PHY 3140
HYDRODYNAMIQUE
EXAMEN FINAL

Professeur: Paul Charbonneau
Date de l'examen: 18 au 20 décembre 2020
Durée de l'examen: 48+ heures

Examen à livre ouvert, toutes ressources permises, sauf ressources humaines autre que votre propre personne personnelle. Un conseil: méfiez-vous toujours de ce que vous trouvez sur l'internet; et si vous allez y ramasser des informations ou tout autre truc, donnez toujours l'URL complet, sinon c'est du plagiat! En apposant votre signature ci-dessous, vous indiquez que vous avez lu et compris ces directives, et que vous vous engagez à en respecter à la fois l'esprit et la lettre. Remettez-moi un scan de la première page de ce questionnaire signé ici avec vos solutions.

Votre signature:

L'examen doit m'être remis en version pdf par courriel le dimanche 20 décembre avant minuit (23:59). Il peut évidemment m'être remis plus tôt si vous le préférez.

Un examen de 48 heures allège grandement la pression temporelle associée à un examen classique. Par conséquent, je m'attend à des copies d'examen écrites de manière lisible, au propre, et détaillant posément la logique suivie, les approximations utilisées, etc.

Bonne Chance! (...même si ce n'est pas vraiment une question de chance...)

Question 1 [10 points; Problème 9, texto]

Un entonnoir conique d'ouverture angulaire α et de section A à sa partie la plus large est posé à l'envers sur une surface plane. On verse par l'ouverture de l'entonnoir un fluide incompressible de densité ρ jusqu'à ce que la partie conique de l'entonnoir soit remplie. Quelle doit être la masse minimale M de l'entonnoir permettant de contenir le fluide (exprimée en fonction de ρ, α, etc.) ?

Question 2 [15 points; Problème 27, texto]

Deux minces couches superposées de fluides incompressibles et visqueux, de densités égales mais de viscosités cinématiques ν_1 et ν_2 différentes, s'écoulent en régime stationnaire sous l'influence de la gravité le long d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. La couche de fluide adjacente au plan est d'épaisseur h_1, et celle par dessus d'épaisseur h_2.

(a) Écrivez et justifiez physiquement les conditions limites sur $\mathbf{u}$ qui doivent être satisfaites (i) à la surface du plan; (ii) à l'interface entre les deux couches de fluide; (iii) à l'interface avec l'air.
(b) Calculez le profil de vitesse de l'écoulement dans les deux couches de fluide.

(c) En dépit de votre réponse en (a), vous devriez avoir trouvé en (b) que le profil de l'écoulement de la couche inférieure de dépend pas de la viscosité du fluide dans la couche supérieure; comment expliquez vous ceci physiquement?

Question 3 [15 points; Problème 34, texto]

Recalculez la solution de Blasius en suivant la procédure numérique introduite à la §6.10 des notes de cours. Ensuite, calculez la force de trainée (en Newton) exercée par l'eau ($\nu = 10^{-6}\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1}$) s'écoulant à vitesse $u_0 = 1\,\mathrm{m}\ \mathrm{s}^{-1}$ de chaque coté d'une plaque carrée de taille $L = 1 \times 1\mathrm{m}$, et d'épaisseur $h = 1\mathrm{cm}$. Vous pouvez négliger les effets de bord. Détaillez bien toutes les étapes de votre raisonnement. L'approximation donnée par l'équation (6.151) des note sde cours se compare-t-elle bien à votre résultat ?

Question 4 [15 points; Problème 42, texto]

Le but ici est de vous faire effectuer une analyse perturbative formelle, dans le cadre de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. On considére une situation en coordonnées cartésiennes où un fluide inviscide et incompressible, mais de densité variable $\rho(z)$, remplit tout l'espace. La configuration initiale est statique ($\mathbf{u} = 0$) et stationnaire ($\partial/\partial t = 0$). Notons que même si le fluide est incompressible, on doit écrire $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ dans l'analyse de perturbation, car la perturbation à l'écoulement peut causer une variation de la densité par échange de deux éléments de fluide de densités différentes (comme dans l'approximation de Boussinesq).

(a) Linéarisez les équations d'Euler et l'équation de continuité pour ce système, et démontrez ainsi que les équations à l'ordre 1 prennent la forme:

$$\rho \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial t} = -\nabla(\delta p) + \mathbf{g}(\delta\rho)$$

$$\frac{\partial(\delta\rho)}{\partial t} + (\delta\mathbf{u} \cdot \nabla)\rho = 0$$

(b) Démontrez qu'une perturbation *incompressible* doit satisfaire simultanément à la relation

$$\nabla \cdot (\delta\mathbf{u}) = 0$$

(c) Introduisons maintenant une perturbation de la forme $\Xi(x, y, z, t) = \xi(z)\exp(ik_x x + ik_y y + \omega t)$ pour toutes les variables hydrodynamiques du problème; manipulez les équations linéarisée en (a) et (b), et retrouvez l'équation différentielle suivante, gouvernant l'évolution de la partie spatiale ($w(z) \equiv \xi$) de la composante-z de la perturbation en vitesse (où $k^2 = k_x^2 + k_y^2$):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\rho\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right] = k^2\left[-\frac{g}{\omega^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z}w + \rho w\right]$$

(d) Revenons maintenant à la situation considérée en classe (voir aussi la Figure 10.2 des Notes de cours), soit celle de deux fluides superposés de densités ρ_1, ρ_2; supposons également que $w(z)$ peut s'exprimer sous la forme $w(z) = w_0\exp(ik_z z)$; Obtenez la relation de dispersion caractérisant cette situation, et démontrez que $\mathrm{Re}(\omega) > 0\ \forall k$ si $\rho_1 > \rho_2$.

Question 5 [15 points; Problème 49 **ou** 50]

Ici vous avez un choix ! Soit le problème 49 (stabilité linéaire des équations de Lorenz), soit le problème 50 (diagramme de bifurcation pour les équations de Lorentz).

Question 6 [15 points; enfin du nouveau...]

Ce petit problème vise à vous faire explorer, sur la base de la physique couverte dans le cours, la justification de cette maintenant tristement fameuse "loi du deux mètres" pour la distanciation sociale à l'ère Covid-19.

Pour un individu infecté, autant la respiration que la parole projettent dans l'air ambiant des microgouttelettes contenant potentiellement une charge virale. Ces gouttelettes ont des diamètres allant d'une dizaine jusqu'à quelques centaines de μm, d'où leur préfixe "micro". À ces tailles la force de trainée associée à la viscosité de l'air joue un rôle important dans leur chute vers le sol, qui peut différer substantiellement de la chute libre, mais qui peut cependant être approchée à l'aide de notre solution de Stokes. La généralisation vectorielle de sa force de trainée s'écrit comme:

$$\mathbf{F}_D = 6\pi\mu R\mathbf{u} \ ,$$

où $\mu = \rho_a \nu$ est la viscosité dynamique de l'air, R est le rayon de la sphère/gouttelette, et $\mathbf{u}$ est la vitesse du fluide par rapport à une sphère/gouttelette au repos (comparez à l'éq. (6.117)).

L'idée est la suivante: on considère une gouttelette éjectée horizontalement de la bouche d'un individu à une vitesse $u_0 = 5\,\text{m s}^{-1}$, vitesse maximale atteinte lors de l'expression sonore de phonèmes débutant par une consonne dite "plosive", comme b..., k..., et p... (voir le fascinant petit article par Abkarian *et al.* pour plus de détails sur ce genre de considérations; fourni avec l'examen sur la pag web du cours). L'orifice buccal en question est situé à une hauteur de 1.7m du sol. On cherche à déterminer si une gouttelette ainsi projetée pourrait atteindre le torse (hauteur $\geq 1\,\text{m}$) d'un second individu situé à une distance d en face du premier.

L'équation du mouvement pour la gouttelette n'est rien de plus compliqué que notre bon vieux $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, mais avec la force de trainée ci-dessus incluse dans le $\mathbf{F}$, en plus évidemment de la gravité.

(a) Écrivez l'équation du mouvement pour une gouttelette de rayon R, de densité $\rho_e = 10^3\,\text{kg m}^{-3}$, se déplaçant dans l'air (densité $\rho_a = 1.2\,\text{kg m}^{-3}$, viscosité cinématique $\nu = 10^{-5}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-1}$) sous l'influence de la gravité ($g = 9.8\,\text{m s}^{-2}$). Séparez votre équation du mouvement en ses composantes horizontale et verticale.

(b) Solutionnez cette paire d'équations différentielles, soit analytiquement soit numériquement. Attention à spécifier correctement vos conditions initiales; toute l'info requise est donnée ci-dessus. Considérez trois diamètres ($D = 2R$) pour vos gouttelettes: $D = 40$, 80 et $200\,\mu$m ($1\,\mu\text{m} = 10^{-6}\,\text{m}$). Portez en graphique les trajectoires de ces trois microgouttelettes. Pour chaque diamètre, calculez (et tabulez) (1) le déplacement horizontal parcouru tout en chutant de 1.7 à 1 m, (2) le temps requis pour chuter jusqu'à 1 m, et (3) le temps requis pour atteindre le sol. Quel diamètre de gouttelette est le plus dangereux ici ? Vos résultats sont-ils cohérents avec la "règle du deux mètres" ?

Au printemps 2020, des résultats d'une étude très médiatisée (dont le pdf de la prépublication, Blocken *et al.*, est fourni avec l'examen sur la page web du cours) ont suggéré que la distance sécuritaire lors d'une activité comme la course à pied est en fait passablement plus grande que deux mètres. Il s'agit maintenant de reprendre votre calcul ci-dessus, cette fois en ajoutant un "vent" soufflant à vitesse u_v dans la direction négative en x, ce qui est équivalent à avoir la bouche du coureur se déplaçant vers la direction positive en x à vitesse u_v. Vous pouvez supposer un(e) athlète bien entrainé(e), trottant à $u_v = 4\,\mathrm{m\ s^{-1}}$. Des mesures ont démontré qu'en course de fond, l'exhalation de l'air atteint typiquement une vitesse de $2.5\,\mathrm{m\ s^{-1}}$ à la sortie de la bouche (oui, deux fois plus lent que quand on dit "papa pipi", par exemple...).

(c) Réécrivez votre équation du mouvement en présence d'un vent soufflant horizontalement à vitesse u_v (indépendante de la hauteur) contre un "coureur" au repos. Attention à bien formuler la force de trainée!

(d) Solutionnez vos nouvelles équations, analytiquement ou numériquement, et portez en graphique vos trajectoires pour les trois diamètres de gouttelettes considérés précédemment. Calculez et tabulez les mêmes quantités qu'en (b).

(e) Et maintenant le noeud du problème: calculez à quelle distance "sécuritaire" derrière notre coureur(euse) doit se tenir un(e) second(e) coureur(euse), trottant aussi à $4\,\mathrm{m\ s^{-1}}$, afin de ne pas se ramasser une goutellette au niveau de son torse ou plus haut (hauteur $\geq 1\,\mathrm{m}$, comme précédemment). Quel diamètre de gouttelette est le plus dangereux dans cette seconde situation ?

(f) Quelles seraient ici les principales sources potentielles d'erreur dues aux approximations physiques faites dans le calcul de votre distance "sécuritaire" ? Discutez-les brièvement (pas de calculs d'erreur formels!)

(g) Lisez maintenant la prépublication de Blocken *et al.* distribuée avec l'examen sur la page web du cours. Comparez et contrastez votre petit modèle (très simple) avec le leur, qui remplace notre air ambiant laminaire par un véritable calcul de trainée turbulente produite par un coureur. Leur distance sécuritaire recommandée diffère-t-elle beaucoup de celle que vous avez calculée en (e) ? Pourquoi ?

(h) Il est très inhabituel, en sciences, de disséminer des résultats aux média avant évaluation par les pairs (en entrevue, Bert Blocken a justifié l'avoir fait en raison du caractère urgent de ses conclusions pour la santé publique). Le minimum à faire dans une telle situation est d'aller examiner quelques publications récentes des auteurs, ayant été sujettes à une évaluation par des pairs, afin de jauger leur niveau de crédibilité. Aller chercher sur GoogleScholar quelques articles récents par Blocken et son équipe. Jugeriez-vous les auteurs compétents dans le genre de calculs présentés dans leur prépublication ?

Question 7 [15 points; Mesdames-zé-Messieurs, direction la cuisine...]

Les observations de "petits événements" de tous les jours offrent une multitude d'exemples d'hydrodynamique amusante.

Pour cette petite expérience d'hydro-dans-la-cuisine, vous aurez besoin d'une aiguille ou poinçon, et d'un pot de plastique mou, genre pot de yogourt de 500ml; la manip sera plus facile avec un pot en plastique transparent ou semi-transparent. Avec l'aiguille ou le poinçon, percez un petit trou au fond de votre pot de plastique. Percez sous le pot, vers l'intérieur et près du centre. Le trou doit être très petit, pas plus de 0.5mm de diamètre, pour faciliter l'expérience et les mesures.

Installez le pot sur des supports, de manière à ce que le fond du pot soit surélevé par rapport à votre comptoir ou surface de travail. Remplissez lentement le pot, en évitant le plus possible de produire des mouvements turbulents dans la couche liquide, tout en fixant fermement des yeux le dessous de votre pot. Au début l'eau s'accumulera dans le pot, malgré le trou! Notez à partir de quelle épaisseur de la couche de fluide des gouttes commencent à s'échapper par le trou. Continuez de remplir lentement le récipient à deux fois cette épaisseur, et ensuite laissez le contenant se vider, goutte à goutte. Notez à quelle épaisseur de la couche de fluide les gouttes arrêtent de s'échapper.

(a) Quelles sont les forces hydrodynamiques en présence à l'interface eau-air au niveau du trou dans le fond du récipient ?

(b) Vous avez, éparpillé dans les notes de cours, tous les éléments physiques requis pour calculer un bon estimé de la hauteur (h, disons) de la couche d'eau à laquelle les gouttes devraient commencer à s'écouler par le trou. Obtenez une expression donnant h en fonction du diamètre de votre trou, densité de l'eau, etc. Détaillez bien votre raisonnement et vos approximations, le cas échéant.

(c) Déduisez de vos mesures et de votre expression en (b) le diamètre "théorique" de votre trou. Comment ceci se compare-t-il à son diamètre véritable ? La différence est-elle significative, et si oui comment pourriez vous l'expliquer ?

(d) Lors de votre manip vous devriez (typiquement) remarquer que la hauteur de la couche de fluide à laquelle votre contenant arrête de se vider diffère de celle à laquelle le dégoulinage commence lors du remplissage. Comment expliquez-vous cette asymétrie ?

Le Professeur:

Le Répondant:

Le Directeur: