

PHY 3140
HYDRODYNAMIQUE
PROJET 3

Distribué le: 14 octobre 2020

À remettre le: 4 novembre 2020

Dans le cadre de ce projet, à effectuer en équipe de deux personnes, vous aurez l'occasion de faire un petit développement théorique et une (ou des) mesure(s) expérimentale(s) qui, ultimement, vous permettront de (1) vérifier vos calculs théoriques, (2) comprendre comment une couche limite visqueuse même très mince peut propulser un écoulement aux grandes échelles, et (3) ce faisant, suivre les traces de nul autre qu'Oncle Albert lui-même!

La situation hydrodynamique est des plus simples: un fluide imbu d'un mouvement de rotation en bloc (vitesse angulaire constante) est contenu dans un récipient cylindrique à fond plat. Si vous avez déjà fait le problème 2 de la série 1, vous savez déjà que la surface du fluide en rotation adoptera une forme parabolique, afin de pouvoir satisfaire à la composante s de l'équation du mouvement exprimée en coordonnées cylindriques. Si le fluide était parfait, ce serait la fin de l'histoire; mais la viscosité vient sérieusement compliquer la chose.

1. Développement théorique:

Un fluide visqueux et incompressible est contenu entre deux très grandes plaques parallèles séparées d'une distance h . Le fluide et les plaques tournent autour d'un axe perpendiculaire aux plaques à vitesse angulaire Ω ; donc on a un écoulement stationnaire de la forme:

$$\mathbf{u} = \Omega s \hat{\mathbf{e}}_\phi .$$

exprimé ici en coordonnées cylindriques (s, ϕ, z) , avec l'axe de coordonnées $\hat{\mathbf{e}}_z$ coïncidant avec l'axe de rotation du système plaque+fluide. À $t = 0$ on stoppe instantanément le mouvement de rotation de la plaque inférieure. Le fluide étant visqueux, la condition limite sur la plaque du fond est maintenant $\mathbf{u} = 0$. On peut s'attendre à ce que le mouvement rotatoire du fluide près de la plaque du fond ralentisse sous l'effet des stress visqueux ($\propto \partial u_\phi / \partial z$) se développant dans le fluide; et qu'après une phase transitoire, on pourrait possiblement produire un nouvel écoulement stationnaire, maintenant de la forme

$$\mathbf{u} = u_\phi(s, z) \hat{\mathbf{e}}_\phi ,$$

Votre point de départ pour la suite: les équations du mouvement en coordonnées cylindriques pour un fluide visqueux, telles que développées à l'Annexe A.1.5 des notes de cours.

- (a) Démontrez que dans la situation considérée ici, l'écoulement ci-dessus n'est *pas* une solution physiquement acceptable.

- (b) Sans calculer une solution complète formelle, démontrez que votre résultat en (a) implique inévitablement la présence d'un écoulement secondaire ayant des composantes dans les directions \hat{e}_s et \hat{e}_z .
 - (c) Tracez à main levée les lignes d'écoulement de cet écoulement secondaire dans les environs de l'axe de rotation du système. Justifiez physiquement votre dessin (une demie page max).
 - (d) Toujours sans calculer une solution formelle, obtenez un *estimé* de la grandeur caractéristique de cet écoulement secondaire, en fonction des paramètres du problème (e.g., vitesse angulaire de la plaque supérieure, viscosité du fluide, etc.).
 - (e) Par analyse dimensionnelle de la composante ϕ de l'équation de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques, obtenez de estimés du temps diffusif (associé à l'action de la viscosité) et du temps advectif (associé à votre écoulement en (c)–(d) ci-dessus). Si vous ne savez comment partir, retournez voir la démarche équivalente effectué au chapitre 5 des notes dans le contexte du mélange.
-

2. Manipulation expérimentale:

Il s'agit maintenant d'utiliser votre développement théorique ci-dessus pour étudier le processus de freinage d'un fluide en rotation contenu dans un récipient au repos. La manip peut s'effectuer à l'aide d'une grande tasse à café de forme cylindrique (excluant l'anse...), ou tout autre contenant cylindrique à fond plat dont la hauteur est plus grande que le diamètre de la base; le plus grand le contenant, le mieux pour la manip. Un chaudron profond et de grande taille est idéal, si vous en avez un à votre disposition.

- (f) Remplissez votre contenant au trois quart, ou un peu plus. À l'aide d'une cuillère (ou autre objet opérationnellement équivalent), faites tourner l'eau à une bonne vitesse, i.e, telle que sa surface se déforme notablement sous forme parabolique. Une vitesse de rotation de l'ordre d'une révolution par seconde en régime stationnaire devrait faire l'affaire. Retirez la cuillère, et mesurez le temps requis pour que le mouvement de rotation du fluide soit freiné et que celui-ci se retrouve de nouveau au repos. Étant donné les dimensions de votre contenant, calculez le temps de dissipation visqueuse (viscosité cinématique de l'eau à 20°: $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$) et comparez au temps de freinage rotationnel mesuré expérimentalement.
- (g) Répétez l'expérience en ajoutant dans votre récipient des "traceurs" comme des grains de liège (densité < eau) ou de riz (densité > eau). En suivant à l'oeil (ou autrement) le mouvement de ces traceurs en surface et/ou au fond de votre récipient, estimez la grandeur de l'écoulement secondaire se développant dans les plans méridiens (le plan $[s, z]$ en coordonnées cylindriques). Utilisez cette mesure pour estimer un temps advectif; ce temps est-il plus près ou éloigné de votre détermination du temps de freinage de l'eau dans votre contenant, tel que déterminé en (f) ?

Il s'agit finalement de faire le lien entre ces déterminations expérimentales, et les développements théoriques en (a)–(e).

- (h) L'écoulement secondaire observé est-il cohérent avec la forme votre écoulement global "intuité" en (c) ?
- (i) Votre vitesse estimée de l'écoulement secondaire observé est-elle cohérente avec celle de votre estimé théorique en (d) ?

- (j) Votre temps de freinage rotationnel observé se compare-t-il bien au temps advectif estimé en (g) ? Pourquoi ?
- (k) Toute cette comparaison implique que les parois latérales de votre contenant ne jouent pas un rôle important dans la dynamique de l'écoulement secondaire. Expliquez pourquoi c'est bel et bien le cas ici.

3. Votre rapport:

Votre rapport doit inclure les petits développements théoriques et analyses approximatives demandés en (a)–(e) ci-dessus, et décrire clairement vos hypothèses de départ et justifiant vos approximations, le cas échéant.

Le rapport doit décrire votre approche expérimentale en (f) et (g), photos et/ou diagrammes à l'appui. Vos mesures de l'écoulement secondaire et du temps de freinage rotationnel devraient être répétées à quelques reprises, afin d'obtenir une incertitude statistique sur cette mesure; il ne sera pas particulièrement utile d'effectuer une propagation formelle des erreurs ici, comme vos estimés théoriques de la grandeur de l'écoulement secondaire et du temps de freinage rotationnels sont déjà des approximations de type ordre de grandeur.

Le rapport même doit être remis sur Studium avant 23:59 à la date de remise indiquée ci-dessus. Vous pouvez me remettre un document écrit, un vidéo, ou même bande dessinée ou photoroman (e.g., avec <https://www.fotojet.com/features/misc/photo-comic.html>) ou <https://edu.pixton.com>); ou toute combinaison appropriée de ces divers media.

Tout document écrit doit être remis en format pdf. Toute image/photo non-incluse dans le rapport même doit être en format .jpg ou .png; tout film ou animation doit être en format .mpg, .mpeg ou .mp4. Au risque de me répéter, Studium limite la taille des fichiers versés à 200MB, donc si vous choisissez de remettre un vidéo en guise de rapport, sa durée ne devrait pas dépasser 5 minutes (et préférablement se limiter à environ 3 minutes). Si vous incluez plusieurs photographies, réduisez-en la résolution spatiale de manière à éviter les images dépassant 1MB en taille.

Mis à part ces contraintes pratiques vous avez liberté complète au niveau de la structure de vos rapports, qu'ils soient sous forme écrite, BD, ou vidéo. Encore une fois, Les "effets spéciaux" et l'humour sont permis, **mais le contenu technique/physique doit y être !**

En guise de *post-scriptum* et aux fins de culture scientifique générale: la solution mathématique à ce problème hydrodynamique dit de freinage rotationnel fut obtenue en 1929 par nul autre qu'Oncle Albert, qui présumément avait besoin de se reposer les méninges après plusieurs mois d'efforts (encore une fois vains) à produire une théorie des champs généralisée unifiant la gravité (version relativité générale) et l'électromagnétisme.