PHY 3140
HYDRODYNAMIQUE
EXAMEN FINAL

Professeur: Paul Charbonneau
Date de l'examen: 13 au 15 décembre 2023
Durée de l'examen: 48 heures

Examen à livre ouvert, toutes ressources permises, sauf ressources humaines autre que votre propre personne personnelle (et méfiez-vous toujours de ce que vous trouvez sur l'internet!). En apposant votre signature ci-dessous, vous indiquez que vous avez lu et compris ces directives, et que vous vous engagez à en respecter à la fois l'esprit et la lettre. Remettez-moi un scan de la première page de ce questionnaire signé ici avec vos solutions.

Votre signature:

L'examen doit m'être remis en version pdf par courriel le vendredi 15 décembre avant 09:00 (9am). Il peut également m'être remis plus tôt si vous le préférez.

Un examen de 48 heures allège grandement la pression temporelle associée à un examen classique. Par conséquent, je m'attend à des copies d'examen écrites de manière lisible, au propre, et scannée de manière lisible. Vos solutions doivent détailler posément la logique suivie, les approximations utilisées, etc.

Bonne Chance! (...même si ce n'est pas vraiment une question de chance...)

***** NOUVEAU CETTE ANNÉE *****
CHOISISSEZ QUATRE QUESTIONS PARMI LES CINQ CI-DESSOUS

Question 1 [15 points; Problème 16, texto]

Il s'agit ici de vous faire calculer numériquement la forme d'un écoulement potentiel 2D autour d'une plaque inclinée à 45 degrés par rapport à un écoulement plan à grande distance (voir Figure 1), un peu comme le cas du cylindre traité en classe. Afin de simplifier le traitement de la condition à appliquer au niveau de la plaque, il sera préférable de solutionner le problème en fonction d'une fonction d'écoulement (plutôt qu'un potentiel):

$$\nabla^2\Psi(x,y) = 0 \ ,$$

sujet aux conditions limites aux bords gauche (x_1), droit (x_2) inférieur (y_1), et supérieur (y_2) du domaine:

$$\Psi(x_1,y) = \Psi(x_2,y) = y \ , \qquad \Psi(x,y_1) = y_1 \ , \qquad \Psi(x,y_2) = y_2 \ .$$

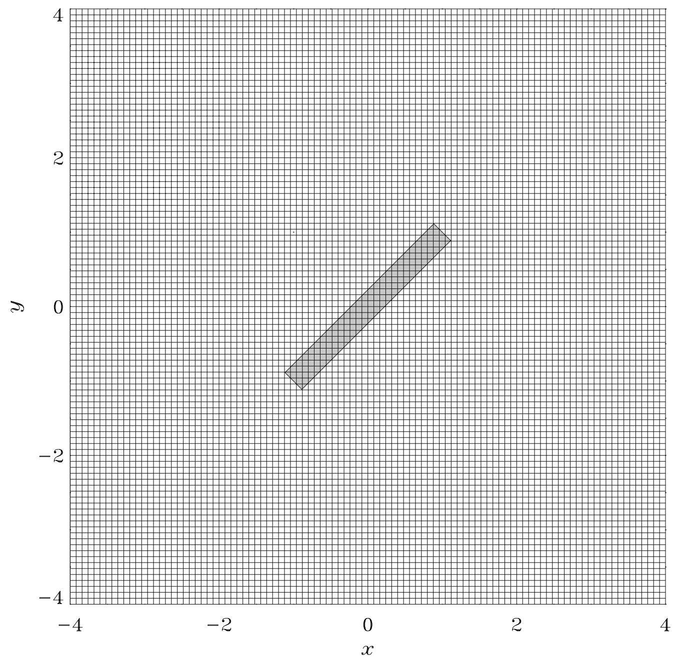

Figure 1: Maillage et géométrie pour le calcul numérique d'un écoulement potentiel autour d'une plaque inclinée (Problème 16). Discrétisation spatiale $N_x = N_y = 101 \times 101$ ici. L'écoulement est supposé horizontal à très grandes distances de la plaque.

iComme la périphérie de la plaque doit être une ligne d'écoulement, et en vertu de la symétrie et conditions limites du problème, aux bords de la plaque on doit poser:

$$\Psi(x, y) = 0 \ , \qquad (x, y) \in \text{plaque} \ .$$

L'idée est d'utiliser l'algorithme de relaxation décrit à l'annexe E.4 afin de solution numériquement l'équation de Laplace ci-dessus, en vertu de ses conditions limites. Seuls les noeuds intérieurs (i.e., excluant les frontières du domaine) sont sujets à ce processus de relaxation. Comme condition initiale au processus de relaxation, utilisez un écoulement purement horizontal, soit:

$$\Psi(x, y) = y \ .$$

Le "truc" numérique consiste à rénitialiser, à la fin de chaque itération du processus de relaxation, la valeur de Ψ à tous les points de mailles situés dans la plaque ou sur sa périphérie à une valeur $\Psi = 0$, ce qui assurera le maintien de la condition limite aux interfaces plaque-fluide. Autre truc pour visualiser vos résultats: pour un écoulement 2D de ce genre, les lignes d'écoulement correspondent aux contours Ψ =constante. Travaillez avec un maillage $N_x = N_y = 101$ couvrant un domaine $x \in [-4, 4]$, $y = [-4, 4.]$ et assurez vous bien d'intégrer assez longtemps pour que $\Psi(x, y)$ ait bien convergé. Pour avoir une idée générale de ce que la solution doit avoir l'air, voir la Figure 3 dans *An Album of Fluid Motion.*

Connaissant $\Psi(x, y)$ —et donc $u_x(x, y)$ et $u_y(x, y)$, par différences finies centrées (voir annexe E.1), calculez maintenant le profil de pression $p(x, y)$. L'écoulement exerce-t-il une force nette sur la plaque? Un moment de force ?

Question 2 [15 points; Problème 34, texto]

Recalculez la solution de Blasius en suivant la procédure numérique introduite à la §6.10 des notes de cours. Ensuite, calculez la force de trainée (en Newton) exercée par l'eau ($\nu = 10^{-6}\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1}$) s'écoulant à vitesse $u_0 = 1\,\mathrm{m\ s}^{-1}$ de chaque coté d'une plaque carrée de taille $L = 1 \times 1$m, et d'épaisseur $h = 1$cm. Vous pouvez négliger les effets de bord. Détaillez bien toutes les étapes de votre raisonnement. L'approximation donnée par l'équation (6.151) se compare-t-elle bien à votre résultat ?

Question 3 [15 points; Problème 41, texto]

Calculez la relation de dispersion pour une vague dans un bassin de profondeur finie (voir §9.3 dans les notes), incluant les effets de la tension superficielle. Reconstruisez ensuite une courbe de dispersion dans le genre de la Figure 10.7 (pas besoin de la reproduire dans tous ses détails purement cosmétiques!).

Question 4 [15 points; Problème 44, texto]

Ce problème de type "intégration" vise à vous faire apprivoiser le concept de dilatation thermique d'un fluide, dans le cadre d'une question très d'actualité. L'IPCC (Intergovernmental Panel on Climate Change) a produit plusieurs scenarii de réchauffement global, celui jugé le plus probable dans l'état actuel des choses prédisant une augmentation de la température terrestre moyenne de 5 C d'ici l'an 2100.

En supposant que l'ensemble des océans se réchauffe également de 5 degrés Celsius, calculez l'augmentation du niveau de la mer associé à la dilatation thermique de l'eau de mer. Vous pouvez considérer les océans comme un basin de profondeur uniforme de 5 km, avec un profil initial de température tel que tabulé à l'appendice C.2. N'oubliez pas que le coefficient de dilatation thermique de l'eau dépend de la température (voir Tableau C.2.1). Vous pouvez négliger la dépendance de ce coefficient sur la pression.

(a) Établissez tout d'abord une relation décrivant la variation volumique d'un élément de fluide $\mathrm{d}V$ d'eau de mer, en fonction d'un changement de température $\mathrm{d}T$;
(b) Déduisez-en une intégrale décrivant la variation du niveau de la mer;
(c) Solutionnez (numériquement) cette intégrale dans le cas d'un réchauffement $\Delta T = 5°$C uniforme dans tout l'océan. De combien s'élèvera le niveau des océans?
(d) Quelles sont, d'après vous, les hypothèses de travail les plus douteuses dans votre calcul?

Question 5 [15 points; Problème 45, texto]

Ce second petit problème, de type "intégration", débute avec la solution de Hagen-Poiseuille, pour l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible et visqueux dans un tuyau rectiligne de section circulaire (de rayon R), et se termine avec l'accident nucléaire de Fukushima, rien de moins! Il s'agit simplement d'y aller par étapes...

(a) Démontrez que la solution de Poiseuille peut se réécrire sous la forme:

$$u_z(s) = 2\bar{u}\left(1 - \frac{s^2}{R^2}\right) \ ,$$

où $\bar{u}$ est la vitesse de l'écoulement moyennée sur la section du tuyau; exprimez $\bar{u}$ en fonction du différentiel de pression $[\nabla p]$ imposé d'un bout à l'autre du tuyau.

(b) Supposons maintenant que le fluide s'écoulant dans le tuyau est à température $T(s,z)$ et que les parois du tuyau sont bien isolées thermalement parlant; on s'attend alors à ce qu'à un z donné, la température aux parois ne diffère que très peu de la température au centre du tuyau, et que la baisse de température ΔT de l'entrée du tuyau (fluide à température T_0) à sa sortie soit relativement faible, i.e., $\Delta T/T_0 \ll 1$. On peut alors approximer le profil de la température dans le tuyau par:

$$T(s,z) = T_0 - \Delta T\frac{z}{L} + f(s) \ ,$$

où L est la longueur du tuyau et $z = 0$ est au point d'entrée du fluide. Par substitution de cette expression dans l'équation du transport de la chaleur, montrez que la fonction $f(s)$ prend la forme:

$$f(s) = \frac{\bar{v}R^2\Delta T}{2\kappa L}\left(\frac{3}{4} - \frac{s^2}{R^2} + \frac{s^4}{4R^4}\right) \ ,$$

où κ est le coefficient de diffusivité thermique.

(c) À partir du résultat en (b), obtenez une expression pour le flux total de chaleur à travers les parois du tuyau, sur toute sa longueur et par unité de temps.

(d) Calculez maintenant la quantité de chaleur Q transportée par le fluide à travers le tuyau par unité de temps, et montrez que le rapport de la quantité de chaleur perdue à travers les paroi sur Q est proportionnel à $\Delta T/T$. Vous pouvez supposer que κ et c_p sont indépendant de la température, et négliger la dilatation thermique.

(e) L'écoulement Hagen-Poiseuille demeure laminaire jusqu'à un nombre de Reynolds critique $\mathrm{Re}_c \simeq 2000$; montrez que la quantité de chaleur transportée par un tel écoulement, à la limite de l'instabilité, est donnée par

$$Q_{\max} \simeq \frac{\pi}{2}\rho\nu R \mathrm{Re}_c c_p T_0 \ .$$

Nous avons maintenant tout en place pour passer à l'accident nucléaire à la centrale de Fukushima-Daiichi. Dans un réacteur nucléaire de ce type, de l'eau est pompée à travers le coeur du réacteur, et renvoyé vers un échangeur de chaleur pour chauffer un circuit secondaire d'eau qui propulsera éventuellement les turbines. En mode actif d'opération, $\simeq$ 500 MegaWatt d'énergie thermique sont produits, et les pression et température internes dans le réacteur montent à $P_0 \simeq 10^7$ Pa et $T_0 \simeq 550$ K. Pour de l'eau ainsi surchauffée (qui, notons-le, demeure liquide à cette pression malgré la température très élevée), $\kappa \sim \nu \sim 10^{-7}\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1}$, $c_p = 6000\,\mathrm{J\ kg}^{-1}\,\mathrm{K}^{-1}$, et $\rho \sim 10^3$ km m^{-3}. L'eau surchauffée sort du réacteur par devinez quoi, un grand nombre de tuyaux de section circulaire ($R = 1$ cm) et de longueur $L = 10$ m. Maintenant, avec toutes ces informations en main:/medskip

(f) En supposant que l'écoulement est au nombre de Reynolds critique $\mathrm{Re}_c = 2000$, estimez la vitesse moyenne $\bar{u}$. Ensuite calculez le nombre de tuyaux requis pour évacuer les 500 MW produit en mode normal de fonctionnement (puissance produite 500 MW).

Les réacteurs de la centrale de Fukushimai-Daiichi ont été immédiatement mis à l'arrêt au moment du tremblement de terre du 11 mars 2011. Cependant, même une fois les réactions de fission stoppées, environ 30MW d'énergie continue d'être libérés par la désintégration radioactive des produits de fission accumulés dans le réacteur, ce qui fait qu'une circulation de l'eau doit être maintenue pour évacuer cette chaleur. Et voilà le problème, l'arrivée du tsunami déclenchée par le tremblement de terre a inondé la centrale, causant une panne d'électricité et un arrêt des pompes. L'eau étant maintenant au repos, il ne restait plus que la conduction thermique dans l'eau au repos dans les tuyaux pour évacuer la chaleur du coeur du réacteur à travers les parois des tuyaux.

(g) Étant donné vos résultats précédents (en particulier sur le nombre de tuyaux), calculez la quantité de chaleur pouvant être ainsi évacuée par conduction thermique par unité de temps. À ce stade vous pouvez supposer que la température à l'extérieur des tuyaux est de 300 K. Est-ce suffisant pour évacuer le 30MW produit par la désintégration radioactive résiduelle ?

(h) Le coeur du réacteur contient $\sim 40\,\mathrm{m}^3$ d'eau; calculez le taux d'augmentation de la température, en supposant que ce 30MW demeure constant dans le temps; calculez le temps requis pour atteindre 2800 K, la température à laquelle les barres de fuel nucléaire commenceront à fondre.

***** LES QUESTIONS 6 ET 7 CI-DESSOUS SONT OBLIGATOIRES *****

Question 6 [20 points; enfin du nouveau...]

Un fluide visqueux et incompressible est contenu entre deux très grandes plaques parallèles séparées d'une distance h. La plaque du fond est au repos, et elle du haut tourne autour d'un axe vertical perpendiculaire aux plaques, à vitesse angulaire Ω. On néglige l'effet de la gravité.

Le fluide étant visqueux, on peut s'attendre à ce que le mouvement de rotation de la plaque supérieure se transmette au fluide; et qu'après une phase transitoire, on pourrait possiblement produire un écoulement stationnaire de la forme

$$\mathbf{u} = u_\phi(s,z)\hat{\mathbf{e}}_\phi \ ,$$

exprimé ici en coordonnées cylindriques (s,ϕ,z), avec $\hat{\mathbf{e}}_z$ coincidant avec l'axe de rotation de la plaque supérieure.

(a) Démontrez que dans la situation considérée ici, l'écoulement ci-dessus n'est *pas* une solution physiquement acceptable.

(b) Sans calculer une solution complète formelle, démontrez que votre résultat en (a) implique la présence d'un écoulement secondaire ayant des composantes dans les directions $\hat{\mathbf{e}}_s$ et $\hat{\mathbf{e}}_z$.

(c) Tracez à main levée les lignes d'écoulement de cet écoulement secondaire dans les environs de l'axe de rotation du système. Justifiez physiquement votre dessin (une demie page max).

(d) Toujours sans calculer une solution formelle, obtenez un *estimé* de la grandeur caractéristique de cet écoulement secondaire, en fonction des paramètres du problème (e.g., vitesse angulaire de la plaque supérieure, viscosité du fluide, etc.).

Question 7 [10 points; Mesdames-zé-Messieurs, direction la cuisine...]

Pour cette expérience vous aurez besoin (1) d'un chaudron, (2) d'une grosse cuillère, et de grains de quelque chose de densité légèrement supérieure à celle de l'eau; par exemple des feuilles de thé émiettées, ou encore des des grains de riz. Ensuite,

(a) Remplissez le chaudron aux trois quart avec de l'eau, et brassez l'eau avec la cuillère en un mouvement circulaire. Ce brassage circulaire devrait être suffisamment vigoureux pour déformer de manière notable la surface eau-air en la forme parabolique que vous connaissez maintenant si bien. Arrêtez de brasser, et mesurez le temps requis pour que l'eau revienne au repos. Comparez ceci à un estimé du temps de dissipation visqueuse, vu les dimensions de votre chaudron. Que concluez vous de cette comparaison ?

(b) Maintenant déposez votre thé/riz (ou autre) dans le chaudron, et faites tout couler dans le fond du chaudron. Les quantités devraient être telles que les feuilles de thé ou grains de riz (ou autre) ne devraient couvrir qu'une petite superficie du fond du chaudron, genre pas plus de 20%.

(c) Avec la cuillère, brassez vigoureusement l'eau de manière à disperser le thé ou le riz, et sans attendre, poursuivez en brassant circulairement dans le sens horaire le long des cotés du chaudron. Comme en (a), votre brassage de devrait être assez vigoureux pour déformer l'interface eau-air.

(d) Cessez le brassage circulaire, et observez bien ce qui arrive au thé/riz à mesure que le mouvement circulaire de l'eau ralentit. Décrivez moi ça.

(e) Reprenez les étapes (c)–(d), mais cette fois brazzez circulairement dans le sens antihoraire à l'étape (d). Constatez vous une différence dans le comportement du thé/riz par rapport à première version de la manip ?

Il s'agit donc d'expliquer tout ça à l'aide des notions hydrodynamiques vues en cours. Comme pour les autres expériences dans la cuisine, développements mathématiques permis mais non-essentiels. Visez max 1–1.5 pages de texte, + diagrammes et/ou photos de l'expérience même, etc.

Et voici un GROS INDICE: l'explication de cette expérience-dans-la-cuisine pourrait fort bien bénéficier de votre solution à la Question 6 ci-dessus; et vice-versa, en fait !

Le Professeur:

Le Répondant:

La Directrice: Nicole St-Louis