, d'où  $B_z = 0$ ; c'est une configuration “magnétogéométrique” semblable à celle du modèle de Weber-Davis! Ça sent déjà la spirale... bon mais revenons à cette analyse locale; on introduit les approximations supplémentaires suivantes:

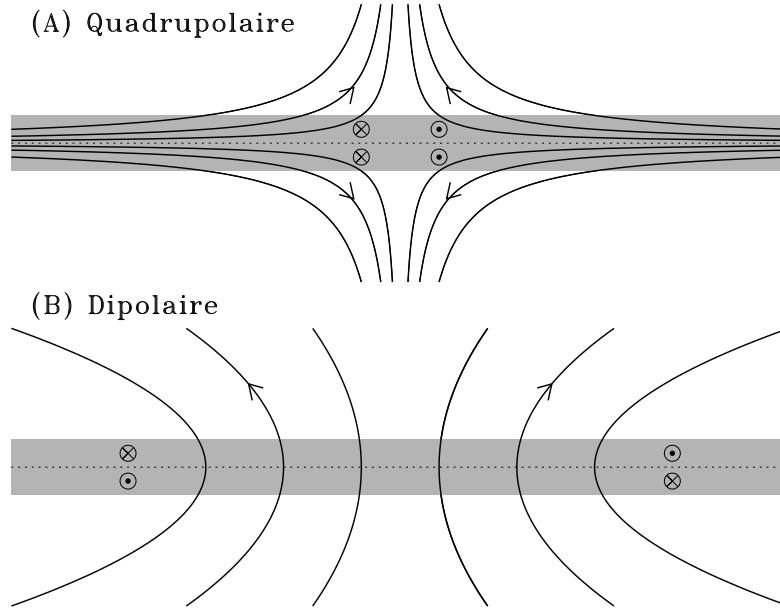


Figure 5.24: Représentation schématique des solutions dynamo linéaires résultant de la solution des éqs. (5.85)—(5.87) sous symétrie quadrupolaire (en A) ou dipolaire (B) dans un disque mince (en gris). Les “⊙” et “⊗” indiquent l’orientation du champ toroidal. La forme exacte de la configuration magnétique à l’extérieur du disque dépend de manière assez sensible des conditions physiques supposées dans le halo galactique.

1.  $C_\alpha \ll C_\Omega$ : ceci nous permet de faire sauter le terme proportionnel à  $\alpha$  au membre de droite de l’éq. (5.89), conduisant à un modèle dynamo de type  $\alpha\Omega$ ;
2. Cisaillement rotationnel constant, dans le sens que  $G(s) \equiv -1$ , ce qui est certainement approprié pour une analyse locale, mais est en fait tolérable dans le cas du profil de rotation de Schmidt pour  $s > s_0$  (voir Fig. 5.23);
3. Les dérivées verticales sont approximées selon  $\partial/\partial z \rightarrow 1/h$  et  $\partial^2/\partial z^2 \rightarrow -1/h^2$ , un peu comme si on supposait  $\mathbf{B} \propto \cos(z/h)$ .
4. Les composantes du champ magnétique ne dépendent plus du rayon cylindrique  $s$ ;
5. L’équation (5.90) pour  $B_z$  est carrément évacuée du problème, kintoué...

Revenant (temporairement) à la forme dimensionnelle, la variété  $\alpha\Omega$  des éqs. (5.85)—(5.86) avec  $G(s)$  constant s’écrit comme:

$$\frac{\partial B_s}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}(\alpha B_\phi) + \beta \frac{\partial^2 B_s}{\partial z^2}, \quad (5.93)$$

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial t} = G B_s + \beta \frac{\partial^2 B_\phi}{\partial z^2}. \quad (5.94)$$

Le problème étant linéaire en  $\mathbf{B}$  et maintenant décrit par des ODE à coefficients constants, on cherche des solutions sous la forme:

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 \exp(\lambda t), \quad (5.95)$$

avec  $\lambda$  un réel. Substituant cette expression dans les éqs. (5.93)—(5.94) et remplaçant les dérivées verticales par  $1/h$  conduit à:

$$\left(\lambda + \frac{\beta}{h^2}\right) B_{0s} + \frac{\alpha}{h} B_{0\phi} = 0, \quad (5.96)$$

$$-GB_{0s} + \left(\lambda + \frac{\beta}{h^2}\right) B_{0\phi} = 0. \quad (5.97)$$

Ce système de deux équations à deux inconnues acceptera une solution non-triviale si son déterminant est nul:

$$\begin{vmatrix} \lambda + \beta/h^2 & \alpha/h \\ -G & \lambda + \beta/h^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (5.98)$$

ce qui conduit à la relation de dispersion:

$$\lambda = \frac{\beta}{h^2}(-1 + \sqrt{-D}). \quad (5.99)$$

où  $D = G\alpha h^2/\beta^2 \equiv C_\alpha \times C_\Omega$ , comme auparavant. Clairement, on aura une solution croissant exponentiellement dans le temps si  $D < -1$ . Le nombre dynamo critique est donc ici  $D_{\text{crit}} = -1$ . Une fois  $\lambda$  connu on peut calculer le rapport  $B_{0s}/B_{0\phi}$ :

$$\frac{B_{0s}}{B_{0\phi}} = -\sqrt{\frac{\alpha}{-Gh}} = -\sqrt{\frac{C_\alpha}{|C_\Omega|}} \quad (5.100)$$

Ceci donne l'angle d'enroulement  $p$  (le "pitch angle") de la spirale magnétique par rapport à la direction radiale dans le plan du disque:

$$p = \text{atan}\left(\frac{B_{0s}}{B_{0\phi}}\right) \simeq -15^\circ \quad (5.101)$$

pour  $C_\alpha = 0.6$  et pour  $C_\Omega = -15$ , comme auparavant. Cette valeur se compare relativement bien à l'angle d'enroulement mesuré dans les bras de galaxies spirales (non-barrées), bien qu'un peu sous la moyenne des valeurs mesurées.

---

### Bibliographie:

La littérature sur les diverses mesures du champ magnétique solaire est très volumineuse, et inclut plusieurs excellents articles de revue. Un de mes préférés est:

Solanki, S., Inhester, B., and Schüssler, M., *Rep. Prog. Phys.*, **69**, 563-668 (2006).

Les articles originaux de Hale méritent toujours d'être lus; les deux principaux sont:

Hale, G.E., *Astrophys. J.*, **28**, 315-343 (1908),

Hale, G.E., Ellerman, F., Nicholson, S.B., and Joy, A.H., *Astrophys. J.*, **49**, 153-178 (1919).

L'article de revue suivant offre un bon point d'entrée sur la modélisation de l'ascension des tubes de flux magnétique toroidaux comme source des groupes bipolaires de taches:

Fan, Y., *Liv. Rev. Sol. Phys.*, **6** (2009),

<http://solarphysics.livingreviews.org/Articles/lrsp-2009-4/>

Côté théorème anti-dynamos, voir

Cowling, T.G., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **94**, 39-48 (1933),

Bullard, E.C., & Gellman, H., *Phil. Trans. R. Soc. London A*, **247**, 213-278 (1954),

Zeldovich, Ya. B., *J. Exp. and Theoretical Physics*, **31**, 154 (1956),  
 Zeldovich, Ya. B., & Ruzmaikin, A.A., *J. Exp. and Theoretical Physics*, **78**, 980 (1980),

ainsi que les pages 113-ff et 538-ff, respectivement, des ouvrages de Moffatt et Parker cités plus bas. L'électrodynamique en champs moyens est un édifice mathématique-physique dont les bases ont été posées il y a déjà longtemps par

Parker, E.N., *Astrophys. J.*, **122**, 293-314 (1955),  
 Braginskii, S.I., *Sov. Phys. JETP*, **20**, 726; 1462 (1964),  
 Steenbeck, M., & Krause, F., *Astr. Nach.*, **291**, 49-84 (1969),

mais les trois ouvrages suivants sont préférables pour ceux/celles désirant approfondir le sujet:

Moffatt, H.K. 1978, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids*, (Cambridge: Cambridge Univ. Press),  
 Parker, E.N. 1979, *Cosmical Magnetic Fields*, (Oxford: Clarendon Press), ch. 18,  
 Krause, F., & Rädler, K.-H. 1980, *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory*, (Oxford: Pergamon Press).

Les trois articles de revue suivants offrent conjointement un bon survol des modèles dynamos du cycle solaire, les deux premiers traitant également de ceux basés sur le mécanisme de Babcock-Leighton et/ou les instabilités hydro- et magnétohydrodynamiques, et le dernier incluant une discussion détaillée du quenching dynamique de  $\alpha$ :

Charbonneau, P., *Liv. Rev. Sol. Phys.*, **7** (2010),  
<http://solarphysics.livingreviews.org/Articles/lrsp-2010-3/>  
 Ossendrijver, M. A. J. H., *Astron. Astrophys. Rev.*, **11**, 287-367 (2003).  
 Brandenburg, A., & Subramanian, K., *Phys. Rep.* **417**, 1-209 (2005).

Les résultats et analyses des simulations EULAG-MHD du cycle solaire décrites à la §5.7 sont documentés en plus grand détails dans les publications suivantes:

Ghizaru, M., Charbonneau, P., & Smolarkiewicz, P.K., *Astrophys. J. Lett.*, **715**, L133-137 (2010).  
 Racine, É., Charbonneau, P., Ghizaru, M., Bouchat, A., & Smolarkiewicz, P.K., *Astrophys. J.*, **735**, id46 (2011).  
 Beaudoin, P., Charbonneau, P., Racine, E., & Smolarkiewicz, P.K., *Solar Phys.*, **282**, 335-360 (2013).  
 Passos, D., & Charbonneau, P., *Astron. Ap.*, **568**, A113 (2014).  
 Simard, C., Charbonneau, P., & Dubé, C., *Adv. Space Res.*, **58**, 1522-1547 (2016).  
 Cossette, J.-F., Charbonneau, P., Smolarkiewicz, P.K., & Rast, M.P., *Astrophys. J.*, **841**, id65 (2017).  
 Strugarek, A., Beaudoin, P., Charbonneau, P., & Brun, A.S., *Astrophys. J.*, **863**, id35 (2018).

Et voici une pas-si-petite sélection d'autres publications notables (c'est le moins qu'on puisse dire!) dans ce domaine:

Brun, A.S., Miesch, M.S., & Toomre, J., *Astrophys. J.*, **614**, 1073-1098 (2004),  
 Brown, B.P., Miesch, M.S., Browning, M.K., Brun, A.S., & Toomre, J., *Astrophys. J.*, **731**, id69 (2011),  
 Masada, Y., Yamada, K., & Kageyama, A., *Astrophys. J.*, **778**, id11 (2013),  
 Nelson, N.J., Brown, B.P., Brun, A.S., Miesch, M.S., & Toomre, J., *Astrophys. J.*, **762**, id73 (2013),  
 Fan, Y., & Fang, F., *Astrophys. J.*, **789**, id35 (2014),  
 Augustson, K., Brun, A.S., Miesch, M.S., & Toomre, J., *Astrophys. J.*, **809**, id119 (2015),  
 Simitev, R., Kosovichev, A.G., & Busse, F.H., *Astrophys. J.*, **810**, id80 (2015),  
 Guerrero, G., Smolarkiewicz, P.K., de Gouveia Dal Pino, E.M., Kosovichev, A.G., & Mansour, N.N., *Astrophys. J.*, **819**, id106 (2016).

Au niveau des observations de l'activité magnétique stellaire et de leurs interprétations dynamos, commencer avec le monumental article de revue suivant:

Brun, A.S., & Browning, M.K., *Liv. Rev. Sol. Phys.*, **14** (2017),  
<https://link.springer.com/article/10.1007/s41116-017-0007-8>,

mais voir aussi:

Baliunas, S.L., *et al.* 1995, *Astrophys. J.*, **438**, 269–287 (1995),  
Hall, J.C., Lockwood, G.W., & Skiff, B.A., *Astron. J.*, **133**, 862–881 (2007)  
Böhm-Vitense, E., *Astrophys. J.*, **657**, 486–493 (2007),  
Saar, S.H., & Brandenburg, A., *Astrophys. J.*, **524**, 295–310 (1999),  
Strugarek, A., Beaudoin, P., Charbonneau, P., Brun, A.S., & do Nascimento, J.-D., *Science*,  
**357**, 185–187 (2017),

Sur les aspects observationnels des champs magnétiques galactiques, voir

Beck, R., *Scholarpedia*, **2**(8), 2411  
[http://www.scholarpedia.org/articles/Galactic\\_magnetic\\_fields](http://www.scholarpedia.org/articles/Galactic_magnetic_fields).

La section 5.8 est basée en bonne partie sur l'article de revue suivant:

Shukurov, A., *Introduction to galactic dynamo*, dans *Mathematical aspects of natural dynamos*, EDP Press; <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0411739>.

L'approximation “no- $z$ ” est due à

Subramanian, K., & Mestel, L., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **265**, 649 (1993).

Côté dynamos galactiques en général, je recommande les deux articles de revue suivants:

Beck, R., Brandenburg, A., Moss, D., Shukurov, A., & Sokoloff, D., *Ann. Rev. Astron. Ap.*,  
**34**, 155 (1996),  
Kulsrud, R.M., & Zweibel, E.G., *Rep. Prog. Phys.*, **71**, 046901 (2008).

Enfin, les deux articles suivants donnent une bonne idée de l'état actuel des stocks en modélisation des dynamos dans les disques galactiques, incluant nonlinéarités et non-axisymétrie (voir aussi les références s'y trouvant):

Chamandy, L., & Shukurov, A., Subramanian, K., & Stoker, K., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **443**, 1867 (2014).  
Chamandy, L., & Taylor, A.R., *Astrophys. J.*, **808**, 28 (2015).

