PHY 3070
RELATIVITÉ 2
EXAMEN FINAL

Professeur: Paul Charbonneau
Date de l'examen: 26 au 28 avril 2024
Durée de l'examen: 48+ heures

Examen à livre ouvert, toutes ressources permises, sauf ressources humaines autre que votre propre personne personnelle (et méfiez-vous particulièrement de ce que vous trouvez sur l'internet, particulièrement quand ça tombe sur la cosmologie ou les trous noirs!). En apposant votre signature ci-dessous, vous vous engagez sur l'honneur à respecter à la fois l'esprit et la lettre de cette directive. Remettez-moi un scan de la première page de ce questionnaire signé ici avec vos solutions.

Votre signature:

L'examen doit m'être remis en version pdf par courriel le dimanche 28 avril avant minuit (23:59). Il peut évidemment m'être remis plus tôt si vous le préférez.

Un examen de 48 heures allège grandement la pression temporelle associée à un examen classique. Par conséquent, je m'attends à des copies d'examen écrites de manière lisible, au propre, et détaillant posément la logique suivie, les approximations utilisées, etc. **Scans lisibles SVP !**

Bonne Chance! (...même si ce n'est pas vraiment une question de chance...)

Question 1 [15 points; problème 25, verbatim]

Un.e astronaute dans la navette spatiale, qu'on supposera sur une orbite circulaire d'altitude 320km, (rayon équatorial de la Terre: $R_\oplus = 6380\,\mathrm{km}$) positionne deux balles de ping-pong séparées d'une distance $\xi = 20\,\mathrm{cm}$ dans la direction radiale, au repos dans le repère de la navette. Combien d'orbites de la navette autour de la Terre s'écouleront avant que l'astronaute observe une variation de la distance de 1 cm ?

Ce problème est discuté dans Hartle du point de vue de la mécanique Newtonienne; approchez-le ici du point de vue de la déviation géodésique.

Question 2 [10 points; problème 33, verbatim]

Je vous casse les oreilles depuis le début du cours avec cette idée que les équations tensorielles véritables conservent leur structure sous changement de repère. Le but de ce problème est de vous faire vérifier ceci dans le contexte de l'équation tensorielle exprimant la conservation de l'énergie en espace courbe, soit l'équation (5.70):

$$\frac{\mathrm{D}T^{\beta\alpha}}{\mathrm{D}x^\alpha} = 0 \ .$$

Montrez que, sous changement général de coordonnées/repère $x \to x'$, la transformation de cette équation conduit bien à:

$$\frac{\mathrm{D}T^{\beta'\alpha'}}{\mathrm{D}x^{\alpha'}} = 0 \ .$$

où les primes sur les indices α et β indiquent des composantes évaluées dans le repère prime.

Question 3 [10 points; problème 35, verbatim]

Démontrez que si l'on substitue (6.38) dans (6.37) et que l'on pose (6.39), alors l'amplitude tensorielle $A_{\mu\nu}$ ne peut que prendre que la forme donnée par l'équation (6.40) des Notes de cours.

Question 4 [15 points; problème 41, verbatim]

On a vu que pour un fluide cosmologique dominé par la radiation, la pression (de radiation) obéit à l'équation d'état

$$p_r = \frac{1}{3}\rho_r \ .$$

Solutionnez les équations de Friedmann-Lemaitre (i.e., obtenez $a(t)$, analytiquement ou numériquement) pour un Univers ainsi dominé par la radiation en tout temps. L'expansion est-elle plus rapide ou plus lente que quand la matière domine ? Posez $\Lambda = 0$ mais considérez les trois cas $k = +1, 0, -1$.

Question 5 [20 points; problème 45, avec petit ajout]

Il s'agit ici de reprendre la dérivation de la métrique de Schwarzschild (débutant à l'éq. (8.8) des Notes de cours), mais en incluant cette fois la constante cosmologique dans l'équation du champ d'Einstein, soit sa forme donnée par l'éq. (5.106). Suggestion: remplacez le Λ dans (8.7) par un lambda minuscule ("λ") pour éviter toute malencontreuse confusion avec la constante cosmologique Λ dans (5.106) !

(a) Obtenez les équivalents des équations (8.12) et (8.17);

(b) Montrez à partir des expression en (a) que la forme modifiée de la métrique de Schwarzschild est alors:

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2) \ ,$$

(c) Calculez le rayon de Schwarzschild en fonction de M et Λ pour cette métrique modifiée par la présence de la constante cosmologique. Justifiez bien votre réponse.

(d) Pour une constante cosmologique de grandeur $\Lambda = 10^{-52}\,\mathrm{m}^{-2}$, de combien changerait le rayon de Schwarzschild d'un trou noir de masse $1M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$, par rapport au cas $\Lambda = 0$; croyez vous que ceci puisse être détectable ?

Figure 1: Visualisation réaliste (i.e., calculée selon la relativité générale) d'un trou de ver, vu d'une distance passablement plus grande que le "rayon" A de son "goulot".

Question 6 [30 points; enfin du nouveau!]

Ce problème vise à vous faire explorer quantitativement la déviation de la lumière par un trou de ver, à laquelle vous avez peut-être déjà réfléchi dans le cadre de l'expérience 2. Le point de départ est la métrique de trou de ver déjà utilisée dans quelques exercices de la première série:

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + (r^2 + A^2)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2)$$

Notez que le paramètre contrôlant la "largeur" du goulot du trou de ver est ici dénoté "A", afin d'éviter toute malencontreuse confusion avec le paramètre d'impact (b) qui fera son apparition dans pas long... On se limitera ici à des trajectoires contenues dans le plan équatorial.

(a) Dans le contexte de trajectoires lumineuses décrites par un paramètre affin σ que vous pouvez définir à votre guise, démontrez qu'une trajectoire photonique peut être décrite par

$$\frac{1}{b^2} = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 + W_{\text{eff}}(r) \ ,$$

avec b correspondant au paramètre d'impact. Calculez la forme du potentiel effectif $W_{\text{eff}}(r)$. Détaillez bien toutes les étapes de votre raisonnement et de votre démarche.

(b) Il existe une orbite photonique circulaire dans cette métrique. À quel rayon est-elle située ? Cette orbite est-elle stable ou instable ?

(c) Calculez la longueur physique (i.e., la circonférence) de l'orbite circulaire identifiée en (b).

(d) Modifiez le code Python du TP4 pour calculer des trajectoires de photons approchant le trou de ver le long de trajectoires parallèles à très grande distances (dans le style de la Fig. 1 dans l'énoncé du TP4). Posez $A = 2$ dans la métrique ci-dessus, et utilisez comme condition initiale des paramètres d'impact à grandes distances $b = [0., 0.3, 0.6, 0.9, 1.2, ..., 3.0]$ (i.e., incréments de 0.3 en b). Produisez un équivalent de la Fig. 1 du TP4.

(e) Identifiez lesquelles de vos trajectoires traversent de l'autre coté du trou ver, et lesquelles demeurent dans notre région de l'Univers. Comme toujours, justifiez bien votre raisonnement!

(f) La Figure 1 est une visualisation du trou de ver d'*Interstellar* (qui n'est **pas** décrit par la métrique ci-dessus, mais par une autre plus ou moins équivalente). Sur la base de vos calculs et raisonnement ci-dessus, expliquez le plus possible de caractéristiques visibles sur cette image (excluant la présence de l'*Endurance* près du centre du trou !). AU GROS MAXIMUM deux pages de texte, incluant petits dessins, le cas échéant .

Le Professeur:

Le Répondant: Pierre Bergeron

La Directrice: Nicole St-Louis