

**PHY 3140**  
**HYDRODYNAMIQUE**  
**PROBLÈMES: SÉRIE 1**

**Distribué le:** 16 septembre 2024

**Chapitres couverts:** 2, 3, 4

---

**Problème 1**

Calculez la force requise pour “détacher” les deux hémisphères des coquilles de von Guericke (voir Fig. 2.1 des Notes de cours), sachant que leur rayon était d’environ 35 centimètres. Aux fins de cet exercice, vous pouvez supposer que la pompe de von Guericke pouvait réduire la pression intérieure à 1 kPa. Détaillez bien toutes les étapes de votre raisonnement et de vos calculs.

---

**Problème 2**

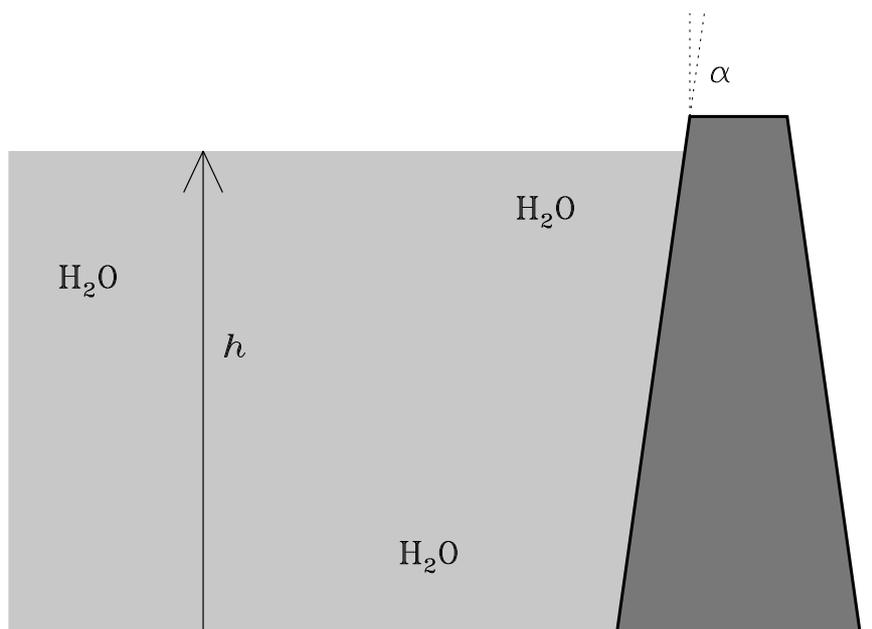
Un très gros cube d’arête  $L = 2$  m et de densité inconnue  $\rho$  est déposé à plat dans l’eau (une face parallèle à la surface air-eau), et une fois relâché s’enfonce à mi-hauteur ( $L/2$ ) sous la surface en conservant son orientation (densité de l’eau:  $10^3$  kg m<sup>-3</sup>).

- (a) Calculez la force qu’exerce la pression sur chacune des faces du cube. Expliquez bien vos approximations, le cas échéant.
  - (b) Calculez la densité de la substance dont est constitué le cube. Explicitez bien toutes les étapes de votre raisonnement.
- 

**Problème 3**

Un contenant cylindrique contient un fluide incompressible de densité  $\rho$ . Le contenant et le fluide tournent à vitesse angulaire constante  $\Omega$  autour d’un axe vertical coïncidant avec l’axe du contenant, et la gravité pointe verticalement vers le bas. En d’autres mots, dans un repère en rotation à vitesse angulaire  $\Omega$  le fluide est au repos.

- (a) Suivant le genre de procédure utilisée à la section 2.3 des notes de cours, établissez une forme de l’équation de l’équilibre hydrostatique généralisée pour inclure les effets de la rotation.
  - (b) Utilisez la relation trouvée en (a) pour calculer la forme géométrique de la surface liquide-air. Songez bien aux conditions limites devant être satisfaites, et explicitez toutes les étapes de votre raisonnement.
-



**Figure 1:** Un barrage idéalisé (Problème 4).

#### Problème 4

Un barrage ayant la forme illustrée à la Figure 1 (voir ci-dessus) sert —comme la plupart des barrages— à contenir un réservoir d’eau. Aux fins du calcul on supposera que le niveau d’eau dans le réservoir est donné par  $h$ , et que le réservoir a un fond plat et s’étend sur un kilomètre en amont du barrage. Les parois du barrage sont inclinées d’un angle  $\alpha$  par rapport à la verticale (voir la Figure). Calculez la force exercée sur le barrage par l’eau, en fonction du niveau d’eau  $h$  du réservoir.

#### Problème 5

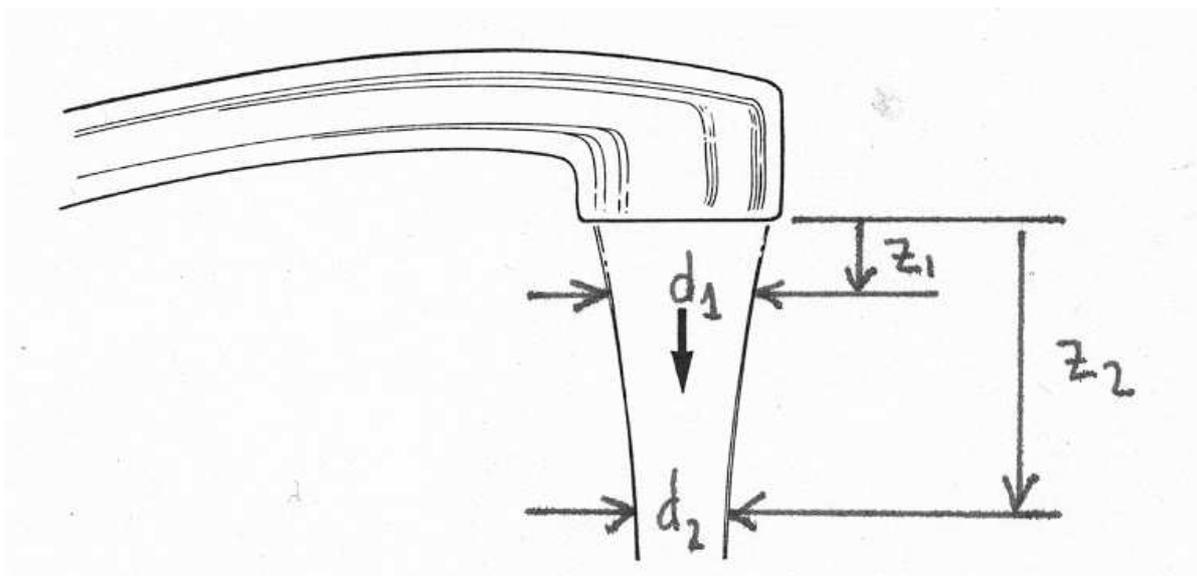
Le but de ce problème est de **démontrer**, dans le contexte d’une situation de la vie de tous les jours, le principe d’Archimède; et donc ce principe ne peut **pas** être invoqué *a priori* pour sa solution!

Un pêcheur bien enveloppé, d’un poids de 100 kg, embarque dans une chaloupe attachée à un quai. La chaloupe a un fond plat de surface totale  $3 \text{ m}^2$ , et le lac a une superficie de  $1 \text{ km}^2$ .

- Calculez l’élévation du niveau du lac qui en résultera.
- De votre résultat en (a), déduisez le principe dit d’Archimède, soit qu’un corps de densité  $\rho$  et volume  $V$  plongé dans un fluide de densité  $\rho_F$  ressent une force donnée par

$$\mathbf{F}_A = (\rho - \rho_F)V\mathbf{g} ,$$

où  $\mathbf{g}$  est l’accélération gravitationnelle.



**Figure 2:** Filet d'eau s'écoulant d'un robinet (Problème 6).

- (c) Notre pêcheur attrape un gigantesque brochet de 10kg, et parvient à le remonter et le balancer dans sa chaloupe. Calculez de combien va changer le niveau du lac suite à cette manoeuvre.

La densité de l'eau:  $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ; et la pression atmosphérique:  $p_A = 101.6 \text{ kPa}$ . Détaillez bien toutes les étapes de votre raisonnement. Petit indice: l'équilibre hydrostatique vous sera utile!

### Problème 6

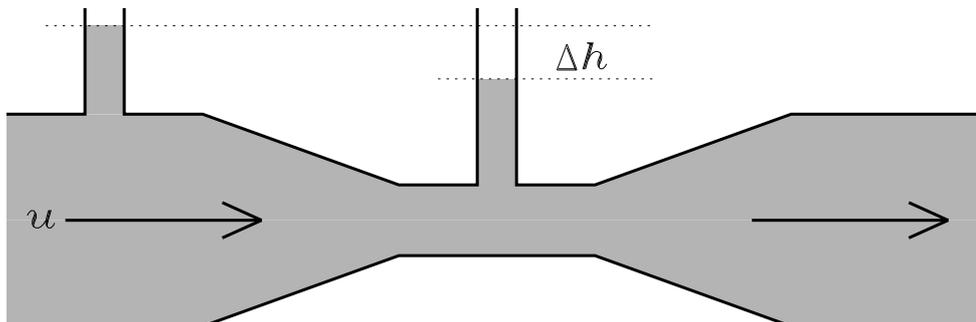
Un filet d'eau s'écoulant d'un robinet a une forme du genre de celle représentée sur la Figure 2. On mesure les diamètres ( $d_1, d_2$ ) du filet d'eau à deux hauteurs différentes ( $z_1, z_2$ ).

- (a) À partir de ces mesures, calculez le débit du robinet ( $\text{litre s}^{-1}$ ) en fonction de  $z_1, z_2$  et  $d_1, d_2$ .  
 (b) Armé d'un chronomètre, il est possible de déterminer l'accélération gravitationnelle à l'aide de ce système; comment?

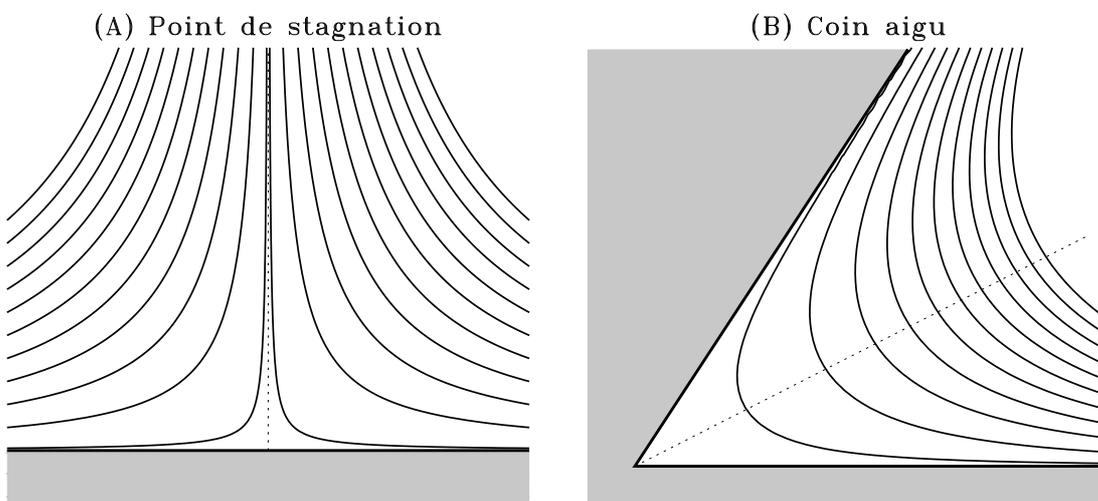
### Problème 7

Le tube de Venturi est un gadget permettant de mesurer la vitesse d'un écoulement dans un tuyau. Le tube Venturien en question est caractérisé par une constriction, où la section du tuyau passe de  $A_1$  (disons) à  $A_2 (< A_1)$ , et comporte deux petits tubes verticaux, ouvert vers le haut, dont un origine de la partie à plus faible section du tube (voir Figure 2). Considérons le cas d'un fluide incompressible et inviscide traversant le tube; à partir des dimensions du tube (sections  $A_1, A_2$ , diamètre des tubes verticaux, etc.), une mesure de la différence  $\Delta h$  dans la hauteur du fluide dans les deux tubes verticaux permet de calculer la vitesse  $u$  du fluide, en terme de quantités connues. Faites-le...

### Tube de Venturi



**Figure 2:** Le tube de Venturi (Problème 7).



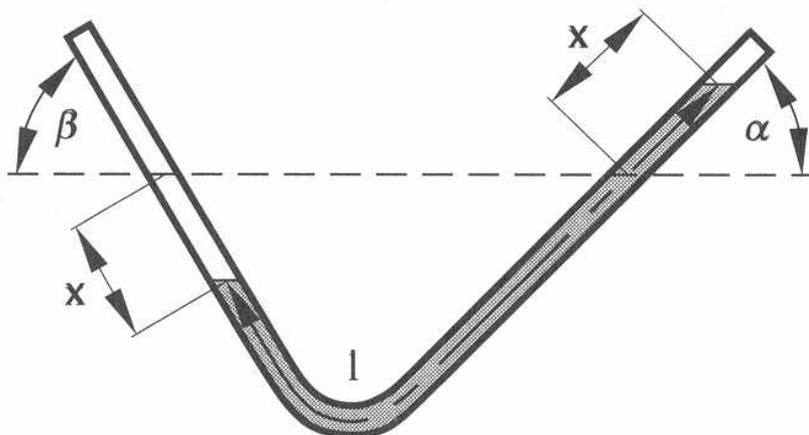
**Figure 3:** Lignes d'écoulement correspondant à deux écoulements potentiels dont vous devez déterminer les formes analytiques du potentiel (Problèmes 8 et 9).

#### Problème 8

Obtenez une expression analytique décrivant la fonction potentielle associée à l'écoulement 2D d'un fluide parfait et incompressible autour d'un point de stagnation (Voir Figure 3A). Vous pouvez supposer comme condition limite que la vitesse verticale sur l'axe  $x = 0$  est fixée à  $-u_0 \hat{e}_y$  à  $y = y_0$  ( $\gg 1$ ). Calculez également la dépendance spatiale de la pression dans le plan de l'écoulement, en supposant que la pression tend vers une valeur constante  $p_0$  à grand  $y$ .

#### Problème 9

Obtenez une expression analytique décrivant la fonction potentielle associée à l'écoulement 2D d'un fluide parfait et incompressible à l'intérieur d'un coin aigu d'ouverture angulaire  $\alpha$  (voir Figure 3B). Calculez la grandeur de la vitesse à l'intérieur du coin aigu (intersection du trait pointillé et du solide en gris).



**Figure 4:** Colonne de fluide incompressible contenue dans un tube plié (problème 12).

### Problème 10

Deux récipients cylindriques sont remplis d'un fluide parfait et incompressible. Le premier contenant a un rayon  $R_1$  et hauteur  $h_1$ , et le second un rayon  $R_2 = R_1/2$  et une hauteur  $h_2 = 4h_1$ ; autrement dit la quantité de fluide dans les deux contenants est la même. On perce un orifice de surface  $a$  au centre de la base de chaque contenant. Déterminez lequel se videra le premier.

### Problème 11

Un entonnoir conique d'ouverture angulaire  $\alpha$  et de section  $A$  à sa partie la plus large est posé à l'envers sur une surface plane. On verse par l'ouverture de l'entonnoir un fluide de densité  $\rho$  jusqu'à ce que la partie conique de l'entonnoir soit remplie. Quel doit être la masse minimale  $M$  de l'entonnoir permettant de contenir le fluide (exprimée en fonction de  $\rho$ ,  $\alpha$ , etc.) ?

### Problème 12

On considère un tube mince plié et ouvert à ses deux extrémités, rempli d'un fluide inviscide et incompressible de densité  $\rho$ , avec la gravité pointant vers le bas (Figure 4).

- Démontrez que pour avoir une situation d'équilibre, le fluide doit arriver à la même hauteur à chaque bout du tube (ligne horizontale en tirets sur la Figure 4), et ce indépendamment des valeurs des angles  $\alpha$  et  $\beta$ .
- On force mécaniquement (e.g., en soufflant) un déplacement du fluide sur une distance  $x$  le long du tube (voir Figure 4), et on relâche le système. Démontrez que la colonne de fluide exécutera une oscillation harmonique, et calculez-en la fréquence.

### Problème 13

Obtenez une solution décrivant un écoulement potentiel d'un fluide autour d'une sphère de rayon  $R$ , où l'écoulement est plan ( $\mathbf{u} = u_0 \hat{\mathbf{e}}_x$ ) à grandes distances de la sphère (comme dans le cas du cylindre considéré dans les notes de cours). Choisissez judicieusement l'orientation de votre système de coordonnées.

### Problème 14

Le but est ici de vous faire obtenir l'équation d'Euler (2.45) pour un fluide parfait en utilisant l'approche "équation de bilan" utilisée dans les notes de cours et en classe pour obtenir l'équation de continuité (2.34) et l'équation de conservation de l'énergie. La quantité équivalente au courant de masse de la section 2.6 est maintenant le courant de quantité de mouvement:

$$\boldsymbol{\pi} = \rho \mathbf{u} \mathbf{u} .$$

Attention, ici  $\boldsymbol{\pi}$  est un tenseur, car au membre de droite il ne s'agit pas ici d'un produit scalaire, mais bien du produit extérieur du vecteur d'écoulement avec lui même. Ceci devient plus clair si on écrit l'expression ci-dessus en notation indicielle:

$$\pi_{ij} = \rho u_i u_j , \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Suivez la procédure de la section (2.5), en structurant votre bilan de la manière suivante; dans un volume Eulérien  $V$  délimité par une surface  $S$ ,

$$\frac{d}{dt}(\rho \mathbf{u} \text{ dans } V) = (\text{flux de } \rho \mathbf{u} \text{ a travers } S) + (\text{forces surfaciques}) + (\text{forces volumiques})$$

Réfléchissez bien à ce qui doit être inclus dans les forces surfaciques et volumiques. Voir l'Annexe B des notes de cours pour une identité utile pour développer la divergence d'un tenseur.

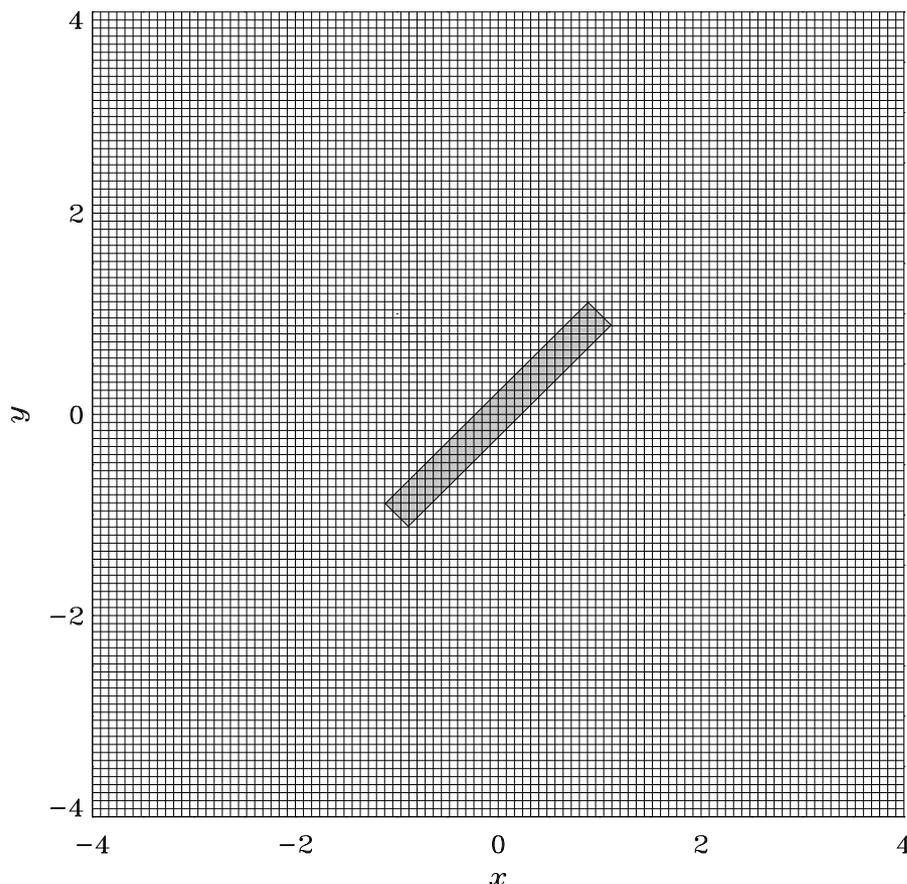
### Problème 15

Considérons l'écoulement 2D d'un fluide parfait et incompressible, défini par les composantes suivantes:

$$\mathbf{u} = A(x\hat{\mathbf{e}}_x - y\hat{\mathbf{e}}_y)$$

où  $A$  est une constante, et la gravité peut encore une fois être négligée. Ceci décrit l'écoulement autour d'un point de stagnation situé à  $(x, y) = (0, 0)$ , limité par la présence d'une plaque plane placée à  $y = 0$ ; ça devrait vous rappeler quelque chose...

- Démontrez que les isobares (surface où la pression est constante) ont la forme de cercles dans le plan  $xy$ , dont le centre coïncide avec le point de stagnation susmentionné.
- Soit un élément de fluide initialement positionné sur l'axe de symétrie, à  $(x, y) = (0, 1)$ ; cet élément de fluide se déplacera donc verticalement vers le bas, le long de l'axe- $y$ , vers le point de stagnation. Calculez le temps requis pour atteindre le point de stagnation.
- Soit maintenant *deux* éléments de fluide initialement situés à  $(x, y) = (\pm\varepsilon, 1)$ , avec  $\varepsilon \ll 1$ . Démontrez que la distance entre ces deux éléments de fluide augmente exponentiellement au cours de leur passage près du point de stagnation.



**Figure 6:** Maillage et géométrie pour le calcul numérique d'un écoulement potentiel autour d'une plaque inclinée (Problème 16). Discrétisation spatiale  $N_x = N_y = 101 \times 101$  ici. L'écoulement est supposé horizontal à très grandes distances de la plaque.

---

### Problème 16

Il s'agit ici de vous faire calculer numériquement la forme d'un écoulement potentiel 2D autour d'une plaque inclinée à 45 degrés par rapport à un écoulement plan à grande distance (voir Figure 6), un peu comme le cas du cylindre traité en classe. Afin de simplifier le traitement de la condition à appliquer au niveau de la plaque, il sera préférable de solutionner le problème en fonction d'une fonction d'écoulement (plutôt qu'un potentiel):

$$\nabla^2 \Psi(x, y) = 0 ,$$

sujet aux conditions limites aux bords gauche ( $x_1$ ), droit ( $x_2$ ) inférieur ( $y_1$ ), et supérieur ( $y_2$ ) du domaine:

$$\Psi(x_1, y) = \Psi(x_2, y) = y , \quad \Psi(x, y_1) = y_1 , \quad \Psi(x, y_2) = y_2 .$$

Comme la périphérie de la plaque doit être une ligne d'écoulement, et en vertu de la symétrie et conditions limites du problème, aux bords de la plaque on doit poser:

$$\Psi(x, y) = 0 , \quad (x, y) \in \text{plaque} .$$

L'idée est d'utiliser l'algorithme de relaxation décrit à l'annexe E.4 afin de solution numériquement l'équation de Laplace ci-dessus, en vertu de ses conditions limites. Seuls les noeuds intérieurs (i.e., excluant les frontières du domaine) sont sujets à ce processus de relaxation. Comme condition initiale au processus de relaxation, utilisez un écoulement purement horizontal, soit:

$$\Psi(x, y) = y .$$

Le “truc” numérique consiste à réinitialiser, à la fin de chaque itération du processus de relaxation, la valeur de  $\Psi$  à tous les points de mailles situés dans la plaque ou sur sa périphérie à une valeur  $\Psi = 0$ , ce qui assurera le maintien de la condition limite aux interfaces plaque-fluide. Autre truc pour visualiser vos résultats: pour un écoulement 2D de ce genre, les lignes d'écoulement correspondent aux contours  $\Psi = \text{constante}$ . Travaillez avec un maillage  $N_x = N_y = 101$  couvrant un domaine  $x \in [-4, 4]$ ,  $y \in [-4, 4]$  et assurez vous bien d'intégrer assez longtemps pour que  $\Psi(x, y)$  ait bien convergé. Pour avoir une idée générale de ce que la solution doit avoir l'air, voir la Figure 3 dans *An Album of Fluid Motion*.

Connaissant  $\Psi(x, y)$  —et donc  $u_x(x, y)$  et  $u_y(x, y)$ , par différences finies centrées (voir annexe E.1), calculez maintenant le profil de pression  $p(x, y)$ . L'écoulement exerce-t-il une force nette sur la plaque? Un moment de force ?

### Problème 17

Il s'agit ici de calculer un modèle de la couronne solaire, que nous considérerons comme un fluide compressible fait d'Hydrogène complètement ionisé, se comportant comme un gaz parfait. Nous supposons de plus que la couronne possède une symétrie sphérique, qu'elle est en état d'équilibre hydrostatique, que la masse du gaz coronal ne contribue pas à la gravité (i.e, on écrit  $\mathbf{g} = -GM_\odot/r^2 \hat{\mathbf{e}}_r$ , où  $M_\odot$  est la masse du soleil), et qu'une relation polytropique existe entre la pression et la densité, soit  $p \propto \rho^\alpha$ , avec  $1 \leq \alpha \leq 5/3$ .

- A partir de l'équation d'Euler incluant la gravité, obtenez une équation différentielle en  $r$  décrivant la variation radiale de la densité;
- Intégrez l'ODE obtenue en (a) et obtenez des expressions analytiques décrivant les profils  $p(r)/p_0$ ,  $T(r)/T_0$  et  $\rho(r)/\rho_0$ , où les quantités affublées d'un indice “0” représentent des valeurs (connues) à la base de la couronne.
- Tracez un graphique de  $p(r)/p_0$  en fonction de  $r$ , pour des valeurs de  $\alpha = 1.05, 1.1, 1.15, 1.2$ , et 1.5. Que concluez-vous de ces résultats?
- Sachant que la base de la couronne solaire est à une température de  $T_0 = 1.5 \times 10^6$  K et densité  $\rho_0 = 10^{-19}$  kg cm<sup>-3</sup>, et que la masse et le rayon du soleil sont de  $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$  kg et  $R_\odot = 6.96 \times 10^8$  m, calculez la pression asymptotique ( $r \rightarrow \infty$ ) en fonction de  $\alpha$ . Sachant que la pression du milieu interstellaire est de  $p_\infty \sim 10^{-13}$  Pa, et que le profil de température de la couronne semble le mieux reproduit avec  $\alpha = 1.1$ , qu'en concluez-vous quant à l'équilibre hydrostatique de la couronne solaire?

### Problème 18

Considérons un tube de Pitot, utilisé pour mesurer les vitesses d'écoulement d'un fluide *compressible*. En supposant un écoulement subsonique et adiabatique, obtenez une relation entre la

vitesse de l'écoulement et la pression mesurée dans le tube. Il serait judicieux de suivre la logique générale utilisée au cours dans le cadre de l'étude du tube de Pitot pour un fluide incompressible...

---

### Problème 19

Démontrez que la vitesse maximale d'éjection des gaz dans une tuyère de Laval est  $\sqrt{3}c_s$ , et ce indépendamment de la forme de la tuyère.

---

### Problème 20

Ce problème vise à vous faire explorer la structure verticale de l'atmosphère terrestre.

- (a) Complétez les étapes mathématiques manquantes pour passer de l'équation (4.70) à (4.74) dans les Notes de cours.
  - (b) Calculez  $p/p_0$  pour les modèles d'atmosphère isotherme et adiabatique à l'altitude du Puy du Dôme (1465 m).
  - (c) Il s'agit maintenant de comparer le profil de l'atmosphère adiabatique à celui observé. Partez en exploration sur la toile et trouvez vous les données numériques de l'atmosphère dite standard. Ensuite, ajustez la valeur de l'indice adiabatique  $\gamma$  (dans l'intervalle  $1 \leq \gamma \leq 5/3$ ) de manière à produire le meilleur ajustement aux données dans la troposphère (altitude  $\leq 10$  km). Comment pensez vous pouvoir expliquer les différences résiduelles entre meilleur modèle et les données ?
  - (d) Sous un nuage cumulus, un vent vertical de quelques dizaines de mètres par seconde peut être produit. Estimez le niveau de perturbation de l'équilibre hydrostatique produit par un tel déplacement d'air. Vous pouvez considérer que la base du cumulus est à une altitude de 1000 m.
-