

PHY 3070
RELATIVITÉ 2
EXAMEN FINAL

Professeur: Paul Charbonneau

Date de l'examen: 15 au 17 avril 2023

Durée de l'examen: 48+ heures

Examen à livre ouvert, toutes ressources permises, sauf ressources humaines autre que votre propre personne personnelle (et méfiez-vous particulièrement de ce que vous trouvez sur l'internet, en encore plus particulièrement quand ça traite de cosmologie ou de trous noirs!). En apposant votre signature ci-dessous, vous vous engagez sur l'honneur à respecter à la fois l'esprit et la lettre de cette directive. Remettez-moi un scan de la première page de ce questionnaire signé ici avec vos solutions.

Votre signature:

L'examen doit m'être remis en version pdf par courriel le lundi 17 avril avant midi (12:00). Il peut évidemment m'être remis plus tôt si vous le préférez.

Un examen de 48 heures allège grandement la pression temporelle associée à un examen classique. Par conséquent, je m'attends à des copies d'examen écrites de manière lisible, au propre, et détaillant posément la logique suivie, les approximations utilisées, etc. **Scans lisibles SVP !**

Bonne Chance! (...même si ce n'est pas vraiment une question de chance...)

Question 1 [20 points; Problème 21 ou 27, verbatim]

On commence par un problème au choix! Soit le 21 (calcul de l'avance du périhélie), soit 27 (déviations maximale d'un faisceau lumineux), dans les deux cas dans le contexte de la métrique de Schwarzschild.

Question 2 [15 points; problème 25, verbatim]

Un.e astronaute dans la navette spatiale, qu'on supposera sur une orbite circulaire d'altitude 320km, (rayon équatorial de la Terre: $R_{\oplus} = 6380$ km) positionne deux balles de ping-pong séparées d'une distance $\xi = 20$ cm dans la direction radiale, au repos dans le repère de la navette. Combien d'orbites de la navette autour de la Terre s'écouleront avant que l'astronaute observe une variation de la distance de 1 cm ?

Ce problème est discuté dans Hartle du point de vue de la mécanique Newtonienne; approchez-le ici du point de vue de la déviation géodésique.

Question 3 [15 points; problème 29, verbatim]

Utilisez le code Python de la Figure 4.5, tel que modifié au TP5 (ou tout autre équivalent de votre cru) pour traiter les orbites de photons. Travaillant dans le plan équatorial de la métrique

de Schwarzschild, calculez des orbites de photons lancés dans la direction azimutale (ϕ) à partir de distances $r/M = 2.8, 2.9, 2.99, 3.01, 3.1$ et 3.2 (attention, on est en unités géométriques ici).

Sur la base de vos résultats, quelle serait le diamètre apparent du “disque noir” que produirait un trou noir en avant plan d’un arrière plan lumineux ? Comment ceci se compare-t-il au rayon de Schwarzschild ? Y a-t-il paradoxe ici ?

Question 5 [15 points; problème 43, verbatim]

On considère une séquence de modèles cosmologiques pour des Univers plats ($k = 0$) sans radiation et à la densité critique ($\Omega_R = 0, \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1.0$).

- Calculez une séquence de modèles avec Ω_Λ allant de zéro à 1 (tout en respectant $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$), coïncidant tous à $(t, a) = (1, 1)$, un peu comme sur la Figure 7.11 des Notes de cours.
- Portez en graphique l’âge de l’Univers (en milliard d’années) versus Ω_Λ ;
- Allez chercher sur l’internet (ou ailleurs) l’âge de la plus vieille étoile connue;
- Quelle contrainte vos résultats en (a)–(c) posent-ils sur la magnitude de la constante cosmologique (en unités physiques SVP!) si l’Univers est bel et bien plat ? Selon vous, quelles sont les principales sources d’incertitude dans un tel calcul ?

Question 5 [20 points; enfin du nouveau!]

Ce problème vise à vous faire explorer le mécanisme de formation présumément le plus commun pour un trou noir de masse stellaire. Plus précisément, je vous guide dans la construction d’un modèle (simplifié) de structure interne d’une étoile (très) massive basé sur la relativité générale.

Il sera payant de commencer par repasser attentivement sur la Section 8.1 des notes de cours. L’approche suivie ici est essentiellement identique, sauf qu’on introduit des profils de densité $\rho(r)$ et de pression $p(r)$ à l’intérieur de notre “étoile” de rayon R . La symétrie sphérique demeure, donc les équations (8.8)–(8.10) dans les notes de cours tiennent toujours la route; pas besoin de recalculer les composantes du tenseur d’Einstein, yé !

L’introduction de deux nouvelles fonctions $\rho(r)$ et $p(r)$ indique qu’on aura besoin de deux équations supplémentaire pour définir le modèle. La première, introduite en (e) ci-dessous, sera une équation d’état particulièrement simple: densité constante. Pour la seconde, on pourrait utiliser la composante $\theta\theta$ des équations du champ de tonton Albert, mais il s’avère plus pratique d’utiliser notre contrainte de conservation de l’énergie-impulsion:

$$\frac{DT^{\mu\nu}}{Dx^\nu} = 0 \quad (5.1)$$

(revoir Section 5.2.5 des notes de cours, au besoin).

- Montrez que pour une situation statique (la distribution de masse ne varie pas avec le temps), et une métrique à symétrie sphérique de la forme générale donnée par l’éq. (8.8) des notes de cours, la contrainte de normalisation de la quadrivitesse impose:

$$u_\mu = (e^\Phi, 0, 0, 0)$$

et que les composantes de $T^{\mu\nu}$ sont:

$$T_{tt} = e^{2\Phi} \rho(r), \quad T_{rr} = e^{2\Lambda} p(r), \quad T_{\theta\theta} = r^2 p(r), \quad T_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta p(r).$$

- (b) Démontrez que dans cette situation, la composante rr de l'équation du champ d'Einstein conduit à

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r[r - 2m(r)]}, \quad (5.2)$$

où

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r')(r')^2 dr',$$

comme dans le cas de la métrique de Schwarzschild, avant que l'on concentre toute la masse à $r = 0$.

- (c) Démontrez que vu la symétrie sphérique de la métrique —et de $\rho(r)$ et $p(r)$ —, la seule composante non triviale de (5.1) ci-dessus est la composante $\nu \equiv r$, et que cette composante conduit à:

$$(\rho + p) \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{dp}{dr}$$

- (d) Combinez vos résultats en (b) et (c) pour obtenir une version relativiste de l'équation de l'équilibre hydrostatique:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)[m(r) + 4\pi r^3 p]}{r[r - 2m(r)]};$$

c'est la très fameuse équation de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. L'équilibre hydrostatique requiert que la pression augmente quand on plonge vers le centre de l'étoile, de manière à ce que le négatif de son gradient, pointant vers l'extérieur, puisse équilibrer la force gravitationnelle agissant sur un élément de masse, pointant vers le centre.

- (e) Approximons maintenant notre "étoile" comme une sphère de densité constante ρ_* et de rayon R , à l'extérieur de laquelle $\rho = p = 0$; montrez que la solution de l'équation de Tolman-Oppenheimer-Volkoff prend alors la forme:

$$p(r) = \rho_* \left[\frac{R(R - 2M)^{1/2} - (R^3 - 2Mr^2)^{1/2}}{(R^3 - 2Mr^2)^{1/2} - 3R(R - 2M)^{1/2}} \right].$$

Portez ce résultat en graphique pour $M = 1$ et $R = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ et 0.5 (unités géométriques!).

- (f) Sur la base de vos résultats en (e), démontrez qu'il existe une masse limite M_{\max} qui peut être "compressée" dans une sphère de densité constante et rayon R . Exprimez cette masse limite en fonction de R .
- (g) Maintenant, montrez à partir de (5.2) ci-dessus que la composante tt de la métrique prend la forme

$$g_{tt}(r) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2}, \quad r < R.$$

Utilisez ce résultat pour expliquer pourquoi l'équilibre hydrostatique devient impossible quand la masse M dépasse la masse limite trouvée en (f).

- (h) Et pour terminer, petit exercice de conversion des unités géométriques aux unités physique. Pour une étoile de rayon R à la masse critique déterminée en (f), calculez la densité critique correspondante en unités physiques (kg m^{-3}). Quel objet physique connu a une densité de cet ordre ?

Ce problème a l'air impressionnant à prime abord, mais je vous donne suffisamment de résultats intermédiaires pour vous guider dans la démarche. En particulier, vous pouvez faire les parties (f)–(h) même si vous n'avez pas pu compléter une ou plusieurs des parties précédentes. Donc, pas de panique, et respirez par le nez !

Question 6 [15 points; enfin du nouveau!]

Ayant compris, suite au problème précédent, sous quelles conditions une étoile massive peut former un trou noir, nous passons à l'étape suivante vers la formation d'un trou noir supermassif, soit la coalescence de deux trous noirs.

La Figure 1 à la page suivante est une visualisation réaliste (i.e., calculée selon la relativité générale) de deux trous noirs en rotation l'un autour de l'autre, quelques instants avant leur coalescence. Une version png à haute résolution peut être téléchargée à partir de la page web du cours, section "examen final".

Expliquez un maximum de caractéristiques de cette image, selon la matière couverte en classe. Pas de calculs formels requis, mais schémas et autres petits dessins fortement encouragés !

Le Professeur:

Le Répondant:

Le Directeur:

rice

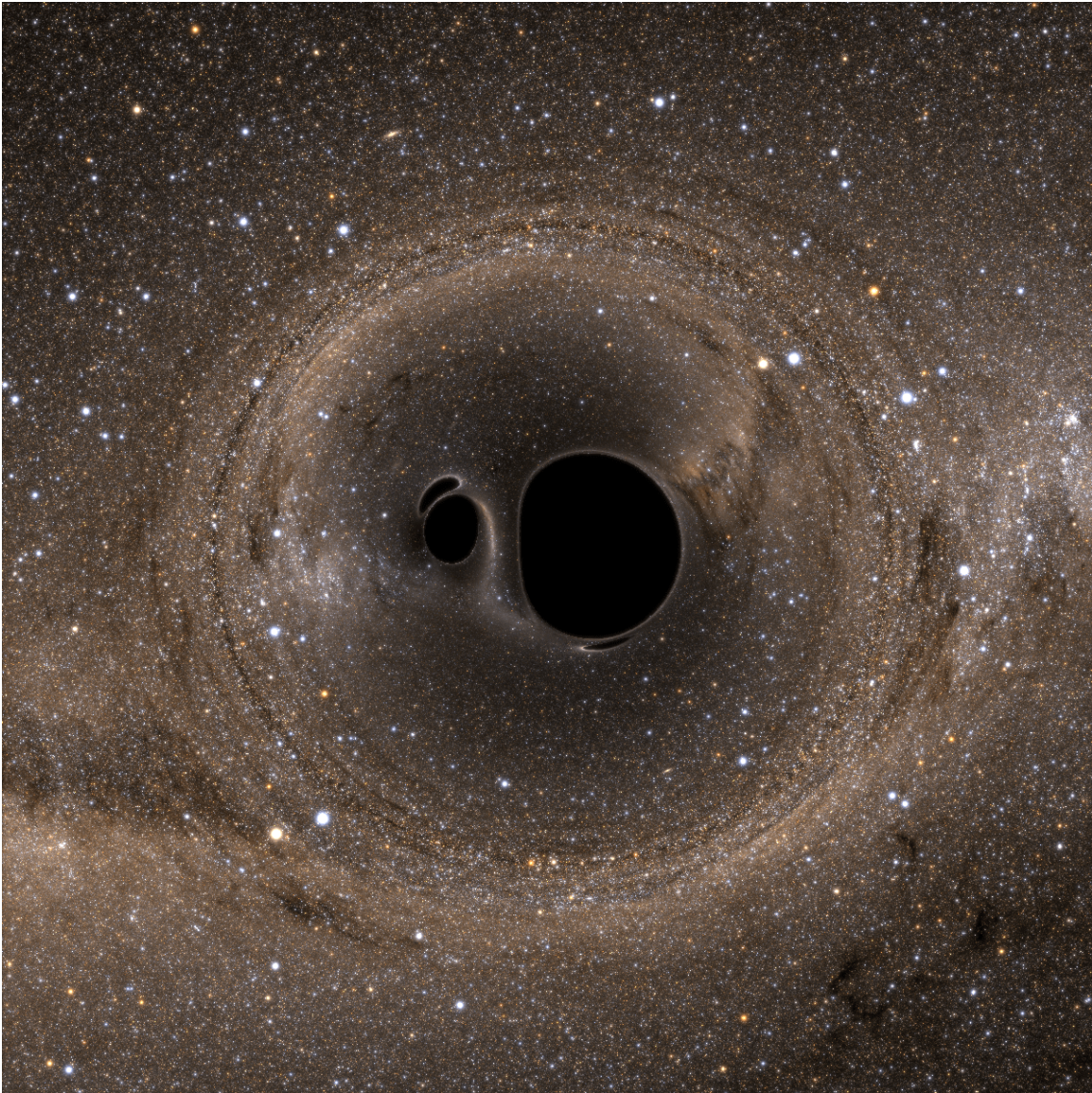


Figure 1: Visualisation réaliste (i.e., calculée selon la relativité générale) de deux trous noirs en rotation l'un autour de l'autre, peu de temps avant leur coalescence. Version à plus haute résolution disponible sur la page web du cours.