PHY 3140
HYDRODYNAMIQUE
EXAMEN FINAL

Professeur: Paul Charbonneau
Date de l'examen: 17 au 19 avril 2023
Durée de l'examen: 48+ heures

Examen à livre ouvert, toutes ressources permises, sauf ressources humaines autre que votre propre personne personnelle (et méfiez-vous toujours de ce que vous trouvez sur l'internet!). En apposant votre signature ci-dessous, vous indiquez que vous avez lu et compris ces directives, et que vous vous engagez à en respecter à la fois l'esprit et la lettre. Remettez-moi un scan de la première page de ce questionnaire signé ici avec vos solutions.

Votre signature:

L'examen doit m'être remis en version pdf par courriel, ou au B-3013, Campus MIL, le mercredi 19 avril avant midi (11:59am). Il peut également m'être remis plus tôt si vous le préférez.

Un examen de 48 heures allège grandement la pression temporelle associée à un examen classique. Par conséquent, je m'attend à des copies d'examen écrites de manière lisible, au propre, et également scannée de manière lisible. Vos solutions doivent détailler posément la logique suivie, les approximations utilisées, etc.

Bonne Chance! (...même si ce n'est pas vraiment une question de chance...)

Question 1 [10 points; Problème 15, texto]

Considérons l'écoulement 2D d'un fluide parfait et incompressible, défini par les composantes suivantes:

$$\mathbf{u} = A(x\hat{\mathbf{e}}_x - y\hat{\mathbf{e}}_y)$$

où A est une constante, et la gravité peut encore une fois être négligée. Ceci décrit l'écoulement autour d'un point de stagnation situé à $(x, y) = (0, 0)$, limité par la présente d'une plaque plane plaçée à $y = 0$; ça devrait vous rappeler quelquechose...

(a) Démontrez que les isobares (surface où la pression est constante) ont la forme de cercles dans le plan xy, dont le centre coincide avec le point de stagnation susmentionné.
(b) Soit un élément de fluide initialement positionné sur l'axe de symétrie, à $(x, y) = (0, 1)$; cet élément de fluide se déplacera donc verticalement vers le bas, le long de l'axe-y, vers le point de stagnation. Calculez le temps requis pour atteindre le point de stagnation.
(c) Soit maintenant *deux* éléments de fluide initialement situés à $(x, y) = (\pm\varepsilon, 1)$, avec $\varepsilon \ll 1$. Démontrez que la distance entre ces deux éléments de fluide augmente exponentiellement au cours de leur passage près du point de stagnation.

Question 2 [10 points; Problème 33, texto]

Ce problème vise à vous faire explorer le mécanisme de **lubrification**. On considère un cube d'arête $d = 1\,\mathrm{m}$ de masse $10^3\,\mathrm{kg}$, dont une face repose sur une surface plane horizontale, avec une très mince (épaisseur = 1 mm) couche d'huile (fluide incompressible de densité $\rho = 800\,\mathrm{kg\ m^{-3}}$ et viscosité cinématique $\nu = 10^{-4}\ \mathrm{m^2\,s^{-1}}$) séparant le cube de la plaque.

(a) Calculez la forme de l'écoulement induit dans la couche d'huile par un déplacement horizontal du bloc à vitesse constante v. Vous pouvez négliger les effets de bords, autrement dit vous pouvez supposer que l'écoulement dans la couche d'huile est purement horizontal.

(b) Calculez maintenant le stress visqueux à la base du bloc.

(c) Calculez la force horizontale (en Newton) devant être appliquée sur le bloc pour qu'il se déplace (horizontalement) à une vitesse constante $v = 1\,\mathrm{m\ s^{-1}}$; et aussi pour $v = 0.1\,\mathrm{m\ s^{-1}}$;

(d) Votre résultat en (c) semble suggérer que $\mathbf{F} \propto \mathbf{v}$ plutôt que notre bon vieux $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Expliquez en quelques lignes ce paradoxe (apparent).

Question 3 [15 points; Problème 41, texto]

On a vu comment à une interface entre deux fluides de densités différentes, il est possible de développer des ondes de surface (étudiées en grand détails au chapitre 9 dans le cadre d'une interface eau-air), où la gravité agit comme force de rappel. De telles ondes peuvent également se développer dans un fluide stratifié par la gravité, en absence d'une interface. Ce problème vise à vous faire calculer la relation de dispersion pour de telles ondes, dites "ondes internes" ou "ondes de gravité". Je vous fournis ci-dessous plusieurs étapes intermédiaires du calcul, donc respirez bien par le nez et ça devrait bien débouler...

Le point de départ de l'analyse n'est rien de plus compliqué que nos équations pour un fluide inviscide dans l'approximation de Boussinesq, en supposant toutefois que la densité peut varier en fonction de la position mais est conservée durant le déplacement d'un élément de fluide; Les écoulements océaniques sont une situation physique correspondant à cette situation à prime abord bizarre, en raison du gradient vertical de salinité qui existe habituellement dans les les couches superficielles des océans. les équations à résoudre sont donc:

$$\rho \frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}\ , \qquad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\ , \qquad \frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0\ .$$

Nous allons travailler en deux dimensions spatiales (x, z), avec la direction z correspondant à la verticale. On écrira l'écoulement sous la forme $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{e}}_x + w\hat{\mathbf{e}}_z$.

(a) Linéarisez les équations ci-dessus, en supposant que l'état de référence est en équilibre hydrostatique dans la verticale (gravité constante ici), et aucune des quantités caractérisant cet état de référence ne dépend de la coordonnée horizontale x ou du temps t ; e.g., on écrira $p = p_0(z) + p_1(x, z, t)$, etc. Démontrez que les équations linéarisées prennent la forme:

$$\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}\ ,$$

$$\rho_0 \frac{\partial w_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial z} - \rho_1 g\ ,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + w_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0 \ .$$

(b) Cherchons maintenant des solutions prenant la forme de variations harmoniques en x, i.e.,

$$w_1(x,z,t) = W_1(z)\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)} \ , \qquad \rho_1(x,z,t) = R_1(z)\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)} \ , \qquad \text{etc.}$$

Par substitution dans les équations linéarisées ci-dessus, montrez que celles-ci se réduisent à

$$\rho_0\omega U_1 = kP_1 \ , \qquad i\rho_0\omega W_1 = \frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}z} + R_1 g \ ,$$

$$ikU_1 + \frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}z} = 0 \ , \qquad -i\omega R_1 + W_1\frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}z} = 0 \ .$$

(c) Ces quatre EDOs peuvent être combinées en un seule, de la forme:

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial z^2} = \qquad \ldots$$

Calculez moi ce mystérieux coté droit de cette équation !

(d) Spécialisons maintenant le problème à une stratification isotherme, où $\rho_0 \propto \exp(-z/H)$, H étant l'échelle de hauteur de la stratification; tous les coefficients de votre EDO obtenue en (c) devraient se retrouver indépendant de z, ce qui implique qu'elle accepte des solutions ondulatoires de la forme

$$W_1 \propto \mathrm{e}^{z/2H} \times \mathrm{e}^{i(kx+lz-\omega t)} \ ,$$

où l est le nombre d'onde vertical de la dépendance harmonique. Substituant cette expression dans votre ODE en (c), démontrez que ces ondes vont satisfaire à la relation de dispersion suivante:

$$\omega^2 = \frac{N^2k^2}{k^2+l^2} \ , \qquad \text{avec} \qquad N^2 = -\frac{g}{\rho_0}\frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}z} \ ,$$

dans la limite où la longueur d'onde de l'oscillation est beaucoup plus petite que la hauteur de colonne H.

e) Finalement, à partir de votre résultat en (d) déterminez pour quelles formes de profils de variation de $\rho_0(z)$ ces ondes sont amorties dans le temps.

Question 4 [20 points; Problème 44, texto]

Ce second petit problème, de type "intégration", débute avec la solution de Hagen-Poiseuille, pour l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible et visqueux dans un tuyau rectiligne de section circulaire (de rayon R), et se termine avec l'accident nucléaire de Fukushima, rien de moins! Il s'agit simplement d'y aller par étapes...

(a) Démontrez que la solution de Poiseuille peut se réécrire sous la forme:

$$u_z(s) = 2\bar{u}\left(1 - \frac{s^2}{R^2}\right) \ ,$$

où $\bar{u}$ est la vitesse de l'écoulement moyennée sur la section du tuyau; exprimez $\bar{u}$ en fonction du différentiel de pression $[\nabla p]$ imposé d'un bout à l'autre du tuyau.

(b) Supposons maintenant que le fluide s'écoulant dans le tuyau est à température $T(s,z)$ et que les parois du tuyau sont bien isolées thermalement parlant; on s'attend alors à ce qu'à un z donné, la température aux parois ne diffère que très peu de la température au centre du tuyau, et que la baisse de température ΔT de l'entrée du tuyau (fluide à température T_0) à sa sortie soit relativement faible, i.e., $\Delta T/T_0 \ll 1$. On peut alors approximer le profil de la température dans le tuyau par:

$$T(s,z) = T_0 - \Delta T\frac{z}{L} + f(s) \ ,$$

où L est la longueur du tuyau et $z = 0$ est au point d'entrée du fluide. Par substitution de cette expression dans l'équation du transport de la chaleur, montrez que la fonction $f(s)$ prend la forme:

$$f(s) = \frac{\bar{v}R^2\Delta T}{2\kappa L}\left(\frac{3}{4} - \frac{s^2}{R^2} + \frac{s^4}{4R^4}\right) \ ,$$

où κ est le coefficient de diffusivité thermique.

(c) À partir du résultat en (b), obtenez une expression pour le flux total de chaleur à travers les parois du tuyau, sur toute sa longueur et par unité de temps.

(d) Calculez maintenant la quantité de chaleur Q transportée par le fluide à travers le tuyau par unité de temps, et montrez que le rapport de la quantité de chaleur perdue à travers les paroi sur Q est proportionnel à $\Delta T/T$. Vous pouvez supposer que κ et c_p sont indépendant de la température, et négliger la dilatation thermique.

(e) L'écoulement Hagen-Poiseuille demeure laminaire jusqu'à un nombre de Reynolds critique $\mathrm{Re}_c \simeq 2000$; montrez que la quantité de chaleur transportée par un tel écoulement, à la limite de l'instabilité, est donnée par

$$Q_{\max} \simeq \frac{\pi}{2}\rho\nu R\mathrm{Re}_c c_p T_0 \ .$$

Nous avons maintenant tout en place pour passer à l'accident nucléaire à la centrale de Fukushima-Daiichi. Dans un réacteur nucléaire de ce type, de l'eau est pompée à travers le coeur du réacteur, et renvoyé vers un échangeur de chaleur pour chauffer un circuit secondaire d'eau qui propulsera éventuellement les turbines. En mode actif d'opération, $\simeq$ 500 MegaWatt d'énergie thermique sont produits, et les pression et température internes dans le réacteur montent à $P_0 \simeq 10^7$ Pa et $T_0 \simeq 550$ K. Pour de l'eau ainsi surchauffée (qui, notons-le, demeure liquide à cette pression malgré la température très élevée), $\kappa \sim \nu \sim 10^{-7}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$, $c_p = 6000\,\mathrm{J\ kg^{-1}\,K^{-1}}$, et $\rho \sim 10^3$ km m^{-3}. L'eau surchauffée sort du réacteur par devinez quoi, un grand nombre de tuyaux de section circulaire ($R = 1$ cm) et de longueur $L = 10$ m. Maintenant, avec toutes ces informations en main:/medskip

(f) En supposant que l'écoulement est au nombre de Reynolds critique $\mathrm{Re}_c = 2000$, estimez la vitesse moyenne $\bar{u}$. Ensuite calculez le nombre de tuyaux requis pour évacuer les 500 MW produit en mode normal de fonctionnement (puissance produite 500 MW).

Les réacteurs de la centrale de Fukushimai-Daiichi ont été immédiatement mis à l'arrêt au moment du tremblement de terre du 11 mars 2011. Cependant, même une fois les réactions de fission stoppées, environ 30MW d'énergie continue d'être libérés par la désintégration radioactive des produits de fission accumulés dans le réacteur, ce qui fait qu'une circulation de l'eau doit être maintenue pour évacuer cette chaleur. Et voilà le problème, l'arrivée du tsunami déclenchée par le tremblement de terre a inondé la centrale, causant une panne d'électricité et un arrêt des pompes. L'eau étant maintenant au repos, il ne restait plus que la conduction thermique dans l'eau au repos dans les tuyaux pour évacuer la chaleur du coeur du réacteur à travers les parois des tuyaux.

(g) Étant donné vos résultats précédents (en particulier sur le nombre de tuyaux), calculez la quantité de chaleur pouvant être ainsi évacuée par conduction thermique par unité de temps. À ce stade vous pouvez supposer que la température à l'extérieur des tuyaux est de 300 K. Est-ce suffisant pour évacuer le 30MW produit par la désintégration radioactive résiduelle ?

(h) Le coeur du réacteur contient $\sim 40\,\mathrm{m}^3$ d'eau; calculez le taux d'augmentation de la température, en supposant que ce 30MW demeure constant dans le temps; calculez le temps requis pour atteindre 2800 K, la température à laquelle les barres de fuel nucléaire commenceront à fondre.

Question 5 [15 points; Problème 45 **ou** 46]

Ici vous avez un choix ! Soit le problème 45 (flux convectif, etc.), soit le problème 46 (Spectre turbulent) dans le contexte de la convection thermique.

Question 6 [20 points; enfin du nouveau...]

Je n'ai pas pu m'empêcher de ressortir ce superbe petit problème, qui vise à vous faire explorer, sur la base de la physique couverte dans le cours, la justification de cette maintenant tristement fameuse "loi du deux mètres" pour la distanciation sociale à l'ère Covid-19.

Pour un individu infecté, autant la respiration que la parole projettent dans l'air ambiant des microgouttelettes contenant potentiellement une charge virale; même pas besoin de tousser! Ces gouttelettes ont des diamètres allant d'une dizaine jusqu'à quelques centaines de μm. À ces tailles la force de trainée associée à la viscosité joue un rôle important dans leur chute vers le sol, qui peut différer substantiellement de la chute libre, mais qui peut cependant être approchée à l'aide de notre solution de Stokes. La généralisation vectorielle de sa force de trainée s'écrit comme:

$$\mathbf{F}_D = 6\pi\mu R\mathbf{u} \ ,$$

où $\mu = \rho_a \nu$ est la viscosité dynamique, R est le rayon de la sphère/gouttellette, et $\mathbf{u}$ est la vitesse du fluide par rapport à une sphère/gouttellette au repos (comparez à l'éq. (6.117)).

L'idée est la suivante: on considère une gouttelette éjectée horizontalement de la bouche d'un individu à une vitesse $u_0 = 5\,\mathrm{m\ s}^{-1}$, vitesse maximale atteinte lors de l'expression sonore de phonèmes débutant par une consonne dite "plosive", comme b..., k..., et p... (voir le fascinant petit article par Abkarian *et al.* pour plus de détails sur ce genre de considérations; disponible avec l'examen sur la page web du cours). L'orifice buccal en question est situé à une hauteur de 1.75m du sol. On cherche à déterminer si une gouttellette ainsi projetée pourrait atteindre le torse (hauteur $\geq 1\,\mathrm{m}$) d'un second individu situé à une distance d du premier.

L'équation du mouvement pour la gouttellette n'est rien de plus compliqué que notre bon vieux $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, mais avec la force de trainée ci-dessus incluse dans le $\mathbf{F}$, en plus évidemment de la gravité.

(a) Écrivez l'équation du mouvement pour une gouttellette de rayon R, de densité $\rho_e = 10^3\,\mathrm{kg}$ m^{-3}, se déplaçant dans l'air (densité $\rho_a = 1.2\,\mathrm{kg\,m}^{-3}$, viscosité cinématique $\nu = 10^{-5}\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1}$) sous l'influence de la gravité ($g = 9.8\,\mathrm{m\ s}^{-2}$). Séparer votre équation du mouvement en ses composantes horizontale et verticale.

(b) Solutionnez cette paire d'équations différentielles, soit analytiquement soit numériquement. Attention à spécifier correctement vos conditions initiales; toute l'info requise est donnée ci-dessus. Considérez trois diamètres ($D = 2R$) pour vos gouttellettes: $D = 40$, 80 et 200 μm (1 μm= 10^{-6} m). Portez en graphique les trajectoires de ces trois gouttellettes. Pour chaque diamètre, calculez (et tabulez) (1) le déplacement horizontal parcouru tout en chutant de 1.75 à 1 m, (2) le temps requis pour chuter jusqu'à 1 m, et (3) le temps requis pour atteindre le sol. Quel diamètre de gouttellette est le plus dangereux ici ? Vos résultats sont-ils cohérents avec la "règle du deux mètres" ?

Au printemps 2020, des résultats d'une étude très médiatisée (dont le pdf de la prépublication, Blocken *et al.*, est accessible avec l'examen sur la page web du cours) ont suggérée que la distance sécuritaire lors d'une activité comme la course à pied est en fait passablement plus grande que deux mètres. Il s'agit maintenant de reprendre votre calcul ci-dessus, cette fois en ajoutant un "vent" soufflant à vitesse u_v dans la direction négative en x, ce qui est équivalent à avoir l'orifice buccal du coureur se déplaçant vers la direction positive en x à vitesse u_v. Vous pouvez supposer un(e) athlète bien entrainé(e), trottant à $u_v = 4\,\mathrm{m\ s}^{-1}$. Des mesures ont démontré qu'en course de fond, l'exhalation de l'air atteint une vitesse de $2.5\,\mathrm{m\ s}^{-1}$ à la sortie de la bouche (oui, deux fois plus lentement que quand on dit "papa pipi kaka", par exemple...).

(c) Réécrivez votre équation du mouvement en présence d'un vent externe horizontal soufflant à vitesse u_v contre un "coureur" au repos. Attention à bien formuler la force de trainée!

(d) Solutionnez vos nouvelles équations, analytiquement ou numériquement, et portez en graphique vos trajectoires pour les trois diamètres de gouttellettes considérés précédemment. Calculez et tabulez les mêmes quantités qu'en (b).

(e) Et maintenant le noeud du problème: calculez à quelle distance "sécuritaire" derrière notre coureur(euse) doit se tenir un(e) second(e) coureur(euse), trottant aussi à $4\,\mathrm{m\ s}^{-1}$, afin de ne pas percuter une goutellette au niveau de son torse ou plus haut (hauteur $\geq 1\,\mathrm{m}$, comme précédemment). Quel diamètre de gouttellette est le plus dangereux dans cette seconde situation ?

(f) Quelles seraient ici les principales sources potentielles d'erreur dans le calcul de votre distance "sécuritaire" ? Discutez-les brièvement (pas de calculs d'erreur formels!)

(g) Lisez maintenant la prépublication de Blocken *et al.* distribuée avec l'examen sur la page web du cours. Comparez et contrastez votre petit modèle (très simple) avec le leur, qui remplace notre air ambiant par un véritable calcul de trainée turbulente produite par un coureur. Leur distance sécuritaire recommandée diffère-t-elle beaucoup de celle que vous avez calculée en (e) ? Pourquoi ?

(h) Il est très inhabituel, en sciences, de disséminer des résultats aux média avant évaluation par les pairs (en entrevue, Hans Blocken a justifié l'avoir fait en raison du caractère urgent de ses conclusions). La chose à faire dans une telle situation est d'aller examiner quelques publications récentes des auteurs, pour jauger leur niveau de crédibilité. Aller chercher sur GoogleScholar quelques articles récents par Blocken et son équipe. Jugeriez-vous les auteurs compétents dans le sujet de leur prépublication ?

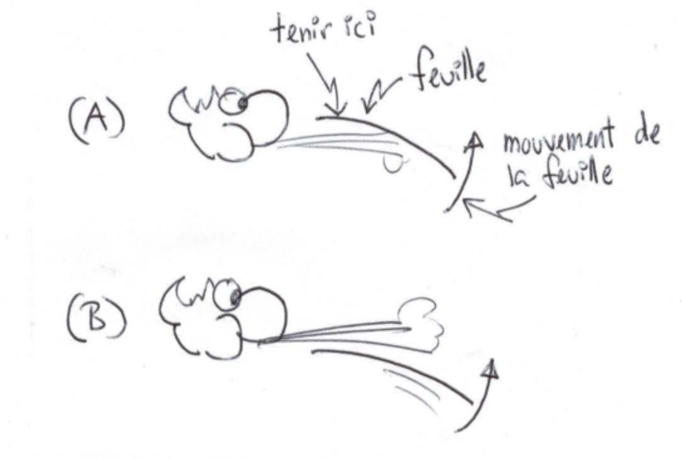

Figure 1: Le tracé de la feuille correspond ici à son coté long. Soufflez à débit le plus constant possible (Question 7, voir texte).

Question 7 [10 points; Mesdames-zé-Messieurs, direction pas nécessairement la cuisine...]

Les observations de “petits événements” de tous les jours offrent une multitude d’exemples d’hydrodynamique amusante.

Pour cette petite expérience d’hydro-à-la-maison, vous aurez besoin d’une feuille de papier de format standard, genre $8\frac{1}{2} \times 11$ (ou A4), pas trop mince ; coupez-la en deux et utilisez une moitié pour la suite. Si vous la tenez votre demie-feuille horizontalement près des coins à une extrémité, elle ne devrait pas complètement plier vers le bas à 90 degrés.

Tenez la (demie-)feuille entre les doigts, de chaque coté près d’un de ses cotés court, et horizontalement par rapport au sol. Le reste de la feuille devrait courber vers le bas. Soufflez à débit constant sous la feuille (voir Figure 1A). La partie courbée de la feuille devrait remonter vers une position plus horizontale, ce qui n’est guère surprenant, intuitivement. Ça se visualise bien si vous vous placez de coté par rapport à un grand miroir.

Maintenant soufflez le long de la surface *supérieure* de la feuille (Figure 1B). La feuille devrait une fois de plus se redresser vers l’horizontale, ce qui, intuitivement, est passablement plus surprenant. Il s’agit de m’expliquer ça à partir des notions d’hydrodynamique vues en cours. Calculs formels non-requis (ce serait complexe!), allez-y avec des petits dessins et/ou des ordres de grandeurs.

Le Professeur:

Le Répondant:

La Directrice: