

PHY 3070
RELATIVITÉ 2
PROBLÈMES: SÉRIE 2

Distribué le: 7 février 2023

Chapitres couverts: 4 et 5

Problème 21

Évaluez la précession du périastre de l'orbite tracée à la Figure 4.6 ($\ell = 4.3M$, $e = 0.9716$), par calcul numérique de l'intégrale au membre de droite de l'équation (4.85). Il sera judicieux de bien étudier le code Python de la Figure 4.15 avant de vous lancer là-dedans, et de bien penser à comment l'adapter à une intégrale qui diverge à ses **deux** bornes. Votre première étape est évidemment de déterminer les rayons du périastre et de l'apoastre pour les paramètres de cette orbite, ce qui demande de solutionner le problème de recherche de racines décrit par l'équation (4.86).

Problème 22

Complétez les étapes mathématiques manquantes dans les passages de l'équation (5.39) à (5.43). **ATTENTION:** puisque la déviation ξ est purement due à la géométrie, alors $D\xi/Ds = 0$; mais ceci n'implique PAS que $D^2\xi/D^2s = 0$! Vous devez d'abord développer explicitement la dérivée seconde covariante, en ENSUITE invoquer $D\xi/Ds = 0$ pour simplifier l'expression.

Problème 23

En classe nous avons calculé les orbites dans la métrique de Schwarzschild en nous limitant au plan équatorial du système. Dans ce problème et le suivant, il s'agit d'explorer un peu ce qui se passe quand on sort du plan équatorial. Vous avez déjà identifié en TP les neuf coefficients de connexion non-nuls indépendants pour la métrique de Schwarzschild (attention, ici $\Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi$ compte pour un seul coefficient non-nul). Maintenant il s'agit de:

- (a) Calculez ces neuf coefficients;
 - (b) Développez les quatre composantes de l'équation géodésique en toute généralité; c'est-à-dire, hors du plan équatorial $\theta = \pi/2$.
 - (c) Vérifiez que votre système de quatre équations différentielles couplées se réduit bien aux équations (4.39)–(4.41) pour une géodésique contenue dans le plan équatorial.
-

Problème 24

À l'aide de certains des résultats obtenus au problème précédent, démontrer qu'une particule libre (aucune force extérieure sauf la "gravité" associée à la courbure de l'espace temps) lancée dans

une direction quelconque dans le plan équatorial de la métrique de Schwarzschild ne peut pas sortir de ce plan. Démontrez/argumentez que ce résultat s'applique aussi aux photons.

Problème 25

Un astronaute dans la navette spatiale, qu'on supposera sur une orbite circulaire d'altitude 320km, (rayon équatorial de la Terre: $R_{\oplus} = 6380$ km) positionne deux balles de ping-pong séparées d'une distance $\xi = 20$ cm dans la direction radiale, au repos dans le repère de la navette. Combien d'orbites de la navette autour de la Terre s'écouleront avant que l'astronaute observe une variation de la distance de 1 cm ?

Ce problème est discuté dans Hartle du point de vue de la mécanique Newtonienne; approchez-le ici du point de vue de la déviation géodésique.

Problème 26

Le ralentissement temporel associé à la gravité est central à la trame dramatique du film **Interstellar**; et fournit aussi l'inspiration de ce petit problème.

Un vaisseau spatial est en orbite circulaire à distance $r_V = 100M$ (unités géométriques) d'un trou noir de masse intermédiaire $M/M_{\odot} = 10^3$, avec $M_{\odot} = 2 \times 10^{30}$ kg la masse du soleil. Une navette transportant trois membres de l'équipage quitte le vaisseau et approche à une distance de $6M$ au dessus de l'horizon, se plaçant en orbite circulaire synchrone avec une planète orbitant elle-même le trou noir sur une orbite également circulaire du même rayon. Vous pouvez supposer que la géométrie de l'espace-temps est bien décrite par la métrique de Schwarzschild (voir éq. (4.2) des Notes).

- Supposant que la planète est sur l'orbite circulaire stable, calculer la valeur de ℓ correspondant à cette orbite, ainsi que la période orbitale de la planète autour du trou noir.
 - Calculez le ralentissement gravitationnel du temps (propre) pour l'équipage de la navette, par rapport au temps propre pour l'équipage du vaisseau-mère.
 - L'équipage de la navette passe 30 de leurs minutes (temps propre) à inspecter visuellement la mystérieuse planète. Pendant cet intervalle de temps (propre), de combien ont vieilli leur collègues dans le vaisseau orbitant à $r = r_V$? De combien ont vieilli les membres de leurs familles sur Terre, très très très loin du trou noir ?
-

Problème 27

On a vu (Figure 4.15) que la déviation angulaire d'un faisceau lumineux arrivant de l'infini et passant près d'une masse M tend vers l'infini à $M/b = 1/\sqrt{27}$. Il est possible de calculer cette valeur limite sans calculer l'intégrale; faites-le. Votre point de départ est tout de même l'équation (4.89).

Problème 28

Utilisez le code Python de la Figure 4.4, tel que modifié au TP5 (ou tout autre équivalent de votre cru) pour traiter les orbites de photons. Travaillant dans le plan équatorial de la métrique

de Schwarzschild, calculez des orbites de photons lancés dans la direction azimutale (ϕ) à partir de distances $r/M = 2.8, 2.9, 2.99, 3.01, 3.1$ et 3.2 (rappel: le rayon de Schwarzschild est $r_S = 2M$ en unités géométriques).

Sur la base de vos résultats, quelle serait le diamètre apparent du “disque noir” que produirait un trou noir en avant plan d’un arrière plan lumineux ? Comment ceci se compare-t-il au rayon de Schwarzschild ? Y a-t-il paradoxe ici ?

Problème 29

Considérons de nouveau la métrique 2D d’une surface sphérique de rayon R :

$$dS^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Calculez les composantes non-nulles du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$, et ensuite le scalaire de Ricci $R = R^\mu{}_\mu$.

Problème 30

On considère un espace 2D décrit par la métrique:

$$ds^2 = y^2 dx^2 + x^2 dy^2 .$$

- Calculer la composante R_{xyxy} du tenseur de Riemann, la seule composante indépendante ici. Cet espace est-il courbe ?
- Répétez le calcul pour la métrique alternative suivante, et déterminez similairement si l’espace 2D correspondant est courbe ou non:

$$ds^2 = y dx^2 + x dy^2 .$$

Problème 31

Obtenez la forme alternative de l’équation du champ d’Einstein, soit la forme donnée par l’éq. (5.79):

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) .$$

Problème 32

On considère un espace-temps vide de matière-énergie ($T_{\mu\nu} = 0$) caractérisé par une métrique de la forme:

$$ds^2 = -A(x)dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 ,$$

où (x, y, z) sont les coordonnées spatiale cartésiennes habituelles, et $A(x)$ est une fonction quelconque de x , positive et différentiable.

- (a) Montrez que la seule composante non-nulle du tenseur de Riemann est R_{xtxt} ;
 - (b) Calculez les composantes non-nulles du tenseur de Ricci pour cette même métrique;
 - (c) Déterminez quelle composante de l'équation du champ dans le vide n'est pas satisfaite trivialement (i.e., $0 = 0$);
 - (d) Solutionnez l'équation identifiée en (c);
 - (e) Donnez une interprétation physique à votre solution obtenue en (d).
-

Problème 33

Je vous casse les oreilles depuis le début du cours avec cette idée que les équations tensorielles véritables conservent leur structure sous changement de repère. Le but de ce problème est de vous faire vérifier ceci dans le contexte de l'équation tensorielle exprimant la conservation de l'énergie en espace courbe, soit l'équation (5.70):

$$\frac{DT^{\beta\alpha}}{Dx^\alpha} = 0 .$$

Montrez que, sous changement général de coordonnées/repère $x \rightarrow x'$, la transformation de cette équation conduit bien à:

$$\frac{DT^{\beta'\alpha'}}{Dx^{\alpha'}} = 0 .$$

où les primes sur les indices α et β indiquent des composantes évaluées dans le repère prime.

Problème 34

Le 10 avril 2019 la NASA présentait, dans la cadre d'une conférence de presse très médiatisée, l'image reproduite à la Figure 1 ci-dessous, soit celle du trou noir supermassif au centre de la galaxie elliptique M87, située à 55 million d'années-lumière de la Terre. Il s'agit ici d'une image de synthèse produite par un réseau de radiotélescopes éparpillés un peu partout sur Terre. L'échelle de couleur code l'intensité de la radiation électromagnétique mesurée dans le domaine radio. Le but de ce problème est de vous faire explorer l'origine de cet anneau, et d'en déduire une approximation pour la masse du trou noir central.

L'anneau lumineux est dû principalement à un effet de lentille gravitationnelle, concentrant l'émission lumineuse du gaz chaud et diffus entourant le trou noir. On considérera ici une version géométriquement simplifiée, où on se limitera à calculer l'effet de lentille gravitationnelle sur un arrière-plan de luminosité constante, et ce dans la métrique de Schwarzschild. Le calcul peut donc être effectué en deux dimensions spatiales, un peu comme pour les calculs présentés à la Figure 4.9 des Notes de cours. Se référant à cette Figure, on supposera que l'arrière plan lumineux est le long du bord vertical gauche du diagramme, et l'observateur est situé à grande distance à droite. Vu l'immense distance à M87, on supposera que les rayons lumineux arrivent à l'observateur sur des trajectoires qui sont toutes parallèles.

- (a) Utilisez les invariants du mouvement pour calculer l'équivalent des éqs. (4.29)–(4.31) pour une trajectoire de photon
- (b) Produisez un équivalent (approximatif) de la Figure 4.9, mais où les photons originent de positions réparties uniformément le long de la ligne $x = +100$, pour $0 \leq y \leq +50$ avec



Figure 1: Image de synthèse radio du trou noir supermassif au centre de la galaxie M87. Image téléchargée de <https://www.jpl.nasa.gov/news/news.php?feature=7372>.

intervalle $\Delta y = 0.5$, se déplaçant (initialement) horizontalement vers la gauche (direction négative en x). Notez qu'on est ici en train de calculer la trajectoire des photons dans le sens inverse de leur propagation. Stoppez la trajectoires de vos photons à $x = -25$, $y = -50$, où quand ils tombent sous l'horizon (dépendant de la forme de la trajectoire). Vous pouvez poser $e = 1$, et notez bien que pour une telle condition initiale le paramètre d'impact b est égal à la position initiale en y de votre photon. Et, oui, ca ressemble énormément à ce que vous avez fait au TP5 !

- (c) Pour chaque paire de trajectoires adjacentes en y , calculez l'ouverture angulaire $\delta\alpha$ une fois passé le trou noir. La Figure 2 illustre l'idée, pour une seule paire de trajectoires. Évidemment, vous ne calculez ceci que pour les trajectoires de photons n'étant pas capturés par le trou noir.
- (d) Portez en graphique $\delta\alpha$ versus la moyenne (y^*) des positions initiales en y pour chaque paire de trajectoires. L'ouverture $\delta\alpha$ mesure la focalisation géométrique des faisceaux lumineux provenant de la gauche, et détermine donc l'intensité lumineuse que mesurera un observateur éloigné à cette position en y^* (équivalent au segment radial entre cette position et le centre du trou noir, vu la symétrie axiale du système) sur le plan du ciel.
- (e) Sachant que le rayon de l'anneau au pic en intensité sur la Figure 1 est de $\simeq 60 \times 10^9$ km, à partir de votre résultat en (d) déduisez la masse du trou noir supermassif au centre de M87.
- (f) Allez fouiner sur l'Internet pur trouver la valeur "officielle" de la masse du trou noir supermassif au centre de M87. Votre réponse en (e) n'y sera pas identique. Pouvez vous imaginer pourquoi ?

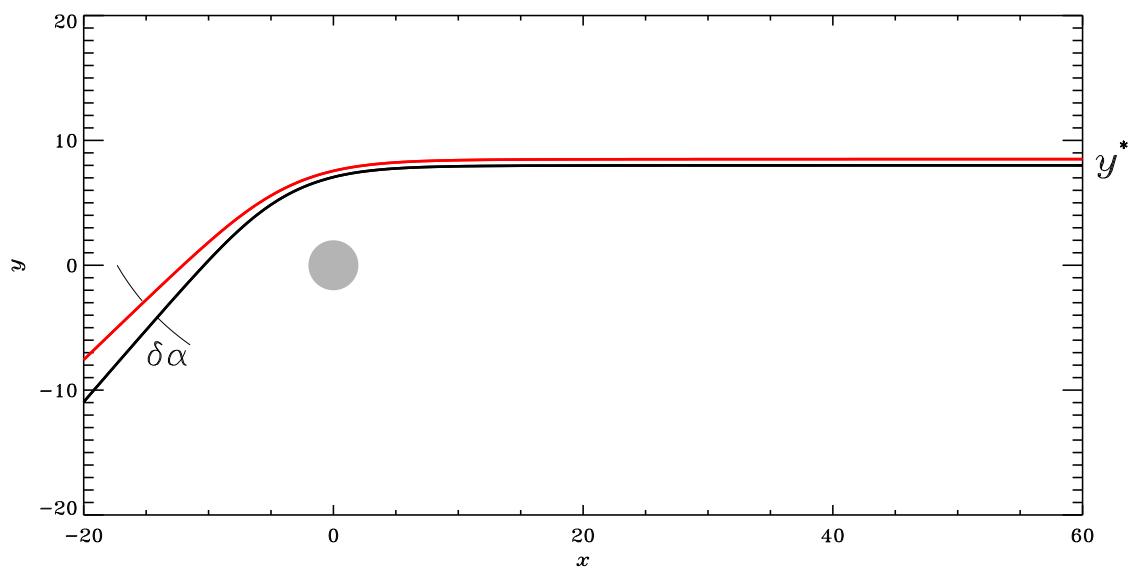


Figure 2: Déviation de deux faisceaux lumineux initialement parallèles par un trou noir. Pour un arrière-plan de luminosité homogène et isotrope, l'amplification de l'intensité lumineuse à la position y^* par focalisation géométrique est proportionnelle à l'ouverture angulaire $\delta\alpha$. L'axe- x serait ici perpendiculaire au plan de l'image sur la Figure 1.