

PHY 3070
RELATIVITÉ 2
PROBLÈMES: SÉRIE 2

Distribué le: 10 février 2025

Chapitres couverts: 4 et 5

Problème 21

Calculez le volume d'une sphère de rayon r dans la métrique de Schwarzschild. Sur la base de ce calcul, calculez la "densité" d'un trou noir, soit sa masse divisée par son volume. Un trou noir de masse solaire ($M_{\odot} = 2 \times 10^{30}$ kg) est-il plus ou moins "dense" que le trou noir supermassif au centre de notre galaxie ($M \simeq 3 \times 10^6 M_{\odot}$)?

Problème 22

En classe nous avons calculé les orbites dans la métrique de Schwarzschild en nous limitant au plan équatorial du système. Dans ce problème et le suivant, il s'agit d'explorer un peu ce qui se passe quand on sort du plan équatorial. Vous avez déjà identifié en TP les neuf coefficients de connexion non-nuls indépendants pour la métrique de Schwarzschild (attention, ici $\Gamma_{r\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi r}^{\phi}$ compte pour un seul coefficient non-nul). Maintenant il s'agit de:

- (a) Calculez ces neuf coefficients;
 - (b) Développez les quatre composantes de l'équation géodésique en toute généralité; c'est-à-dire, hors du plan équatorial $\theta = \pi/2$.
 - (c) Vérifiez que votre système de quatre équations différentielles couplées se réduit bien aux équations (4.39)–(4.41) pour une géodésique contenue dans le plan équatorial.
-

Problème 23

À l'aide de certains des résultats obtenus au problème précédent, démontrer qu'une particule libre (aucune force extérieure sauf la "gravité" associée à la courbure de l'espace temps) lancée dans une direction quelconque dans le plan équatorial de la métrique de Schwarzschild ne peut pas sortir de ce plan. Démontrez/argumentez que ce résultat s'applique aussi aux photons.

Problème 24

Un astronaute dans la navette spatiale, qu'on supposera sur une orbite circulaire d'altitude 320km, (rayon équatorial de la Terre: $R_{\oplus} = 6380$ km) positionne deux balles de ping-pong séparées d'une distance $\xi = 20$ cm dans la direction radiale, au repos dans le repère de la navette. Combien d'orbites de la navette autour de la Terre s'écouleront avant que l'astronaute observe une variation de la distance de 1 cm ?

Ce problème est discuté dans Hartle du point de vue de la mécanique Newtonienne; approchez-le ici du point de vue de la déviation géodésique.

Problème 25

Le ralentissement temporel associé à la gravité est central à la trame dramatique du film **Interstellar**; et fournit aussi l'inspiration de ce petit problème.

Un vaisseau spatial est en orbite circulaire à distance $r_V = 100M$ (unités géométriques) d'un trou noir de masse intermédiaire $M/M_\odot = 10^3$, avec $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg la masse du soleil. Une navette transportant trois membres de l'équipage quitte le vaisseau et approche à une distance de $6M$ au dessus de l'horizon, se plaçant en orbite circulaire synchrone avec une planète orbitant elle-même le trou noir sur une orbite également circulaire du même rayon. Vous pouvez supposer que la géométrie de l'espace-temps est bien décrite par la métrique de Schwarzschild (voir éq. (4.2) des Notes).

- Supposant que la planète est sur l'orbite circulaire stable, calculer la valeur de ℓ correspondant à cette orbite, ainsi que la période orbitale de la planète autour du trou noir.
 - Calculez le ralentissement gravitationnel du temps (propre) pour l'équipage de la navette, par rapport au temps propre pour l'équipage du vaisseau-mère.
 - L'équipage de la navette passe 30 de leurs minutes (temps propre) à inspecter visuellement la mystérieuse planète. Pendant cet intervalle de temps (propre), de combien ont vieilli leur collègues dans le vaisseau orbitant à $r = r_V$? De combien ont vieilli les membres de leurs familles sur Terre, très très très loin du trou noir ?
-

Problème 26

On a vu (Figure 4.16) que la déviation angulaire d'un faisceau lumineux arrivant de l'infini et passant près d'une masse M tend vers l'infini à $M/b = 1/\sqrt{27}$. Il est possible de calculer cette valeur limite sans calculer l'intégrale; faites-le. Votre point de départ est tout de même l'équation (4.89).

Problème 27

Utilisez le code Python de la Figure 4.5, tel que modifié au TP4 (ou tout autre équivalent de votre cru) pour traiter les orbites de photons. Travaillant dans le plan équatorial de la métrique de Schwarzschild, calculez des orbites de photons lancés dans la direction azimutale (ϕ) à partir de distances $r/M = 2.8, 2.9, 2.99, 3.01, 3.1$ et 3.2 (rappel: le rayon de Schwarzschild est $r_S = 2M$ en unités géométriques).

Sur la base de vos résultats, quelle serait le diamètre apparent du "disque noir" que produirait un trou noir en avant plan d'un arrière plan lumineux ? Comment ceci se compare-t-il au rayon de Schwarzschild ? Y a-t-il paradoxe ici ?

Problème 28

Complétez les étapes mathématiques manquantes dans le passage de l'équation (5.39) à (5.43). ATTENTION: puisque la déviation ξ est purement due à la géométrie, alors $D\xi/Ds = 0$; mais

ceci n'implique PAS que $D^2\xi/D^2s = 0!$ Vous devez d'abord développer explicitement la dérivée seconde covariante, en ENSUITE invoquer $D\xi/Ds = 0$ pour simplifier l'expression.

Problème 29

Considérons de nouveau la métrique 2D d'une surface sphérique de rayon R :

$$dS^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Calculez les composantes non-nulles du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$, et ensuite le scalaire de Ricci $R = R^\mu{}_\mu$.

Problème 30

On considère un espace 2D décrit par la métrique:

$$ds^2 = y^2 dx^2 + x^2 dy^2 .$$

- Calculer la composante R_{xyxy} du tenseur de Riemann, la seule composante indépendante ici. Cet espace est-il courbe ?
- Répétez le calcul pour la métrique alternative suivante, et déterminez similairement si l'espace 2D correspondant est courbe ou non:

$$ds^2 = y dx^2 + x dy^2 .$$

Problème 31

Obtenez la forme alternative de l'équation du champ d'Einstein, soit la forme donnée par l'éq. (5.79):

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) .$$

Problème 32

On considère un espace-temps vide de matière-énergie ($T_{\mu\nu} = 0$) caractérisé par une métrique de la forme:

$$ds^2 = -A(x)dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 ,$$

où (x, y, z) sont les coordonnées spatiale cartésiennes habituelles, et $A(x)$ est une fonction quelconque de x , positive et différentiable.

- Montrez que la seule composante non-nulle du tenseur de Riemann est R_{xtxt} ;
- Calculez les composantes non-nulles du tenseur de Ricci pour cette même métrique;
- Déterminez quelle composante de l'équation du champ dans le vide n'est pas satisfaite trivialement (i.e., $0 = 0$);
- Solutionnez l'équation identifiée en (c);
- Donnez une interprétation physique à votre solution obtenue en (d).

Problème 33

Je vous casse les oreilles depuis le début du cours avec cette idée que les équations tensorielles véritables conservent leur structure sous changement de repère. Le but de ce problème est de vous faire vérifier ceci dans le contexte de l'équation tensorielle exprimant la conservation de l'énergie en espace courbe, soit l'équation (5.70):

$$\frac{DT^{\beta\alpha}}{Dx^\alpha} = 0 .$$

Montrez que, sous changement général de coordonnées/repère $x \rightarrow x'$, la transformation de cette équation conduit bien à:

$$\frac{DT^{\beta'\alpha'}}{Dx^{\alpha'}} = 0 .$$

où les primes sur les indices α et β indiquent des composantes évaluées dans le repère prime.
