PHY 3140
HYDRODYNAMIQUE
PROBLÈMES: SÉRIE 2

Distribué le: 8 février 2023
Chapitres couverts: 5 et 6

Problème 21

Une tige métallique de longueur L et isolée sur toute sa longueur est constituée d'un matériau de diffusivité thermique κ sur sa première moitié ($0 \leq x \leq L/2$, disons), et d'un matériau différent, de diffusivité thermique 3κ, sur la seconde moitié. La température à $x = 0$ est maintenue à T_1, et à T_2 ($> T_1$) à $x = L$. Calculez le profil d'équilibre $T(x)$ le long de la tige, en fonction de κ, L, T_1 et T_2.

Problème 22

On immerge dans un fluide immobile, incompressible, et de diffusivité thermique κ_1 une sphère métallique de rayon R et de diffusivité thermique κ_2. Un gradient de température vertical est maintenu dans le fluide loin de la sphère (e.g., le fluide est contenu entre deux très grandes plaques horizontales maintenues à des températures fixes mais différentes). Calculez la distribution de température stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) qui s'établit éventuellement dans la sphère et le fluide.

Problème 23

Nous avons vu en classe que la contrainte d'isotropie permettait de réduire énormément le nombre de coefficients numériques impliqués dans la relation tensorielle linéaire entre le tenseur des stress visqueux τ_{ij} et le tenseur des déformations D_{ij}. Démontrez que dans le cadre d'une rotation de $\pi/2$ par rapport à l'axe z, il est possible de passer de

$$\begin{matrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{matrix}$$

à:

$$\begin{matrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{matrix}$$

Il sera utile de ne pas paniquer... et de commencer par établir les éléments de la matrice de rotation...

Problème 24

(Suite du précédent) Démontrez maintenant que la contrainte d'isotropie dans le cadre d'une rotation de $\pi/4$ par rapport à l'axe des z impose la relation:

$$C_{11} = C_{44} + C_{12}$$

Commencez par vous faire un petit dessin des axes originaux et après rotation, afin de pouvoir calculer correctement les éléments de la matrice de rotation, et attention aux signes "$-$" dans le calcul des cosinus...

Problème 25

Un fluide incompressible et visqueux s'écoule sous l'influence de la gravité entre deux très grandes plaques parallèles immobiles, orientés verticalement et séparées par une distance d beaucoup plus petite que leur taille. Calculez la forme de l'écoulement en régime stationnaire ($\partial/\partial t = 0$). Comment caractériseriez-vous la dynamique de l'écoulement en une phrase?

Problème 26

Une mince couche de fluide incompressible et visqueux s'écoule sur un plan incliné à un angle α par rapport à l'horizontale. Calculez la forme de l'écoulement dans la couche de fluide.

Problème 27

Variation sur le même thème: cette fois-ci ce sont **deux** minces couches superposées de fluides incompressibles et visqueux, de densités égales mais de viscosités cinétiques ν_1 et ν_2 différentes, qui s'écoulent en régime stationnaire sous l'influence de la gravité le long du plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. La couche de fluide adjacente au plan est d'épaisseur h_1, et celle par dessus d'épaisseur h_2.

(a) Écrivez et justifiez physiquement les conditions limites sur $\mathbf{u}$ qui doivent être satisfaites (i) à la surface du plan; (ii) à l'interface entre les deux couches de fluide; (iii) à l'interface avec l'air.
(b) Calculez le profil de vitesse de l'écoulement dans les deux couches de fluide.
(c) En dépit de votre réponse en (a), vous devriez avoir trouvé en (b) que le profil de l'écoulement de la couche inférieure de dépend pas de la viscosité du fluide dans la couche supérieure; comment expliquez vous ceci physiquement?

Problème 28

Un fluide très, très visqueux remplit l'espace entre deux cylindres concentriques de rayons a et b ($> a$) respectivement, tous deux de longueur L beaucoup, beaucoup plus grande que ces rayons. Le cylindre intérieur se déplace à une vitesse u_0 le long de son axe de symétrie, tandis que le cylindre extérieur est fixe. Calculez la forme de l'écoulement du fluide qui résulte de ce déplacement du cylindre intérieur, en régime stationnaire ($\partial/\partial t = 0$).

Problème 29

Un fluide incompressible et visqueux remplit l'espace entre deux longs et désormais familiers cylindres co-axiaux de rayons a et b ($> a$). Le cylindre extérieur est fixe, mais le cylindre intérieur tourne autour de son axe de symétrie à une vitesse angulaire ω_a. Calculez la forme de l'écoulement du fluide qui résulte de ce déplacement du cylindre extérieur, en régime stationnaire ($\partial/\partial t = 0$).

Problème 30

Une plaque infinie est positionnée dans le plan xy, et délimite un volume semi-infini $z > 0$ contenant un fluide incompressible de densité ρ et viscosité dynamique μ. À $t = 0$ la plaque est accélérée impulsivement dans la direction $\hat{\mathbf{x}}$ à une vitesse constante u_0.

(1) Calculez le champ de vitesse généré dans le fluide, en fonction des coordonnées spatiales et du temps (solution analytique ou numérique).
(2) Quelle est la forme asymptotique ($t \to \infty$) de ce champ de vitesse?

Problème 31

Une grosse éruption volcanique peut injecter dans la basse stratosphère des milliard de tonnes de particules fines (diamètre $\sim \mu$m). Ces particules dispersent, réfléchissent et/ou absorbent la radiation solaire incidente, tout en n'affectant pas (ou très peu) le passage de la radiation infrarouge émise par la troposphère vers l'espace. Elles peuvent aussi servir de sites de nucléation pour la vapeur d'eau, et donc favoriser la formation de nuages en hautes altitudes, ce qui augmentent l'albédo de l'atmosphère. L'effet net est une réduction de l'irradiance solaire au sol, et donc une baisse de la température troposphérique, qui peut perdurer tant que ces particules ne se sont pas déposées au sol sous l'influence de la gravité. C'est ainsi que l'éruption du Krakatoa en 1883, qu'on estime avoir injecté $\sim 10^{12}$ kg de particules fines dans la stratosphère, a produit une baisse de 1–2° C de la température terrestre moyenne, ayant perduré quelques années. Le but de ce problème est de vous faire quantifier ce "quelques"!

(a) Partant de la force de trainée calculée pour la solution de Stokes, montrez qu'une particule de rayon a et densité $\rho = 2000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ chutant dans l'atmosphère (densité de l'air $\rho_a = 1\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, viscosité cinématique $\nu = 10^{-5}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$) atteindra une vitesse constante de chute V donnée par
$$V \simeq \frac{2ga^2}{9\nu}\left(\frac{\rho}{\rho_a}\right) .$$
C'est la **vitesse de sédimentation**. Justifiez bien votre raisonnement, et vos approximations, s'il y a lieu.
(b) Estimez le nombre de Reynolds associé à ce mouvement, en fonction de a. La contrainte Re$\ll 1$, essentielle à la solution de Stokes, impose quelle contrainte quant à la taille des particules pouvant être modélisées ainsi ?

(c) La structure verticale de la stratosphère est telle que les vents y sont prédominamment horizontaux; calculez le temps pris par une particule de rayon a pour chuter d'une altitude de 20 km à 8 km (le haut de la troposphère). Évaluez ce temps pour des particules de rayons 1, 3 et 10 μm.

(e) Il existe une limite inférieure à la taille des particules sous laquelle notre modèle va flancher, et cela n'a rien à voir avec la contrainte calculée en (b). Essayez de me l'identifier.

(f) Comme on l'a vu au chapitre 4, la densité et la température de l'atmosphère décroissent avec l'altitude; les valeurs de densité et viscosité introduites en (a) caractérisent la basse troposphère. Estimez l'erreur que pourrait causer ces décroissances sur vos temps de chute calculés en (c).

En guise de conclusion à tout ceci, sachez que certains huluberlus ont suggéré de disperser délibérément dans la basse stratosphère des particules fines, de manière à augmenter l'albédo effectif de la Terre, comme le font les cendres volcaniques, afin de contrer le réchauffement global dû à l'augmentation du CO_2 atmosphérique produite par le brûlage des combustibles d'origine fossile. Une bonne compréhension des sources d'erreurs et limites d'un modèle simple, comme celui développé dans le cadre de ce problème, est essentielle pour apprécier la faisabilité —et les dangers— de ce genre d'ingénierie climatique !

Problème 32

Vous avez déjà certainement remarqué comment il peut être difficile de décoller l'une de l'autre deux plaques entre lesquelles est prise en sandwich une mince couche de fluide. Ce problème vise à vous faire calculer la grandeur de cette force de suction. On considera la variation suivante: un disque circulaire de rayon a est posé à plat sur un plan, et est séparé de ce dernier par une mince couche de fluide, incompressible et visqueux, d'épaisseur h. Une force F tire le disque vers le haut, causant une augmentation de l'épaisseur de la couche fluide; on a donc $h \to h(t)$ et $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t > 0$.

Travaillant en coordonnées cylindriques (s, ϕ, z), on supposera que F induit un écoulement axisymétrique dans la couche de fluide, i.e., de la forme:

$$\mathbf{u} = u_s(s, z, t)\hat{\mathbf{e}}_s + u_z(s, z, t)\hat{\mathbf{e}}_z$$

Si la couche est très mince, on peut montrer que la pression p ne dépend pas de z, que le terme $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ peut être négligé face à la force visqueuse, et que cette dernière peut s'approximer par:

$$\nu \nabla^2 \mathbf{u} \simeq \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2}$$

On peut aussi supposer que la nonstationarité est dominée par le mouvement du disque, et donc on peut poser $\partial \mathbf{u}/\partial t = 0$ dans les équations de Navier-Stokes. Prenant tout ceci pour acquis, la procédure à suivre est:

(a) Intégrez la composante s des équations de Navier-Stokes;

(b) Substituez votre résultat pour u_s dans l'équation de la conservation de la masse

(c) Intégrez l'expression obtenue en (b) pour obtenir une relation entre u_z et et gradient radial de pression (attention aux singularités a $s = 0$!).

(d) Évaluez u_z à $z = h(t)$, et produisez ainsi une équation différentielle ordinaire pour p en fonction de $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t$.

(e) Intégrez cette expression pour obtenir $p(s)$, en réfléchissant bien aux conditions limites.

(f) Déduisez de votre résultat en (e) la force exercée par le fluide sur le disque; montrez que cette force est très grande quand h est très petit.

(g) Quelle est la force requise pour soulever un disque de 15cm de diamètre à une vitesse de 0.02 mm par seconde, si la couche de fluide est de l'eau, et d'épaisseur initiale 0.02 mm? Quel masse (en kg) devriez-vous suspendre à une poulie simple pour produire une telle force?

Problème 33

Ce problème vise à vous faire explorer le mécanisme de **lubrification**. On considère un cube d'arête $d = 1\,\mathrm{m}$ de masse $10^3\,\mathrm{kg}$, dont une face repose sur une surface plane horizontale, avec une très mince (épaisseur $= 1\,\mathrm{mm}$) couche d'huile (fluide incompressible de densité $\rho = 800\,\mathrm{kg\ m^{-3}}$ et viscosité cinématique $\nu = 10^{-4}\ \mathrm{m^2\,s^{-1}}$) séparant le cube de la plaque.

(a) Calculez la forme de l'écoulement induit dans la couche d'huile par un déplacement horizontal du bloc à vitesse constante v. Vous pouvez négliger les effets de bords, autrement dit vous pouvez supposer que l'écoulement dans la couche d'huile est purement horizontal.

(b) Calculez maintenant le stress visqueux à la base du bloc.

(c) Calculez la force horizontale (en Newton) devant être appliquée sur le bloc pour qu'il se déplace (horizontalement) à une vitesse constante $v = 1\,\mathrm{m\ s^{-1}}$; et aussi pour $v = 1\,\mathrm{m\ s^{-1}}$;

(d) Votre résultat en (c) semble suggérer que $\mathbf{F} \propto \mathbf{v}$ plutôt que notre bon vieux $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Expliquez en quelques lignes ce paradoxe (apparent).

Problème 34

Recalculez la solution de Blasius en suivant la procédure numérique introduite à la §6.10 des notes de cours. Ensuite, calculez la force de trainée (en Newton) exercée par l'eau ($\nu = 10^{-6}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$) s'écoulant à vitesse $u_0 = 1\,\mathrm{m\ s^{-1}}$ de chaque coté d'une plaque carrée de taille $L = 1 \times 1\mathrm{m}$, et d'épaisseur $h = 1\mathrm{cm}$. Vous pouvez négliger les effets de bord. Détaillez bien toutes les étapes de votre raisonnement. L'approximation donnée par l'équation (6.151) se compare-t-elle bien à votre résultat ?

Problème 35

Vous n'aurez certainement pas déjà oublié la forme de la fonction d'écoulement pour un écoulement inviscide contenant un point de stagnation contre une surface solide plane:

$$\Psi(x, y) = \Psi_0 xy \ .$$

Le but de ce problème est de vous faire calculer une solution pour une couche limite visqueuse se formant contre le plan horizontal, *raisonnablement loin du point de stagnation*. La procédure générale est la même que celle élaborée en classe pour un écoulement constant le long d'une plaque, sauf que cette fois-ci l'écoulement n'est plus constant le long de la plaque:

$$u_x(x,0) = \Psi_0 x \ .$$

(a) Démontrez que la forme suivante est raisonnable pour une fonction d'écoulement ψ décrivant l'écoulement *dans la couche limite* :

$$\psi(x,y) = K\Psi_0 x \times f(y/\Delta)$$

(b) Démontrez qu'on peut raisonnablement poser $K = \Delta = \sqrt{\nu/\Psi_0}$ loin du point de stagnation.

(c) Démontrez que l'équation différentielle pour f prend la forme:

$$f''' + ff'' - (f')^2 = -1 \ .$$

(d) Obtenez les conditions limites que doit satisfaire l'équation différentielle en (c)

(e) Utilisez les formules de différences finies (annexe E) pour obtenir une expression du genre

$$f_{k+3} = g(f_{k+2}, f_{k+1}, f_k) \ , \qquad g \to \text{fonction quelconque} \ .$$

(f) Utilisez le résultat en (e) pour obtenir une solution numérique itérative pour $f(y/\Delta)$, ou tentez de solutionner ca sur Mathematica, Maple, ou ce que vous voulez... Faites le problème précédent avant de vous lancer dans celui-ci, ça aidera beaucoup!
