PHY 3140
HYDRODYNAMIQUE
EXAMEN FINAL

Professeur: Paul Charbonneau
Date de l'examen: 15 avril au 18 avril 2011
Durée de l'examen: 48+ heures

Examen à livre ouvert, toutes ressources permises, sauf ressources humaines autres que votre propre personne personnelle (et méfiez-vous toujours de ce que vous trouvez sur l'internet!). En apposant votre signature ci-dessous, vous indiquez que vous avez lu et compris ces directives, et que vous vous engagez à en respecter à la fois l'esprit et la lettre. Remettez-moi la première page de ce questionnaire signé ici avec vos solutions.

Votre signature:

L'examen doit m'être remis au B-418, Pavillon Roger Gaudry, le lundi 18 avril entre 09:00 et 10:00. Il peut également être glissé sous ma porte plus tôt si vous le préférez. Bonne Chance! (...même si, à ce stade, ce n'est plus vraiment une question de chance...)

Question 1 [15 points; Problème 18, texto+petit extra]

On immerge dans un fluide immobile, incompressible, et de diffusivité thermique κ_1 une sphère métallique de rayon R et de diffusivité thermique κ_2. Un gradient de température ∇T (vertical, disons) est maintenu dans le fluide loin de la sphère.

(a) Calculez la distribution de température stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) qui s'établit éventuellement dans la sphère et le fluide.
(b) Obtenez un estimé du temps caractéristique requis pour atteindre cet état stationnaire, si la sphère est à température constante au moment de l'immersion initiale.

Question 2 [20 points; Problème 36, texto+option]

Nous avons vu en classe que l'écoulement stationnaire associé à une ligne (droite) de vorticité pouvait s'exprimer comme

$$\mathbf{u} = \frac{\Gamma}{2\pi s}\hat{\mathbf{e}}_\phi \ ,$$

où la circulation Γ est une mesure de l'intensité de la ligne de vorticité. Le but de ce problème est de vous faire calculer une solution pour l'écoulement non-stationnaire produit quand on "retire" (à $t = 0$) la ligne de vorticité du fluide ambiant (visqueux et incompressible). En d'autres mots, les conditions initiale et limites du problème sont, en coordonnées cylindriques $[s, \phi, z]$:

$$u_\phi(s, t = 0) = \frac{\Gamma}{2\pi s} \ ,$$

$$u_\phi(s=0,t)=0\ ,$$

$$\lim_{s\to\infty} u_\phi(s,t)=\frac{\Gamma}{2\pi s}\ .$$

(a) Obtenez la (les) équation(s) gouvernant l'évolution subséquente du fluide, après retrait de la ligne de vorticité à $t=0$.

(b) Utilisez la circulation Γ pour définir une nouvelle variable dépendante (u^* disons) pour la vitesse u_ϕ; cherchez maintenant une nouvelle variable indépendante η (qui peut être fonction des variables spatiales et temporelles) telle que votre équation maitresse en (a) accepte une solution autosimilaire de la forme

$$u^*=F(\eta)$$

(c) Déduisez-en l'équation différentielle que doit satisfaire $F(\eta)$, ainsi que les conditions limites correspondantes

(d) Solutionnez l'équation en (c), réexprimez le résultat en termes des variables dimensionnelles de départ, et portez en graphique le profil de $u_\phi(s)$ pour différents $t>0$

(e) Interprétez l'évolution spatiotemporelle des profils $u_\phi(s,t)$ en terme de diffusion visqueuse.

OPTION: plutôt qu'une solution analytique par variable autosimilaire, obtenez une solution numérique (différences finies, etc.). Attention, faites-moi ça proprement: adimensionalisation, formulation des conditions limites, vérification des erreurs de discrétisations, etc. SVP inclure vos code sources, bien commentés pour que je puisse m'y retrouver s'il me prend l'envie de vérifier vos calculs.

Question 3 [10 points; Problème 39, texto]

Soit la solution pour la couche limite d'Ekman obtenue au chapitre 7 (stationnaire, incompressible, etc.). Calculez la direction moyenne et la grandeur du flux de masse total associé à l'écoulement dans la couche limite, en fonction de la vitesse u_0 imposée par le vent en surface.

Question 4 [15 points; Problème 40, texto]

Reprenez le développement mathématique de la §10.2, cette fois avec une condition limite correspondant à un océan de profondeur finie, soit

$$u_z\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0\ ,\qquad z=-h\ .$$

(a) Vérifiez ainsi que la relation de dispersion prend maintenant la forme

$$\omega^2=gk\tanh(kh)\ .$$

(b) Démontrez que dans le régime de l'eau peu profonde ($kh\ll 1$), les trajectoires des éléments de fluide décrites lors du passage de la vague ont la forme d'ellipses très allongées dans la direction-x.

Question 5 [20 points; Problème 49, texto]

Nous nous sommes surtout concentré au chapitre 14 sur les propriétés des équations de Lorentz dans le régime chaotique. Le but de ce problème est de vous faire explorer la forme que prend la transition au chaos dans ce système d'équations. Pour ce faire vous devrez intégrer les équations de Lorenz numériquement selon la méthode décrite en classe, ou encore utiliser Maple, Mathematica, etc. Dans un cas comme dans l'autre, incluez des copies de vos routines numériques et/ou sessions Maple/Mathematica. Attention de ne pas prendre un pas de temps trop grand (imprécis) ou trop petit (sujet à accumulation des erreurs de troncations); quelquechose du genre $\Delta t = 0.01$ devrait être adéquat (dépendant de l'algorithme utilisé).

(a) Construisez une séquence de solutions ayant $P = 20$ et r croissant de 10 jusqu'à 20. Calculez chaque solution sur une période couvrant quelques centaines d'unités de temps adimensionnel.
(b) Pour chaque valeur de r, extrayez la valeur maximale des pics successifs dans la séquence temporelle pour la variable Z; pour chaque valeur de r, vous avez maintenant une liste de $N(r)$ valeurs de Z, une pour chacune des N pics dans votre séquence temporelle pour une valeur de r donnée.
(c) Portez en graphique ces valeurs en fonction de r; c.-à-d., faites un graphique ou r est l'abcisse et Z l'ordonnée; pour chaque valeur de r, vous aurez N valeurs à ainsi porter en graphique, chacune comme un point individuel (ne reliez pas les points entre eux avec un trait!). Le diagramme résultant s'appelle **diagramme de bifurcation**,
(d) Identifiez sur votre diagramme de bifurcation (i) le régime chaotique; (ii) le régime unipériodique; (iii) le régime multipériodique. Combien de type de transition au chaos observez vous ici, quand r augmente ou diminue?

Incluez-moi des copies de vos codes sources, bien commentés, etc. Je devrais pouvoir m'y retrouver s'il me prend l'envie de reproduire vos calculs...

Question 6 [15 points; enfin du nouveau...]

Un fluide visqueux et incompressible est contenu entre deux très grandes plaques parallèles séparées d'une distance h. La plaque du fond est au repos, et elle du haut tourne autour d'un axe vertical perpendiculaire aux plaques, à vitesse angulaire Ω.

Le fluide étant visqueux, on peut s'attendre à ce que le mouvement de rotation de la plaque supérieure se transmette au fluide; et qu'après une phase transitoire, on pourrait possiblement produire un écoulement stationnaire de la forme

$$\mathbf{u} = u_\phi(s, z)\hat{\mathbf{e}}_\phi \ ,$$

exprimé ici en coordonnées cylindriques (s, ϕ, z), avec $\hat{\mathbf{e}}_z$ coincidant avec l'axe de rotation de la plaque supérieure.

(a) Démontrez que dans la situation considérée ici, l'écoulement ci-dessus n'est *pas* une solution physiquement acceptable.
(b) Sans calculer une solution complète formelle, démontrez que votre résultat en (a) implique la présence d'un écoulement secondaire ayant des composantes dans les directions $\hat{\mathbf{e}}_s$ et $\hat{\mathbf{e}}_z$.
(c) Tracez à main levée les lignes d'écoulement de cet écoulement secondaire dans les environs de l'axe de rotation du système. Justifiez physiquement votre dessin (une demie page max).

(d) Toujours sans calculer une solution formelle, obtenez un *estimé* de la grandeur caractéristique de cet écoulement secondaire, en fonction des paramètres du problème (e.g., vitesse angulaire de la plaque supérieure, viscosité du fluide, etc.)

Question 7 [15 points; Messieurs/dames, direction le parc le plus proche...]

Les observations de "petits événements" de tous les jours offrent une multitude d'exemples d'hydrodynamique amusante.

Allez vous aérer la cervelle au parc municipal le plus près de chez vous, en n'oubliant pas de vous prendre un petit sac refermable. Trouvez le carré de sable obligatoire, et ramassez vous environ 2 tasses (500 ml) de sable. Prenez soin d'enlever le bouts de cigarettes, les crottes de chiens, les bouchons de bière, et toutes autres cochonneries diverses. L'expérience marche mieux (et pue moins) avec du sable propre.

De retour à la maison, prenez un verre en plastique mou. Remplissez le verre de sable jusqu'à 2 cm du bord environ. Versez ensuite lentement de l'eau dans le verre, tout en brassant légèrement le sable de manière a briser tous les "mottons" pouvant s'être formés. Une fois le tout bien mélangé, le niveau d'eau devrait tout juste effleurer le haut de la couche de sable. L'expérience peut maintenant commencer.

Prenez le verre en main, fixez vigoureusement des yeux le haut de la couche de sable, et serrez les doigts de manière à écraser les cotés du verre, MAIS SANS LE BRISER. Observez ce qui se produit. Vous devriez observer que le sable s'assèche, en d'autres mots que le niveau d'eau *baisse*. Laissez le verre reprendre sa forme initiale, et vous verrez l'eau remonter à son niveau initial.

L'eau est un fluide à toutes fins pratiques incompressible. Un grain de sable, c'est un solide encore plus incompressible. Pourtant, dans un mélange d'eau et de grains de sable, une compression du récipient (diminution du volume total) cause une baisse du niveau d'eau.

Comment expliquez vous ceci?

Le Professeur:

Le Répondant:

Le Directeur: