PHY 3070
RELATIVITÉ 2
TRAVAUX PRATIQUES 5: jeudi 21 mars 2024

Le TP de cette semaine développe la solution à l'équation de la déviation géodésique pour un observateur chutant pieds les premiers dans un trou noir décrit par la métrique de Schwarzschild, le long d'une trajectoire radiale, soit la situation décrite à la §5.1.3 des notes de cours (qui devrait être relue avant de débuter ce TP!). Essentiellement, il s'agit de faire au long le passage de l'équation (5.38) à sa solution dans un repère en chute libre, soit l'éq. (5.47).

1. Développement de l'équation géodésique

En guise de préliminaire, développez les composantes t et r de l'équation de la déviation géodésique (5.38), directement dans le système de coordonnées (t, r, θ, ϕ) dans lequel est exprimé la métrique de Schwarzschild. Pas besoin de calculer explicitement les coefficients de connexion ici, il faut seulement conserver ceux qui apparaissent dans (5.38) pour une trajectoire radiale et un vecteur de déviation ξ également orienté dans la direction radiale. La procédure pour cette étape 1 est la suivante:

(a) Regroupez vous en équipes de 4;

(b) Subdivisez chaque équipe en sous-équipe de 2, une pour la composante t de (5.38), l'autre pour la composante r;

(c) Un.e membre de chaque sous-équipe développe le terme en dérivée covariante seconde dans (5.38), l'autre le second terme impliquant le tenseur de Riemann;

(d) Chaque équipe assemble la forme finale des deux composantes de l'équation de la déviation géodésique, et rapporte ses résultats au tableau, pour comparaison/discussion/correction.

Vous devriez maintenant apprécier le défi que poserait la solution de ce système d'équations différentielles couplées et nonlinéaires; d'où l'attrait de passer dans un repère en chute libre pour faire le calcul.

2. Passage à un repère en chute libre

On a vu en classe que dans un repère en chute libre le long d'une trajectoire radiale, le problème se réduit à solutionner la composante-r de l'équation de la déviation géodésique dans ce repère, qui prend alors une forme particulièrement simple, soit l'éq. (5.46) dans les notes de cours. Comparez ça au résultat obtenu en partie 1 de ce TP !

La première étape est d'établir une transformation de coordonnées qui rendra la métrique de Schwarzschild orthonormale, dans le sens que $\mathbf{e}_{\hat{\alpha}} \cdot \mathbf{e}_{\hat{\beta}} = 1$ si $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, et 0 sinon; on se rappelera que la métrique de Schwarzschild est déjà orthogonale (diagonale), mais pas orthonormale. La seconde étape est d'établir la forme de la transformation (plus précisément, son Jacobien) permettant de passer du système de coordonnées de Schwarzschild à sa version orthonormale.

Ulrich mènera le bal au tableau pour cette étape.

3. Calcul de la composante R^r_{trt} du tenseur de Riemann

La suite consiste à calculer la seule composante R^r_{trt} du tenseur de Riemann, et d'utiliser le résultat de la seconde partie pour transformer cette composante dans le système de coordonnées orthonormales dans lequel (4.46) doit être solutionné; ce qui devrait vous conduire directement à (5.47) dans les Notes de cours.

Ulrich mènera encore le bal au tableau pour cette étape.

Finalement, il s'agit de répéter le calcul en petits groupes, pour un vecteur de déviation orienté dans la direction ϕ, toujours pour une chute radiale. Notez bien, la transformation de coordonnées (et son Jacobien) obtenue à l'étape 2 est toujours valide, mais cette fois c'est la composante $R^\phi_{t\phi t}$ que vous devez calculer et transformer dans le repère orthonormal.