PHY 3070
RELATIVITÉ 2
PROBLÈMES: SÉRIE 3

Distribué le: 9 mars 2023
Chapitres couverts: 6 à 8

Problème 35

Un peu de jonglerie tensorielle dans le contexte des ondes de gravité:

(a) Démontrez que la substitution de l'équation (6.33) dans (6.32) conduit bien à la contrainte

$$k_\alpha k^\alpha = 0 \ .$$

(b) Démontrez que la substitution de l'équation (6.33) dans (6.12) conduit bien à (6.37).
(c) Démontrez que la substitution des équations (6.1) et (6.27) dans (6.28) conduit bien à (6.29).

Problème 36

Travaillant dans le contexte de la métrique de Robertson-Walker-Friedmann, démontrez que la trajectoire d'un observateur comobile (coordonnées spatiales fixes) satisfait trivialement (i.e., $0 = 0$) l'équation géodésique, quelle que soit la courbure ($k = 0$ ou ± 1).

Problème 37

Encore un peu de jonglerie tensorielle:

(a) Suivant la procédure générale introduite dans les Notes de cours pour le calcul de la composante R_{00} du tenseur de Ricci dans la métrique de Robertson-Walker-Friedmann, calculez les composantes R_{11} et R_{22} de ce même tenseur.

(b) ...et la suite logique: calculez les composantes G_{11} et G_{22} du tenseur d'Einstein.

(c) Reprenez le calcul en (b), mais cette fois en utilisant le protocole décrit à l'annexe A des Notes de cours; pas mal plus rapide n'est-ce-pas !

Problème 38

On considère un Univers de courbure positive tel que décrit par la métrique de Robertson-Walker-Friedmann avec $k = +1$, avec matière non-relativiste et sans radiation, et incluant une densité d'énergie du vide associée à une constante cosmologique $\Lambda \neq 0$.

(a) Démontrez que pour une valeur donnée de Λ, il existe une valeur de la densité ρ pour laquelle le facteur d'échelle demeure constant dans le temps.

(b) Comment l'existence de Λ affecte-t-elle le volume de cet Univers ?

(c) Calculez l'évolution temporelle du facteur d'échelle $a(t)$ si la densité diffère très légèrement de la valeur trouvée en (a) (soit plus grande, soit plus petite). Qu'en concluez vous par rapport à la stabilité de l'Univers statique d'Einstein ?

Cet Univers statique d'Einstein a été caractérisé par son illustre auteur comme la plus grande gaffe de sa vie...

Problème 39

On avait montré, dans notre étude des modèles cosmologiques basés sur la métrique Robertson-Walker-Friedmann avec $k \neq 0$, que sous la définition $a_{\max} = 8\pi\rho_0 a_0^3/3$ notre première équation de Friedmann prenait la forme:

$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{a_{\max}}{a} \mp 1 \ , \qquad k \pm 1 \ .$$

(a) Le cas $k = +1$: montrez que le changement de variable

$$a(\eta) = a_{\max} \sin^2(\eta/2)$$

conduit bien aux équations (7.69)–(7.70) des notes de cours.

(b) Le cas $k = -1$: montrez que le changement de variable

$$a(\eta) = a_{\max} \sinh^2(\eta/2)$$

conduit bien aux équations (7.74)–(7.75) des notes de cours.

Problème 40

Les observations astronomiques permettent d'évaluer les densités de masse (baryonique visible) et de radiation à l'époque actuelle aux valeurs:

$$\rho(t_0) = 10^{-31}\,\mathrm{g\,cm^{-3}} \ ,$$

$$\rho_r(t_0) = 10^{-34}\,\mathrm{g\,cm^{-3}} \ ,$$

(a) Calculez le facteur d'échelle pour lequel $\rho = \rho_r$.

(b) Sachant que la température actuelle caractérisant la densité de radiation cosmologique est de 2.275 K, quelle était la température à l'époque où $\rho = \rho_r$?

(c) Dans le cadre de l'Univers plat d'Einstein-de-Sitter ($k = p = \Lambda = 0$), combien de temps après le Big Bang ce stade évolutif a-t-il été atteint ?

Problème 41

On a vu que pour un fluide cosmologique dominé par la radiation, la pression (de radiation) obéit à l'équation d'état

$$p_r = \frac{1}{3}\rho_r \ .$$

Solutionnez les équations de Friedmann-Lemaitre (i.e., obtenez $a(t)$) pour un Univers ainsi dominé par la radiation en tout temps. L'expansion est-elle plus rapide ou plus lente que quand la matière domine ? Posez $\Lambda = 0$ mais considérez les trois cas $k = +1, 0, -1$.

Problème 42

L'Univers version Willem de Sitter (1872–1934): Il s'agit ici d'un Univers dominé par la densité d'énergie du vide, tel que capturé par une constante cosmologique $\Lambda > 0$, et ayant $\rho = p = 0$.

(a) Montrez que pour $k = 0$ ou $k = -1$, quand t devient très grand le facteur d'échelle $a(t)$ croit exponentiellement avec t.

(b) Montrez que pour $k = +1$, deux types d'évolution sont possibles (expansion suivie d'une contraction, ou expansion éternelle), dépendant de la grandeur de Λ.

(c) A-t-on toujours un état initial singulier du genre Big Bang dans ce type de modèles cosmologiques ?

Problème 43

On considère une séquence de modèles cosmologiques pour des Univers plats ($k = 0$) sans radiation et à la densité critique ($\Omega_R = 0$, $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1.0$).

(a) Calculez une séquence de modèles avec Ω_Λ allant de zéro à 1 (tout en respectant $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$), coincidant tous à $(t, a) = (1, 1)$, un peu comme sur la Figure 7.10 des Notes de cours.

(b) Portez en graphique l'âge de l'Univers (en milliard d'années) versus Ω_Λ;

(c) Allez chercher sur l'internet (ou ailleurs) l'âge de la plus vieille étoile connue;

(d) Quelle contrainte vos résultats en (a)–(c) posent-ils sur la magnitude de la constante cosmologique (en unités physiques SVP!) si l'Univers est bel et bien plat ? Selon vous, quelles sont les principales sources d'incertitude dans un tel calcul ?

Problème 44

Considérons un observateur chûtant radialement dans un trou noir de Schwarzschild à partir d'une position $r_0 \gg 2M$.

(a) Démontrez que l'intervalle de temps propre $\Delta\tau$ requis pour chuter de la position r_0 jusqu'à la singularité centrale est donné par:

$$\Delta\tau = \frac{\pi}{2\sqrt{2M}} r_0^{3/2}$$

(b) Démontrez que l'intervalle de temps propre $\delta\tau$ requis pour passer de l'horizon ($r = 2M$) à la singularité centrale est donné par

$$\frac{\delta\tau}{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{r_0}{M} i\right)^{3/2} \arctan\left(\sqrt{\frac{2M}{r_0 - 2M}}\right) - \frac{\sqrt{r_0(r_0 - 2M)}}{M}$$

(c) Démontrez que même avec une puissance de propulsion illimitée pour tenter de freiner la chûte, l'intervalle de temps propre maximal requis pour passer de l'horizon à la singularité centrale est donné par:

$$\Delta\tau = \pi M \ .$$

Problème 45

La détection des ondes gravitationelles émises lors de la coalescence de deux trous noirs offre un laboratoire particulièrement intéressant pour l'étude de la gravité en régimes de très grande courbure. Ce petit problème vise à vous faire explorer (quantitativement) la possibilité (ou pas) de mesurer la constante cosmologique dans un tel contexte.

Il s'agit tout d'abord de reprendre la dérivation de la métrique de Schwarzschild (débutant à l'éq. (8.8) des Notes de cours), mais en incluant cette fois la constante cosmologique dans l'équation du champ d'Einstein, soit sa forme donnée par l'éq. (5.106). Suggestion: remplacez le Λ dans (8.7) par un lambda minuscule ("λ") pour éviter toute malencontreuse confusion avec la constante cosmologique Λ dans (5.106) !

(a) Obtenez les équivalents des équations (8.12) et (8.17), et montrez qu'à partir de ces expressions la forme finale de la métrique de Schwarzschild devient:

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2) \ ,$$

plutôt que (8.21).

(b) Calculez les coefficients de connexion non-nuls pour la métrique en (a)

(c) Placez vous dans le plan équatorial ($\theta = \pi/2$) et développez les composantes t, r et ϕ des équations géodésiques. Relire posément la section 4.3.5 des Notes de cours pourrait être une bonne idée avant de commencer.

(d) Modifiez maintenant le code Python de la Figure 4.5 en y introduisant la nouvelle forme de vos équations différentielles obtenues en (c). Conservant les valeurs $\ell = 4.3$ et $e = 0.9716$ déjà fixée dans le code de la Fig. 4.5, assurez vous tout d'abord qu'avec $\Lambda = 0$ vous retrouvez bien l'orbite de la Figure 4.6.

(e) Conservant les mêmes valeurs de ℓ et e pour la suite, il s'agit maintenant de calculer une série d'orbites avec des valeurs de Λ non-nulles. Déterminez à partir de quelle valeur de Lambda la précession de l'orbite (avancée angulaire du périastre d'un périastre au suivant, comme indiqué sur la Figure 4.6) diffère par plus d'un degré de l'orbite de référence pour $\Lambda = 0$.

(f) En supposant que ce seuil de 1 degré dans la précession du périastre soit la limite détectable sur la base de la forme du train d'ondes gravitationnelles émis lors de la coalescence (voir Fig, 6.3 au besoin), croyez vous que cette approche offre une contrainte utile sur la grandeur et/ou le signe de la constante cosmologique ? Pourquoi ?

Problème 46

Ce problème vise à approfondir quelques aspects des orbites de particules massives autour de trous noirs en rotation.

(a) Complétez les étapes mathématiques manquantes pour passer de (8.64)–(8.65) à (8.66)–(8.67), et pour la suite jusqu'à (8.69)–(8.70).

(b) Existe-t-il des orbites circulaires stables et/ou instables ici ? Sous quelles conditions (valeur et signe de ℓ, de e, etc.) ? Ces orbites survivent-elles dans la limite $a/M \to 1$?

Problème 47

Nous avons vu à la §8.4.7 des Notes de cours comment le mécanisme dit de Penrose permet d'extraire de l'énergie d'un trou noir en rotation. Il s'avère que les trajectoires d'énergie négative sont toutes rétrogrades; par conséquent, leur capture extrait également du moment cinétique du trou noir, réduisant inexorablement J, donc le volume de l'ergosphère, dont l'existence est essentielle au mécanisme de Penrose. L'extraction d'énergie ne peut donc seulement se poursuivre jusqu'à ce que $J = 0$. Ceci pose une limite fondamentale à la quantité d'énergie qui peut être extraite d'un trou noir, indépendamment de tout aspect technologique du processus (viz. Fig. 8.10 des Notes). Il s'agit ici de calculer cette limite.

Il s'avère qu'un théorème, dû à Stephen Hawkins (1942–2018), permet de calculer assez facilement la limite en question. Ledit théorème stipule qu'un trou noir absorbant de la masse-énergie de son “environnement” (soit le volume extérieur à son horizon) ne peut, ce faisant, qu'augmenter la surface de son horizon, et jamais la diminuer (il existe en fait ici une analogie profonde avec l'entropie). Allons-y par étapes:

(a) Calculez la surface de l'horizon d'un trou noir de masse M et moment cinétique J.

(b) Calculez la masse d'un trou noir de Schwarzschild (sans rotation) ayant la même surface d'horizon que pour votre trou noir de Kerr en (a), si ce dernier est à la limite de rotation maximale $J = M^2$.

(c) Invoquez $E = mc^2$ (Caramba!) et vos résultats en (a) et (b) pour calculer cette fameuse fraction de l'énergie de masse du trou noir initial en rotation rapide qui peut être extraite par tout mécanisme de type Penrose.

Problème 48

Tel que promis à la §8.5 discutant le mécanisme de Hawkins:

(a) Calculez la quantité d'énergie (en Joule) irradiée par un trou noir en évaporation, dans la dernière seconde du processus.

(b) Ensuite, allez fouiner sur le web (et/ou à la bibliothèque de physique) et déterrez de l'information sur la quantité (estimée) d'énergie émise par les les soit-disant sursauts gamma courts (“short gamma-ray bursts”). L'évaporation de trous noirs primordiaux est-elle un mécanisme viable pouvant être à l'origine de ce phénomène ? Exercez votre pensée critique, justifiez bien votre raisonnement, et incluez les références aux sites/ouvrages que vous avez consultés.

(c) Un trou noir en évaporation voit la surface de son horizon diminuer inexorablement, ce qui semble en contradiction avec le théorème de Hawkins décrit au problème précédent. Comment peut-on résoudre cette contradiction (apparente) ?