Appendice C

Le théorème de Zeldovich

Cet annexe présente une preuve du théorème anti-dynamo dit de Zeldovich (Ya. B. Zeldovich, 1914–87). Ce théorème disqualifie les écoulements plans, stationnaires et incompressibles, de la forme générale (en coordonnées cartésiennes):

$$\mathbf{u}_2(x,y,z) = u_x(x,y,z)\hat{\mathbf{e}}_x + u_y(x,y,z)\hat{\mathbf{e}}_y \tag{C.1}$$

dans un volume V aux frontières ∂V duquel on a $\mathbf{B} = 0$. Aucune restriction n'est imposée au champ magnétique, qui peut dépendre des trois coordonnées spatiales et du temps. Cependant, vu la forme de l'écoulement, il sera pratique de considérer séparément la composante z du champ magnétique, $B_z(x,y,z,t)$, de ses composantes dans le plan $[x,y]$ (dénotées ci-après $\mathbf{B}_2$). Il est facile de montrer que pour une diffusivité magnétique constante, la composante z de l'équation d'induction se réduit ici à:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\right) B_z = \eta\nabla^2 B_z \tag{C.2}$$

Le membre de gauche de cette expression est une dérivée Lagrangienne qui décrit la variation de B_z dans un élément de fluide transporté par l'écoulement. En multipliant cette expression par B_z, puis en intégrant sur V et sous utilisation judicieuse de la première identité de Green (voir Annexe A), on arrive à:

$$\frac{1}{2}\int_V \frac{\mathrm{D}B_z^2}{\mathrm{D}t}\,\mathrm{d}V = \eta\int_{\partial V} B_z(\nabla B_z)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S - \eta\int_V (\nabla B_z)^2\mathrm{d}V\ . \tag{C.3}$$

La première intégrale au membre de droite est nulle puisque nous avons supposé $\mathbf{B} = 0$ sur ∂V; la seconde intégrale est positive, donc B_z ne peut que décroitre sur l'échelle de temps dissipative associée à η.

Passons maintenant au champ $\mathbf{B}_2$ dans le plan $[x,y]$. La forme la plus générale d'un tel champ vectoriel s'exprime en terme de la somme d'une composante solénoidale et d'une composante potentielle:

$$\mathbf{B}_2(x,y,z,t) = \nabla\times(A\hat{\mathbf{e}}_z) + \nabla\Phi\ , \tag{C.4}$$

où le potentiel vecteur A et potentiel scalaire en général dépendent du temps et des coordonnées x et y, mais pas de z. La contrainte $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ implique alors:

$$\nabla_2^2\Phi = -\frac{\partial B_z}{\partial z}\ , \tag{C.5}$$

où $\nabla_2^2 \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ est l'opérateur Laplacien en 2D dans le plan $[x,y]$. De toute évidence, une fois que B_z a disparu sous l'influence de la dissipation Ohmique, soit après un temps significativement plus long que le temps de dissipation τ_η, Φ devient une simple solution de l'équation de Laplace $\nabla_2^2\Phi = 0$.

Et voici la partie moins évidente de la manoeuvre; tout d'abord, on substitue l'éq. (C.4) dans l'équation d'induction, et on prend ensuite le rotationnel du résultat. Ceci fera disparaitre tous les termes impliquant $\nabla\Phi$ sauf un, puisque $\nabla\times\nabla\Phi = 0$ par identité vectorielle. De plus, puisque $\mathbf{u}_2$ et $A\hat{\mathbf{e}}_z$ sont orthogonaux par construction, on a aussi $\mathbf{u}_2 \times \nabla \times (A\hat{\mathbf{e}}_z) = -(\mathbf{u}_2 \cdot \nabla)(A\hat{\mathbf{e}}_z)$. Comme les dérivées spatiales et temporelle commutent ici, une légère dose d'algèbre vectorielle permet de réexprimer les termes survivants sous la forme:

$$\nabla \times \nabla \times \left[\frac{\partial(A\hat{\mathbf{e}}_z)}{\partial t} + \mathbf{u}_2 \cdot \nabla(A\hat{\mathbf{e}}_z) - \eta\nabla_2^2(A\hat{\mathbf{e}}_z) - \mathbf{u}_2 \times \nabla\Phi\right] = 0 \ , \tag{C.6}$$

avec $\nabla \cdot (A\hat{\mathbf{e}}_z) = 0$ comme choix de jauge. De manière générale, une telle expression ne sera satisfaite que si l'expression entre parenthèses carrées est en soi nulle, i.e.,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right) A = \eta\nabla_2^2 A + (\mathbf{u}_2 \times \nabla\Phi) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z \ . \tag{C.7}$$

Cette expression est identique à celle obtenue précédemment pour B_z, à l'exception du terme source $\mathbf{u}_2 \times \nabla\Phi$. Mais on vient justement de démontrer que pour $t \gg \tau_\eta$, $\nabla_2^2\Phi \to 0$. De plus, $\mathbf{B}$ est nul sur ∂V donc la seule solution stationnaire possible à une équation de Laplace est de la forme $\Phi =$constante; donc $\nabla\Phi = 0$ et le terme source disparait dans la limite $t \gg \tau_\eta$. À partir de ce moment là, l'éq. (C.7) devient identique à (C.2), pour laquelle nous avons déjà démontré l'inévitabilité de la dominance à long terme de la dissipation Ohmique. On en conclut qu'un écoulement plan ne peut soutenir inductivement quelque champ magnétique que ce soit (2D, 3D, non-stationnaire, etc.) face à la dissipation Ohmique.

La logique générale de ce théorème est en fait la même que pour le théroème de Cowling discuté à la §5.3, qui disqualifie les écoulements axisymétrique comme inducteur de champ magnétique axisymétrique. Dans le cas du théorème de Cowling, le potentiel vecteur A souffre du même problème que B_z ci-dessus: une absence de terme source, impliquant une inexorable dissipation, suite à quoi la composante B perd alors son terme source et ne peut donc subséquemment que se dissiper elle aussi.