Examen Final, Problème 6: relation de dispersion pour les ondes de Rossby

Dans la limite Ro$\rightarrow 0$ et Ek$\rightarrow 0$, les composantes x et y de Navier-Stokes se réduisent à:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = 2\Omega(y) u_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \ , \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} = -2\Omega(y) u_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \ . \tag{2}$$

On commence par prendre la dérivée par rapport à y de l'éq. (1), et la dérivée par rapport à y de (2), en se rappelant que Ω ne dépend que de y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u_x}{\partial t} = 2\Omega(y)\frac{\partial u_y}{\partial y} + 2u_y\frac{\partial \Omega}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial t} = -2\Omega(y)\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \tag{4}$$

Et là on fait disparaitre la pression en soustrayant (4) de (3):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = 2\Omega \underbrace{\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right)}_{\equiv \nabla\cdot\mathbf{u}=0} + 2u_y\frac{\partial \Omega}{\partial y} \ . \tag{5}$$

où on a également commuté les dérivés spatiales et temporelles au membre de gauche (permis en représentation Eulérienne). Tel qu'indiqué, le premier terme au membre de droite est identiquement nul en vertu de la contrainte de conservation de la masse pour un fluide incompressible (Tout cette manoeuvre est équivalente à décrire l'écoulement via la composante z de l'équation de la vorticité!). Maintenant on substitue dans cette expression l'Ansatz:

$$(u_x, u_y) = (u_{0x}, u_{0y}) \times \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t) \tag{6}$$

Comme dans un tel cas $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$, $\partial/\partial x = ik_x$, etc., on arrive rapidement à:

$$-i\omega(ik_y u_{0x} - ik_x u_{0y}) = 2u_{0y}\frac{\partial \Omega}{\partial y} \ , \tag{7}$$

d'où les facteurs de phase en $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)$ se sont simplifiés mutuellement. Maintenant on utilise la conservation de la masse:

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \ , \qquad \rightarrow \qquad u_{0x}k_x + u_{0y}k_y = 0 \ , \tag{8}$$

afin de remplacer u_{0x} par $-u_{0y}k_y/k_x$ dans (7), conduisant à:

$$-i\omega(-ik_y\frac{k_y}{k_x} - ik_x)u_{0y} = 2u_{0y}\frac{\partial \Omega}{\partial y} \ .$$

Les amplitudes (complexes) u_{0y} se simplifient de chaque coté, et on arrive ensuite rapidement à la relation de dispersion recherchée:

$$\omega = -\frac{2k_x}{k_x^2 + k_y^2}\frac{\partial\Omega}{\partial y} \ .$$

Le terme $k_x^2 + k_y^2$ au dénominateur n'est qu'une mesure de la longueur d'onde de la perturbation (indépendamment de son orientation dans le plan horizontal $[x, y]$); c'est la présence du terme en k_x au numérateur qui indique une propagation dans la direction azimutale (exprimé autrement, $k_x/(k_x^2 + k_y^2) \equiv \hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{k}/k^2$). Selon la forme adoptée pour l'éq. (6), une onde ayant $\omega < 0$ se déplace dans la direction négative de l'axe x, soit ici rétrograde par rapport à la rotation terrestre puisque $\partial\Omega/\partial y > 0$, et l'axe-$x$ pointe dans la direction de la rotation.

Notons finalement que le caractère transversal des ondes de Rossby dérive directement de la conservation de la masse $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, qui sous (6) se traduit par

$$i(k_x u_{0x} + k_y u_{0y}) \equiv i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{k} \perp \mathbf{u} \ .$$

Bon été à tous!